



Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Ecuación Lineal de Korteweg-de
Vries sobre una semirrecta

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Edgar Alejandro Antonio Martínez

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Jorge Sánchez Ortíz

Dr. Martin P. Árciga Alejandre

Noviembre de 2018.



Dedicatorias

Dedico esta tesis a:

Mis padres y hermanos con motivo de honrarlos por el esfuerzo y sacrificio que han hecho a lo largo de este proyecto para que sea posible.

A mis asesores; Dr. Jorge Sánchez Ortiz, Dr. Martín P. Árciga y demás profesores, por la confianza, las enseñanzas y conocimientos que me transmitieron.

A mis colegas y compañeros de aula, por la amistad y el apoyo que me brindaron a lo largo de mi estadía en la maestría.

Agradecimientos

A mis padres, por todos los sacrificios que hicieron para darme la oportunidad de estudiar, por todas sus valiosas enseñanzas y consejos, como también la disciplina que me forjaron.

A mis hermanos, por darme apoyo incondicional en diversos aspectos de mi vida académica.

A mis amigos y compañeros, por sus aportaciones y apoyo que me brindaron a lo largo de mis estudios de maestría. En especial, a Eduard A. García Murcia por la disposición, la paciencia y la ayuda que me otorgó para mi mejoría académica.

A mis asesores por alentarme a trabajar con ellos y dejarme desempeñar de forma amena.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de posgrado.

Resumen

En este trabajo de tesis consideramos un problema de valor inicial y de frontera de tipo Cauchy para la ecuación lineal de Korteweg-de Vries sobre una semirrecta. En donde, encontramos una representación integral de la solución en base a dos métodos distintos; en el primero, proponemos una transformada de tipo Laplace; y en el segundo, determinamos las ecuaciones de Lax asociadas al problema y, posteriormente, resolvemos un problema de Riemman-Hilbert simple.

Índice general

Introducción	1
1. Formas Diferenciales y Teorema de Stokes	4
1.1. Campos Vectoriales	5
1.2. El Bracket de un Campo Vectorial	6
1.3. Formas Diferenciales	8
1.3.1. Producto Exterior	9
1.3.2. Derivada Exterior	10
1.3.3. Integrales y el Teorema de Stokes	12
1.3.4. Teorema de Stokes	14
2. Problema de Riemann Hilbert	16
2.1. Espacios de Banach y Hilbert	16
2.2. Problema de Riemann Hilbert	18
2.2.1. Integrales de Cauchy	20
2.2.2. Lema de Plemelj	21
3. Ecuación Lineal de KdV sobre una Semirecta	23
3.1. El Método Unificado	23
3.2. Pares de Lax	25
3.3. Problema de Riemann Hilbert	28
3.4. Invarianza	31

3.5. Dominio de Convergencia	32
3.6. Lema de Jordan	34
3.7. Funciones de Green	36
3.8. Parametrización de las Funciones de Green	37
3.9. Análisis Numérico	38
Conclusión	41
Bibliografía	42

Índice de figuras

3.1. Dominio de convergencia de $\hat{q}(v_1, t)$	31
3.2. Dominio de convergencia de $\hat{q}(v_2, t)$	31
3.3. Regiones donde μ_i es seccionalmente analítica.	33
3.4. Región $\tilde{\Omega}$	33
3.5. Dominio de convergencia de (3.22) y (3.5).	34
3.6. Dominio de convergencia de (3.27).	34
3.7. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$	39
3.8. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1.5$ y tiempo $t = 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 1.7$	39
3.9. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 1.7$	39
3.10. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 0.5$ y tiempo $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$	39
3.11. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{8}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$	40
3.12. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{4}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$	40
3.13. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{3}{8}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$	40
3.14. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$	40
3.15. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0.5$	40
3.16. Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{64}$ y tiempo $t = 0.5$	40

Introducción

En 1834, el ingeniero escocés John Scott-Russell, durante un paseo a caballo por los alrededores de Edimburgo, observó cómo una barcaza era remolcada a lo largo de un estrecho canal por dos caballos que tiraban desde tierra. Mientras Russell contemplaba el espectáculo, la barcaza se detuvo repentinamente, levantando una ola de agua en la proa de la nave y fué deslizándose a gran velocidad hacia delante, formando una única ondulación de gran altura siguiendo su recorrido por el canal, sin variar aparentemente su forma o reducir la velocidad. Durante un largo tramo, Russell persiguió la ola hasta que ésta desapareció entre las curvas del canal. La gigantesca ola que vió Russell era una elevación única sobre la superficie del agua, que mantenía su forma intacta mientras avanzaba. Sorprendido y motivado por el fenómeno, Russell volvió al canal para hacer nuevas observaciones y en cada ocasión tenía la oportunidad de contemplar olas semejantes. A estas olas las llamó *grandes olas de traslación* y se dedicó a perfeccionar diferentes técnicas para reproducirlas. Entre sus resultados empíricos obtenidos destacan: la amplitud es proporcional a la velocidad de la onda y el volumen de agua en la onda es igual al del agua desplazada. Fue capaz de obtener una fórmula que expresaba la velocidad de la onda en términos de la amplitud y profundidad del canal. Finalmente pudo recopilar los datos suficientes para redactar un informe coherente que envió a la Royal Society de Edimburgo. Su publicación impactó tanto que algunos investigadores que experimentaron para poder desvelar los mecanismos de su formación. Tal es el caso de Diederick Johannes Korteweg y su estudiante Gustav de Vries que en 1895 presentaron la ecuación en derivadas parciales no lineal que captura la esencia de este fenómeno

[12].

Peter Lax se interesó en las propiedades matemáticas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) no lineales y sus soluciones. En su artículo de 1968, Lax introdujo el concepto de un par Lax como una forma de linealizar estas EDP complicadas. Un par Lax toma una EDP no lineal completamente integrable de orden superior y lo expresa como un sistema de ecuaciones lineales que involucra un par de operadores diferenciales o como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden escritas en forma matricial. Los operadores nos permiten reemplazar la EDP original por un sistema de ecuaciones lineales de alto orden en una función auxiliar, cuya compatibilidad requiere que la EDP no lineal original se mantenga. Esto evita la dificultad de trabajar con una EDP no lineal pero introduce el problema de trabajar con operadores diferenciales. Si se puede encontrar un par Lax no trivial para una EDP determinada, entonces se garantiza que la EDP será completamente integrable, es decir, que tiene un número infinito de leyes de conservación y soluciones de solitón en cualquier orden [1].

En el presente trabajo, encontramos una representación integral de la solución de un problema de valor inicial y de frontera de tipo Cauchy para la ecuación lineal de Korteweg-de Vries (KdV) sobre la semirrecta real positiva, en donde empleamos dos métodos distintos para este fin; en el primero, planteamos una transformada de tipo Laplace y, por medio de su transformada inversa, logramos dicho objetivo. En el segundo, determinamos las ecuaciones de Lax asociadas al problema, las cuales, nos disminuyen el orden de la ecuación. A dichas ecuaciones las llevamos a su forma diferencial y, mediante algunos resultados que se plantearán, obtenemos un problema de Riemann-Hilbert simple, el cual, resolvemos usando el Lema de Plemelj. Posteriormente, aplicando una invarianza sobre las integrales de la representación integral, logramos disminuir las condiciones de frontera inmersas en la solución y así, satisfacer al problema planteado.

En el primer capítulo mostramos algunos resultados básicos de álgebra multilineal cuyas propiedades permiten presentar la noción de formas diferenciales, con las que establecemos algunos resultados importantes como lo es el lema de Poincaré, el cual es de suma importancia en este trabajo de investigación.

En el segundo capítulo presenta una breve teoría de conceptos básicos de espacios de Banach y de Hilbert, además se plantea la idea primordial del problema de Riemann-Hilbert (RH); podremos ver algunas propiedades y la forma de su solución en base a las integrales de Cauchy; estipulado en el lema de Plemelj.

En el tercer capítulo plateamos el problema de valor inicial y de frontera, parte medular de este trabajo, donde en cada uno de sus apartados correspondientes se detallan los procesos que se realizaron, culminado en algunos ejemplos particulares con sus representaciones gráficas.

Capítulo 1

Formas Diferenciales y Teorema de Stokes

En este apartado daremos una breve reseña para las formas diferenciales, las cuales serán vistas como objetos formales y mostraremos algunos de los resultados importantes que éstos cumplen. Posteriormente, presentaremos la operación de diferenciación exterior, formas cerradas y formas exactas; mostraremos unos de los resultados importantes en relación a las formas.

Dentro de los múltiples roles que tienen las formas diferenciales, está el describir sistemas de ecuaciones diferenciales parciales definidos en variedades y el interpretar las diversas estructuras geométricas que heredan. Aplicándole ciertas operaciones apropiadas, varios tipos de éstas formas son inducidas, e integrándolas en variedades se obtienen algunos invariantes geométricos. Estos invariantes son cantidades que reflejan la estructura global de variedades y son indispensables en su estudio [11].

Las demostraciones y enunciados de los diversos resultados presentados en este capítulo se pueden verificar en [11].

1.1. Campos Vectoriales

Definición 1.1.1. Sea M una variedad de clase \mathcal{C}^∞ y T_pM el espacio tangente en $p \in M$, es decir, el conjunto de todos los vectores tangentes a p . Diremos que X es un campo vectorial en M , si para cada punto $p \in M$ le asignamos un vector tangente $X_p \in T_pM$ de modo que X_p es de clase \mathcal{C}^∞ con respecto a p .

Definición 1.1.2. Sean U una vecindad abierta de p , V un abierto en \mathbb{R}^n y $\phi : U \rightarrow V$ un homomorfismo. A las imágenes de todo punto $q \in U$ bajo ϕ , las podemos escribir como n -tuplas

$$\phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$$

las que llamaremos **coordenadas locales** de q , U será una vecindad coordinada y los x_i , **funciones coordinadas** definidas en U . Además, al par $(U, \phi) = (U; x_1, \dots, x_n)$ lo llamaremos **sistema local coordinado**.

Proposición 1.1.1. Sean $(U; x_1, \dots, x_n)$ y $(V; y_1, \dots, y_n)$ dos sistemas coordinados locales alrededor de p en una vecindad M de clase \mathcal{C}^∞ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Si $(U; x_1, \dots, x_n)$ es un sistema coordinado local de M , entonces para cada punto $p \in U$, X es descrito como:

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde las a_i son funciones definidas en U . X_p será de clase \mathcal{C}^∞ con respecto a p , si cada a_i es una función de clase \mathcal{C}^∞ .

Observación 1.1.1. Si y_1, \dots, y_n es un sistema coordinado de funciones definidos alrededor de p , entonces

$$X_p = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial y_i}{\partial x_i}(p) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (1.1)$$

Así, las a_i son funciones de clase \mathcal{C}^∞ que no depende de la elección de las coordenadas locales.

Tomemos a $\mathfrak{X}(M)$ como el conjunto de todos los campos vectoriales en M y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos a $fX \in \mathfrak{X}(M)$ como:

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Por otro lado, recordemos que un rol importante del vector tangente es la derivada direccional de funciones. Con este rol, podemos hacer un campo vectorial X que actúe sobre cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, es decir,

$$(Xf)(p) = X_p(f) \text{ con } p \in M.$$

Si le damos una expresión local de X , entonces

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

y a Xf lo llamaremos la **derivada** de f por el campo X . Donde obtenemos la función

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty \\ (X, f) &\mapsto Xf, \end{aligned}$$

la cual satisface

$$1. X(af+bg) = aXf + bXg$$

$$2. X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1.2. El Bracket de un Campo Vectorial

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales en una variedad M de clase \mathcal{C}^∞ . Entonces X, Y actúan como derivadas en $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Consideremos la función

$$\begin{aligned}\gamma : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ f &\mapsto X(Yf) - Y(Xf).\end{aligned}$$

Note que $X(Yf) - Y(Xf) = (XY - YX)f$, lo cual, implica que $XY - YX$ es un campo vectorial en M al que denotaremos $[X, Y]$.

Tomamos a la función

$$\begin{aligned}\sigma_p : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto [X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)\end{aligned}$$

para cada punto $p \in M$ esta función satisface la condición del vector tangente en p ; es decir, $[X, Y]_p$ es un vector tangente para M en p .

Por otro lado, si $[X, Y]_p$ es de clase \mathcal{C}^∞ con respecto a p y damos una expresión local de X y Y ;

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad y \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde

$$[X, Y]_p = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

A esta expresión, la llamaremos el **Bracket de X y Y**, el cual cumple las siguientes propiedades:

1. $[aX + bX', Y] = a[X, Y] + b[X', Y]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $[Y, X] = -[X, Y]$.
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1.3. Formas Diferenciales

Definición 1.3.1. Sea \mathbb{R} un campo y Λ un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con estructura de anillo, cuyo producto está dado por:

$$\begin{aligned}\bullet : \Lambda \times \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda\mu\end{aligned}$$

tal que

$$a(\lambda\mu) = (a\lambda)\mu = \lambda(a\mu)$$

se satisface con $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$, entonces diremos que Λ es un álgebra de \mathbb{R} .

Para fines prácticos de esta tesis, enunciaremos algunas propiedades relevantes que caracterizan a las formas diferenciales en \mathbb{R}^n , ya que una n -variedad, localmente, se ve como \mathbb{R}^n .

Denotaremos por Λ_n^* al álgebra generada por dx_1, \dots, dx_n en \mathbb{R}^n que satisface la ecuación siguiente

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{1.2}$$

con i, j arbitrarios. Llamaremos a Λ_n^* al álgebra exterior generada por dx_1, \dots, dx_n .

Observación 1.3.1. De la expresión (1.2) tenemos que $dx_i \wedge dx_i = 0$ para i arbitrario.

Denotaremos al conjunto de todas las combinaciones lineales de monomiales de grado k por Λ_n^k . Así

$$\Lambda_n^* = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_n^k.$$

Una base para Λ_n^k es:

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{1.3}$$

donde $1 \leq i_1 < \dots < i_k < n$.

A la combinación lineal de los elementos de (1.3) con funciones de clase \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R}^n como coeficientes, le llamamos una k -**forma diferencial** en \mathbb{R}^n , es decir

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Denotaremos por $\mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las k -formas diferenciales en \mathbb{R}^n , es decir

$$\mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n) = \{ \omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_n^k : \omega \text{ es de clase } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \}.$$

Al álgebra de estas formas diferenciales en \mathbb{R}^n la denotaremos como

$$\mathfrak{A}^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n)$$

En particular, $\mathfrak{A}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, las formas diferenciales de grado 0 son funciones de clase \mathcal{C}^∞

1.3.1. Producto Exterior

Definición 1.3.2. Sean $\omega \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n)$ una k -forma diferencial y $\eta \in \mathfrak{A}^l(\mathbb{R}^n)$ una l -forma diferencial. Definiremos al producto exterior de dos formas diferenciales, como $\omega \wedge \eta \in \mathfrak{A}^{k+l}(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I, J} f_I g_J dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l},$$

donde

$$\omega = \sum_I f_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{y} \quad \eta = \sum_J g_J dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}.$$

En el caso general, donde M es una variedad de clase \mathcal{C}^∞ , podemos definir el producto exterior de la siguiente forma

Definición 1.3.3. Sea $p \in M$, $\omega_p \in \wedge^k T_p^* M$ y $\eta_p \in \wedge^l T_p^* M$. Entonces $\omega_p \wedge \eta_p \in \wedge^{k+l} T_p^* M$, tal que

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$$

Observación 1.3.2. Si $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots, dx_{i_k}$ y $\eta = g dx_{j_1} \wedge \dots, dx_{j_l}$. Entonces,

$$\omega \wedge \eta = f g dx_{i_1} \wedge \dots, dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots, dx_{j_l}.$$

Por otra parte, el producto exterior nos induce a una función bilineal

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{A}^k(M) \times \mathfrak{A}^l(M) &\rightarrow \mathfrak{A}^{k+l}(M) \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

tal que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$.
2. $\omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn} \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})$,

donde \mathfrak{S}_{k+l} es el conjunto de todas las permutaciones de $k+l$ cartas.

1.3.2. Derivada Exterior

Definición 1.3.4. Sea $d : \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ una función lineal. Definiremos la derivada exterior de una k -forma diferencial ω , como

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (1.4)$$

donde $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Si $f \in \mathfrak{A}^0(\mathbb{R}^n)$, entonces su derivada exterior, $df \in \mathfrak{A}^1(\mathbb{R}^n)$ es:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

la cual, coincide con la derivada total.

Lema 1.3.1. Sea d una función lineal definida como en (1.4), entonces $d \circ d = 0$, es decir para una k -forma ω , $d(d\omega) = 0$.

Definición 1.3.5. Sea ω una k -forma diferencial. Diremos que ω es una forma diferencial **cerrada**, si $d\omega = 0$. Por otra parte, diremos que es **exacta**, si existe una $(k-1)$ -forma diferencial η , tal que $d\omega = \eta$.

Observación 1.3.3. Retomando el lema anterior, tenemos que toda forma diferencial exacta es un forma cerrada.

De esta observación podríamos preguntarnos si el caso inverso se dá para forma diferenciales de orden k . En el caso de \mathbb{R}^n , ésto es cierto cuando $k > 0$, el cual se estipula en el lema de Poincaré, pero en el caso general no siempre es así. A continuación enunciaremos algunas propiedades de la derivada en conjunto al producto exterior.

Proposición 1.3.1. Sean $\omega \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \mathfrak{A}^l(\mathbb{R}^n)$, entonces

1. $\eta \wedge \omega = (-1)^{lk} \omega \wedge \eta$.
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

Denotaremos por $T_0\mathbb{R}^n$ al espacio tangente de \mathbb{R}^n en el origen y a $T_0^*\mathbb{R}^n$ como el espacio dual de éste, el cual lo definimos como:

$$T_0^*\mathbb{R}^n = \{ \alpha : T_0\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \text{ lineal } \}$$

Para el caso general, donde M es una variedad n dimensional de clase \mathcal{C}^∞ , denotaremos a todas las k -formas en M como $\mathfrak{A}^k(M)$ y al álgebra de éstas, como $\mathfrak{A}^*(M)$, donde

$$\mathfrak{A}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{A}^k(M)$$

con respecto a k , es decir, el conjunto de todas las formas diferenciales en M y para este caso, podemos definir algunas operaciones en $\mathfrak{A}^*(M)$.

Definición 1.3.6. Sea $\omega \in \mathfrak{A}^k(M)$ una k -forma en M , definimos a $d\omega \in \mathfrak{A}^{k+1}(M)$ como la **derivada exterior**, de tal modo que:

$$d\omega = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

donde $\omega = f dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

Teorema 1.3.1. Sea M una variedad de clase C^∞ y $\omega \in \mathfrak{A}^k(M)$ una k -forma en M , entonces para los campos vectoriales $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{k+1})) \right) \\ &+ \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{k+1}) \right) \end{aligned}$$

Cuando $k = 1$, tenemos

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} (X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]))$$

donde $\omega \in \mathfrak{A}^1(M)$.

1.3.3. Integrales y el Teorema de Stokes

Definición 1.3.7. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un espacio topológico X . Llamaremos soporte de f a la cerradura del conjunto de todos los puntos donde el valor de la función no es cero, es decir

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.3.8. Sea $f(x)$ una función de clase C^∞ en \mathbb{R}^n con soporte compacto, su integral está definida por:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1, \dots, dx_n = \lim_{|\sigma_j| \rightarrow 0} \sum_j f(x_j) |\sigma_j| \quad (1.5)$$

donde σ_j son cubos pequeños n -dimensionales que en conjunto cubren un $\text{supp} f$, x_j es un punto en σ_j y $|\sigma_j|$ es el volumen de σ_j .

Si tomamos a $\omega = f(x) dx_1, \dots, dx_n$ una n forma diferencial en \mathbb{R}^n . Así (1.5) puede ser visto como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

Ahora, tomemos un sistema de coordenadas y_1, \dots, y_n de \mathbb{R}^n y $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ con coordenadas y_1, \dots, y_n para \mathbb{R}^n y con coordenadas x_1, \dots, x_n en \mathbb{R}^n . Así, $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$ es una función de clase \mathcal{C}^∞ .

Con esto, podemos expresar a ω con respecto a las nuevas coordenadas y_i , es decir,

$$\omega = f(x(y)) \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Por lo tanto, por el cambio de variable, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) \right| dy_1 \dots dy_n,$$

donde $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)$ es la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas.

Observación 1.3.4. *Si especificamos una orientación en \mathbb{R}^n , la integral de ω en \mathbb{R}^n se determina única e independientemente de la elección de las coordenadas. Además, no es necesario asumir que el cambio de coordenadas φ se defina en todo \mathbb{R}^n , basta con hacerlo para un abierto U que tenga $\text{supp} f$.*

Definición 1.3.9. *Sea ω una forma diferencial en M . Llamaremos soporte de ω al conjunto cerrado mas pequeño, tal que ω es 0 fuera de éste. Es decir,*

$$\text{supp} \omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}} \quad (1.6)$$

Definición 1.3.10. *Sea M una variedad n dimensional orientada de clase \mathcal{C}^∞ y ω una n forma en M con soporte compacto. Entonces, la integral de ω en M la definimos como:*

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} f_i \omega, \quad (1.7)$$

donde el soporte de $f_i \omega$ está contenido en una vecindad coordenada U_i .

Dado que el soporte de ω es compacto y la cubierta abierta $\{U_i\}$ es localmente finita, entonces la integral $\int_{U_i} f_i \omega = 0$, excepto para un número finito de i y el valor de la suma total en i queda establecido.

Proposición 1.3.2. Sea ω una n forma en una variedad M y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces la integral definida en (1.7) es lineal; es decir,

$$\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

1.3.4. Teorema de Stokes

Teorema 1.3.2. Sea M una variedad n dimensional orientada de clase C^∞ y ω una $(n - 1)$ forma en M con soporte compacto. Entonces,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

donde ∂M es la frontera de M y tiene la orientación de M .

El siguiente corolario es consecuencia del teorema de Stokes.

Corolario 1.3.1. Sea M una variedad n dimensional orientada de clase C^∞ sin frontera. Entonces, para una $(n - 1)$ forma ω en M con soporte compacto, se tiene

$$\int_M d\omega = 0.$$

Denotaremos por $Z^k(M)$ al conjunto de las k -formas cerradas en M y por $B^k(M)$ al conjunto de las k -formas exactas. Luego, si $D_1 = \{d_1 | d_1 : \mathfrak{A}^k(M) \rightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(M)\}$ y $D_2 = \{d_2 | d_2 : \mathfrak{A}^{k-1}(M) \rightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(M)\}$ se tiene que

$$Z^k(M) = \ker(D_1) \quad \text{y} \quad B^k(M) = \text{Im}(D_2). \quad (1.8)$$

Note que $Z^k(M)$ y $B^k(M)$ son subespacios lineales de $\mathfrak{A}^k(M)$.

Definición 1.3.11. Sea M una variedad n dimensional de clase C^∞ el espacio cociente formado por (1.8), $H_{DR}^k(M)$, lo llamaremos el **grupo de cohomología de de Rham** k dimensional en M y a la suma directa le diremos, solamente, que es el grupo de cohomología de Rham, el cual está expresado como

$$H_{DR}^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H_{DR}^k(M) \quad (1.9)$$

En otras palabras, la expresión (1.9) es la cohomología de cocadenas complejas. Así,

$$H_{DR}^*(M) = H^*(\mathfrak{A}^*(M); d)$$

es decir, para una función d , se tiene que

$$0 \mapsto \mathfrak{A}^0(M) \mapsto \mathfrak{A}^1(M) \mapsto \cdots \mapsto \mathfrak{A}^n(M) \mapsto 0.$$

Al cual, llamaremos el **complejo de Rham**

Proposición 1.3.3. *Sea M una variedad de clase $\mathcal{C}^\infty(M)$, $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ una proyección del primer factor e $i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ una función definida por $i(p) = (p, 0)$ con $p \in M$. Entonces, la función $\phi^* : H_{DR}^*(M) \rightarrow H_{DR}^*(M \times \mathbb{R})$ inducido por ϕ , es un isomorfismo y $i^* : H_{DR}^*(M \times \mathbb{R}) \mapsto H_{DR}^*(M)$ es su inversa.*

A continuación, enunciaremos un resultado derivado de esta proposición, el cual es conocido como el **Lema de Poincaré**.

Corolario 1.3.2. *La cohomología de Rham de \mathbb{R}^n es trivial, es decir*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

En otras palabras, este corolario nos dice que:

Observación 1.3.5. *Dada una forma diferencial cerrada $\omega \in \mathfrak{A}^k(\mathbb{R}^n)$ con $k > 0$, entonces existe una $(k - 1)$ -forma η , tal que $\omega = d\eta$.*

Problema de Riemann Hilbert

En este capítulo trataremos algunos conceptos básicos sobre el problema más básico de Riemann-Hilbert, donde la idea primordial es resolver una función seccionalmente analítica en el plano complejo, que satisface una condición de salto específica sobre una curva dada; siempre y cuando, la curva cumpla con ciertas condiciones en específico.

Primordialmente, definiremos lo que es un espacio de Hilbert y de Banach, donde veremos la relación que tiene con este tipo de problemas. Posteriormente, se mostrará las condiciones y algunos resultados para poder dar las soluciones a estos problemas, cuyas demostraciones se pueden consultar en [7].

2.1. Espacios de Banach y Hilbert

Definición 2.1.1. $\|x\|$ se llama una norma en un espacio lineal X , si es una función de valor real definida para cada $x \in X$ y cumple lo siguiente:

1. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$, si y solo si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para cualquier escalar λ .

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un espacio normado es un espacio métrico, pero el inverso es falso; hay espacios métricos lineales que no están normados.

Definición 2.1.2. *Un espacio completo normado se dice que es un **espacio de Banach**.*

Ejemplo 2.1.1. *Tomemos a $\mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio cerrado y acotado. Este espacio consiste en aquellas funciones que están definidas y son continuas en Ω y tales que todas sus derivadas hasta la de orden k son continuas en Ω . La norma en $\mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$ se define por:*

$$\|f(x)\| = \max_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

Ejemplo 2.1.2. *Sean $H^{k,\lambda}$ con $0 < \lambda \leq 1$ un espacio de Hölder; el cual consiste en todas las funciones de $\mathcal{C}^{(k)}(\Omega)$ cuya norma está definida por:*

$$\|f(x)\| = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Definición 2.1.3. *Sea H un espacio vectorial en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Un producto interno, $\langle x, y \rangle$ es una función que va de $H \times H$ a \mathbb{R} (\mathbb{C}), tal que:*

1. *Para todo $x \in H$, la función $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ es lineal.*
2. *$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in H$*
3. *$\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$ y la igualdad se cumple si, y solo si $x = 0$*

Definición 2.1.4. *Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno que es completo.*

Ejemplo 2.1.3. *Sea Ω un abierto en H . El espacio $L^2(\Omega)$ con producto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f(x)} g(x) dx$$

es un espacio de Hilbert.

2.2. Problema de Riemann Hilbert

Un problema de Riemann-Hilbert (RH) consiste en construir una función seccionalmente analítica dictada por su comportamiento en la frontera de la región de analiticidad. Sea s en algún contorno $\Gamma \subset \mathbb{C}$, usamos Φ^+ y Φ^- para referenciar los valores de frontera para los que $\Phi(z)$ toma cuando $z \rightarrow s$ por la izquierda y derecha de Γ , respectivamente, siempre que el límite existe.

Esencialmente, un problema de RH tiene la forma:

Sea Γ un contorno, $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $C_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ un punto y una constante de normalización y las funciones de salto

$$G : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m} \quad y \quad F : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m},$$

también llamadas matrices de salto. Encontrar $\Phi : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ tal que:

1. $\Phi(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.
2. $\Phi(z)$ está acotado en ∞
3. $\Phi(z_0) = C_0$
4. $\Phi(z)$ satisface la condición de salto. Si $s \in \Gamma$,

$$\Phi^+(s) = \Phi^-(s)G(s) + F(s). \tag{2.1}$$

Definición 2.2.1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva en el plano complejo. Diremos que es un contorno completo si está orientada de tal forma que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ se descompone en regiones a la izquierda y a la derecha, es decir

$$\mathbb{C} \setminus \Gamma = \Omega_+ \cup \Omega_- \quad \text{tal que} \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset,$$

donde Ω_+ está a la izquierda y Ω_- a la derecha de Γ .

Se usan componentes disjuntos Ω_{\pm} para definir los valores de los límites de la frontera, es decir

$$\Phi^+(s) = \lim_{z \rightarrow s} \Phi(z) \quad y \quad \Phi^-(s) = \lim_{z \rightarrow s} \Phi(z).$$

cuando $z \in \Omega_+$ y $z \in \Omega_-$, respectivamente. Asumiendo que $z \rightarrow s$ a lo largo de una curva que no es tangencial a Γ .

Para que la primera condición del problema de RH de arriba sea definida precisamente, Φ^{\pm} requiere de:

1. $\Phi^{\pm}(s)$ exista en todo punto interior del contorno y sean continuas, excepto en los extremos de Γ , donde es localmente integrable, es decir, un problema de RH continuo.
2. $\Phi^{\pm}(s)$ existe en casi todas partes (con respecto a una medida de Lebesgue de longitud de arco) y esté en un espacio L^p apropiado, es decir, un problema de RH L^p .

Así, resolver un problema de RH específico depende del sentido con que se tome.

Definición 2.2.2. *Diremos que una función Φ es de grado finito en el infinito si*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sup |z|^{-n} |\Phi| < \infty \quad \text{para algún } n.$$

Observación 2.2.1. *Para resolver una problema de RH, la función debe ser de grado finito en el infinito.*

Para los problema de RH continuos especificamos algunos términos en las series asintóticas de Φ en el ∞ . Así,

$$\Phi(z) = I + o(1) \quad o \quad \Phi(z) = I + C/z + o(z^{-1})$$

para la primera igualdad, $\Phi(\infty) = I$.

Estas condiciones comparten una analogía con las condiciones iniciales y de frontera en el sentido de las ecuaciones diferenciales. Usamos la convergencia uniforme, es decir

$$\Phi(z) = p(z) + o(z^{-n}) \text{ cuando } z \rightarrow \infty,$$

lo que equivale a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=R} |\Phi(z) - p(z)| |z|^n = 0.$$

Si Γ está acotado, entonces

$$\Phi(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1}) \text{ o } \Phi(z) = I + C/z + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

donde

$$\Phi(z) = p(z) + \mathcal{O}(z^{-n}) \text{ cuando } z \rightarrow \infty$$

equivalentemente

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=R} |\Phi(z) - p(z)| |z|^n < \infty.$$

2.2.1. Integrales de Cauchy

Definición 2.2.3. Sea Γ una curva orientada y $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Definiremos la integral de Cauchy como

$$\mathcal{C}_\Gamma f(z) = \int_\Gamma \frac{f(s)}{s-z} \sigma s, \quad (2.2)$$

donde $\sigma s = \frac{ds}{2\pi i}$

Observación 2.2.2. La función integral de Cauchy funciona en un entorno para funciones analíticas fuera del contorno.

Definición 2.2.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es α -Hölder continua en Ω , si para cada $s^* \in \Omega$, existe $\wedge(s^*)$, $\delta(s^*) > 0$ tal que

$$|f(s) - f(s^*)| \leq \wedge(s^*) |s - s^*|^\alpha; \quad |s - s^*| < \delta(s^*), \quad s \in \Omega.$$

Note que esta definición es útil cuando $\alpha \in (0, 1]$. Si $\alpha = 1$, f es Lipschitz y si es $\alpha > 1$, entonces f es constante.

Definición 2.2.5. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es uniformemente α -Hölder continua en Ω , si Λ y δ lo podemos elegir independientemente de s^* .

Lema 2.2.1. Una función uniformemente α -Hölder continua en una curva acotada Γ con constantes δ y Λ , satisface

$$\sup_{s_1, s_2 \in \Gamma} \left\{ \frac{|f(s_1) - f(s_2)|}{|s_1 - s_2|^\alpha} \right\} < C\Lambda < \infty,$$

donde C depende de δ en Γ y $s_1 \neq s_2$.

Definición 2.2.6. Sea Γ una curva suave, cerrada y acotada, un **espacio de Banach**, $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, consiste de las funciones uniformemente α -Hölder continuas con norma

$$\|f\|_{0,\alpha} = \sup_{s \in \Gamma} |f(s)| + |f|_{0,\alpha}.$$

donde $|f|_{0,\alpha} = \sup_{s_1, s_2 \in \Gamma} \left\{ \frac{|f(s_1) - f(s_2)|}{|s_1 - s_2|^\alpha} \right\}$, $s_1 \neq s_2$.

2.2.2. Lema de Plemelj

Lema 2.2.2. Sea Γ una curva suave y acotada, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función α -Hölder continua y $f(s^*)$ para algún $s^* \in \Gamma$. Entonces,

1. $\mathcal{C}_\Gamma f(s^*)$ existe.
2. Para cada $\theta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{C}_\Gamma f(z)$ es continua en $\mathcal{B}_{\theta,\Phi}(s^*, \delta)$, donde Φ es el ángulo que hace la tangente de Γ a s^* con la horizontal.

Donde $\mathcal{B}_\theta(x, \delta) = \left\{ y \in \mathcal{B}(x, \delta) : \left| \frac{\text{Im}(x-y)}{x-y} \right| > \text{sen}\theta \right\}$ con $\theta \in (0, \pi)$.

Observación 2.2.3. $\mathcal{B}_{\theta,\Phi}(x, \delta) = (\mathcal{B}_\theta(x, \delta) - x)e^{i\Phi}$.

Ahora, hablaremos del valor del límite de $\mathcal{C}_\Gamma f(s^*)$ cuando f es una función α -Hölder continua.

Tomemos a $s^* \in \Gamma$ y consideremos a

$$\mathcal{C}_\Gamma f(s^*) = \int_\Gamma \frac{f(s) - f(s^*)}{s - z} \sigma s + f(s^*) \int_\Gamma \frac{\sigma s}{s - z},$$

por el teorema de Cauchy, tenemos

$$\int_\Gamma \frac{\sigma s}{s - z} = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega^+ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el lema anterior, tenemos los límites de izquierda y derecha de la integral de Cauchy.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Gamma^+ f(s^*) &= \lim_{z \rightarrow s^*, z \in \Omega_+} \mathcal{C}_\Gamma f(s) = f(s^*) + \int_\Gamma \frac{f(s) - f(s^*)}{s - z} \sigma s \\ \mathcal{C}_\Gamma^- f(s^*) &= \lim_{z \rightarrow s^*, z \in \Omega_-} \mathcal{C}_\Gamma f(s) = \int_\Gamma \frac{f(s) - f(s^*)}{s - z} \sigma s, \end{aligned}$$

donde los límites son notangenciales. Así, si $s^* \in \Gamma$, el valor principal de la integral de Cauchy es:

$$\oint \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \mathcal{B}(s^*, \delta)} \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s.$$

Si $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \mathcal{B}(s^*, \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f(s) - f(s^*)}{s - s^*} \sigma s &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} \frac{f(s) - f(s^*)}{s - s^*} \sigma s \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s - \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} \frac{\sigma s}{s - s^*}. \end{aligned}$$

Así, llegamos a un resultado, el cual, nos dice que la integral de Cauchy es la solución (única) para un problema de RH (Problema simple escalar de RH), el cual es conocido como el **Lema de Plemelj**.

Lema 2.2.3. *Sea Γ un arco suave que va de a hasta b y f una función α -Hölder continua en Γ . Entonces, para $s^* \in \Gamma \setminus \{a, b\}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Gamma^+ f(s^*) &= \frac{1}{2} f(s^*) + \oint \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s \\ \mathcal{C}_\Gamma^- f(s^*) &= -\frac{1}{2} f(s^*) + \oint \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s. \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\mathcal{C}_\Gamma^+ f(s^*) - \mathcal{C}_\Gamma^- f(s^*) = f(s^*) \quad \text{o} \quad \mathcal{C}_\Gamma^+ f(s^*) + \mathcal{C}_\Gamma^- f(s^*) = 2 \oint \frac{f(s)}{s - s^*} \sigma s.$$

Ecuación Lineal de Korteweg-de Vries sobre una Semirrecta

3.1. El Método Unificado

En este apartado haremos el análisis de un problema de valor inicial y de frontera para la ecuación de KdV lineal. Con base a dos métodos distintos lograr encontrar una representación integral de solución y poder parametrizar sus términos, de tal modo, que se puedan dar estimación numérica y, conseguir así, una representación gráfica de su comportamiento.

Consideremos un problema de valor inicial y de frontera para la ecuación de KdV homogénea lineal. Así, tomemos a $\lambda > 0$ y a $q : \mathcal{C}^3(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\Omega = \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t^+$ y satisface

$$\begin{aligned}q_t(x, t) &= -\lambda \partial_x^3 q(x, t) \\q(x, 0) &= q_0(x) \\q(0, t) &= h_0(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Utilizaremos una transformada para poder resolver la ecuación (3.1), la cual definiremos como:

Definición 3.1.1. Sea $t \geq 0$. Entonces definimos la transformada \hat{q} de q como:

$$\hat{q}(k, t) = \int_0^\infty e^{-iky} q(y, t) dy, \quad (3.2)$$

siempre y cuando la integral sea convergente.

Ahora para poder encontrar la expresión de q , definimos la transformada inversa de la expresión (3.2) como sigue.

Definición 3.1.2. Sea $\hat{q}(k, t)$ la transformada que se define en (3.2) y sea $y \geq 0$. Entonces definimos la transformada inversa, q , como:

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{q}(k, t) dk. \quad (3.3)$$

Teorema 3.1.1. Sean $q : \mathcal{C}^3(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que satisface la ecuación (3.1) y $\hat{q}(k, t)$ definida en (3.2), entonces (3.1) tiene una representación integral de la solución de la forma

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx + i\lambda k^3 t} [g_2(\lambda k^3, t) + (ik)g_1(\lambda k^3, t) + (ik)^2 g_0(\lambda k^3, t)] dk \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx + i\lambda k^3 t} \hat{q}(k, 0) dk. \end{aligned}$$

Demostración. Derivamos a (3.2) y sustituyendo a (3.1), obtenemos que:

$$\hat{q}_t(k, t) = \lambda [q_{xx}(0, t) + (ik)q_x(0, t) + (ik)^2 q(0, t) - (ik)^3 \hat{q}(k, t)]$$

la cual es una ecuación lineal de primer orden con respecto a t . Así, solucionamos por factor integrante y obtenemos que

$$e^{-i\lambda k^3 t} \hat{q}(k, t) - \hat{q}(k, 0) = \lambda g_2(\lambda k^3, t) + (ik)\lambda g_1(\lambda k^3, t) + (ik)^2 \lambda g_0(\lambda k^3, t), \quad (3.4)$$

donde

$$g_j(\bullet, t) = \int_0^t e^{-i\bullet s} \partial_x^j q(0, s) ds.$$

Por lo que, por la transformada inversa de Fourier, se tiene:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^3 t} [g_2(\lambda k^3, t) + (ik)g_1(\lambda k^3, t) + (ik)^2 g_0(\lambda k^3, t)] dk \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \hat{q}(k, 0) dk. \end{aligned} \quad (3.5)$$

□

3.2. Pares de Lax

Con el método precedente, se logró obtener una representación integral al problema de valor inicial y de frontera propuesto en (3.1), cuya base primordial está dada por una propuesta de una transformada que actúa sobre la recta real, la cual, tiene ciertas desventajas, si deseamos restringir el dominio de ésta a un intervalo, dado que la transformada propuesta, al ser un alterado de la transformada de Laplace y Fourier, no podemos adaptarlas a que actúen sobre un intervalo. Por lo que, el siguiente método nos dará mayor libertad en ese ámbito, dado que no requiere de una transformada, solo que los dominios cumplan ciertas propiedades, las cuales en el transcurso de la sección se irán detallando.

Dado el problema de valor inicial y de frontera mostrado en (3.1), podemos calcular el operador adjunto de la ecuación del problema. Así, la podemos ver como

$$(\partial_t + \lambda \partial_x^3)q = 0. \quad (3.6)$$

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{L} : \mathcal{C}^3(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^0(\Omega)$ que define al operador diferencial de (3.1), tal que

$$\mathcal{L}q = 0,$$

donde $\mathcal{L} = (\partial_t + \lambda \partial_x^3)$

Definición 3.2.2. Definiremos el producto interior vinculado a la ecuación (3.1) como la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}^3(\Omega) \times \mathcal{C}^3(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\langle (\partial_t + \lambda \partial_x^3)q, p \rangle = \int \int_{\Omega} (\partial_t + \lambda \partial_x^3)q \cdot p dx dt.$$

Teorema 3.2.1. Sean $\tilde{\Omega} = [0, \infty) \times [0, T]$ y $p, q : \mathcal{C}^3(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el operador adjunto de la ecuación (3.1) está dado de la forma

$$-p_t = \lambda \partial_x^3 p. \quad (3.7)$$

Antes de demostrar que este teorema se cumple, vamos a considerar el siguiente lema.

Lema 3.2.1. Sea $p, q : \mathcal{C}^3(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$. Tomando el producto interior de estas dos funciones, tal como en la definición (3.2.2) entonces

$$\int pq|_{\tilde{\Omega}} dx + \lambda \int (pq_{xx}|_{\tilde{\Omega}} - p_x q_x|_{\tilde{\Omega}} + p_{xx} q|_{\tilde{\Omega}}) dt = 0.$$

Demostración. Utilizando el hecho que p está contenido en un conjunto con soporte compacto, entonces se tiene que $p(0, t) = p(\infty, t) = 0$. Así, se tiene la demostración. \square

Con este lema, podemos dar pie a la demostración del teorema (3.2.1).

Demostración. Utilizando la definición (3.2.2) e integrando por partes, tenemos que

$$\langle (\partial_t + \lambda \partial_x^3) q, p \rangle = \int pq|_{\tilde{\Omega}} dt + \lambda \int (pq_{xx}|_{\tilde{\Omega}} - p_x q_x|_{\tilde{\Omega}} + p_{xx} q|_{\tilde{\Omega}}) dt + \langle q, -(\partial_t + \lambda \partial_x^3) p \rangle.$$

Tomando en cuenta el lema anterior, llegamos al resultado deseado. \square

Con los resultados previos, vemos que la forma adjunta p relacionada a la ecuación de inicio, satisface la ecuación (3.7).

Además, podemos notar que este operador es en particular, un operador autoadjunto, tal y como veremos en el siguiente enunciado.

Corolario 3.2.1. Sea $p : \mathcal{C}^3(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ el operador adjunto de la ecuación (3.1), tal que $p(x, t)$ satisface la igualdad (3.7), entonces p es un operador autoadjunto.

Demostración. Sea $p : \mathcal{C}^3(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$. De la expresión (3.7), podemos observar que

$$(\partial_t + \lambda \partial_x^3) p = 0,$$

de donde se puede notar que el operador $(\partial_t + \lambda\partial_x^3)$ es el mismo que de la expresión (3.6). \square

Multiplicando la ecuación (3.1) por p y a la ecuación (3.7) por q , restándolas y completando la derivada del producto, se tiene que:

$$(pq)_t - \lambda(-q_{xx}p + p_xq_x - p_{xx}q)_x = 0. \quad (3.8)$$

Supongamos que la ecuación (3.1) es válida en un abierto, suave a trozos, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y sea Ω° un subdominio de Ω . Aplicando el teorema de Green a (3.8) en el subdominio Ω° y el corolario (1.3.1), entonces

$$\int \int_{\Omega^\circ} [(pq)_t - \lambda(-q_{xx}p + p_xq_x - p_{xx}q)_x] dxdt = \int_{\partial\Omega^\circ} [(pq)d\xi - \lambda(-q_{\xi\xi}p + p_\xi q_\xi - p_{\xi\xi}q)ds] = 0. \quad (3.9)$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de (3.7) está dada por:

$$p(x, t; k) = e^{-ikx - i\lambda k^3 t}. \quad (3.10)$$

Luego, al sustituir a (3.10) en (3.8) y (3.9) se obtiene:

$$\left(e^{-ikx - i\lambda k^3 t} q \right)_t - \lambda \left(e^{-ikx - i\lambda k^3 t} [-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q] \right)_x = 0 \quad (3.11)$$

y

$$\int_{\partial\Omega^\circ} \left[e^{-ik\xi - i\lambda k^3 s} (qd\xi - \lambda [-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q] ds) \right] = 0. \quad (3.12)$$

Ahora, de la ecuación (3.11), si desarrollamos las derivadas y eliminamos términos semejantes, entonces cumple ser una forma diferencial exacta, cuando (3.1) se satisface y es válida en Ω , entonces existe una 0-forma $M = \mu(x, t, k)e^{-ikx + (-i\lambda k)^3 t}$.

Como la ecuación está formulada en la semirrecta y siendo

$$\Omega^\circ = \{0 < \xi < \infty, 0 < s < t\},$$

entonces (3.12) llega a ser la relación global.

Si la ecuación (3.1) es válida en $\tilde{\Omega}$, entonces de la expresión (3.11) , tenemos la existencia de una función M tal que:

$$\begin{aligned} M_x &= e^{-ikx-i\lambda k^3 t} q \\ M_t &= e^{-ikx-i\lambda k^3 t} [\lambda(-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} M_x &= e^{-ikx-i\lambda k^3 t} (\mu_x + (-ik)\mu) \\ M_t &= e^{-ikx-i\lambda k^3 t} (\mu_t + (-i\lambda k)^3 \mu). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Así, de las ecuaciones (3.13) y (3.14), obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \mu_x + (-ik)\mu &= q \\ \mu_t + (-i\lambda k)^3 \mu &= \lambda(-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q). \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 3.2.2. *El problema de valor inicial y de frontera (3.1) es equivalente al sistema*

$$\begin{aligned} \mu_x + (-ik)\mu &= q \\ \mu_t + (-i\lambda k)^3 \mu &= \lambda(-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Este sistema de ecuaciones es conocido como las **Ecuaciones de Lax**.

3.3. Problema de Riemann Hilbert

Dado el problema de valor inicial y de frontera definido en (3.1), en este apartado lo reduciremos a un problema de RH; en el cual, buscaremos una función seccionalmente analítica que cumplan la condición de salto.

Así, del sistema (3.15), vemos que su forma diferencial está dada por

$$W(x, t; k) = e^{-ikx-i\lambda k^3 t} (qdx + [\lambda(-q_{xx} + (-ik)q_x - (-ik)^2 q)] dt). \quad (3.16)$$

Proposición 3.3.1. *La forma diferencial (3.16) del sistema (3.15) es cerrada.*

Demostración. Sea W la forma diferencial estipulada en (3.16), entonces

$$\begin{aligned} dW &= W_x dx + W_t dt \\ &= e^{-ikx - i\lambda k^3 t} (\lambda \partial_x^3 q + q_t) dt \wedge dx. \end{aligned}$$

Esta última ecuación será cerrada si se cumple la expresión (3.1). □

Dado que $\tilde{\Omega}$ es un abierto, suave a trozos, por el lema de Poincaré (corolario (1.3.2)), la forma diferencial cerrada W es también exacta. Así existe una 0-forma diferencial $\mu e^{-ikx - i\lambda k^3 t}$, tal que:

$$d\left(\mu e^{-ikx - i\lambda k^3 t}\right) = W, \quad (3.17)$$

para la cual, $q(x, t)$ satisface a (3.1) en el dominio

$$\tilde{\Omega}^\circ = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}.$$

Así integrando la expresión (3.17) de (x_j, t_j) a (x, t) y multiplicando el lado izquierdo por $e^{ikx + i\lambda k^3 t}$, se tiene:

$$\mu_j(x, t, k) = \int_{(x_j, t_j)}^{(x, t)} e^{ik(x-\xi) + i\lambda k^3(t-s)} [q d\xi + \lambda [-q_{\xi\xi} + (-ik)q_\xi - (-ik)^2 q] ds], \quad (3.18)$$

donde

$$\mu_j(x, t, k) = \mu(x, t, k) - \mu(x_j, t_j, k) e^{ik(x-x_j) + i\lambda k^3(t-t_j)}.$$

Observación 3.3.1. *Si integramos por partes la expresión (3.18), cuando k tiende a ∞ , entonces la integral tiende a 0. Por lo tanto,*

$$\mu = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Es decir, μ es de orden $\frac{1}{k}$.

Ahora, elegimos el punto $(x_j, t_j) \in \tilde{\Omega}$ de tal modo que podamos definir una función seccionalmente analítica $\mu(x, t, k)$. Como $\tilde{\Omega}$ es un dominio poligonal, entonces los puntos (x_j, t_j) los podemos tomar como los puntos de las esquinas. Así,

$$(x_1, t_1) = (0, T), \quad (x_2, t_2) = (0, 0), \quad \text{y} \quad (x_3, t_3) = (\infty, t).$$

Por lo que, para $i = 1, 2, 3$ tenemos que

$$\mu_i(x, t, k) = \int_{(x_i, t_i)}^{(x, t)} e^{ik(x-\xi)+i\lambda k^3(t-s)} [qd\xi + \lambda [-q_{\xi\xi} + (-ik)q_{\xi} - (-ik)^2q] ds],$$

Ahora, tomamos el punto $(x, t) = (0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_1(0, 0, k) &= \int_T^0 e^{-ik\xi - i\lambda k^3 s} [qd\xi + \lambda [-q_{\xi\xi} + (-ik)q_{\xi} - (-ik)^2q] ds], \\ \mu_2(0, 0, k) &= 0, \\ \mu_3(0, 0, k) &= -\int_0^\infty e^{ik(x-\xi)} q(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Así, obtenemos las siguientes condiciones de salto

$$\begin{aligned} \Delta\mu_{1,2}(x, t, k) &= -e^{ikx+i\lambda k^3 t}(\tilde{g}(k)), \\ \Delta\mu_{2,3}(x, t, k) &= e^{ikx+i\lambda k^3 t}(\hat{q}_0(k)), \\ \Delta\mu_{1,3}(x, t, k) &= e^{ikx+i\lambda k^3 t}(-\tilde{g}(k) + \hat{q}_0(k)), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\Delta\mu_{i,j}$ las diferencias de las expresiones dadas en (3.19), con $i = 1, 2$ y $j = 2, 3$.

Siendo

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \int_0^t e^{-ikx - i\lambda k^3 s} [qd\xi + \lambda [-q_{\xi\xi} + (-ik)q_{\xi} - (-ik)^2q] ds], \\ \hat{q}_0(k) &= \int_0^\infty e^{-i\lambda ky} q(y, 0) dy. \end{aligned}$$

Por el lema (2.2.3) y la integral de cauchy podemos encontrar una solución explícita para la condición de salto (3.20), es decir

$$\mu(x, t; k) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\partial D} e^{ilx+i\lambda l^3 t} \hat{q}_0(l) \frac{dl}{l-t} - \int_{\mathbb{R}} e^{ilx+i\lambda l^3 t} \tilde{g}(l) \frac{dl}{l-t} \right\}. \quad (3.21)$$

Así, de (3.21) y (3.15) llegamos a la solución de (3.1). Este proceso se resume en el siguiente teorema, el cual refleja al problema de RH vinculado al problema de valor inicial y de frontera inicial.

Teorema 3.3.1. *Dado el problema de valor inicial y de frontera (3.1), podemos obtener un problema de RH con las condiciones de salto (3.20). Así, el problema (3.1) tiene como solución a*

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \hat{q}_0(k) dk - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \tilde{g}(k) dk. \quad (3.22)$$

3.4. Invarianza

Ahora, buscaremos una $v \neq k$, de tal modo que $\lambda v^3 = \lambda k^3$; es decir,

$$v_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}k \quad y \quad v_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}k. \quad (3.23)$$

Proposición 3.4.1. *Dada las invarianzas (3.23) y la transformada definida en (3.2), entonces ésta tendrá como dominio a*

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(k) \geq \sqrt{3}\operatorname{Re}(k) \right\}, \\ T_2 &= \left\{ k \in \mathbb{C} : -\operatorname{Im}(k) \leq \sqrt{3}\operatorname{Re}(k) \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde T_1 y T_2 son los dominios de la transformada, evaluada en las invarianzas, respectivamente.

Demostración. Si sustituimos (3.23) en la transformada (3.2), tenemos que

$$\hat{q}(v_{1,2}, t) = \int_0^\infty e^{-iv_{1,2}x} q(x, t) dx. \quad (3.25)$$

Dado que $q(x, t)$, por definición de la transformada, es de orden exponencial, entonces ésta está acotada. Para que la integral tenga sentido, entonces debe de converger; es decir, siendo $k = \operatorname{Re}(k) + i\operatorname{Im}(k)$ con $\operatorname{Re}(k), \operatorname{Im}(k) \in \mathbb{R}$; en el caso de la invarianza v_1 , $|e^{\frac{\sqrt{3}\operatorname{Re}(k)-\operatorname{Im}(k)}{2}}||e^{i\frac{\operatorname{Re}(k)+\sqrt{3}\operatorname{Im}(k)}{2}}| = |e^{\frac{\sqrt{3}\operatorname{Re}(k)-\operatorname{Im}(k)}{2}}|$, lo cual tiende a 0, siempre que $\sqrt{3}\operatorname{Re}(k) \leq \operatorname{Im}(k)$. Análogamente para la invarianza v_2 , resumimos que converge cuando $\sqrt{3}\operatorname{Re}(k) \geq -\operatorname{Im}(k)$ y así, los dominios son los conjuntos (3.24) \square

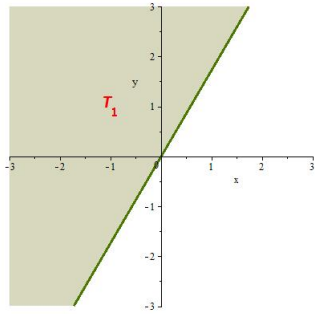


Figura 3.1: Dominio de convergencia de $\hat{q}(v_1, t)$.

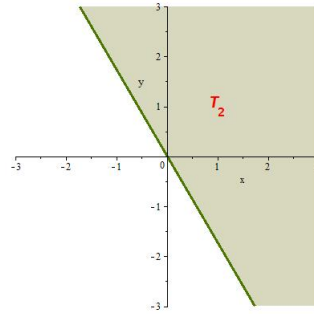


Figura 3.2: Dominio de convergencia de $\hat{q}(v_2, t)$.

Sustituyendo las expresiones de (3.25) en (3.4) y despejando a $g_2(k^3, t)$, se tiene que:

$$g_2(k^3, t) = e^{-i\lambda k^3 t} \hat{q}(v_{1,2}, t) - \hat{q}(v_{1,2}, 0) - iv_{1,2} g_1(k^3, t) + v_{1,2}^2 g_0(k^3, t) \quad (3.26)$$

Dado que las funciones que componen a estas expresiones son analíticas y convergen en cada uno de sus dominios, respectivamente. Entonces, la combinación lineal de (3.26) usando los factores $(k - v_2)$ y $-(k - v_1)$ seguirá siendo analítica. Sustituyéndo estas g_2 en la expresión (3.22), obtenemos

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \hat{q}(k, 0) dk \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \left(\frac{e^{-i\lambda k^3 t}}{v_1 - v_2} ((k - v_2) \hat{q}(v_1, t) - (k - v_1) \hat{q}(v_2, t)) \right) dk \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx+i\lambda k^3 t} \left(\frac{k - v_2}{v_1 - v_2} \hat{q}(v_1, 0) - \frac{k - v_1}{v_1 - v_2} \hat{q}(v_2, 0) \right) dk \\ &- \frac{3\lambda}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx+i\lambda k^3 t} k^2 g_0(\lambda k^3, t) dk. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Teorema 3.4.1. *Sea (3.1) un problema de valor inicial y de frontera, entonces tiene como solución a (3.27), el cual es equivalente a la expresión (3.5) y (3.22).*

3.5. Dominio de Convergencia

Para que las integrales propuestas en (3.18) estén bien definidas, en general, para que μ_i tenga sentido, se tendrá que ver donde éstas convergen, es decir, la región donde el integrando es analítico.

Basta con analizar el exponente de la función exponencial, ya que su convergencia es mucho mas acelerada que el factor acompañante. Así, tomemos a $k = a + bi$, tenemos

$$|e^{ik(x-\xi)+i\lambda k^3(t-s)}| = |e^{-b(x-\xi)}| |e^{-(t-s)(3a^2b-b^3)}|$$

y para que converja, $-b(x - \xi) < 0$ y $-(t - s)(3a^2b - b^3) < 0$.

Para la función μ_1 , si el punto (ξ, s) está sobre la curva de integración, entonces $x - \xi > 0$ y $t - s < 0$, dejando que $b > 0$ y $\pm\sqrt{3}a < \pm b$; de donde definimos al conjunto

$$D^+ = \{k \in \mathbb{C} : b > 0 \text{ y } \pm\sqrt{3}a < \pm b\}.$$

Análogamente para la función μ_2 , tenemos que $x - \xi > 0$ y $t - s > 0$. Así, $b > 0$ y $\pm\sqrt{3}a > \pm b$; teniendo que

$$E^+ = \{k \in \mathbb{C} : b > 0 \text{ y } \pm\sqrt{3}a > \pm b\}.$$

En el caso de la función μ_3 , tenemos que $s = t$, donde t es un número fijo, anulando así el segundo factor y $ds = 0$. Por lo que, $x - \xi < 0$, $b < 0$ y

$$\mu_3(x, t, k) = \int_{\infty}^x e^{ik(x-\xi)} q d\xi. \quad (3.28)$$

El conjunto para este caso es

$$F = \{k \in \mathbb{C} : b < 0\}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(x, t, k) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } k \in D^+, \\ \mu_2 & \text{si } k \in E^+, \\ \mu_3 & \text{si } k \in F. \end{cases} \quad (3.29)$$

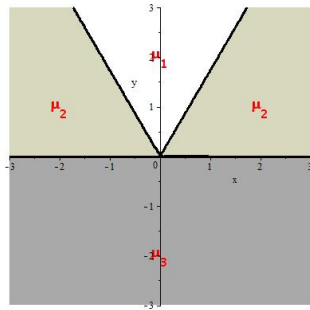


Figura 3.3: Regiones donde μ_i es seccionalmente analítica.

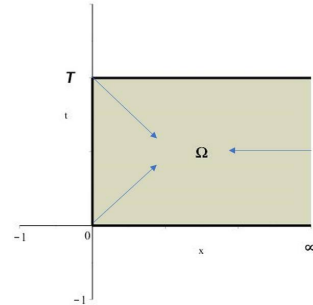


Figura 3.4: Región $\tilde{\Omega}$.

Por otro lado, para analizar la convergencia de $q(x, t)$ de la expresión (3.5) tomamos el factor exponencial y desarrollando, tendremos que si $k^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$, entonces $|e^{kxi}| = |e^{axi}| |e^{bx}| = 1|e^{bx}|$ y $|e^{-(a^3-3ab^2)i}| |e^{-(3a^2b-b^3)t}| = 1$. Luego, e^{-bx} y $e^{(3a^2b-b^3)(s-t)}$ tienden a 0, cuando $|k|$ igual lo hace. Es decir, si $x > 0$ y $(s - t) < 0$,

entonces $b > 0$ y $3a^2b - b^3 > 0$. Por lo que, el dominio donde q asegura su existencia, y la transformada tenga sentido, es en el semiplano superior donde se cumple que $\pm\sqrt{3}a < \pm b$, de donde obtenemos el dominio de convergencia, el cual está dado por

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right) \cup \left(\pi, \frac{4\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right) \right\}. \quad (3.30)$$

Geoméricamente, en el plano ab son rectas que pasan por el origen con pendiente $\pm\sqrt{3} = \tan \theta$, entonces $\theta = 60^\circ$ o $\theta = -60^\circ$ o equivalentes. Por lo que, con el análisis anterior, $e^{(kx+k^3(s-t))i}$ es analítica en D (Figura 3.5).

Análogamente, para la ecuación (3.27) vemos que converge en el conjunto

$$D' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right) \right\},$$

como se muestra en la figura 3.6.

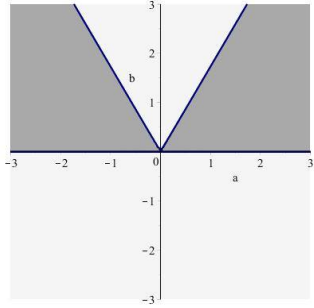


Figura 3.5: Dominio de convergencia de (3.22) y (3.5).

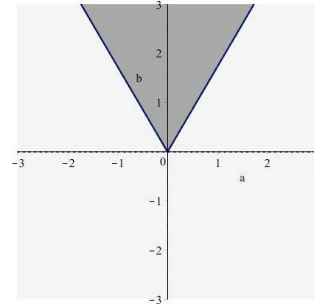


Figura 3.6: Dominio de convergencia de (3.27).

3.6. Lema de Jordan

Teorema 3.6.1. Sea $f(k) = e^{ikx+i\lambda k^3 t} \left(\frac{e^{-i\lambda k^3 t}}{v_1 - v_2} ((k - v_2)\hat{q}(v_1, t) - (k - v_1)\hat{q}(v_2, t)) \right)$ una función analítica en $D''_R \subset D'$, entonces

$$\int_{\partial D''_R} f(k) dk = 0. \quad (3.31)$$

Demostración. Sea $\partial D''$ la frontera del dominio $D''_R \subset D'$, tal que $\partial D''_R = \mathcal{C}_R + \gamma_1 + \gamma_2$, donde

$$\gamma_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_R : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que

$$\gamma_1(R) = Re^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \gamma_2(R) = Re^{\frac{2\pi}{3}i} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_R(\theta) = Re^{\theta i}.$$

Por lo que, usando el teorema de Cauchy, la integral de $f(k)$ en $\partial D''_R$, cuando R tiende a infinito, es igual a cero (véase [10]). Por lo tanto, queda demostrado el enunciado. \square

Por otro lado, tomando a

$$\mathcal{C}_R(\theta) = R(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \quad \text{y} \quad h(k) = \frac{((k - v_2)\hat{q}(v_1, t) - (k - v_1)\hat{q}(v_2, t))}{v_1 - v_2}$$

y $k \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_R} e^{ikx} h(k) dk \right| &\leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} Re^{-R\text{sen}(\theta)x} |h(R(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)))| d\theta \\ &\leq MR \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{R\text{sen}(\theta)} d\theta \\ &\leq \frac{\pi MR e^{-R}}{3}, \end{aligned}$$

Así, cuando R tiende al infinito, la integral sobre \mathcal{C}_R es cero. Llegando así, al siguiente resultado conocido como el **Lema de Jordan**.

Corolario 3.6.1. *Sea \mathcal{C}_R un arco de circunferencia y h una función analítica en D' , entonces*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} e^{ikx} h(k) dk = 0. \quad (3.32)$$

Dado que la curva $\partial D''_R$ es cerrada y siguiendo de los resultados (3.31) y (3.32), tenemos

$$-\int_{\mathcal{C}_R} f(k) dk = \int_{\gamma_1} f(k) dk + \int_{\gamma_2} f(k) dk.$$

y de esto se sigue que

$$\int_{\partial D'} f(k) dk = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta)} f(k) dk \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(- \int_{C_R} f(k) dk \right) = 0.$$

Por lo tanto, la solución (3.27) queda expresada como

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx + i\lambda k^3 t} \hat{q}(k, 0) dk \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D'} e^{ikx + i\lambda k^3 t} \left(\frac{k - v_2}{v_1 - v_2} \hat{q}(v_1, 0) - \frac{k - v_1}{v_1 - v_2} \hat{q}(v_2, 0) \right) dk \\ &- \frac{3\lambda}{2\pi} \int_{\partial D'} e^{ikx + i\lambda k^3 t} k^2 g_0(\lambda k^3, t) dk. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.7. Funciones de Green

En esta sección veremos la representación integral de la solución del problema dado en (3.1), la podemos asociar en términos de las condición inicial y de frontera propuestos; la cual será equivalente a las expresiones (3.5) y (3.22).

Tomemos la solución (3.33) y en conjunto a la transformada (3.2), tenemos que:

$$q(x, t) = \int_0^\infty q(y, 0) G^{(I)}(x, y, t; \lambda) dy + \int_0^\infty q(0, s) G^{(B_0)}(x, y, t; \lambda) ds, \quad (3.34)$$

donde

$$\begin{aligned} G^{(I)}(x, y, t; \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) + \lambda k^3 t} dk \\ &- \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{4\pi} \right) \int_{\partial D} e^{ik \left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) y \right) + i\lambda k^3 t} dk \\ &+ \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{4\pi} \right) \int_{\partial D} e^{ik \left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) y \right) + i\lambda k^3 t} dk, \\ G^{(B_0)}(x, y, t; \lambda) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} (-3\lambda k^2) e^{ikx + i\lambda k^3(t-s)} dk. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.8. Parametrización de las Funciones de Green

Ahora reescribiremos a las ecuaciones dadas en (3.35). Así, para el caso de las integrales de frontera tomaremos a $k = r + i\sqrt{3}r$ cuando $Re(k) \in (0, \infty)$ y $r > 0$; y tomamos a $k = r - i\sqrt{3}r$ cuando $Re(k) \in (-\infty, 0)$ y $r < 0$, siempre que $Im(k) > 0$.

Por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} e^{ik\left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)y\right) + i\lambda k^3 t} dk &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}rx} (\cos(\beta) - i \sin(\beta)) (1 - i\sqrt{3}) dr \\ &+ \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}r(x+y)} (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) (1 + i\sqrt{3}) dr, \\ \int_{\partial D} e^{ik\left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)y\right) + i\lambda k^3 t} dk &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}r(x+y)} (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) (1 - i\sqrt{3}) dr \\ &+ \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}rx} (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) (1 + i\sqrt{3}) dr, \\ \int_{\partial D} (-3\lambda k^2) e^{ikx + i\lambda k^3(t-s)} dk &= \int_0^\infty 24\lambda r^2 e^{-\sqrt{3}rx} \cos(\gamma) dr. \end{aligned}$$

Por otro lado, para parametrizar a la integral con respecto a la recta real, tomamos a $k = r$ con $Re(k) \in (0, \infty)$; y a $k = -r$ para $Re(k) \in (-\infty, 0)$. Así la integral queda:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) + i\lambda k^3 t} dk = \int_0^\infty 2 \cos(r((x-y) - \lambda r^3 t)) dr.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G^{(I)}(x, y, t; \lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(r(x-y) + \lambda r^3 t) dr \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}r(x+y)} (\cos(\alpha) + \sqrt{3} \sin(\alpha)) dr \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{3}rx} \cos(\beta) dr, \\ G^{(B_0)}(x, y, t; \lambda) &= \frac{24\lambda}{\pi} \int_0^\infty r^2 e^{-\sqrt{3}rx} \cos(\gamma) dr, \end{aligned}$$

siendo

$$\alpha = r(x-y) - 8\lambda r^3 t, \quad \beta = r(x+2y) - 8\lambda r^3 t, \quad \gamma = rx - 8\lambda r^3(t-s).$$

3.9. Análisis Numérico

En este apartado se da una representación gráfica de algunos ejemplos particulares de la solución, en los cuales, podemos observar el comportamiento de ésta para diferentes valores de la constante λ con tiempos $t < 1$.

En los gráficos de las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 se tomaron como condiciones inicial y de frontera a las funciones $q(x, 0) = xe^{-x}$ y $q(0, t) = \text{sen}(\frac{\pi}{t})$, donde se fijaron un valor de λ , variando el tiempo con un paso regular.

Así, en la figura 3.7, se muestra la gráfica de la solución $q(x, t; \lambda)$ donde $\lambda = 1$. Se puede ver que a medida que el tiempo va variando, las curvas van descendiendo y la dispersión va desapareciendo. En el caso, donde el tiempo es $t = 0.5$, la dispersión se hace mas evidente.

Análogamente, en las figura 3.8 y 3.9 se toma una valor de λ mayor o igual que 1, y en comparación a la demás gráficas, en ésta se logra apreciar mayor el efecto dispersivo para los tiempos menores de 0.5. En la figura 3.10 su comportamiento no varía comparando con el gráfico 3.8.

En todas estas gráficas, a medida que va avanzando el tiempo, éstas tienden a desaparecer como consecuencia de la condición exponencial.

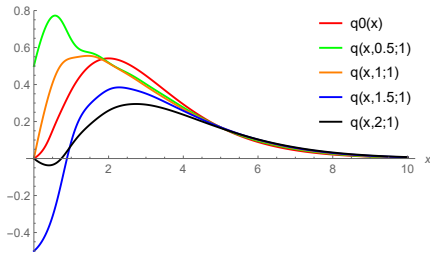


Figura 3.7: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$.

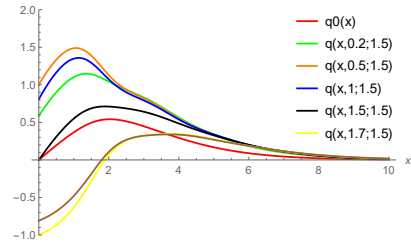


Figura 3.8: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1.5$ y tiempo $t = 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 1.7$.

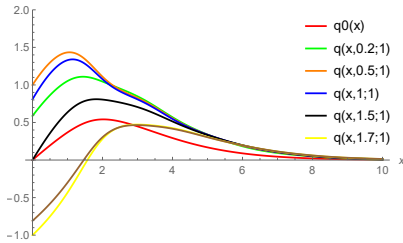


Figura 3.9: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 1.7$.

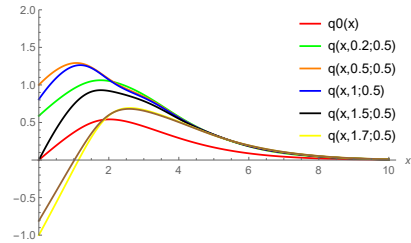


Figura 3.10: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 0.5$ y tiempo $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$.

En las figuras 3.11, 3.12, 3.15 y 3.16 se tomaron como condiciones iniciales y de fronteras a las funciones $q(x, 0) = \text{sen}(\lambda x)$ y $q(0, t) = \text{sen}(\lambda t)$, respectivamente. Además se varió el parámetro $\lambda < 1$, de tal modo que fuese pequeño, respetando la relación $\lambda = \frac{1}{n^2}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y valores del tiempo $t < 1$. Se puede notar que, a medida que λ se acerca a 0, las ondulaciones van aumentando pero la amplitud de éstas van descendiendo, de tal modo que se van pegando al eje real; en el caso donde $n = 2$, las ondulaciones son más notorias, las cuales no varían mucho cuando el tiempo cambia.

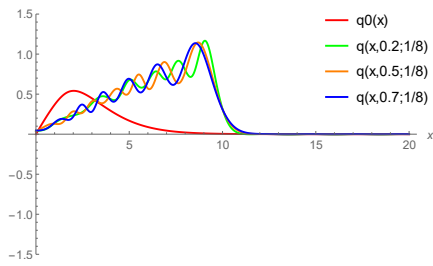


Figura 3.11: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{8}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$.

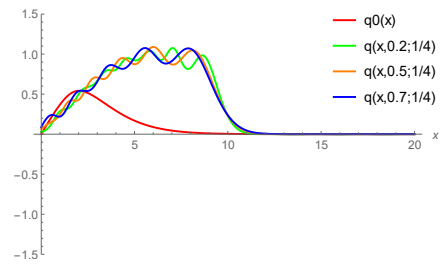


Figura 3.12: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{4}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$.

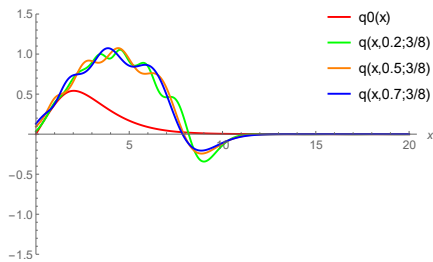


Figura 3.13: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{3}{8}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$.

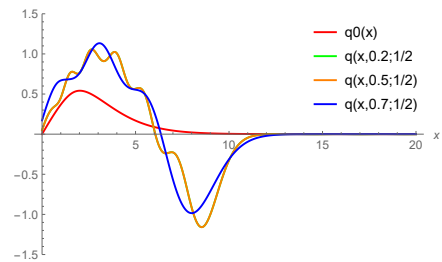


Figura 3.14: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$ y tiempo $t = 0.2, 0.5, 0.7$.

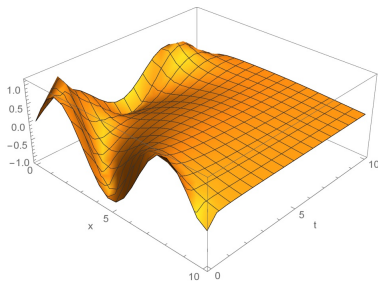


Figura 3.15: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = 1$ y tiempo $t = 0.5$.

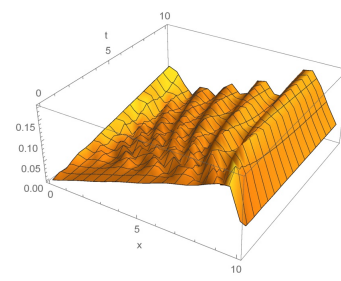


Figura 3.16: Gráfica de $q(x, t; \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{64}$ y tiempo $t = 0.5$.

Conclusión

En este trabajo de tesis se analizó un problema de valor inicial y de frontera para la parte lineal de la ecuación KdV en base a dos métodos distintos; vía pares de Lax y usando el Método Unificado [2], donde se pudo corroborar que, en ambos, se llegó a la misma representación integral de la solución. Cabe mencionar que usando los pares de Lax se pueden resolver problemas donde el dominio espacial es un intervalo o una semirecta. Por otro lado, el método unificado como se utiliza la transformada de Laplace, se pueden resolver problemas solo sobre una semirecta. En nuestro caso se pudo expresar la solución en términos de integrales que involucran solo una condición de frontera y una inicial (Véase [2], pág. 37). Además, presentamos ejemplos de soluciones particulares.

Bibliografia

- [1] Adiwidjaja, H. (1995). On the Korteweg-de Vries equation. Sitio web: <http://www.cds.caltech.edu/marsden/wiki/uploads/projects/geomech/Adiwidjaja1995.pdf>
- [2] Fokas, A. (2008). A Unified Approach to Boundary Value Problems, SIAM.
- [3] Gakhov, F. D. (1966). Boundary Value Problem. Dover Publications Inc.
- [4] Koch, H., Tataru, D., Visa, M. (2014). Dispersive equations and nonlinear waves, Birkhauser.
- [5] Larue, J. (Tesis). Symbolic verification of Operator and Matrix Lax Pairs for some completely integrable Nonlinear Partial Differential Equations. Colorado School of Mines. Sitio web: <https://inside.mines.edu/whereman/papers/Larue-MS-Thesis-2011.pdf>
- [6] Renardy, M., Roger, R., (2000). An introduction to Partial Differential Equation, Second ed. Springer.
- [7] Trogdon, T., Olver, S. (2016), Riemann-Hilbert Problems, Their Numerical Solution, and the Computation of Nonlinear Special Functions. SIAM
- [8] Ancona, V. Gaveau, B. (2002), Differential Forms on Singular Varieties. Chapman and Hall, CRC.
- [9] Roman, S. (2002), Graduate texts in Mathematics. Advanced Linear Algebra. Springer. Second Ed.

- [10] Ablowitz M., Fokas A., (2003), Complex Variables. Introduction and Applications. Cambridge University Press. Second Ed.
- [11] Morita S., (1998), Translations of Mathematical Monographs. Geometry of Differential Forms. American Mathematical Society. Vol. 201
- [12] Gómez B., (2017), Ecuaciones diferenciales no lineales: Pares de Lax para la ecuación de Korteweg-de Vries. Trabajo fin de grado. Universidad del País Vasco.