UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

La construcción de la noción número decimal por estudiantes de primaria: una experiencia de intervención docente.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

PRESENTA:

ELIZABETH ANTERO TEPEC

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Guadalupe Cabañas Sánchez

CO DIRECTOR DE TESIS:

Dr. David Francisco Block Sevilla

Chilpancingo, Gro., México. Octubre 2015

La construcción de la noción número decimal por estudiantes de primaria: una experiencia de intervención docente.

Tesis de maestría

Elizabeth Antero Tepec

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de Maestría en Docencia de la Matemática.

Becario No. **301210**

Al Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAGro, por la oportunidad de formarme en pro de mi profesión: la docencia.

Al Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) perteneciente al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, por contribuir en mi formación durante una estancia académica para la concepción de esta investigación.

DEDICATORIA

- A Dios, por conceder a mí y a mi familia vida y salud para cumplir esta meta.

- A mis amadas hijas: Avril y Amaya, por ser parte de este logro, les aseguro que el tiempo perdido no fue en vano. A ustedes, por ser la luz que guía mi camino, la motivación para superarme, la razón de mis alegrías.

- A mi madre, por guiarme y apoyarme incondicionalmente en todo momento.

- A mis hermanos y compañeros de infancia, Gustavo y Antonio, por su apoyo incondicional.

A todos, con cariño y amor!

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma de Guerrero, por el apoyo económico brindado para realizar una estancia académica en otra institución educativa, a efecto de contribuir en el desarrollo de la presente de investigación.

Especialmente a mi asesora de Tesis, la Dra. Guadalupe Cabañas-Sánchez, por sus orientaciones y desmedido tiempo para realizar este trabajo, por compartir sus conocimientos y sabias palabras, por su paciencia ante mi necedad.

Al Dr. David Francisco Block Sevilla, quién me brindó todo el apoyo académico, profesional y moral para la realización de esta tesis. Por permitirme formar parte de su equipo de trabajo, por compartir sus conocimientos, sus acertados consejos y las tazas de café.

A los estudiantes del grupo 5º B de la Escuela Primaria Miguel Hidalgo y Costilla, por su participación e invaluable apoyo en la aplicación de la actividades de aprendizaje.

A la Cdra. Catalina Navarro Sandoval y al Dr. Crisólogo Dolores Flores por tomarse el tiempo para leer este trabajo, por sus acertadas observaciones y sugerencias.

A la M.C. Elika Sugey Maldonado Mejía, por compartir su tiempo, sus conocimientos y experiencias. Por su paciencia y apoyo incondicional.

A todos
Muchas Gracias!

Índice

Abreviaturas

TSD	Teoría de Situaciones Didácticas
SD	Situación Didáctica
V	Variable Didáctica
T	Tarea
A	Actividad
E	Equipo
S-A	Situación de acción
S-F	Situación de formulación
S-V	Situación de validación
S-I	Situación de institucionalización
MI	Modelo implícito
ME	Modelo explícito
MJ	Modelo explícito justificado
MV	Modelo culturalmente validado
FD	Fracción decimal
ND	Notación decimal
SMD	Sistema Métrico Decimal
RTP	Relación parte todo

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo, es la construcción de la noción de número decimal en condiciones de enseñanza. Se llevó a cabo con estudiantes matriculados en quinto grado en una escuela primaria de la región Montaña Baja del estado de Guerrero, a fin de que construyeran esta noción. El contexto es una situación didáctica (SD), que favoreció el que los estudiantes transitaran de la fracción decimal al número decimal Tal transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres representaciones matemáticas del número decimal: la fracción decimal, la notación desarrollada y la notación decimal.

El interés por realizar este trabajo, se deriva de las diversas dificultades que enfrentan estudiantes de primaria con la matemática en general y con los números decimales en particular. Dificultades observadas por la autora de este trabajo, a lo largo de los siete años como docente de primaria. Se identificaron mientras resolvían situaciones o problemas que involucran a la relación de orden, el valor posicional y dificultades con el cero, así mismo, para transitar de una representación a otra. Por ejemplo, al ubicarlos a comparar expresiones numéricas como 0.2 y 0.20, se encontraron respuestas como las siguientes: *0.20 es mayor* porque *veinte es mayor que dos*. A fin de entender mejor esta problemática, se revisó la literatura especializada. Derivado de ello, se encontraron explicaciones acerca de qué las origina, destaca entre ellas, el que los estudiantes extienden al campo de los números decimales, los conocimientos construidos previamente en el campo de los naturales. Esto es, que al transitar de los naturales a los decimales, utilizan la misma lógica para la comprensión de sus propiedades, lo que ha tenido sus repercusiones al abordar este contenido matemático en la escuela.

De ahí el interés por contribuir desde una perspectiva didáctica, a que los estudiantes de primaria construyan la noción número decimal. Para ello, se diseñó y experimentó en condiciones de enseñanza una Situación Didáctica (SD), la cual se constituye de tareas, que favorecieron el tránsito de la noción objeto de estudio, por dos contextos de enseñanza: el de las fracciones decimales y el de la medición (de longitudes y áreas). El diseño se sustenta de un análisis *a priori* en el marco de la Metodología de la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1995). Desde el punto de vista didáctico la SD considera dos de los contextos de enseñanza de los números decimales discutidos en Gómez (2010), así como de aspectos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986).

El análisis de las datos se sustenta de cuatro modelos, que emergen de la interacción que tiene el estudiante con la SD, mismos que se retoman de la caracterización presentada en Ferrari (2001).

La tesis se estructura en seis capítulos. El capítulo 1 presenta el contexto en que se desarrolla la investigación, así como el planteamiento del problema. Se presentan investigaciones precedentes, a objeto de fundamentar la pertinencia del estudio. En el capítulo 2 se plantean los fundamentos teóricos y metodológicos. Por cuanto al capítulo 3, se presenta un análisis preliminar al diseño de la SD, en el marco de tres dimensiones: el epistemológico, el cognitivo y el didáctico. En la primer dimensión se define el objeto de estudio desde la perspectiva matemática y se analiza su devenir histórico, el cognitivo da cuenta de las dificultades de los estudiantes con los números decimales, desde la perspectiva de la literatura especializada. El didáctico por su parte, presenta una análisis de los libros de texto de matemáticas oficiales, planteado de las lecciones destinadas a la introducción de la enseñanza de estos números. Los resultados del análisis preliminar, fueron considerados en el diseño de la SD. Por cuanto al cuarto capítulo, es donde se declaran las hipótesis que rigen la investigación y se describe el diseño de la SD. El capítulo 5 analiza los datos, sustentados de las producciones escritas y verbales de los estudiantes mientras desarrollan la SD en condiciones de enseñanza. Ello, a objeto de validar o refutar las hipótesis planteadas previo a la experimentación. El el capítulo 6 da cuenta de las conclusiones y reflexiones finales derivadas de la investigación. Se enmarcan en explicar la construcción de la noción de número decimal apartir de la evolución del conocimiento matemático en sí mismo y de la evolución del aprendizaje -de este mismo conocimiento- en términos de modelos emergentes de la interación con la SD. De igual forma se estipulan los obstáculos reconocidos en el proceso de aprendizaje de esta noción matemática.

Capítulo 1. Contexto de la investigación y planteamiento del problema

El presente trabajo está enfocado en la construcción de la noción de número decimal por estudiantes matriculados en quinto grado de primaria en condiciones de enseñanza. El estudio toma como base resultados de investigaciones de tipo didáctico, cognitivo y epistemológico, en las que dan cuenta, principalmente, de errores y dificultades que enfrentan los estudiantes con este tipo de números, a la vez, que explican algunos de sus orígenes.

En el primer apartado de este capítulo, se esbozan algunas de las dificultades reportadas, a fin de plantear y justificar en el apartado dos y tres, el problema que da origen a este trabajo. Con base en ello, se delimita el objetivo del estudio.

Capítulo 1. Contexto de la investigación y planteamiento del problema

1.1. Contexto del estudio

El estudio se centra en la construcción de la noción de número decimal por estudiantes matriculados en quinto grado en una escuela primaria de la región Montaña Baja del estado de Guerrero. El origen de estos números es de tipo social y cultural, por la necesidad práctica de representar cantidades que no pueden ser expresadas por un número entero. Su importancia radica en que permiten expresar informaciones numéricas que no es posible comunicar disponiendo sólo de los naturales (Ávila, 2013).

La escritura actual de los números decimales se remiten a la necesidad de facilitar cálculos con fracciones decimales. Este tipo de fracciones empezó a usarse en la Antigua China, en la Arabia medieval y en la Europa renacentista. En esa época (Siglos XV y XVI), el ingeniero y matemático holandés Stevin (Boyer, 1999), inventó un método para realizar cálculos con fracciones decimales sin usar el denominador, el cual explica en detalle y de manera elemental en su obra *La disme* (El décimo). Su objetivo fue enseñar a todo el mundo como efectuar con una facilidad insospechada los cálculos necesarios en la vida diaria por medio de enteros sin fracciones (Boyer, 1999). Luego que se popularizó su uso, se encontró la forma de expresar cualquier fracción como un número decimal (Ruiz, 2008).

El estudio formal de estos números inicia en cuarto grado de primaria, ante situaciones asociadas a la medición de magnitudes (longitud), de repartos y a la resolución de problemas en contextos de dinero. Su antecedente son los números fraccionarios, cuyo estudio principia en tercer grado, ante situaciones de medición de magnitudes (longitud, área y volumen) y repartos. El primer acercamiento que los estudiantes tienen con las fracciones es a modo de uso, y son del tipo $\frac{m}{2^n}$ (medios, cuartos y octavos). Las usan para expresar de forma oral y por escrito medidas diversas y el resultado de repartos (SEP, 2011). En ese proceso, se apoyan de material concreto. De igual modo, se les sitúa a compararlas en casos sencillos (con igual numerador o igual denominador), así también, resuelven problemas sencillos de suma o resta y representan gráficamente algunos casos. En cuarto grado, resuelven problemas que implica partir el todo en tercios, quintos y sextos. En este grado escolar se introducen las fracciones decimales (del tipo $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$), a las que dedican dos lecciones (lecciones 4 y 5) en el libro de texto de matemáticas oficial. Su primer acercamiento está basado en el uso de material concreto (lápiz, mesa, pizarrón, puerta), al tiempo que fraccionan la unidad de medida (el metro) en décimos, centésimos y milésimos, para luego representarlos numéricamente. Es aquí donde relacionan esta clase de fracciones con los decimales, al introducir su representación en notación decimal ($\frac{1}{10} = 0.1$; $\frac{1}{100} = 0.01$ y $\frac{1}{1000} = 0.001$). El significado y valor de estas fracciones se analizan en quinto grado, en un contexto de resolución de problemas asociados a la medición de longitudes, de peso en gramos y en el marco del número de habitantes de determinada región geográfica. En sexto grado resuelven problemas que implican leer, escribir y comparar números decimales y otros, asociados a la suma y multiplicación.

Por cuanto al aprendizaje de los números decimales, interés de este trabajo, también se han reconocido dificultades. En Konic (2011) por ejemplo, se reportan al menos cuatro tipos, identificadas en estudiantes de cuarto grado de primaria en España (se explican con detalle en el Capítulo 3). Destacan las siguientes:

- El concepto de número decimal (valor de posición, conflictos con el cero).
- La escritura y/o representación (distinción entre número y representación, equivalencias y transformaciones).
- Propiedades (orden, densidad de los decimales en Q).
- Las operaciones con números decimales.

Ávila (2013) por su parte, sostiene que los números decimales son difíciles de comprender y por tanto, es un tema muy complejo para niños de 10 a 12 años de edad, que es cuando empiezan a estudiarlos. Particularmente en México, estos números representan uno de los temas en el que los estudiantes muestran más bajo desempeño en los exámenes nacionales de matemáticas. Las dificultades asociadas, también están relacionadas con la manera en que se enseñan.

Otro de los factores que trastoca la enseñanza de los decimales en la escuela es la tergiversación de este concepto matemático, tanto en el currículum como en las concepciones de los profesores al momento de enseñarlos. Por ejemplo, en el currículo de matemáticas en la enseñanza no universitaria de España, se plantea una concepción errónea del objeto número decimal. Se reporta en Socas (2002), quien reconoce que la representación decimal de los diferentes números es identificada como número decimal.

Avila y García (2008) identifican que en México, este tipo de números es escasamente trabajado. Incluso, que en la escuela primaria no representan un problema de enseñanza importante, debido a que los profesores consideran que unas cuantas explicaciones o actividades, como memorizar los nombres de las columnas, leer y escribir números, son suficientes para darlos por vistos en la clase.

Centeno (1997) hace ver que existe una ambigüedad del concepto, y errores recurrentes al momento de definirlos. Afirma que en la práctica se comete un abuso de lenguaje cuando se identifica escritura con coma y número decimal, en razón de que ambos son considerados como sinónimos.

En esa misma dirección, Ávila y García (2008) sostienen que cuando se trata de definir a los números decimales, de manera concurrente se explican como aquellos números que llevan punto. Pero ésta es apenas una respuesta parcial, pues reitera que la expresiones con punto decimal es solo una de forma de representar al número decimal.

Al recurrir a la definición, encontramos lo siguiente:

- Los números decimales son números racionales que poseen al menos una escritura en forma de fracción decimal, entendiendo a la fracción decimal como aquella que tiene como denominador a una potencia de 10 y puede escribirse de la forma: $n = a/10^p$, siendo *a* y *p* números enteros (Centeno, 1997).
- Es un subconjunto de los números racionales que tienen al menos una expresión en forma de fracción decimal (Ávila, 2008).
- Son aquellos números racionales para los cuales existe al menos una expresión decimal finita (Konic, Godino y Rivas, 2010).

- Son aquellos números que se escriben con una parte entera, un punto y un número finito de cifras decimales (Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2011).

Con estas precisiones, nos parece pertinente traer a colación que es en la educación primaria donde inicia el estudio de los números racionales, particularmente **los racionales positivos**. Se introducen mediante dos sistemas de representación simbólica: la **notación fraccionaria** y la **notación decimal**. Desde el punto de vista didáctico, Escolano (2001) reconoce una desconexión entre esos dos sistemas de representación, así también, que en el caso de la notación fraccionaria, aparece asociada a la relación parte-todo en situaciones de reparto, con escasa presencia de significados como operador, medida, cociente o razón o se presentan desconectados. Entre las notaciones fraccionarias, se incluye a las fracciones decimales y se prosigue con las expresiones decimales –de las que algunas corresponden a los números decimales–, pero que regularmente en este nivel educativo se conocen simplemente como *decimales*.

1.2. Problema de investigación

Los números decimales han sido protagonistas de diversas investigaciones. El interés por tratarlos prevalece en su factibilidad de uso práctico para la resolución de problemas en contextos escolares y extraescolares. Block (2015) argumenta que en las situaciones extraescolares, la presencia de los números decimales es más extendida que la relativa a las fracciones, esto se le atribuye a las grandes facilidades que ofrecen para escribirlos, compararlos y operar con ellos.

La importancia de su estudio en la escolaridad obligatoria se ha reconocido ampliamente, por la necesidad de medir de manera aproximada cantidades continuas, lo que supone abordar un problema de interés práctico (Konic, Godino y Rivas, 2010). Sin embargo, para algunas investigaciones ha sido relevante centrarse en aspectos relativos a la didáctica, otras de tipo cognitivo y también de corte epistemológico.

En el ámbito de lo cognitivo, los trabajos más representativos se han centrado en analizar las causas que provocan las dificultades en su aprendizaje, específicamente en la introducción de este tipo de números en la educación elemental. Destacan los estudios de Brousseau (1981), Centeno (1997) y Douady (1980; Broitman, Itzcovich y Quaranta, 2003), quienes argumentan que muchos de los errores producidos por los estudiantes mientras trabajan con los números decimales, se deben a que extienden a este campo sus conocimientos construidos previamente en el campo de los números naturales. Esto es, al transitar de los naturales a los decimales utilizan la misma lógica para la comprensión de sus propiedades, lo que ha tenido sus repercusiones al abordar este contenido matemático en los contextos escolares.

Brousseau (1981) en su obra *Problèmes de didactique des décimaux* (Problemas de didáctica de los decimales*)* reporta un análisis epistemológico de los decimales y realiza una revisión histórica de su construcción que le concede el estatus de noción matemática, ya que en su estudio, afirma que antes de que llegara a dicho estatus, el decimal era una noción paramatemática puesto que era empleada en usos y prácticas para resolver problemas sin ser reconocido como objeto de estudio. Posteriormente, se convirtió en una noción protomatemática[1] al ser utilizado conscientemente como herramienta y como método de exposición de las fracciones.

En su investigación, Brousseau (1981) construye una génesis artificial basada en el análisis epistemológico que realiza, tal génesis consideraría hacer emerger y funcionar el concepto de noción decimal en una secuencia de 40 situaciones didácticas diseñadas en su teoría: la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Esta investigación se ha convertido en un importante referente didáctico y epistemológico para la enseñanza de los decimales.

De otra parte, Centeno (1997) da cuenta de un análisis epistemológico y didáctico de los números decimales como objeto de saber y de la forma de cómo se han planteado en la organización de la enseñanza. Enfatiza en el análisis de Programas de Estudio de diferentes países. Con base en ello, sostiene que *la enseñanza de los números decimales se introduce a partir de la educación primaria*, con algunas variaciones referentes a la edad y al método de introducción. Afirma que esta clase de números son parte de las exigencias de todo plan de estudio para dicha etapa y las maneras más usuales que se han utilizado para introducirlos son: como extensión natural del sistema de numeración decimal a partir de la medida y como la representación a partir de funciones numéricas.

[1] La noción paramatemática y la protomatemática se describen en el siguiente capítulo.

¿Qué interesó en trabajo?

Como fue señalado en la introducción, el punto de partida de este trabajo han sido las dificultades detectadas durante la experiencia docente con estudiantes de primaria, en torno al aprendizaje de los números decimales. Una explicación más amplia sobre la cuestión, se tuvo de la revisión a la literatura especializada, las que reportan que se derivan de aspectos tanto cognitivos, didácticos y epistemológicos. Las explicaciones derivadas de este tipo de estudios, nos hizo comprender que esta problemática involucra no solo al estudiante, también a la didáctica matemática y a la epistemología de los objetos matemáticos, como es el caso del número decimal.

Es desde la perspectiva didáctica que interesó intervenir con este trabajo en la problemática planteada en torno a los números decimales. En particular, atender lo relativo a la construcción de la noción de número decimal en condiciones de enseñanza, en el tiempo escolar establecido en el currículum de enseñanza básica (primaria) en México. El estudio se focaliza con estudiantes de primaria. Una de las razones, es debido a que es en este nivel educativo donde formalmente se inician los primeros acercamientos con este objeto matemático, a nivel de noción, y; por otro, que es el nivel educativo en el que interesa profundizar en su estudio. Es así que interesó dar respuesta al cuestionamiento siguiente: ¿Qué situaciones favorecen que los estudiantes de primaria construyan la noción de número decimal en un contexto de medida?

Para dar respuesta a este cuestionamiento, se diseñó y experimentó una situación didáctica (SD)[2] ubicada en dos contextos de enseñanza: el de la medición y el de las fracciones decimales. La SD está orientada hacia la construcción de la noción *número decimal* por estudiantes que cursan el quinto grado de primaria. Desde el punto de vista didáctico, la construcción de este objeto matemático prevé el tránsito de la fracción decimal al número decimal. Dicha transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres representaciones del mismo objeto matemático: fracciones decimales del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, la notación desarrollada y la notación decimal. Con ello, lo que buscamos, no es que lo estudiantes se apropien de la definición matemática formal del concepto de número decimal, sino más bien que se inicien en conocer sus características invariantes,

[2] En la Teoría de Situaciones Didácticas, este término se usa para referirse a una Secuencia Didáctica, la cual se conforma por varias Situaciones Didácticas. En este trabajo, este término se usa para referirse a la Situación Didáctica vista como un todo, que a su vez, se conforma por tareas.

en este caso, que identifiquen que los decimales son números diferentes a los naturales y que se pueden representar tanto en forma de fracción decimal como en notación decimal. Además, que reconozcan que son una forma más práctica de expresar una fracción decimal para hacer cálculos y resolver problemas en diversos contextos.

Es así que el **objetivo** que nos planteamos en esta investigación, consistió en que los estudiantes de quinto grado de una escuela primaria rural en la Montaña Baja del estado de Guerrero:

- Construyan la noción de número decimal, mientras reconocen la relación entre la fracción decimal y su notación decimal.

Capítulo 2. Aspectos teóricos y metodológicos

La construcción de la noción de número decimal en este trabajo, se sustenta de la Teoría de Situaciones Didácticas formulada por Guy Brousseau (1986), así como de la metodología de la Ingeniería Didáctica (egr. Artigue, 1995).

Capítulo 2. Aspectos teóricos y metodológicos

2.1. Fundamentos teóricos

2.1.1. La Teoría de Situaciones Didácticas

Los fundamentos teóricos de esta investigación se enmarcan en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Brousseau (1986; Brousseau, 1997). La TSD se considera una teoría de enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que estos conocimientos no se construyen de manera espontánea. La concepción de enseñanza desde esta teoría, consiste en un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos mediante la interacción del sujeto con un medio (Lezama, 2003). Esta concepción moderna de enseñanza, va por tanto a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los problemas que les propone (Brousseau, 1997).

Con el surgimiento de la TSD, Brousseau (1994) junto con otros investigadores, reconocieron la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, que es justo el principio metodológico fundamental de la teoría: definir un conocimiento matemático mediante una *situación*, esto es, por un autómata que modela los problemas y que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima.

> *Hemos llamado "**situación**" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético"* (Brousseau, 1999, p.8).

Para la confección de su modelo teórico, la TSD toma como referencia las hipótesis centrales de la epistemología genética de Jean Piaget y al mismo tiempo sostiene que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas. También, asume que el sujeto produce conocimiento al estar en interacción con un medio, medio que le crea conflictos y resistencia, claramente especifica que *un medio sin intenciones didácticas es insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera (Brousseau,1986).*

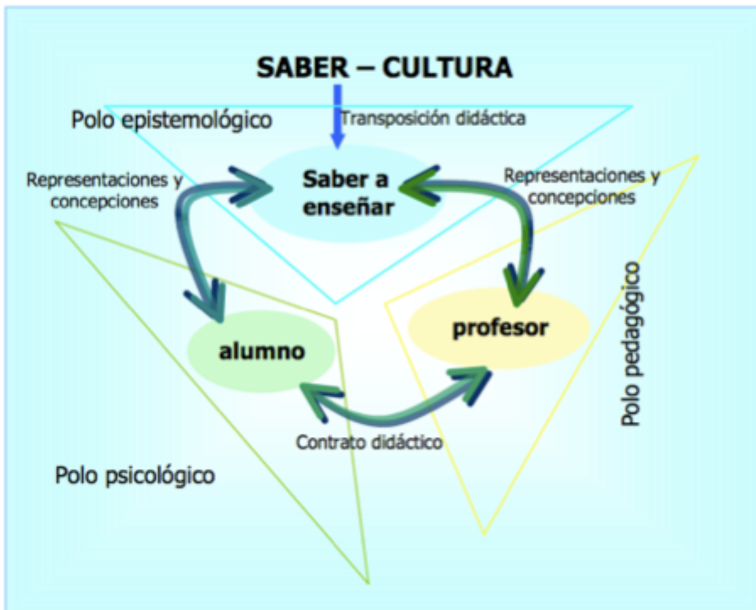
En ese contexto, Brousseau postula que:

> *El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta a través de respuestas nuevas, que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, p. 48).*

Este supuesto se basa en los principios de la psicología genética y de la psicología social, Ruiz (2010; Lezama, 2003, p. 5) los resume de la manera siguiente: “El aprendizaje se apoya en la acción. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. [Estos, constituyen elementos básicos de la obra de Piaget]. Los aprendizajes previos de los alumnos deben ser tomados en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos que se conoce en contra de los conocimientos anteriores. [Esta afirmación es una idea fundamental de la epistemología de Bachelard (1986)]. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición del conocimiento [idea básica de la psicología social genética, representada por los trabajos de la escuela de Ginebra tales como Mungny (1986)]”.

La TSD adopta un enfoque sistémico, ya que considera a la Didáctica de las Matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, a objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1986). Este enfoque sistémico es considerado por Chevallard (1991, en Ferrari 2001, p. 45) como Sistema Didáctico, denominado como el conjunto de acciones emergentes de las interrelaciones entre un docente, los alumnos y un saber matemático (véase esquema 2.1).

- El *saber a enseñar*: Representado por el objeto o conjunto de objetos con los que interactúa el alumno.
- El *alumno*: Representa al sujeto que debe construir un saber.
- El *profesor*: Es representante de un sistema didáctico, su tarea es generar las condiciones para que el sujeto se apropie del saber en juego.



Esquema 2.1. Esquema del sistema didáctico (Ferrari, 2001, p. 45)

Al tener en cuenta que el proceso de construcción de los aprendizajes se da a partir de las relaciones que se establecen entre el alumno, el saber a enseñar y el profesor, se destacan dos tipos de interacciones básicas: la interacción del alumno con un medio –este debe tener una intención didáctica, debe ofrecer resistencias y retroacciones en el estudiante- y la interacción del profesor con el alumno respecto a la primera interacción (alumno-medio).

El medio se constituye así en un elemento fundamental dentro de la noción de Situación Didáctica, ya que se conforma de todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y puede emplear con seguridad, sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado (Lezama, 2003).

2.1.1.1. Situación didáctica como objeto de estudio

La Situación Didáctica (SD) se define como el conjunto de circunstancias con las que los estudiantes interactúan en un entorno específico y que designan sus acciones (Brousseau, 1997), además se organiza de tal manera que los conocimientos matemáticos en juego surgen espontáneamente como una necesidad para resolver un problema particular (Modestou & Gagatsis, 2013).

Una SD se basa en juegos específicos, los cuales se conciben como un conjunto de entornos de tareas de resolución de problemas y tareas diseñadas para evocar una forma particular de una adaptación a-didáctica por parte de los estudiantes, con la intención de ayudarles a construir un conocimiento específico nuevo (Ruthven et al., 2009; Modestou & Gagatsis, 2013). En esta adaptación a-didáctica, los estudiantes construyen nuevos conocimientos involucrándose directamente en la resolución de un nuevo tipo de problema, perfeccionando sus conocimientos y estrategias a la luz de la retroalimentación (material y social) de un medio (Brousseau, 1997; Modestou & Gagatsis, 2013). La naturaleza a-didáctica del juego radica en el hecho de que el profesor no interviene dentro de su progreso y que los estudiantes reciben retroalimentación de la configuración de la propia situación (Modestou & Gagatsis, 2013).

Una SD también se enuncia como el conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1982; Gálvez, 1994).

En el marco de estas interacciones (docente, estudiante y medio) se plantean tres tipos de situaciones:

- ***La situación no didáctica*:** Es aquella situación en la que no hay intención de enseñar algo, ni que el alumno aprenda, por tanto, no hay contrato didáctico.
- ***La situación a-didáctica:*** Son aquellas en donde se efectúa una interacción entre el alumno y un medio, en este caso, representado por la situación que se le plantea al estudiante y que deberá resolver sin la intervención y ayuda del

docente. Esto es, que el alumno asumirá la responsabilidad de dar solución al problema propuesto por el profesor, quién al mismo tiempo, evitará ser él quien ayude o en su defecto proporcione la respuesta.

- ***La situación didáctica:*** En ellas se establecen una relación entre el docente y el alumno respecto a las relaciones a-didácticas del sujeto con el medio, este tipo de situaciones están estrechamente relacionadas con las tareas que el profesor diseña con una intención didáctica: construcción de un conocimiento matemático específico. Es aquí donde se da lugar al contrato didáctico.

Según la tipología de las situaciones didácticas se distinguen cuatro, que también se reconocen como fases de una situación. En ellas basamos el diseño que llevamos al aula:

- **Situación de acción.** Es una situación a-didáctica, en donde el estudiante interactúa con el medio a partir del uso de sus conocimientos previos. Al enfrentar al problema, analiza sus resultados, aceptando o rechazando estrategias de solución.

- **Situación de formulación.** Es una situación a-didáctica y de trabajo en grupo, todos comparten sus hipótesis construidas al enfrentarse con un problema dado, un elemento crucial es la comunicación, que permite al estudiante intercambiar información con una o varias personas, el estudiante comparte al otro/otros (estudiantes) lo que ha encontrado y este le devuelve la información para crear un modelo matemático explícito de resolución.

- **Situación de validación.** Es una situación de carácter a-didáctico, en ella se demuestran los resultados obtenidos, se validan y se comprueban. Es aquí donde el estudiante corrobora si el modelo matemático construido que propone es adecuado o no para resolver la situación. Panizza (2004) sostiene que un estudiante o grupo de estudiantes (parte proponente) debe enunciar a otro (parte oponente) sus aserciones para ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir, ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o poner otras aserciones.

- **Situación de institucionalización.** Es una situación de formalización del conocimiento matemático puesto en juego, en ella se deben sacar conclusiones, recapitular, ordenar y sistematizar los conocimientos que estuvieron detrás de la situación didáctica. Supone establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.

2.1.1.2. Conceptos básicos de la TSD

a) Evolución

Consideramos central en la Teoría de Situaciones Didácticas la idea de evolución, no sólo del alumno hacia el conocimiento del cual debe apropiarse, sino de la situación en sí misma, del medio en el que tal fenómeno sucede. Es así, que la situación didáctica es el escenario dinámico donde el alumno debe evolucionar, actuar, jugar y no sólo ser un mero receptor de datos o del discurso del profesor (Ferrari, 2001).

b) *Milieu*

En la TSD se postula que el estudiante debe interactuar con un medio (milieu), en este sentido, se entiende por *milieu* al problema matemático inicial que el sujeto enfrenta, este representa el objeto que permite al sujeto poner en juego las herramientas que tiene disponible para arribar al problema, con la intención de construir un nuevo conocimiento (matemático), modificándolo y en lo posterior utilizándolo para actuar sobre otro medio en una nueva situación.

La idea de medio es aquello que se coloca al alcance del alumno, ya sean objetos, ideas, etc., que le permiten tratar con las consignas e intervenciones del profesor, con las propuestas de sus compañeros y con el saber en sí, rompe el esquema de que sólo se trata de una relación docente-alumno considerando, en su lugar, que entran en juego las interacciones, la cultura, la institución, entre otros factores.

c) Contrato didáctico

En la masa de interacciones entre el sujeto, el docente y el medio aparece la noción de *contrato didáctico,* referido como el sistema de relaciones recíprocas que se establecen entre el docente y el estudiante, a propósito de un conocimiento matemático que se pretende enseñar. Ambos participantes comunican sus expectativas de forma explícita o implícita. Sadovsky (2005) argumenta que el contrato didáctico describe la relación que sostienen el docente y el alumno a raíz de cierto objeto matemático. En el proceso de interacción se negocian significados, se transmiten expectativas y se establecen normas que van formando en los alumnos ciertas nociones sobre lo que se puede y no se puede hacer respecto a cierta cuestión matemática. Esta serie de normas monitorean su accionar dentro de la clase. Brousseau (1986) lo define como un sistema de obligaciones recíprocas regidas específicamente por un conocimiento matemático, en el que aparecen relaciones que determinan lo que cada participante, el enseñante y el enseñado tiene la responsabilidad de producir.

d) Devolución

El proceso de devolución da lugar cuando el profesor transfiere al estudiante la responsabilidad para resolver un problema dado que implique un conocimiento matemático. Margolinas (1993; Sadovsky, 2005) define al proceso de devolución como un proceso de negociación con el alumno, que se sostiene durante todo el transcurso de la situación a-didáctica. Perrin-Glorian (1993; Sadovsky, 2005) adiciona además, que en la devolución se logra que los alumnos asuman la responsabilidad matemática de los problemas y acepten una serie de normas matemáticas de trabajo, empero, es el profesor quién debe garantizar las condiciones de esas normas matemáticas.

Desde esta postura teórica, la enseñanza es considerada como la devolución al alumno de la responsabilidad del uso y de la construcción del saber y no a la simple transmisión del saber por el profesor al estudiante.

e) Variable didáctica

Siguiendo a Briand y Chevalier (1995; Ruiz, 2003), una variable didáctica se define como un elemento de la situación que puede ser modificado por el docente, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el estudiante (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.), es decir, son aquellas elecciones fundamentales que el profesor lleva a cabo en las situaciones de enseñanza, a objeto de provocar en el estudiante un cambio de estrategia para llegar al conocimiento matemático deseado.

2.2. Aspectos metodológicos

2.2.1. Nuestra investigación

En esta investigación nos interesamos porque estudiantes matriculados en quinto grado de primaria construyan la noción de número decimal. Desde el punto de vista didáctico, la construcción de esta noción matemática está prevista al transitar de la fracción decimal al número decimal, tal transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres representaciones del número decimal:

- Fracción del tipo $n = a/10^p$
- Notación desarrollada de la fracción decimal
- Notación decimal.

Para llevar a cabo tal proceso se diseñó y experimentó una SD ubicada en dos contextos de enseñanza: en el de las fracciones decimales y en el contexto de medición (en longitudes y sobre áreas). Actividades como medir, representar y comparar fracciones decimales permiten conjuntar dos contextos de enseñanza de los números decimales.

Estos contextos son retomados de los planteamientos de Gómez (2010), específicamente para introducir la enseñanza de los números decimales. Al respecto, afirma que las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance. En este marco, las prácticas de enseñanza han utilizado diversos contextos para introducir los decimales y estos han dado lugar a concepciones o cogniciones que constituyen maneras diferentes de entenderlos. Destaca tres contextos de enseñanza de los decimales:

1. **Contexto de numeración**. Consiste en prolongar el principio de valor relativo del sistema de numeración posicional de base diez en sentido opuesto a los números naturales. Para tal efecto, la coma o punto decimal se introduce como marca para distinguir las cifras que corresponden a un orden de unidad inferior a la unidad natural (entre la parte entera y la decimal).

2. **Contexto de medida**. Los números decimales se construyen a partir de la expresión numérica de cantidades en términos de unidades y subunidades de medida del Sistema Métrico Decimal (SMD). En este contexto, la coma o punto decimal se usa para diferenciar la unidad principal de medida de las subunidades convencionales de medida. A manera de ejemplo, la medida 1.5 m se conforma de 1 m y 5 dm, o de 1 m y 50 cm.

3. **Contexto de las fracciones decimales.** Los números decimales se presentan como una nueva forma de escritura de las fracciones decimales, las cuales son consideradas como un caso particular de las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$. Así, 0.2 es otra manera de decir $\frac{2}{10}$.

Nuestra investigación es un estudio de caso y es de carácter cualitativo. Como marco metodológico se sustenta en la Metodología de la Ingeniería Didáctica, definida como un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos (De Faria, 2006).

2.2.2. Metodología de la Ingeniería Didáctica

La noción de ingeniería didáctica surge en la Didáctica de las Matemáticas a principio de la década de los años ochenta. Este término es utilizado para referirse a una forma de trabajo didáctico comparado análogamente con el trabajo de un ingeniero. Artigue (1995) la caracteriza como:

> *Cuando el ingeniero realiza un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue, 1995, p. 33).*

En el contexto de la analogía descrita, Lezama (2003) argumenta que se reconoce que los objetos con los que se trabaja en el campo de la educación, resultan ser más complejos que los considerados por la ciencia y esto obliga al ingeniero-investigador o ingeniero-profesor a hacer uso de los recursos que tiene a su alcance para lograr su objetivo.

Está metodología que nace en la Didáctica de la Matemática resalta la importancia de las *realizaciones didácticas* en clase como práctica investigativa, por lo que se le concede una doble función, por un lado se utiliza como un método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje, y por otro funciona como metodología de investigación específica.

Para los intereses de esta investigación, recurrimos a la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID) vista desde su segunda función, la cual se caracteriza por poseer un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Esta metodología se describe, en esencia, por tres aspectos: por basarse en la experimentación de clase, por su registro que lo ubica como un estudio de caso y por su validación, que es en esencia interna (basada en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori).

2.2.2.1. Fases de la Metodología de la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica como proceso experimental se desarrolla mediante cuatro fases. Su descripción toma como base el diagrama de Lezama (2003) y de forma paralela, la clasificación de Artigue (1995).

1] Fase de planeación (Análisis preliminar)

La fase de planeación o análisis preliminar contempla un conjunto de análisis que son previos al diseño de las situaciones. Por mencionar algunos:

- Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

- Análisis del campo de las restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, pero, sin perder de vista los objetivos de la investigación.

El análisis preliminar se efectúa mediante tres dimensiones:

i) *Dimensión epistemológica.* Contempla el análisis de las características asociadas al saber matemático que está en juego y sus precedentes históricos.
ii) *Dimensión cognitiva.* Asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
iii) *Dimensión didáctica.* Asociada a las características del sistema de enseñanza.

2] Fase de diseño (La concepción y análisis a priori)

En esta fase, en un primer momento se toman en cuenta las restricciones en donde se va a situar la realización didáctica (construida en la fase de planeación), y en lo posterior se determina en qué medida las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este tipo de análisis se basa en un conjunto de hipótesis, las cuales se verán confirmadas o refutadas en el momento en que se confronten los análisis a priori y a posteriori. Es aquí donde el investigador actúa sobre un número determinado de variables de comando[3]. Artigue (1995) distingue dos tipos:

- *Las variables macro-didácticas o globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- *Las variables micro-didácticas* o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería (La organización de una secuencia o de una fase).

Esta fase de planeación se realiza tomando en cuenta dos aspectos:

a) *La concepción*, se refiere al diseño de situaciones que nos ayuda a analizar los procesos de construcción del saber. Para ello se toman en cuenta los

[3] Se plantean en el capítulo 4.

resultados de estudios previos y los conocimientos con los que dispone el sujeto a quién está dirigido el diseño.

b) *El análisis a priori,* define cómo las variables didácticas van a permitir controlar los comportamientos de los estudiantes durante la clase, este tipo de análisis se realiza previamente a la experimentación. Se debe considerar lo siguiente:

- Plantear y tomar en cuenta las hipótesis.
- Tener claro lo que está en juego en cada situación (conocimiento matemático)
- Identificar las variables
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar en la resolución de las actividades.
- Planificar las intervenciones del profesor.

3] Fase Experimental (Experimentación)

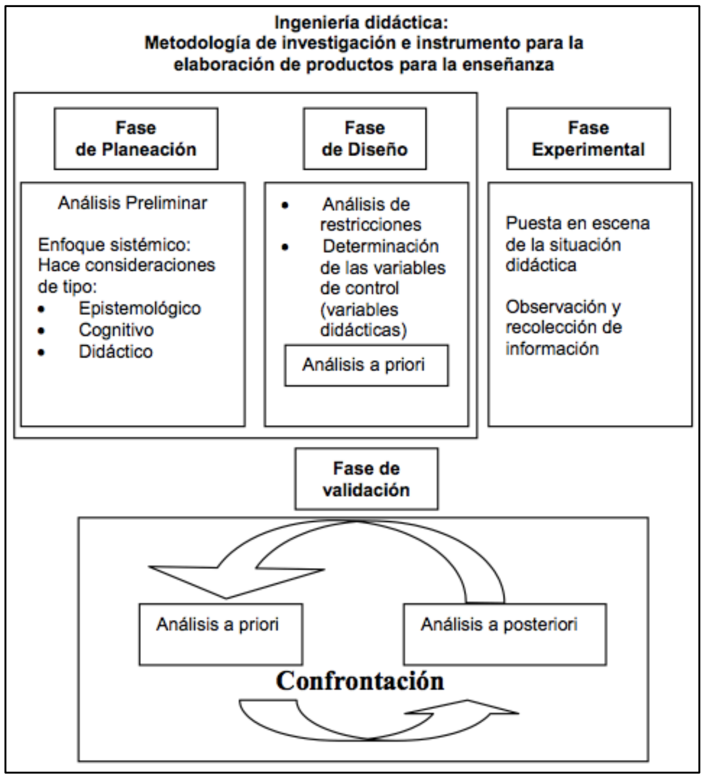
Es la puesta en marcha del diseño, inicia en el momento en que el investigador y el profesor entra en contacto con la población de estudiantes. De Faria (2006), señala que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán en la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Además recomienda hacer un análisis a posteriori local y confrontarlo con los análisis a priori en caso de que la experimentación tarde más de una sesión, esto con el fin de hacer las correcciones necesarias (adecuaciones en el diseño).

4] Fase de validación (Análisis a posteriori y validación)

Esta última fase se constituye por el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación (tercera fase), tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes y el uso de recursos externos: entrevistas, cuestionarios individuales y de grupo. También se hace presente la validación de las hipótesis planteadas inicialmente, referidas como la confrontación entre lo que se planeó (antes de la experimentación) y lo que se obtuvo (después de la experimentación).



Esquema 2.2. Ingeniería Didáctica (Lezama 2003, p. 4).

2.2.3. Análisis de las restricciones

2.2.3.1. Participantes

El estudio se llevó a cabo con 8 estudiantes (10 a 11 años) matriculados en quinto grado de una Escuela Primaria, ubicada en la Región Montaña Baja de Guerrero. La elección de la muestra se debió a los siguientes aspectos:

a) Los alumnos han estudiado los números decimales solo en un contexto de dinero, debido a la propuesta planteada en los libros de texto de matemáticas que utilizaron cuando cursaron el cuarto grado.[4]
b) Los alumnos no han estudiado la fracción decimal como noción que antecede al número decimal, sin embargo, sí han tratado con fracciones del tipo $\frac{m}{2^n}$, mediante dos significados: como división y como relación parte-todo.

2.2.3.2. Organización del tiempo y del trabajo en el aula

La experimentación de la situación estuvo prevista llevarse a cabo en cinco sesiones de trabajo, cada una con un tiempo aproximado de 60 minutos y dentro del horario escolar establecido por la institución. Para ello, se diseñó una planificación de las actividades dirigida al profesor, esta representa una herramienta que le permitirá organizar y orientar el trabajo en el aula.[5]

La organización del trabajo en el aula tomó en consideración los aspectos siguientes:

- La SD se planteó en un ambiente de lápiz y papel. Su desarrollo implicó el uso de material tangible (tiras de papel).
- La SD se constituyó de cuatro tareas[6], el desarrollo de cada una se previó en tres momentos según las situaciones a-didácticas: de acción, de formulación y validación.
- Las intervenciones del profesor se plantearon, para formalizar y fortalecer lo obtenido (situación de institucionalización) al final de cada tarea.
- La intervención de los estudiantes sobre las tareas se estableció en tres momentos: individual, en equipo y grupal. Los equipos se constituyeron de dos integrantes, además los de cada equipo fueron fijos. En la tabla 2.1 se muestran los equipos que se conformaron:

[4] Los libros de texto de matemáticas de primaria fueron editados, los ejemplares vigentes se designa como *Desafíos matemáticos* y fueron empleados a partir del ciclo escolar 2014-2015.
[5] Véase anexo 1.
[6] Vista como parte de la situación didáctica y concebida como el problema que el estudiante debe resolver.

Tabla 2.1.
Los equipos conformados.

Equipos (E)	Integrantes
E1	Monserrat y Thalía
E2	Yael y Jorge
E3	Yazmín y Erika
E4	Antonio y Daniela

2.2.3.3. Análisis de los datos

a) Recolección de la información

Para recolectar los datos y evidencias de la puesta en escena de la SD, se usaron diversos instrumentos, en este caso, las observaciones de clase, las producciones de los estudiantes y las videograbaciones. En torno a este último instrumento, se colocaron dos cámaras en el aula escolar, una fija para captar las actividades del grupo y la otra usada para grabar la actividad individual de los estudiantes.

b) Modelos de análisis

El análisis de los datos se realizó con base en los modelos que surgen de las interacciones entre los estudiantes y la SD, modelos caracterizados por Ferrari (2001). Los describe como sigue:

- ***Modelo implícito* (MI)*:*** Este tipo de modelo se presenta en el primer momento de interacción del estudiante con la situación de acción (S-A), en él surgen nociones protomatemáticas. Estas nociones son utilizadas sin ser conscientes de ellas, no se las reconoce como objetos de estudio ni como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos.

- ***Modelo explícito* (ME)*:*** Surge en el momento de la situación de formulación, en él aparecen nociones paramatemáticas, las que son utilizadas conscientemente como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos, sin ser consideradas como objetos de estudio en sí mismas.

- ***Modelo explícito justificado* (MJ)*:*** Este modelo aparece en el tercer momento de interacción: situación de validación (S-V). En él surgen nociones matemáticas, es decir, aquellos objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Son por lo tanto, objeto de estudio en sí mismas.

- ***Modelo culturalmente validado* (MV)**: Es de carácter didáctico y surge en el último momento de interacción, nos referimos a la situación de validación (S-I). En este tipo de modelo se reconoce tanto el objeto de enseñanza por parte del alumno así como el aprendizaje del alumno por parte del profesor, las nociones matemáticas se muestran en términos de conocimientos culturalmente validados.

Capítulo 3.

Análisis preliminar

Este capítulo corresponde a la primera fase de la Ingeniería Didáctica de nuestra investigación, nos referimos al análisis preliminar de la noción número decimal (foco de interés) realizada en forma sistémica a partir de tres dimensiones: el epistemológico, el didáctico y el cognitivo. Se presentan los fundamentos en los que se basa el diseño de la SD.

Capítulo 3. Análisis Preliminar

En esta fase preliminar se hace un análisis integral del objeto matemático número decimal a partir de la caracterización de tres dimensiones:

- **Epistemológica**: Se presentan los fundamentos teóricos y la referencia histórica del saber matemático que está en juego. En este caso, nos adentramos a exponer, en primer instante, la definición del concepto desde el punto de vista matemático y en seguida se presentan sus precedentes históricos más relevantes, con énfasis en el origen y su devenir histórico retomados de los planteamientos de Brousseau (1981) y de la obra *Los números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* de Julia Centeno (1997).

- **Cognitiva:** En este apartado se exponen los resultados de algunos estudios afines a la presente investigación, los cuales dejan entrever las dificultades que los estudiantes muestran al estudiar los números decimales.

- **Didáctica:** Se muestran los resultados de la revisión de la propuesta de enseñanza planteada en el *Programa de Estudios de cuarto grado* (2011) y las lecciones asociadas a la introducción de su enseñanza, inscritas en el libro de texto de matemáticas oficial, *Desafíos matemáticos cuarto grado* (SEP, 2014). La revisión en este grado escolar se debe

3.1. Dimensión Epistemológica

3.1.1. Los decimales como objeto de saber

Los números decimales suelen ser definidos como aquellos que están representados con un punto o coma, Ávila y García (2008) argumentan que cuando se hace referencia a los números decimales se opta por mencionar a aquellos que llevan punto, pero esto es apenas una respuesta parcial, puesto que los decimales son más que una escritura.

Castro (2001) afirma que los decimales son utilizados en diversos contextos y se conocen como números con coma, constituidos por dos grupos de dígitos separados por una coma, el grupo ubicado a la izquierda pertenece a la parte entera y el que está a la derecha de la coma se interpretan como números menores a la unidad.

¿Pero, qué son los números decimales? Desde la perspectiva matemática, Centeno (1997) declara que el número decimal (como objeto de saber) tiene su significado ligado al número real, por tanto, un número real racional es un número decimal, si y solo si, se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{d = n \cdot 10^{p} \quad donde\ \ n\ \ y\ \ p\ \in Z}$$

De igual modo, expone que el número decimal es un número racional que posee al menos una escritura en forma de fracción decimal (Centeno, 1997), entendiendo a la fracción decimal como $n = \frac{a}{10^{p}}$, el cual tiene como denominador a una potencia de 10. Por ejemplo:

$$\mathbf{\frac{5}{10}}, \qquad \mathbf{\frac{28}{100}}, \quad \mathbf{\frac{3456}{1000}}$$

Entonces, al ser $n = \frac{a}{10^{p}}$ solo una de las formas de representación de los decimales, tenemos que para los tres casos existe otra representación: la notación decimal. Atendiendo a la definición anteriormente planteada se considera números decimales a las siguientes expresiones decimales finitas:

$$\mathbf{\frac{5}{10} = 0.5} \qquad \mathbf{\frac{28}{100} = 0.28} \qquad \mathbf{\frac{3456}{1000} = 3.456}$$

En el caso de aquellas fracciones que no son decimales se representan con expresiones decimales infinitas, este tipo de expresiones no corresponden a los números decimales. Por ejemplo:

$$\mathbf{\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots} \qquad \mathbf{\frac{4}{7} = 0.571428 \ldots} \qquad \mathbf{\frac{2}{9} = 0.2222 \ldots}$$

3.1.2. Reseña histórica de los decimales

Los números decimales surgen ante la necesidad de medir y calcular cantidades que no pueden representarse con números naturales. Brousseau (1981) señala que la noción de decimal ha evolucionado a través de la historia, y que para que hayan logrado el estatus de objeto de enseñanza que tiene actualmente fue objeto de transición desarrollada en tres facetas, para describirlas se basó en la categorización realizada por Chevallard (1985).

El decimal como:

1. **Noción paramatemática**. Es aquella estructura utilizada en la práctica sin ser reconocida ni como objeto de estudio ni como herramienta. En este caso, algunas de las propiedades de los decimales eran utilizados para resolver problemas cotidianos en actividades del comercio, pero no eran reconocidos como herramientas ni entes matemáticos.

2. **Noción protomatemática.** Se le concede a los decimales cuando conscientemente son utilizados como una herramienta para resolver otros problemas.

3. **Noción matemática.** Son objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas, además se pueden utilizar como instrumento para el estudio de otros objetos.

Con base en estas tres nociones presentamos los precedentes históricos de los decimales.

Los números decimales surgen como una noción paramatemática ante la necesidad de facilitar los cálculos matemáticos con números menores a la unidad, específicamente, las fracciones. En el siglo VIII, los chinos introdujeron la representación de números inferiores a la unidad, tal como las fracciones decimales (Boyer, 1999). Al respecto Brousseau (1981) señala que los egipcios (-2500) y los babilonios (-1900) también desarrollaron sistemas de numeración con los que describieron fracciones designadas y aproximadas.

Pero no es hasta cuando se origina el sistema de posición indio y el árabe -mejor conocidos como sistema de numeración decimal de posición (base diez)- cuando se intensifica la descripción de los decimales bajo dos principios (Centeno, 1997):

- El principio de valor de posición
- La extensión del principio de posición a la escritura de números menores que la unidad.

Al-Uglidisi fue un matemático árabe quien recopiló los conocimientos sobre la aritmética, en un su obra presentó una forma de utilizar las fracciones decimales empleando una notación parecida a la que utilizamos actualmente, por ejemplo: $2`35$, que se lee 2 unidades y 35 de cien.

Al-kashi, también de origen árabe, fue astrónomo y matemático que en su obra intitulada *La llave de la aritmética* introdujo las fracciones decimales concebidas como fracciones compuestas de las potencias sucesivas de un décimo, a las que llamó décimos, segundos decimales, terceros decimales, etc., por tanto, fue el primero en explicar una teoría de las fracciones decimales y de la noción de número decimal. En este sentido, los trabajos de Al-kashi marcaron el proceso de evolución de la noción del decimal, convirtiéndola así en una noción protomatemática, debido a que en sus aportes fueron descubiertos, reconocidos y usados conscientemente a pesar de no estar bajo el control de una teoría que fijará su definición y sus propiedades.

No fue hasta en 1585 cuando Simon Stevin les concede el carácter de noción matemática con su libro *La Disme*, en él explica con detalle cómo se puede operar fácilmente con los números decimales sin recurrir al uso de las fracciones. Su objetivo fue mostrar que los cálculos y las medidas pueden simplificarse con la utilización de este tipo de números.

En su escrito plantea cuatro definiciones y los procedimientos para operar con los números decimales (adición, sustracción, multiplicación y división).

Definiciones:

1. *La Disme* es una aritmética que permite efectuar todas las cuentas utilizando solo números enteros.

2. Cualquier número que vaya al principio se dice comienzo, y su signo es 0 (correspondiente a la parte entera una progresión decimal).
3. La progresión decimal después de la parte entera obedece a la razón 1/10. La clasificación de las posiciones decimales se plantean como sigue:

- **1/10 se llama primera y se designa por** ①
- **1/100 se llama segunda y se designa por** ②
- **1/1000 se llama tercera y se designa por** ③

.

.

- **Los números representados por** ① **,** ② **,** ③ **, …se llaman números decimales.**

Ejemplo:

2 ① **3** ② **4** ③

[2 primeras, 3 segundas, 4 terceras]

Las reglas que propone Stevin para operar con los decimales son las que utilizamos actualmente.

Debido a la complejidad en los cálculos al utilizar la notación descrita en La Disme, en 1620 fue sustituida por John Naiper, quien propone el uso de una coma para separar la parte entera de la decimal[7], notación que utilizamos actualmente. La expansión del uso de los números decimales en el mundo se debe al crecimiento del comercio, al origen de los bancos y al establecimiento del sistema métrico decimal.

[7] En algunos países se utiliza la coma y en otros el punto para representar expresiones decimales, con el uso de los ordenadores el uso del segundo signo ha incrementado. En nuestro país se hace uso del punto decimal, por lo que en este trabajo nos regiremos bajo esa connotación.

Desde Naiper hasta la actualidad:

0.234 [cero enteros, doscientos treinta y cuatro milésimos]

3.2. Dimensión cognitiva

Brousseau (1981) afirma que en la enseñanza y aprendizaje de los decimales surgen obstáculos de tipo epistemológico, didáctico y ontogénico, estos afianzan en el estudiante una concepción errónea del número decimal debido a que al iniciarse en el estudio de los decimales solo extiende el conjunto de los números naturales, provocando así que se actúe con los decimales como con los naturales, lo anterior es un ejemplo de un obstáculo de carácter epistemológico. Respecto a los didácticos, son aquellos que dependen de la elección de un proyecto del sistema educativo, específicamente, los que surgen a partir de lo establecido en el currículum de enseñanza. En cuanto a los ontogénicos responden a las características neurofisiológicas y cognitivas del sujeto.

Konic (2010) reporta al menos cuatro tipos de dificultades que muestran los estudiantes al tratar con los números decimales:

1. El concepto de número decimal.
Se consideran tres aspectos:

a) *El reconocimiento del número decimal.* El estudiante concibe a los números que están después del punto decimal solo como una extensión de los números naturales y no como números que tienen propiedades específicas. Al describirlos o caracterizarlos muestran ambigüedades.
b) *Valor de posición.* Atañe a los conflictos asociados a la compresión del valor de cada cifra escrita después del punto decimal.

Ejemplo: en el número 2.45, afirman que en la posición de las centésimas el número tiene mayor valor porque son cien y en el de las décimas solo son diez, por lo tanto el 5 vale más que el 4. Entonces, se concretan en concebir la progresión de posición decimal como sigue: del punto a la izquierda cada cifra se multiplica por 10 y del punto a la derecha se aplica la misma regla por igual.

c) *Conflictos con el cero.* Debido a que los estudiantes ya cuentan con conocimientos aritméticos asociados a los números naturales, al usar los decimales aplican las mismas reglas. En este contexto, hasta el momento los niños saben que el cero indica la ausencia de cantidad según su valor posicional. También reconocen que cada vez que se escribe un cero a la derecha de cualquier número se tiende a cambiar la posición de cada cifra y el valor aumenta, por lo tanto la cantidad que representa también aumenta. En cambio, si el cero se coloca a la izquierda no tiene valor posicional y no afecta la cantidad. En los decimales esta regla funciona a la inversa pero parece no comprenderse.

Ejemplo: *En los naturales*, el estudiante afirma que el cero tiene diferente valor en los números 02 y 20, en el primero el 0 no vale porque está escrito a la derecha del 2, y en el segundo, el 0 indica que no hay unidades y el 2 ha cambiado de posición y de valor, ahora son decenas.
En los decimales, el estudiante afirma que el número 0.2 es igual a 0.02 debido a que considera que el cero a la izquierda del 2 no tiene valor (como en los naturales). También afirman que el número 0.2 es menor a 0.20 porque el 20 es mayor que el 2, por tanto, siguen procediendo como con los naturales.

2. La escritura y/o representación

Las dificultades se describen mediante dos aspectos:

a) *Distinción entre número y representación.* Los errores producidos por los estudiantes radican en que no distinguen diferentes representaciones de un mismo número, sino que las consideran como dos números diferentes a partir de su escritura. De esto, surgen consideraciones como “un número decimal es sinónimo de expresión decimal de un número real porque ambos comparten una misma escritura”. Por el contrario, consideran que una fracción decimal y su representación con punto decimal son dos entes que no tienen ninguna relación entre sí.

Ejemplo: consideran que, la expresión $\frac{5}{10}$ no se puede representar como 0.5 porque argumentan que no existe alguna relación entre ambos, simplemente son vistos como dos números diferentes, el primero como una fracción y al segundo como un número decimal.

b) Escritura. Al respecto, tienden a relacionar la expresión verbal de cada una de las cifras posicionadas después del punto con el valor de posición de cada cifra escrita a la derecha. En este caso, asocian a los milésimos con los millares, a los décimos con las decenas y los centésimos con los centenas.

Ejemplo: cuando se les indica escribir 3 milésimos, lo realizan como sigue: 0.3000 o 3000.0

3. Propiedades

a) *Orden.* Los estudiantes consideran que 0.5<0.25 porque argumentan que el 25 es un número mayor al 5 por lo tanto el primer número es menor.

b) *La densidad.* Afirman que cuando se habla del sucesor y antecesor de un número decimal se equipara con los naturales.

Ejemplo: consideran que no es posible hallar otro número entre el número 0.4 y el 0.5 o entre el 0.3 y el 0.4, por lo que afirman que el antecesor de 0.4 es 0.3 y el sucesor es 0.5.

4. Las operaciones

Al operar con los decimales se encuentra lo siguiente:

a) *La adición y sustracción.* En el caso de la suma, los estudiantes suman solo la parte decimal y por otro lado la parte entera.

Ejemplo: en la suma de 0.70 + 0.40 + 0.20 = 0.130 , sumaron enteros con enteros y decimales con decimales.

También, otro de los procedimientos utilizados comúnmente por los estudiantes obedece a transformar los números decimales para que tengan el mismo número de cifras después del punto, para ello se añade ceros al número con menos cifras y se opera como con los naturales. Esta forma de actuar surge a raíz de concebir a los decimales como naturales (Cid, Godino y Batanero, 2004).

> **Ejemplo:** en la suma 0.23 + 0.435, aumentan un cero al primer número, operan comenzando por la última cifra de la derecha de la parte decimal, y se deja el punto decimal en su lugar (entre la tercera y la cuarta columna).

$$\begin{array}{r} 0.230 \\ + \\ 0.435 \\ \hline 0.665 \end{array}$$

b) *La multiplicación y la división.* En su mayoría, los estudiantes justifican que al multiplicar dos números, el producto que se obtenga debe ser mayor. En el caso de la división, argumentan que al dividir, el resultado tiene que ser menor que el dividendo. Sin embargo, con los decimales se espera lo contrario puesto que son menores a la unidad.

Algunos ejemplos (Centeno, 1997):

a) 3.15 x 10 = 30.150	c) 2.3 x 2.3 = 4.9	e) 2.12 : 2 = 1.6
b) 3.15 x 10 = 3.150	d) 4 x 2.3 = 8.12	

3.3. Dimensión didáctica

Para dar sustento a la propuesta que implementamos en la presente investigación, en este apartado nos enfocamos en revisar la propuesta de enseñanza planteada en el programa de estudio vigente y el libro de texto de matemáticas *Desafíos matemáticos. Cuarto año*[8], puesto que es en este grado en el que se inicia el estudio de los números decimales.

[8] Los libros Desafíos matemáticos fueron implementados recientemente en el ciclo escolar 2014-2015.

3.3.1. La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el currículum actual

El estudio de las matemáticas en la escuela primaria adopta un enfoque didáctico orientado al logro de los aprendizajes a través de secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos, les permita reflexionar, encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Estas situaciones deberán permitir el uso de las herramientas matemáticas que se pretenden estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir conocimientos y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje (SEP, 2011).

3.3.1.1. Los números decimales en el Programa de Estudio cuarto grado

La organización de los aprendizajes referentes a la asignatura de matemáticas se dosifican por grado, campo formativo y eje temático, son tres: *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, *Forma, espacio y medida* y *Manejo de la información*. El objeto matemático en el que nos hemos interesado se ubica en el primer eje y con su estudio se espera que los estudiantes logren:

- Leer, escribir y comparar números decimales.
- Resolver problemas aditivos con números decimales.
- Resolver problemas que impliquen multiplicar o dividir números decimales entre números naturales, utilizando algoritmos convencionales.

3.3.1.2. Los números decimales en el libro de texto de primaria

Uno de los apoyos didácticos que el profesor utiliza en los procesos de enseñanza-aprendizaje es el libro de texto, puesto representa la sistematización del currículum, en consecuencia, de los saberes y conocimientos formales. En la mayoría de los salones de clase son las herramientas físicas más íntimamente relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje. Su papel exacto de mediación puede variar de acuerdo a las características específicas de las diferentes naciones, los sistemas educativos y en las aulas (Valverde et al., 2002). González y Sierra (2004) argumentan que la implementación y utilización del libro de texto en el aula de matemáticas se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, ejerciendo para ello diferentes papeles: como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver.

Dado que el libro de texto de matemáticas es uno de los recursos que la mayoría de los profesores utilizan en las prácticas de enseñanza, se analizó la presentación desde el punto de vista didáctico, del concepto de número decimal. Para ello, se revisó el libro oficial de matemáticas de cuarto grado de primaria, denominado *Desafíos matemáticos cuarto grado* (SEP, 2011).

Si bien el estudio sobre la noción de número decimal se llevó a cabo con estudiantes de quinto grado, interesó analizar el libro de texto de matemáticas de cuarto en razón de que es en este grado, que se introducen, mediante la fracción decimal, la cual es concebida a partir de dos de sus significados: como parte todo y como medida.

Del análisis del libro de texto de matemáticas de cuarto grado, se reconoce una estructura general: a) Un índice, en el que se presentan las lecciones por bloques; b) Una presentación, en la que se introduce al estudiante al libro, del rol que desempeñará al interactuar con las actividades, y; c) se reconocen aspectos asociados a procesos de resolución de problemas.

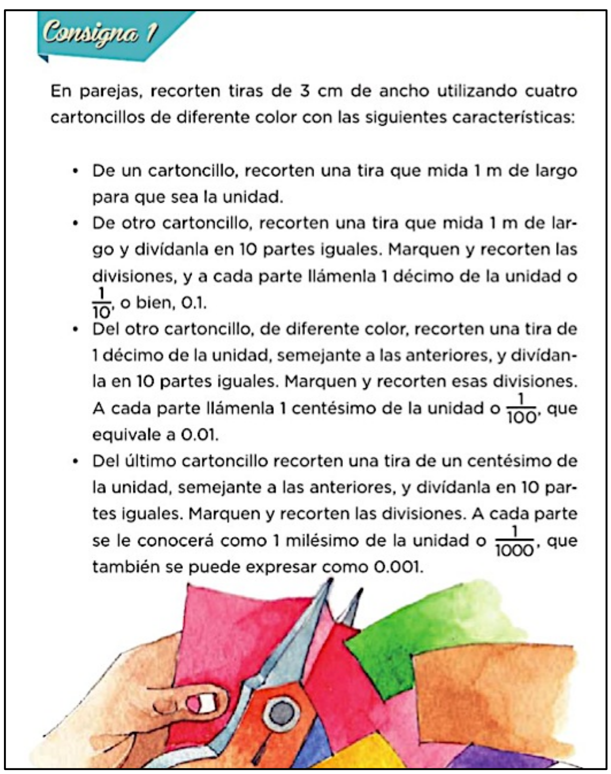
El libro se conforma de 106 lecciones, distribuidas a lo largo de los cinco bloques que lo componen. Cada una contiene una consigna, que indica la actividad a realizar. Y tiene como fin, regular las acciones y proceder del estudiante (algunas lecciones formulan dos consignas). El estudio explícito de los números decimales en este grado se apoya de siete lecciones, distribuidas a lo largo de los bloques. De ellas, dos son las que se abocan a su introducción, son las lecciones 4 y 5 ubicadas en el primer bloque. Estas dos lecciones sustentan el análisis que se muestra a continuación.

a) Bloque I: Lección 4

Esta lección se titula “Décimos, centésimos y milésimos”. En ella se introduce al estudiante a la escritura decimal a partir de las fracciones decimales, específicamente del tipo $n = \frac{a}{10^p}$ (décimos, centésimos y milésimos), tales como: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$, y el uso de la medida. Ubica al estudiante a relacionar la fracción decimal con la notación decimal mediante el uso de las subunidades del metro (unidad de medida del SMD) y se desarrolla en un ambiente de material tangible. Consta de dos consignas:

Consigna 1. Se indica al estudiante una serie de acciones que debe seguir al pie de la letra. Se le ubica a trabajar con cuatro tiras de papel de diferente color a fin de que las divida como sigue:

- La primer tira debe medir 1 m de largo por 3 cm de ancho.
- La segunda también debe tener la misma longitud, pero se tiene que dividir en 10 partes iguales y se les indica que cada parte se llama un décimo, $\frac{1}{10}$ o 0.1.
- En la tercer tira se pide una longitud igual a una décima parte de la anterior, a su vez, se tiene que subdividir en 10 partes iguales. Se indica que cada una de las partes obtenidas se llama un centésimo, $\frac{1}{100}$ de la unidad o 0.01
- Respecto a la última, debe medir una centésima parte de la primera y se pide subdividirla en 10 partes iguales, a cada una se le llama un milésimo, $\frac{1}{1000}$ de unidad o 0.001.



Consigna 1

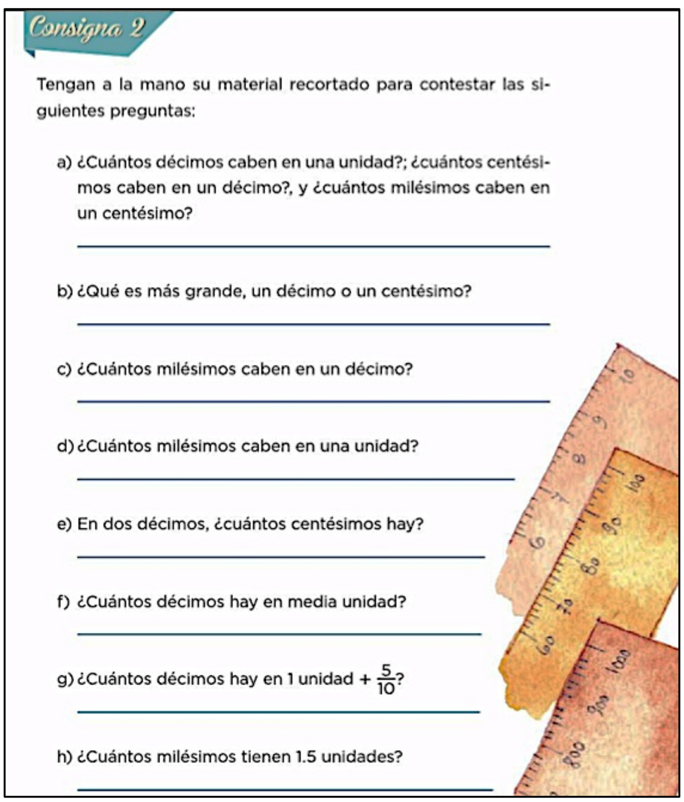
En parejas, recorten tiras de 3 cm de ancho utilizando cuatro cartoncillos de diferente color con las siguientes características:

- De un cartoncillo, recorten una tira que mida 1 m de largo para que sea la unidad.
- De otro cartoncillo, recorten una tira que mida 1 m de largo y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten las divisiones, y a cada parte llámenla 1 décimo de la unidad o $\frac{1}{10}$, o bien, 0.1.
- Del otro cartoncillo, de diferente color, recorten una tira de 1 décimo de la unidad, semejante a las anteriores, y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten esas divisiones. A cada parte llámenla 1 centésimo de la unidad o $\frac{1}{100}$, que equivale a 0.01.
- Del último cartoncillo recorten una tira de un centésimo de la unidad, semejante a las anteriores, y divídanla en 10 partes iguales. Marquen y recorten las divisiones. A cada parte se le conocerá como 1 milésimo de la unidad o $\frac{1}{1000}$, que también se puede expresar como 0.001.

Figura 3.1. Los números decimales como medidas de longitud.

Consigna 2. Se plantea al estudiante dar respuesta a interrogantes articuladas a la actividad previa (consigna 1). El objetivo es que establezca equivalencias entre las diversas escrituras de los números decimales; que comprendan la relación entre las representaciones y las longitudes de las tiras de papel construidas a partir de subdividir el metro. Se presentan ocho preguntas:

- La pregunta correspondiente al inciso a) está orientada a que el estudiante reconozca que diez décimos conforman una unidad (en este caso es el metro), que diez centésimos conforman un décimo y que diez milésimos un centésimo.
- En el inciso b) se favorece la comparación entre dos medidas, una representada en términos de décimos y la otra en centésimos.
- En la c) se espera que se establezca una equivalencia entre milésimos y centésimos, en términos de cuántos caben.
- Las otras interrogantes requieren establecer equivalencias entre décimos, centésimos, milésimos y la unidad de medida. También consideran comprender las equivalencias entre diferentes escrituras.


Consigna 2

Tengan a la mano su material recortado para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos décimos caben en una unidad?; ¿cuántos centésimos caben en un décimo?, y ¿cuántos milésimos caben en un centésimo?

b) ¿Qué es más grande, un décimo o un centésimo?

c) ¿Cuántos milésimos caben en un décimo?

d) ¿Cuántos milésimos caben en una unidad?

e) En dos décimos, ¿cuántos centésimos hay?

f) ¿Cuántos décimos hay en media unidad?

g) ¿Cuántos décimos hay en 1 unidad + $\frac{5}{10}$?

h) ¿Cuántos milésimos tienen 1.5 unidades?

Figura 3.2. Equivalencia entre fracciones decimales

Reflexiones sobre el análisis de la lección 4

En esta lección, la introducción de la noción número decimal se desarrolla en un contexto de medición de longitudes, mediante el establecimiento de equivalencias entre las subunidades (representadas como fracciones decimales y en notación decimal) y la unidad (metro). La propuesta podría sustentarse en la medición porque es una práctica cotidiana que nos permite resolver problemas del entorno cultural y social. Sin embargo, consideramos que como lección de introducción carece de elementos didácticos, se rescatan los siguientes puntos:

I. Las tiras que miden $\frac{1}{100}$ de longitud deben dividirse y recortarse en diez partes iguales para obtener milésimos de la unidad, recortar, representa una estrategia compleja puesto que se obtendrán partes muy pequeñas y al superponerlas o compararlas con otras tiras de diferente medida surgirán complicaciones o errores de medición.

II. Las actividades planteadas en la lección no profundizan en la comprensión de la equivalencia entre la fracción decimal y los números decimales, ya que se abordan de manera rápida y superficial al indicar que una parte de la tira se puede llamar de una u otra forma. Bajo estas consideraciones, externamos que el estudiante difícilmente comprenderá que $\frac{1}{10}$ sea igual a 0.1 o que $\frac{1}{100}$ sea igual a 0.01.

b) Bloque I: Lección 5

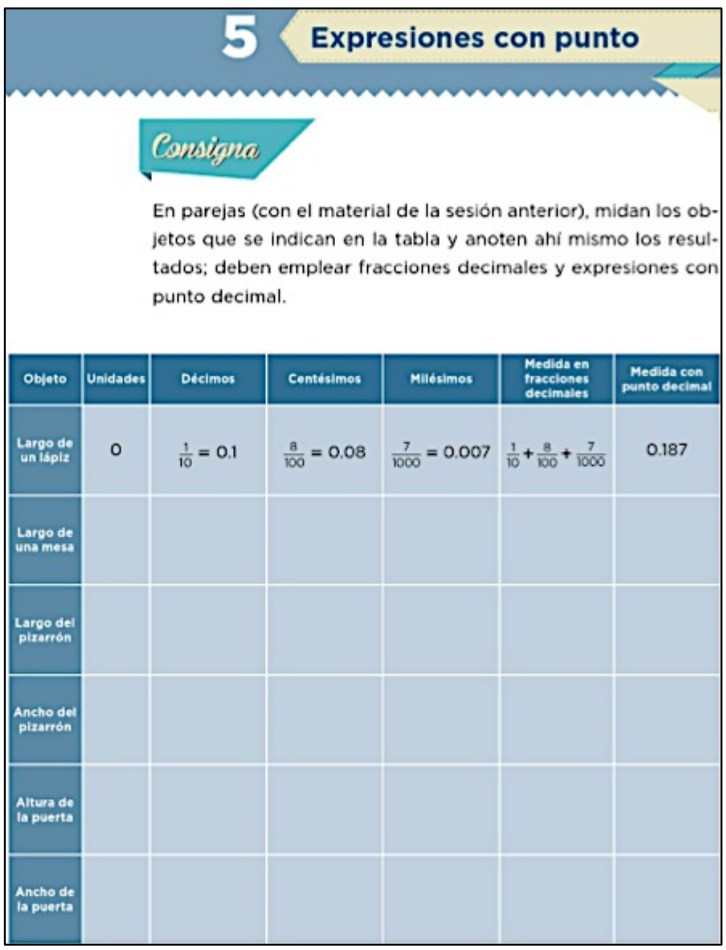
Esta lección tiene como propósito que los estudiantes, a través de la medición, establezcan relaciones de equivalencia entre una representación fraccionaria decimal y la notación decimal.

Consigna 1. Se indica al estudiante medir objetos con las tiras de papel utilizadas en la lección anterior. Los objetos a medir se escriben en una tabla de doble entrada, las medidas se expresan tanto en forma de fracción decimal como en notación decimal.

Los elementos considerados en la tabla son:

- **Los objetos a medir**, se proponen a los inmediatos del salón de clases (mesa, pizarrón, puerta).

- **Las unidades**, corresponde a la cantidad de metros enteros contenidos en una longitud (largo de una mesa, ancho del pizarrón).
- **Los décimos, centésimos y milésimos**, asociados a las medidas menores a la unidad, es decir, a las subunidades del metro y deben ser representados mediante fracciones decimales y notación decimal.
- **Medidas en fracciones decimales**, considera la suma de las medidas de los objetos en términos de unidades, décimos, centésimos y milésimos, respectivamente, tiras de un metro, una tira de $\frac{1}{10}$ de metro, otra de $\frac{1}{100}$ de metro y una de $\frac{1}{1000}$ de metro.
- **Medida con punto decimal**. Escritura con punto decimal (notación decimal) correspondiente a la suma de las medidas obtenidas en décimos, centésimos y milésimos.



5 Expresiones con punto

Consigna

En parejas (con el material de la sesión anterior), midan los objetos que se indican en la tabla y anoten ahí mismo los resultados; deben emplear fracciones decimales y expresiones con punto decimal.

Objeto	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Medida en fracciones decimales	Medida con punto decimal
Largo de un lápiz	0	$\frac{1}{10} = 0.1$	$\frac{8}{100} = 0.08$	$\frac{7}{1000} = 0.007$	$\frac{1}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$	0.187
Largo de una mesa						
Largo del pizarrón						
Ancho del pizarrón						
Altura de la puerta						
Ancho de la puerta						

Figura 3.3. Diferentes representaciones del número decimal

Reflexiones sobre la revisión de lección 5

Con base en el análisis de la lección 5 del libro de texto de matemáticas de cuarto grado de primaria, se reconoce que la introducción de la escritura decimal se plantea mediante la transición de la escritura fraccionaria decimal a la notación con punto decimal. Al respecto se observó lo siguiente:

I. Se hace evidente la ausencia de una explicación o elementos que ayuden al estudiante a comprender que la escritura fraccionaria de $\frac{1}{100}$, es igual a 0.01 (escritura decimal) o que $\frac{8}{100}$, es igual a 0.08.
II. En la penúltima columna de la tabla se debe registrar la suma de las medidas expresadas con fracciones decimales, y en la que sigue (última columna) se reduce a escribir la notación con punto decimal, al pasar de la primera escritura a la segunda el estudiante podría presentar confusiones relacionadas a la incomprensión de las equivalencias entre ambas formas de representar a un mismo número.

Reflexiones sobre el análisis al libro de texto de cuarto grado de primaria

El análisis al libro de texto de matemáticas de cuarto grado de primaria en nuestro país, reporta que son dos las lecciones que se dedican al estudio de los números decimales. Se introducen mediante la fracción decimal, concebida a partir de dos de sus significados: como parte todo y como medida. La medición en este caso, es parte central de ambas lecciones, ya que el estudiante mide y expresa esas medidas mediante fracciones decimales y notaciones decimales. Con esto, particularmente se asume que la forma de introducirlos en este grado escolar, se fundamenta en los acercamientos que tienen los estudiantes con las prácticas de medir y usar esas medidas tanto en contextos escolares como extraescolares, de manera más tangible, el uso de medidas de longitud. Durante la revisión se reconocieron algunas debilidades del diseño que podrían intervenir en la comprensión del número decimal, la más destacada tiene que ver con la información que se da en la consigna de la lección 4, puesto que se afirma que pueden escribir $\frac{1}{10}$ o bien 0.1, también $\frac{1}{100}$ o bien 0.01, sin que previamente haya un proceso que lleve al estudiante a comprender que ambas escrituras representan lo mismo.

Capítulo 4. Diseño de la Situación Didáctica

En este apartado presentamos el análisis detallado de la situación didáctica previo a su puesta en escena. Para ello, se contemplan aspectos como las hipótesis sobre las cuales versa la ingeniería didáctica, las variables macro-didácticas y las micro-didácticas, la descripción de las tareas, su intención didáctica y los posibles procedimientos que los estudiantes podrían utilizar al realizar cada una.

Capítulo 4. Diseño de la Situación Didáctica

4.1. Hipótesis

Para llevar a cabo la investigación, partimos de dos hipótesis planteadas de la siguiente forma:

a) La noción del número decimal se construye cuando los estudiantes comprenden la expresión en notación decimal de la fracción decimal.

b) Los estudiantes comprenden la noción de número decimal como expresión de medidas, mediante la comparación y representación de magnitudes continuas.

4.2. Variables didácticas

Variables macro-didácticas

Para el diseño de la SD y logro del objetivo planteado inicialmente, se han determinado las variables macro-didácticas:

- Introducción del número decimal a partir de las fracción decimales, y no sólo como extensión del sistema decimal de numeración.
- Introducción de los números decimales como medidas, antes que como números abstractos, o puntos en la recta.
- Utilizar magnitudes continuas (longitud y superficie), no solo para introducir a los decimales sino como referente empírico que permite verificar anticipaciones hechas en el nivel numérico.

Variables micro-didácticas

Se determinaron las variables micro-didácticas en cada una de las tareas que conforman la situación, esto con el fin de optimizar los procesos de adquisición del aprendizaje deseado. Se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.2
Variables micro-didácticas de la Ingeniería Didáctica

Tarea	Variable micro-didáctica
Tarea 1.	***V1:*** Fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 1.$ ***V2:*** Fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 2.$
Tarea 2.	***V1***: Fracciones de la forma $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 1,2$ como medida de longitud. ***V2***: Fracciones decimales de la forma $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 1,2$ como medida sobre superficie.
Tarea 3.	***V1***: Fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3.$
Tarea 4.	***V1:*** Notación desarrollada de la fracción decimal. ***V2:*** Notación decimal de la fracción decimal.

4.3. La situación didáctica (SD)

Desde el punto de vista didáctico, la situación didáctica apuntó a que los estudiantes construyan la noción de número decimal al establecer una relación entre la fracción decimal y la notación decimal. Tal relación emerge al transitar de la primera representación a la segunda, a su vez, la transición comprendió el proceso progresivo que aborda el estudio de tres nociones matemáticas: se inicia con el estudio de las fracciones decimales del tipo $n = \frac{a}{10^p}$ (décimos, centésimos y milésimos), en seguida, la notación desarrollada de la fracción decimal y se concluye con la notación decimal (escritura con punto). Cabe destacar que en este proceso de construcción, se abordan solo algunos aspectos del número decimal, tal como el concepto, valor posicional, su escritura y su representación.

La SD se ubicó en el contexto de la medición (de longitud y de áreas) y en el contexto de las fracciones decimales, de esta manera, el estudio de los números decimales se aborda mediante la representación de fracciones decimales como medidas de longitud y de superficies. También se plantearon acciones específicas como la comparación, la representación gráfica y la representación numérica.

Estructura de la SD

El tránsito de la fracción decimal a la notación decimal se llevó a cabo mediante tres fases:

Fase I. En esta fase, los estudiantes representan y comparan fracciones decimales en un contexto de medición tanto de longitudes como de áreas.

Fase II. Ubica a los estudiantes a utilizar la notación desarrollada de las fracciones decimales como recurso de descomposición numérica.

Fase III. En esta tercera fase transitan de la fracción decimal a la notación decimal, asumidas como dos formas de representar a los números decimales.

La tabla 4.3 muestra de manera general la estructura de la SD, se plantea como sigue:

Tabla 4.3
Estructura de la SD

Situación Didáctica (SD)		
FASE	**TAREA**	**OBJETIVO**
Fase I	T1	Representar fracciones decimales ($\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$) como magnitudes continuas (longitud y superficies).
	T2	Comparar fracciones decimales ($\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$) y validar resultados mediante la representación de medidas, usando materiales tangibles en diferentes contextos de medición.
Fase II	T3	Representar fracciones del tipo $\frac{1}{1000}$ sobre superficies y en notación desarrollada.
Fase III	T4	Representar fracciones decimales equivalentes utilizando la notación desarrollada, esto es, descomponer la fracción decimal en expresiones aditivas y transitar a la notación decimal.

La situación didáctica está constituida por cuatro tareas, cada una sitúa al estudiante a resolver el problema planteado, en este proceso de interacción (entre el sujeto y la tarea) él debe tomar decisiones y estrategias de solución al accionar, formular procedimientos y validar resultados. Los aspectos a considerar para el diseño de la SD son: ***tarea***, ***meta, actividad***, ***noción matemática*** (de objeto, relación y operación), ***elemento de la situación*** (S-A, S-F, S-V y S-I), ***modelo*** (MI, ME, MJ, MV) y lo ***que se espera*** en términos de aprendizaje. En este sentido y el marco de la ingeniería, en la tabla 4.4 se muestran los elementos que conforman el diseño que fue empleado en el aula:

Tabla 4.4

Aspectos para el diseño de la SD

Tarea (T)/Etapas (E)	Actividad	Noción matemática	Elementos de la situación	Qué se espera
T1 Es una tarea realizada a modo de juego. Los estudiantes (jugadores) deben determinar y representar medidas de longitud mediante fracciones decimales. El juego se realiza con dos tiras de papel. Una de ellas graduada en fracciones decimales, que representa la unidad de medida (de color azul y mide 1 m) y otra sin graduar (tira verde), la cual mide menos que la tira azul y la de cada equipo tiene una medida diferente. **Etapas del juego:**	**A1.** Representar medidas de longitud mediante fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, $con\ a, p\ \in Z.$	Noción (objeto) fracciones decimales: $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$		
E1: Los estudiantes determinan cuánto mide la tira sin graduar, apoyándose de la tira graduada.			*Situación de acción:* Determinación de medidas de longitud a partir de una unidad de medida específica (una tira de un metro, graduada en fracciones decimales). ***Surge un modelo implícito*** Uso implícito de las fracciones decimales para representar de manera verbal medidas de longitud.	Que expresen medidas de longitudes desconocidas mediante fracciones decimales.

E2: Una vez representada la medida de la tira, deben codificarla en un mensaje escrito. Posteriormente, intercambian mensajes con otro compañero (jugador de otro equipo).			*Situación de formulación:* Codificación y decodificación de mensajes escritos en lenguaje común. ***Surge un modelo explícito*** Uso explícito de las fracciones decimales para comunicar medidas de longitud en lenguaje común y/o matemático, de manera verbal o escrita.	Que comuniquen en lenguaje común (escrito) fracciones decimales.
E3: La medida decodificada de la tira modelo la usarán para construir otra tira de papel. Comparan la tira construida, con la tira modelo. Gana quien construye su tira con la misma medida que la tira modelo.			*Situación de validación:* Comparación de la tira modelo con la tira que construyeron y con la fracción decimal decodificada en el mensaje. ***Surge un modelo explícito justificado*** Uso explícito justificado de las fracciones decimales como resultado de la comparación de	Que expresen en fracción decimal la medida de la tira construida.
			Situación de institucionalización: Institucionalización del concepto de fracción decimal y sus diferentes usos. ***Surge un modelo culturalmente validado*** Uso de la fracción decimal de la forma $n = \frac{a}{10^p},\ con\ a, p\ \in Z$ como conocimiento socialmente admitido.	Se espera que el profesor dirija una discusión con los estudiantes en torno a las características de las fracciones decimales acerca de usos para representar medidas, este caso representan las subunidades de un metro. a) $\frac{1}{10}$ es una décima parte de metro. b) $\frac{1}{100}$ es una centésima parte de metro.

T2 La tarea sitúa a los estudiantes a comparar fracciones decimales con distinto denominador. Para cada caso, en un primer momento deben conjeturar qué fracción de cada par es mayor, menor o igual. En un segundo momento deben representar las fracciones de cada par como sigue: a) Como medida de longitud b) Como medida de superficie. **Etapas de la tarea:**			•	
Etapa 1: Los estudiantes determinan de entre pares de fracciones decimales, cuál es mayor, menor o igual.	**A1.** Comparar fracciones decimales del tipo $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$.	Relación de orden de fracciones decimales (mayor, menor o igual).	*Situación de acción:* Comparación de fracciones decimales con distinto denominador de la forma $n = \frac{a}{10^p}$. ***Surge un modelo implícito*** Uso implícito de la propiedad de orden al comparar fracciones decimales, mediante las relaciones: *mayor*, *menor* e *igual*.	Que comprendan cuando una fracción decimal es mayor, menor o igual.

Etapa 2: Verifican sobre una recta numérica y en superficies delimitadas (cuadrado) cuál de las fracciones de la A1 es mayor, menor o igual.	**A2.** Representar fracciones decimales como medidas de longitud sobre la recta numérica.	Relación de orden de fracciones decimales (mayor, menor o igual).	*Situación de formulación:* Uso de la fracción decimal para representar en la recta numérica el resultado de la comparación . ***Surge un modelo explícito*** Uso explícito de la propiedad de orden para determinar si la fracción decimal es mayor, menor o igual que otra.	Que sean capaces de comparar fracciones decimales en un contexto de medida de longitud, al trabajar con subdivisiones de la unidad (metro).
	A3. Representar fracciones decimales en superficies delimitadas.	Relación de orden de fracciones decimales (mayor, menor o igual).	*Situación de validación:* Uso de la fracción decimal como sub-área para representar el resultado de la comparación. ***Surge un modelo explícito justificado*** Uso explícito justificado de las propiedades de orden para determinar si las fracciones decimales son mayores, menores o iguales que otra.	Que sean capaces de cambiar de unidad de magnitud (de longitud a superficie) al comparar fracciones decimales y al trabajar con subdivisiones de la unidad (superficie).
			Situación de institucionalización: Institucionalización del orden de las fracciones decimales a partir de la comparación. ***Surge un modelo culturalmente validado*** Uso de la propiedad de orden en fracciones decimales mediante las relaciones de comparación: mayor, menor e igual como conocimiento socialmente admitido.	El profesor dirige una discusión con los estudiantes sobre las propiedades de orden para determinar si una fracción decimal es mayor, menor o igual al comparar medidas de longitud y área.

T3 En esta tarea los estudiantes representan fracciones decimales del tipo 1/1000 en el cuadrado, valiéndose de diversos recursos y procedimientos. **Etapas de la tarea:**	**A1.** Representar la medida del área de una superficie cuadrada en notación desarrollada.	Objeto fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ donde\ p = 3.$		
Etapa 1: Los estudiantes representan una fracción decimal tanto en un contexto de superficie como en expresiones aditivas de la notación desarrollada.[9]			*Situación de acción:* 1) Representación de $\frac{25}{1000}$ del área de una superficie cuadrada (dividida en 100 partes iguales) mediante diversos procedimientos. ***Surge un modelo implícito*** Uso implícito de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, $donde\ p = 3$, en lenguaje común.	Que comprendan que una fracción decimal se puede representar tanto en un contexto de área como en notación desarrollada.
Etapa 2: Los estudiantes representan en notación desarrollada una fracción decimal de la forma $n = \frac{a}{10^p},\ con\ \ p = 3.$			*Situación de formulación:* Escritura de la notación desarrollada de la fracción $\frac{25}{1000}$. ***Surge un modelo explícito*** Uso explícito de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, $donde\ p = 3$, en lenguaje matemático.	Que sean capaces de expresar en lenguaje común (por escrito) las expresiones aditivas de la fracción decimal.

[9] La notación desarrolla es la descomposición de un número en grupos numéricos (centenas, decenas, …).

			Situación de validación: Identificación de la regularidad de la división $\div 10$ de cada sub-área al representar fracciones decimales del tipo $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$ en un área delimitada. ***Surge un modelo explícito justificado*** Uso explícito justificado de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n=\frac{a}{10^p}$, $donde\ p=3$, en lenguaje matemático.	Que sean capaces de relacionar la notación desarrollada con la fracción decimal.
			Situación de institucionalización: Institucionalización de la notación desarrollada. ***Surge un modelo culturalmente validado*** Uso de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n=\frac{a}{10^p}$ como conocimiento socialmente admitido.	Que el estudiante comprenda la noción de notación desarrollada y su estructura, al transitar de la fracción decimal a sus expresiones aditivas.
T4 La tarea ubica a los estudiantes a identificar las diversas representaciones de los números decimales. En este caso se prevén dos: en forma de fracción decimal y en notación decimal. La introducción de la notación decimal se presenta mediante el				

uso de una tabla. En ella, los estudiantes deben escribir la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que se tiene en cada fracción decimal y ubicarlos según su valor de posición decimal. **Etapas de la tarea:**				
Etapa 1: Los estudiantes representan fracciones decimales en notación desarrollada.	**A1.** Representar fracciones decimales tanto en notación desarrollada como en lenguaje común.	Notación desarrollada (en lenguaje matemático y en lenguaje común) de la fracción decimal del tipo del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 1, 2\ o\ 3.$	*Situación de acción:* a) Descomposición de las fracciones decimales y su representación en notación desarrollada: b) Representación de las fracciones decimales en lenguaje común. ***Surge un modelo implícito*** Uso implícito de la notación decimal al representar en lenguaje matemático y común la notación desarrollada de una fracción decimal.	Que sean capaces de representar fracciones decimales tanto en notación desarrollada como en lenguaje común.
Etapa 2: Representan la notación decimal (escritura con punto) de las fracciones decimales mediante el uso del lenguaje común.	**A2.** Representar fracciones decimales en lenguaje común y en notación decimal.	Objeto número decimal	*Situación de formulación:* Representación de la fracción decimal en lenguaje común y en notación decimal. ***Surge un modelo explícito*** Uso explícito de la notación decimal en lenguaje matemático como forma de representar a la fracción decimal.	Que sean capaces de representar fracciones decimales en notación decimal.

Etapa 3: Reconocen que la notación decimal (escritura con punto) es otra forma de representar a las fracciones decimales y ambas son expresiones de los números decimales.			*Situación de validación:* Identificación de las características de los números decimales al representarlos en fracciones decimales, notación desarrollada y en notación decimal. ***Surge un modelo explícito justificado*** Uso explícito justificado de la notación decimal como forma de representar la fracción decimal.	Que sean capaces de expresar números decimales al transitar de la fracción decimal a la notación decimal.
			Situación de institucionalización: Institucionalización del número decimal mediantes sus tres representaciones: en fracciones decimales, notación desarrollada y la notación decimal. ***Surge un modelo culturalmente validado*** El número decimal como conocimiento socialmente admitido a través de sus diferentes representaciones: • Fracción decimal • Notación desarrollada • Notación decimal.	Que comprendan que un número decimal se representa mediante fracción decimal, notación desarrollada y en notación decimal.

4.4. Las Tareas

4.4.1. Tarea 1: ¿Qué dice el mensaje?

La tarea se conforma de una actividad (A1) y es presentada a modo de juego. Para realizarla se forman equipos de dos integrantes (parejas), a cada pareja se asigna otra pareja, que será su asociada. La meta del juego es que cada equipo reproduzca una tira del mismo tamaño que la que tiene su equipo asociado. Para ello, a cada quipo se les proporciona dos tiras de papel, una de ellas graduada y representa la unidad de medida (tira azul), y la otra sin graduar (tira verde) que tiene dos características: 1) es más corta que la tira-unidad y 2) la de cada equipo es de diferente longitud. Después, cada equipo debe encontrar la medida de su tira verde y codificar esa medida en un mensaje (se espera que se apoyen de la graduación de la tira azul y representen esas medidas con fracciones decimales). Posteriormente, intercambian los mensajes escritos entre equipos asociados, y cada uno decodificará la información contenida en el mensaje para construir otra tira (roja). Gana quien construya una tira roja con la misma medida que la tira verde, para saber si son iguales o no, deberán comparar ambas tiras.

A1. Representación de medidas de longitud mediante fracciones decimales

La actividad se realiza en equipos (binas), su intención didáctica es que el estudiante represente medidas de longitud mediante fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, de forma verbal y/o escrita. El trabajo con este tipo de fracciones implica comprender a la fracción como *parte-todo*, en este caso, el estudiante debe establecer que la unidad de medida se divide en diez partes iguales, de las cuales solo se van a tomar algunas, para ello, manipula una tira de papel de 1 m de longitud, la divide en décimas partes, a su vez, cada décima la dividen en diez partes iguales para obtener centésimas partes de tira.

La actividad para el estudiante

¿QUÉ DICE EL MENSAJE?

❶ En equipo, van a trabajar con dos tiras de papel. Una de **color azul** la cual estará graduada, y además, será la unidad de medida. También, una tira de **color verde**, sin graduar, con dos características: La primera, es que mide menos que la azul, y otra, es que la tira de cada estudiante es de tamaño diferente.

Sigan las indicaciones y realicen lo que se pide:

- **Encuentren la medida de la tira verde utilizando la graduación de la tira azul.**
- **Ahora en un pedazo de papel, escriban un mensaje que contenga la medida de la tira verde.**
- **Intercambien mensajes con su equipo asociado.**
- **Lean el mensaje que recibieron y con la información construyan una tira roja.**

Una vez que hayan seguido las indicaciones del recuadro, ahora van a intercambiar las tiras verdes con su equipo asociado. En seguida, van a comparar la tira roja que construyeron con la tira verde que les proporcionó su equipo asociado y deberán contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide la tira roja?

b) ¿Son iguales la tira roja con la verde? ¿Por qué?

c)¿Qué parte de la tira azul representa la tira verde?

Posibles procedimientos de los estudiantes y algunas consideraciones.
En la primera indicación se espera que el estudiante determine la medida de la tira verde, utilizando la graduación de la tira azul (en fracciones decimales). Para esto, deberá saber que una unidad de medida representa un entero dentro de un sistema de medida, en este caso, la unidad de medida que regirá la medición de las tiras será el metro.

Posteriormente, deben comprender que las fracciones decimales ubicadas en la tira azul representan los submúltiplos del metro, debido a que hasta el momento los conocen como cm, mm y dm. Asociando ambas formas de representar medidas menores a la unidad, se espera que identifiquen que $\frac{1}{10}$ = 1 dm, $\frac{1}{100}$= 1 cm.

En seguida, deben codificar la medida de la tira en un mensaje escrito, la información debe ser representada en fracciones decimales, sin embargo, un procedimiento cómodo que los estudiantes podrían seguir es representar las longitudes utilizando unidades y subunidades de medida convencionales del Sistema Métrico Decimal (SMD) o usando lenguaje común, debido a que están más familiarizados con el uso de este tipo expresiones. Por ejemplo, les resultaría más fácil expresar 50 centímetros que $\frac{5}{10}$ o $\frac{50}{100}$ de metro. Si fuera el caso, se prevé que digan “cinco décimos” o “cincuenta centésimos” (lenguaje común).

Después de codificar el mensaje deviene un intercambio de mensajes entre dos equipos, la actividad del estudiante es decodificar la información contenida en el mensaje recibido y con base en ella construir una nueva tira. Para tal efecto, podrían surgir cuatro cuestiones:

i. Codificación correcta de la medida de la tira modelo (verde) y la decodificación correcta de la información para la construcción de la nueva tira (roja).
ii. Codificación incorrecta de la medida de la tira modelo y la decodificación correcta de la información para la construcción de la nueva tira
iii. Codificación correcta de la medida de la tira modelo y la decodificación incorrecta de la información para la construcción de la nueva tira.
iv. Codificación incorrecta de la medida de la tira modelo y la decodificación incorrecta de la información para la construcción de la nueva tira.

Los casos ii), iii) y iv) darían lugar a tiras que no coincidan, lo cual permitiría poner en cuestión los mensajes y/o su interpretación mientras discuten los resultados en grupo (situación de validación).

Después de realizar lo que se indica el estudiante deberá responder a tres interrogantes, de las cuales se considera lo siguiente:

a) La primer interrogante tiene como propósito que los estudiantes vuelvan a medir la tira que construyeron al decodificar el mensaje y expresar la graduación de la tira (unidad de medida) en fracciones decimales.

b) La segunda, considera una comparación entre la tira modelo (de la cual se determinó la medida) y la tira que construyeron. En este caso, pueden proceder de dos maneras: midiendo ambas tiras nuevamente y verificar aquella que sea de mayor longitud o mediante la superposición de ambas tiras.

c) La tercera interrogante espera que el estudiante argumente que la tira que ha construido es solo una parte del entero (unidad de medida) y exprese su longitud en fracciones decimales.

4.4.2. Tarea 2: Representando medidas con fracciones decimales

La tarea consta de tres actividades (A1, A2, A3), que llevan a los estudiantes a comparar fracciones decimales con distinto denominador. Para cada caso, en un primer momento deben conjeturar qué fracción de cada par es mayor, menor o igual. En un segundo momento deben representar las fracciones de cada par como medida de longitud y como medida de área, a fin de verificar si los resultados de su comparación previa son correctos o no.

El objetivo es que los estudiantes afirmen la comprensión que tienen de la representación de las fracciones decimales, además, que comprendan cuándo una fracción decimal es mayor, menor o igual al representarlas como medida sobre la recta numérica y como medida en superficies delimitadas (un todo continuo). En el primer tipo de magnitud, los estudiantes comparan las longitudes sin la posibilidad de usar su técnica habitual, que consiste en medir algo con la ayuda de una unidad más pequeña que se repite varias veces (iteración). Si bien comparan, se apoyan de una unidad de medida más grande, el metro, cuyas divisiones están representadas mediante fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, y no en sub-unidades del Sistema Métrico Decimal.

A1. Comparar fracciones decimales en el campo numérico.

La actividad se desarrolla de manera individual, en ella se propone a los estudiantes comparar fracciones decimales sin usar ningún tipo de propiedad de orden, ellos determinan de entre pares de expresiones fraccionarias (decimales) si una fracción es mayor, menor o igual respecto de otra. Para ello se plantean tres pares de fracciones decimales:

Primer par. Se compara entre la fracción decimal $\frac{3}{10}$ y la expresión fraccionaria[10] $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$. En este caso, se espera que los estudiantes piensen que la segunda fracción es mayor, pues aparecen más fracciones y con cifras más grandes. Al verificar, se darán cuenta de que no es así, y esto les ayudará a profundizar en su comprensión de las fracciones decimales, por ejemplo, que $\frac{1}{10}$ es más que $\frac{9}{100}$.

Segundo par. También tiene las mismas características que el primer par, se presentan las fracciones decimales $\frac{245}{1000}$ y $\frac{24}{10} + \frac{6}{1000}$, esta vez, se espera que elijan la primera fracción, puesto que su numerador contiene un número mayor que el de la fracción $\frac{6}{1000}$, y su denominador es mayor que el de $\frac{24}{10}$.

Tercer par. En el tercer par comparan dos fracciones decimales que representan la misma cantidad: la fracción decimal impropia $\frac{35}{10}$ y la fracción decimal mixta $3\ \frac{5}{10}$. La expectativa es que los estudiantes entren en un dilema al elegir entre una fracción que tiene un numerador mayor que la otra, pero ésta representa explícitamente los enteros. En lo posterior, se pide que discutan

[10] En el diseño, las expresiones fraccionarias decimales o suma de fracciones decimales que se plantean en el primer y segundo par son consideradas simplemente como fracciones.

y comparen resultados en equipo, a objeto de que reflexionen sobre su elección.

La actividad para el estudiante

REPRESENTANDO MEDIDAS CON FRACCIONES DECIMALES

❶ En esta actividad van a trabajar de manera individual con los tres pares de fracciones decimales de los recuadros. De cada par de fracciones, van a encerrar con un círculo la que sea de mayor valor.

i) $\frac{3}{10}$	*iii)* $\frac{245}{1000}$	*v)* $\frac{35}{10}$
ii) $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$	*iv)* $\frac{24}{10}+\frac{6}{1000}$	*vi)* $3\,\frac{5}{10}$

a) En equipo comparen los resultados que obtuvieron en cada par de fracciones decimales. ¿Obtuvieron los mismos resultados? ¿Por qué?

A2. Representar fracciones decimales como medidas de longitud sobre la recta numérica.

Esta actividad se realiza en equipo, su propósito es que los estudiantes representen los tres pares de fracciones decimales de la tarea anterior (A1) en un contexto de medida de longitud. Se les ubica a seguir las indicaciones planteadas, de las cuales deberán representar la medida de longitud de cada una de las fracciones de las tres comparaciones sobre una recta numérica trazada en el piso del salón de clases, a objeto de verificar cuál de cada par es la fracción mayor.

La actividad para el estudiante

❷ Las fracciones decimales también se utilizan para representar medidas sobre una recta, de eso trata la actividad. En equipo van a representar sobre la recta cada par de fracciones, de esta manera pueden verificar cuál es mayor. Para hacerlo se van apoyar de la **tira azul** graduada.

Sigan las indicaciones y realicen lo que se pide:

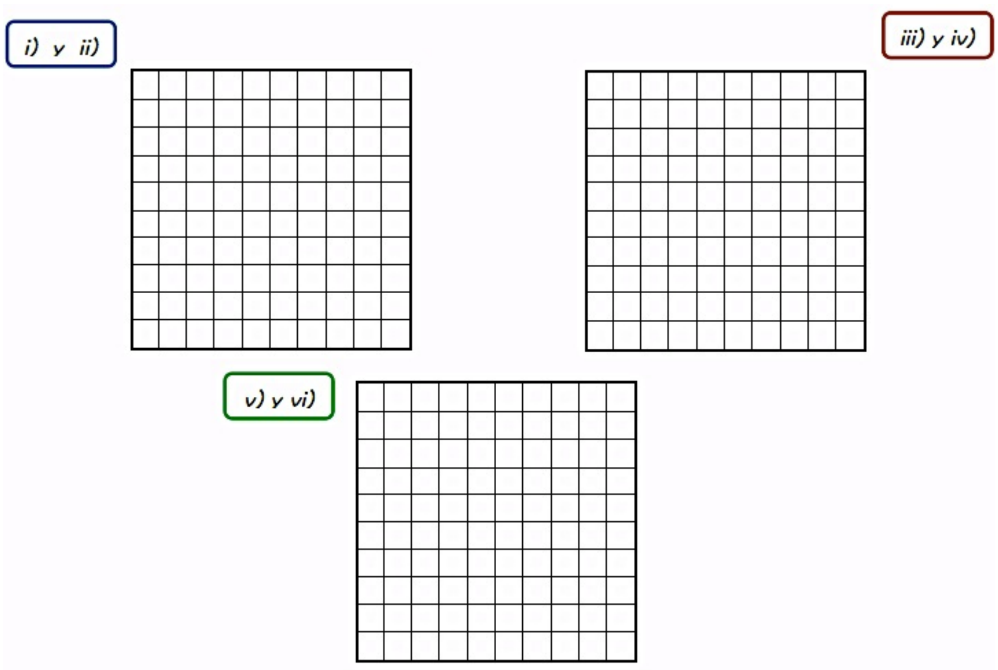
- **Tracen una recta sobre el piso de su salón de clases.**
- **Con la tira azul, representen sobre la recta que trazaron, la medida que corresponda a cada par de fracción decimal.**
- **Para cada par de fracción decimal, di, ¿Qué medida es mayor? ¿Por qué?**
- **Comparen los resultados de cada caso, con los que obtuvieron en la actividad anterior. ¿Fueron los mismos? ¿Por qué?**

A3. Representar fracciones decimales sobre superficies delimitadas

Esta actividad se desarrolla de manera individual, la cual ubica a los estudiantes a representar las fracciones decimales de cada una de las tres comparaciones de A1 sobre superficies delimitadas, para ello, se propone sombrear regiones de áreas sobre un cuadrado dividido en cien partes iguales. El propósito es que los estudiantes representen y comparen fracciones decimales en un contexto de medida sobre superficies. También, que este cambio de referente apoye en su comprensión de la noción misma de fracción decimal: ahora deben asociar $\frac{1}{10}$ con 10 cuadritos (ya sea que conformen una fila o una columna), y $\frac{1}{100}$ con un solo cuadrito. Si esto se logra, también podrán constar que, por ejemplo, $\frac{1}{10}$ es mayor que $\frac{9}{100}$.

La actividad para el estudiante

❸ En cada uno de los cuadrados siguientes, representen cada par de fracciones decimales de la actividad 1. Para cada caso, pinten de color azul los cuadritos que representen la primera fracción decimal, y de color rojo los cuadritos que representen la segunda. Consideren que el cuadrado grande representa la unidad.



Con base en lo que hicieron en la actividad anterior, contesten las siguientes preguntas:

1. En el primer par de fracciones, ¿Cuál es mayor?¿Por qué?

2. En el tercer par de fracciones, ¿Cuál es mayor?¿Por qué?

Posibles procedimientos de los estudiantes y algunas consideraciones.

Cuando los estudiantes realizan comparaciones con números naturales afirman que los que están conformados de más cifras son los mayores. En el caso de los números racionales (Q), específicamente, en las fracciones, para determinar cuándo un número es mayor, menor o igual que otro se tienen que utilizar otras reglas y propiedades, pero esto parece no comprenderse. Por tanto, en la tarea que se le pone al estudiante se prevé que realice lo siguiente:

En A1:

Comparación 1) En esta comparación podrían elegir la opción ***ii)*** debido a determinarán que $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$ es mayor que $\frac{3}{10}$, por considerar que el 100 es mayor que 10 y aunado a eso, que la segunda opción representa una suma.

Comparación 2) Al comparar iii) y iv) podrían realizar dos elecciones:

- Optar por la primera opción debido a que argumentarán que la fracción $\frac{245}{1000}$ es mayor que la fracción $\frac{6}{1000}$, en este caso la fracción $\frac{24}{10}$ no cobraría mucha importancia por el estudiante al momento de hacer la elección.
- Optar por la iv) solo por considerarla una suma de fracciones y no tomar en cuenta el valor de cada una.

Comparación 3) Lo que se espera es que no elijan ninguna opción al darse cuenta de que ambas son iguales, solo que se representan de diferente manera. Sin embargo, el estudiante podría proceder como sigue:

- Optar por $\frac{35}{10}$ al argumentar que es mayor que $\frac{5}{10}$, en este caso, el entero no tendría una presencia importante al momento de compararlas.
- Optar por $3\frac{5}{10}$ al considerar que se tienen tres enteros y por tanto esta opción es mayor que la otra.

En A2 los estudiantes representan las fracciones decimales de cada par, sobre la recta numérica. Lo hacen mediante la medición y comparación de longitudes, en términos de “más largo” y “más corto”. En el caso del primer par, los estudiantes podrían tener dificultades entorno a identificar que $\frac{3}{10}$ es mayor que $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$, debido a que la diferencia entre ambas es de un centésimo y al momento de medir podrían surgir errores. En el segundo par, se reconoce que la necesidad de medir longitudes más largas que la tira azul (unidad) podría obstaculizar la representación de las fracciones sobre la recta y así verificar cuál es mayor. Por ejemplo, el estudiante debe representar y comparar $\frac{245}{1000}$ y $\frac{24}{10}+\frac{6}{1000}$ (inciso ***iii*** y ***iv***), con base en ello, inmediatamente podría identificar que la primer fracción de la suma representa una longitud más larga que la unidad, por lo tanto, sin la necesidad de trazar una o ambas longitudes sobre la recta asumirá que la otra es menor. Por cuanto al tercer par, la representación de las fracciones $\frac{35}{10}$ y $3\frac{5}{10}$ (incisos ***v*** y ***vi***) permitirá que el estudiante identifique que ambas tienen las misma longitud, sólo que la primera se mide en décimos de tira y la segunda en tiras enteras.

A3 ubica a los estudiantes a representar las fracciones decimales de A1 sobre una superficie cuadrada delimitada (área) dividida en 100 partes iguales, luego las comparan y con base en ello, determinan cuál de ellas es mayor, menor o igual. Tanto en el segundo par de fracciones como en el tercero, necesitarán más de una unidad, al identificar que la fracción decimal rebasa de la unidad podría dibujar las unidades faltantes (cuadros), o bien, no realizar tal representación.

Cabe destacar que por cuestiones externas a la investigación, durante la experimentación de la SD, se planteó a los estudiantes únicamente la primera comparación. Sin embargo, consideramos pertinente mostrar el diseño completo y los posibles procedimientos que los estudiantes podrían seguir para resolverla.

4.4.3. Tarea 3: ¿Qué pasa con los milésimos?

Esta tarea se constituye de una actividad (A1), que sitúa a los estudiantes a representar fracciones decimales de la forma $n=\frac{a}{10^p},\ donde\ p=3$ (milésimos) sobre superficies delimitadas. En este caso, también se presenta al estudiante un cuadrado dividido en cien partes iguales (centésimos) como los que mostraron en A3 de la T2. La representación de milésimos sobre el cuadrado deberá ser ejecutada mediante diversos procedimientos y recursos. El objetivo de esta tarea es que comprendan las características de una fracción decimal de este tipo, así como su equivalencia con fracciones del tipo $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$.

A1. Representar milésimos sobre el cuadrado

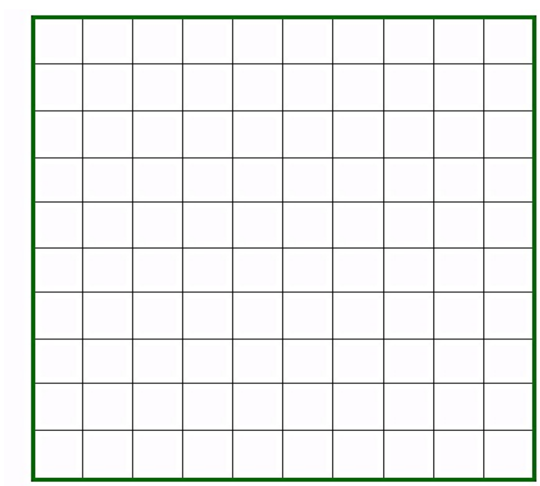
La actividad se realiza de manera individual y está conformada de dos momentos, en el primero se le solicita al estudiante representar $\frac{25}{1000}$ sobre el cuadrado y el segundo corresponde a contestar preguntas en torno a tal representación. Con ello se busca que reflexionen sobre las relaciones entre las distintas subunidades del cuadrado: 10 décimos hacen el entero, 10 centésimos hacen un décimo. También indagar sobre interrogantes como: ¿Y los milésimos, de qué tamaño podrían ser?, ¿Qué relación guardan con la unidad?, ¿Y qué relación con el centésimo?.

A1 permite al estudiante comprender que una fracción decimal de este tipo se puede representar en un contexto de área, pero también en notación desarrollada cuando expresan en lenguaje matemático sus expresiones aditivas (por escrito), esto, cuándo se les cuestiona sobre la cantidad de unidades (cuadrados enteros), décimos, centésimos y milésimos han representados en el cuadrado.

Actividad para el estudiante

¿QUÉ PASA CON LOS MILÉSIMOS?

❶ Esta actividad la van a realizar individualmente. Se van apoyar del cuadro siguiente para representar $\mathbf{\frac{25}{1000}}$ del entero.



a)¿Cuántas unidades, décimos, centésimos y milésimos están representados en el cuadrado?

Unidades: ___________________
décimos: ___________________
centésimos: ___________________
milésimos: ___________________

Posibles procedimientos de los estudiantes y algunas consideraciones.

Debido a que en esta tarea se presenta un cuadrado dividido en centésimas partes y la fracción decimal a representar está en términos de milésimos se prevé que surjan dificultades en torno a:

1. Identificar que el cuadrado representa el todo, en este caso, la unidad.
2. Establecer equivalencias entre el todo con las partes (la unidad con la décima, la centésima y la milésima parte).
3. Representar fracciones decimales del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ sobre un cuadrado con las características ya descritas. Para realizarla, el estudiante podría seguir procedimientos como los siguientes:

   - Mediante *ensayo y error,* al corroborar el total de cuadritos pequeños obtenidos (milésimos) como resultado de dividir cada centésima parte de la unidad (cuadrado). Probablemente, primero dividirán a cada centésimo en dos partes, si no se obtiene el número que indica el denominador buscarán otra forma de dividir.

   - *Aproximación al resultado mediante la multiplicación*, en este caso encontrar el factor que multiplicado por cien resulte mil, esto es, 100 x ____ para que se obtengan las 1000 partes.

4.4.4. Tarea 4: Distintas escrituras para un mismo número

Esta última tarea se realiza en equipo y se conforma de dos actividades (A1, A2). La primer actividad sitúa a los estudiantes a representar fracciones decimales en notación desarrollada, en lenguaje matemático y en lenguaje común. Esto es, representar las expresiones aditivas de la fracción decimal, tanto en expresiones fraccionarias como de forma literal. A2 por su parte, ubica a los estudiantes a representar números decimales en lenguaje matemático, mediante tres tipos de expresiones: como fracción decimal, en notación desarrollada de la fracción decimal y en notación decimal.

A1. Notación desarrollada de la fracción decimal

En A1 se estudia la notación desarrollada de la fracción decimal en términos de representar sus expresiones aditivas en lenguaje matemático y en lenguaje común (por escrito). El propósito es que los estudiantes comprendan que una fracción decimal se puede descomponer en otras fracciones decimales (décimos, centésimos y milésimos). En A1 se plantean tres fracciones decimales, en cada caso, los estudiantes tienen que representar las expresiones aditivas escritas como fracciones decimales y también con letra. Cabe destacar que en esta primera actividad se muestra un ejemplo, a objeto de que el estudiante se apoye de él.

La actividad para el estudiante

¡DISTINTAS ESCRITURAS PARA UN MISMO NÚMERO!

1 En ésta actividad van a trabajar en equipo, con las tres fracciones decimales van a realizar dos acciones: primero, en el recuadro izquierdo van a escribir en notación desarrollada cada fracción decimal, luego en el recuadro de la derecha deben escribir con letra la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que hay en cada fracción. Apóyense en el ejemplo.

En notación desarrollada	Con letra
$\frac{275}{1000} = 0 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$	Cero unidades, dos décimos, siete centésimos y cinco milésimos.
$\frac{91}{100} =$	
$\frac{45}{10} =$	
$\frac{9}{1000} =$	

A2. De la fracción decimal a la notación decimal.

A2 sitúa a los estudiantes a expresar de diferentes maneras un número decimal, en términos de transitar de la fracción decimal a su notación decimal y de manera inversa, esto es, en forma de fracción decimal, en notación desarrollada de la notación decimal y en notación decimal. El propósito es que identifiquen la relación entre estas tres expresiones y comprendan que son diferentes representaciones del número decimal. Para ello, se presentan dos tablas: **la tabla 1** y **la tabla 2**. En la primera se plantean tres fracciones decimales, los estudiantes escribirán la cantidad de unidades, decimos, centésimos y milésimos que se tiene en cada fracción decimal en la casilla correspondiente, al final identificarán que han escrito una notación decimal que está formada por una parte entera y otra parte decimal, ambas separadas por un punto decimal. Al igual que en A1, se muestra un ejemplo al estudiante.

La actividad para el estudiante

❷ En esta actividad van a completar la tabla siguiente. Consiste en representar la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos de las fracciones decimales que se muestran en la primera columna, también deberán escribir su notación decimal en la última columna. Apóyense en el ejemplo.

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275
$\frac{90}{100}$						
$\frac{45}{10}$						
$\frac{9}{1000}$						

En la **tabla 2** se ubica al estudiante a transitar de la notación decimal a la fracción decimal, esto representa un proceso inverso al que deben hacer en A1. Se plantean tres notaciones decimales, en cada caso, el estudiante debe reconocer el valor posicional de cada cifra que la compone, ya sea de la parte entera o de la parte decimal, con base en ello debe ubicarlas en la casilla que le corresponde. Al final expresará esta escritura con fracciones decimales.

La actividad para el estudiante

❸ En la siguiente tabla escribe los datos faltantes. Apóyense en el ejemplo.

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{63}{100}$	0	.	6	3	0	**0.63**
						2.345
						0.008
						0.91

Posibles procedimientos de los estudiantes y algunas consideraciones.

La transición de la escritura fraccionaria a la decimal parece fácil y en muchas de las ocasiones se introduce como cociente, esto es, dividir un entero entre otro número mayor o menor a él. En T4, pasar de una expresión a otra requiere de la comprensión del valor posicional de cada cifra del numerador de la fracción decimal respecto al denominador, y de cada cifra que está a la derecha del punto del número decimal.

T4 es una tarea de ejercitación, las dos actividades que la comprenden están orientadas a completar los datos faltantes con base en los ejemplos mostrados. Sin embargo, se prevé que los estudiantes presenten dificultades en torno a expresar en notación desarrollada la fracción $\frac{45}{10}$, puesto que es una fracción que rebasa la unidad y por su denominador (décimos), podrían expresar 45 en la casilla de los décimos.

Capítulo 5. Análisis de la implementación de la Situación Didáctica en el aula

En este capítulo se presenta la cuarta fase de la ingeniería didáctica usada en este trabajo, nos referimos a la fase de validación, la cual contempla el análisis de los datos recogidos de la experimentación de la SD. Desde el marco de la TSD, usamos cuatro tipos de modelos que emergen de la interacción que se da entre el estudiante y la SD, en el sentido de evolucionar hacia la noción número decimal.

Capítulo 5. Análisis de la implementación de la Situación Didáctica en el aula

Introducción

La construcción de la noción número decimal por estudiantes de quinto grado de primaria, se discute con base en los modelos que surgen de sus interacciones con la Situación Didáctica[11]. Los modelos se presentan en cada tarea, a su vez, en los cuatro momentos de interacción: la situación de acción (S-A), situación de formulación (S-F), la situación de validación (S-V) y la fase de institucionalización (S-I), esta última a cargo del profesor. En cada caso, se muestran evidencias tanto escritas como verbales, que sustentan formas de proceder y reflexiones de los estudiantes.

5.1. Análisis de los modelos emergentes en la actividad matemática

Con base en nuestras hipótesis se concibe el aprendizaje de la noción de número decimal si los estudiantes comprenden:

a) A la notación decimal como expresión equivalente a la fracción decimal.
b) A la noción número decimal como expresión de medidas mientras comparan y representan magnitudes continuas.

En su conjunto, la construcción de la noción de número decimal se discute cuando los estudiantes, en términos de aprendizaje, transitan de la fracción decimal a la notación decimal en un contexto de medición (longitudes y áreas), ambas expresiones asumidas como dos representaciones de los números decimales. En términos de la TSD la construcción de la noción de número decimal se evidencia cuando el estudiante se ha apropiado del conocimiento matemático, de la situación misma y del medio en que se da esa apropiación. Es decir, de la evolución hacia el conocimiento de la SD y del medio.

Para este estudio de caso, la evolución hacia la noción de número decimal, se da mediante los modelos que emergen de la interacción entre el estudiante y la SD. En ese

[11] Estos modelos son descritos por Ferrari (2001) en un estudio de la función logaritmo y en este trabajo se detallan en el capítulo 2.

proceso, aparecen errores que se explican en términos de obstáculos, pueden ser epistemológicos, didácticos y/o cognitivos, los cuales impiden que emerjan tales modelos.

La siguiente tabla registra los modelos que se predicen y emergen según los momentos de interacción con las tareas, mientras los estudiantes evolucionan hacia el conocimiento objeto de estudio.

Tabla 5.1.
Modelos emergentes por tarea

Momento	Situación acción	Situación de formulación	Situación de validación	Situación de institucionalización
Tarea/ modelo	**Modelo implícito (MI)**	**Modelo explícito (ME)**	**Modelo explícito justificado (MJ)**	**Modelo culturalmente validado (MV)**
T1	Uso implícito de las fracciones decimales para representar de manera verbal y/o escrita medidas de longitud.	Uso explícito de las fracciones decimales para comunicar medidas de longitud en lenguaje común y/o matemático, de manera verbal o escrita.	Uso explícito justificado de las fracciones decimales como resultado de la comparación de longitudes.	Uso de la fracción decimal de la forma $n = \frac{a}{10^p}$, $con\ a, p\ \in Z$ como conocimiento socialmente admitido.
T2	Uso implícito de la propiedad de orden al comparar fracciones decimales, mediante las relaciones: *mayor*, *menor* e *igual*.	Uso explícito de la propiedad de orden para determinar si la fracción decimal es mayor, menor o igual que otra.	Uso explícito justificado de las propiedades de orden para determinar si las fracciones decimales son mayor, menor o igual que otra.	Uso de la propiedad de orden en fracciones decimales mediante las relaciones de comparación: mayor, menor e igual, como conocimiento socialmente admitido.
T3	Uso implícito de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, con $p = 3$, en lenguaje común.	Uso explícito de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, con $p = 3$, en lenguaje matemático.	Uso explícito justificado de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, con $p = 3$, en lenguaje matemático.	Uso de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$ como conocimiento socialmente admitido.
T4	Uso implícito de la notación decimal al representar en lenguaje matemático y común la notación desarrollada de una fracción decimal.	Uso explícito de la notación decimal en lenguaje matemático como forma de representar a la fracción decimal.	Uso explícito justificado de la notación decimal como forma de representar la fracción decimal.	El número decimal como conocimiento socialmente admitido a través de sus diferentes representaciones: • Fracción decimal • Notación desarrollada • Notación decimal.

5.2. Análisis de las tareas

5.2.1. Análisis de la Tarea 1: ¿Qué dice el mensaje?

La tarea se constituye de una actividad (A1) que ubica al estudiante a determinar la medida de longitud de una tira dada (sin graduar), a partir de una tira modelo con las siguientes características: representa la unidad de medida, tiene un metro de longitud y está subdividida en décimas y centésimas partes, con la salvedad de que las medidas de las partes, sólo están indicadas en fracción decimal (véase figura 5.1).

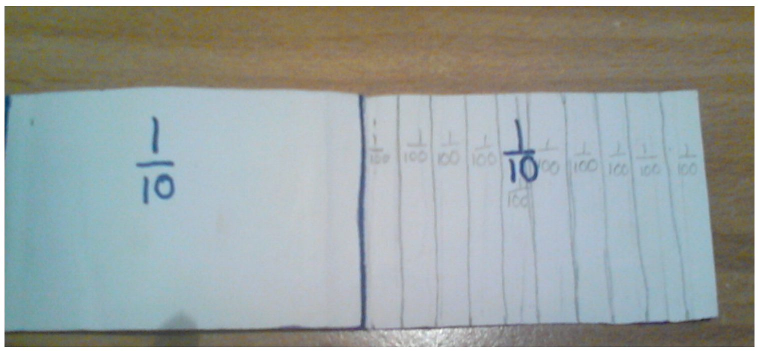


Figura 5.1. Subdivisión de la tira modelo en décimos y centésimos.

Con base en ello, debe representar esas medidas de longitud mediante fracciones del tipo $n = a/10^p$ en lenguaje común ya sea de forma verbal y/o escrita. De manera que los modelos por los que transita la construcción de la noción de número decimal en esta etapa, se enmarcan en la noción de fracción decimal. Desde el punto de vista teórico, estos modelos son: implícito (M-I), explícito (M-E), explícito justificado (M-J) y el culturalmente validado (M-V). En el primer modelo, la fracción decimal aparece a modo de uso, de reconocer cuánto mide la tira sin graduar al compararla con la tira modelo. En el segundo modelo, la fracción decimal también aparece a modo de uso pero de manera consciente pues saben que están trabajando con otro tipo de representación al medir longitudes. El tercer modelo, también se asocia al uso de este tipo de fracciones, pero se valida en grupo, al comparar y argumentar resultados. En el cuarto modelo, aparece como un objeto (a nivel de noción) culturalmente validado.

a) Situación de acción (S-A)

En S-A, los estudiantes comparan longitudes sin la posibilidad de usar su técnica habitual, que consiste en medir algo con la ayuda de una unidad más pequeña que se repite varias veces (iteración). Si bien comparan, se apoyan de una unidad de medida más grande, el metro, cuyas divisiones están representadas mediante fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, y no en sub-unidades del Sistema Métrico Decimal (aún cuando algunas divisiones de las tiras están dadas en centésimos), como lo plantea el currículum escolar

Como resultado de la comparación que realizan los estudiantes al superponer las tiras de papel (la verde y la roja) emerge la fracción decimal en forma de lenguaje común, expresado de manera verbal y/o escrito. El modelo implícito aparece cuando relacionan el todo (tira modelo) con otra de las partes (la tira sin graduar). Ahora bien, ¿Cómo expresan esa relación del todo con las partes? Lo hacen mediante el uso de unidades y subunidades del sistema métrico decimal, al momento que expresan la medida de la tira en centímetros. Si bien este tipo de escrituras se imponen a las de fracciones decimales, cabe destacar que en lo posterior, permitió a los estudiantes comprender que los centímetros son centésimas partes de un metro.

La figura 5.2 evidencia procesos de comparación basados en la superposición de ambas tiras. En la imagen, la tira más larga representa a la graduada (subdividida en 10 décimos y a su vez, en 100 centésimos) y la tira más corta, a la que le determinan la longitud.

Figura 5.2. Comparación de la medida de longitud de una tira con la tira modelo.

A modo de ejemplo, se presenta parte del análisis desarrollado por E1 para determinar la medida de longitud de la tira sin graduar, apoyándose de la tira graduada. Se percatan de que la tira sin graduar es menor a una décima parte de la tira azul (tira-unidad) y que mide 7 partes pequeñas de las 100. Esta representación la expresan verbalmente en términos de centímetros, debido a que el discurso matemático escolar privilegia el trabajo con ese tipo de unidades de medida. Para E1 fue más viable decir que la tira medía “siete centímetros” en lugar de siete centésimos (véase renglones 30 a 32), esto al saber que la tira modelo medía un metro.

En lo que sigue, aparecen extractos del análisis realizado por integrantes de E1.

[25]	Monserrat:	“… Hay que ver cuántas partes de las chicas mide …” *(se refiere a los centésimos).*
[…]		…
[30]	Thalía:	“… Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (*cuenta*) … Mide siete…”
[31]	Monserrat:	¡Entonces son siete centímetros!
[32]	Thalía:	¿Siete *centímetros?*
[…]		…
[33]	Monserrat:	¡Si!... porque toda la tira mide un metro.

El resto de los equipos proceden de la misma manera en el sentido de comparar las tiras superponiéndolas, aunque difieren en la forma de representar la medida. En este caso, E2 y E4 identifican a la fracción decimal como medida de la tira sin graduar y la expresan verbalmente, como las partes del todo, esto es, “cincuenta y cinco de cien”.

A razón de los procedimientos y planteamientos de los equipos en esta primera interacción que tienen con la actividad, se puede afirmar que las fracciones decimales aparecen cuando los estudiantes relacionan la graduación de la tira modelo con el uso de medidas convencionales del Sistema Métrico Decimal (SMD). El sustento de esta afirmación cobra sentido cuando se evidencia que usan el centímetro para expresar las medidas de las tiras, aún cuando saben que la graduación está representada en fracciones (aún no saben que son decimales). El que favorezcan el uso de la subunidad de medida *centímetro*, es producto del privilegio que hace el discurso matemático escolar, para representar medidas de longitud. Pero además, porque en el cotidiano, poco (si es que se hace) se usan las fracciones decimales para expresar medidas de longitud.

b) *Situación de formulación (S-F)*

En la S-F se espera emerja la fracción decimal en forma explícita y por escrito. Etapa desarrollada en dos momentos, el primero consistió en codificar (en equipo) en un mensaje, la medida de la tira sin graduar de forma escrita y el segundo en decodificar la información (por equipos distintos) y con base en el dato decodificado en el mensaje por cada equipo construir una nueva tira de color rojo.

b. 1) *Momento 1: Codificación del mensaje*

En este primer momento, en equipo, los estudiantes expresan las medidas de las tiras con las que les tocó trabajar (sin graduar) de forma escrita, en una hoja de papel, a modo de mensaje (codifican un mensaje). Esta medida, es la que surge en la S-A, de relacionar el todo (la tira modelo) con las partes (la tira a medir). En este momento de S-F, esta medida se reconoce como modelo explícito de las fracciones decimales, pues su uso por los estudiantes es racional o consciente, prueba de ello, es que algunos equipos (E2 y E4), usan una representación distinta a la fracción decimal que aparecía en la tira modelo, aunque equivalente en términos de la medida de longitud, ya que algunos lo hacen con base la **relación parte-todo** (RPT) o bien, apoyándose de una **subunidad del SMD**. Por ejemplo, E4, lo expresa como sigue: "Mide 14 la tira verde" (véase figura 5.3), lo dice en términos de relación de la parte y el todo. Es en las interacciones del profesor con los integrantes de este equipo, que se reconoce que con esta frase, se refiere a que la tira verde mide 14 partes de la tira modelo, la cual mide 100 centésimos. Parte de ello, puede verse en seguida:

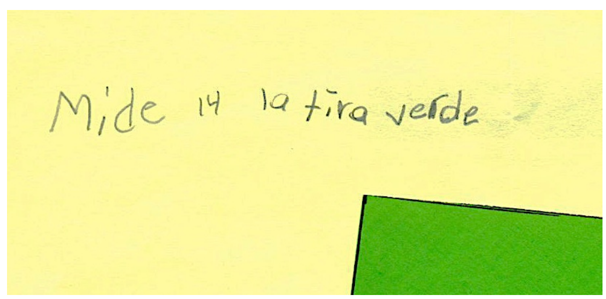


Figura 5.3. Expresión de la medida como relación parte-todo.

[48]	Profesor:	"…¿Me pueden comentar qué representa el catorce que anotaron en la hoja?…"
[49]	Jorge:	"Pues…son las partes pequeñas de la tira blanca. ¡Mide 14 de esas!"

[...]	...	
[51]	Profesor:	¿Pero cómo se le llama a cada partecita pequeña?
[52]	Yael:	Mmm ...¿Centésimo?
[53]	Jorge:	"...¡Centésimos de la tira blanca!..."

En cambio los otros equipos, usan otra forma de representación, pues expresan las medidas de las tiras sin graduar (con diferente medida cada tira) en centímetros. Con base en la codificación de los datos en los mensajes se evidencia de que las subunidades del SMD son comúnmente empleadas cuando los estudiantes miden las tiras (práctica social), muestra de ello se visualiza en la figura 5.4, cuando relacionan la graduación de la tira modelo (expresada en fracciones decimales) con los centímetros.

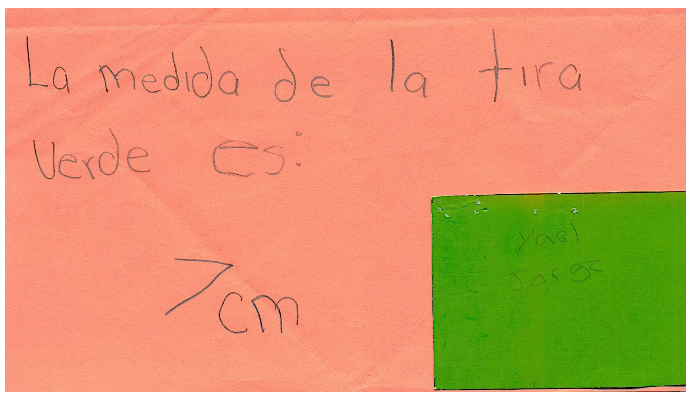
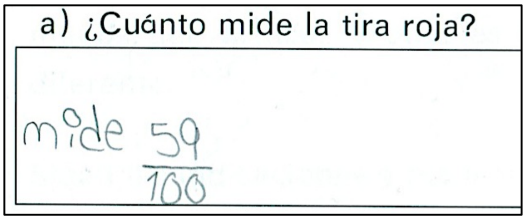


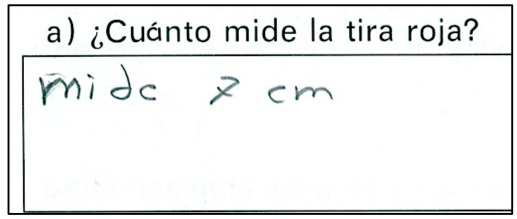
Figura 5.4. Codificación de una medida en subunidades del SMD

b. 2) *Momento 2: Decodificación del mensaje*

En un segundo momento, entre dos equipos intercambian los mensajes escritos en el momento 1, a objeto de que cada uno decodifique la información contenida en el mensaje del otro. Con base en ello y apoyándose de la tira modelo, construyen otra tira de color rojo de la misma medida decodificada en el mensaje. Como parte de la actividad, se les pide, una vez construida la tira, que escriban cuánto mide. Es aquí que aparecen dos tipos de representaciones, una, apoyándose de la fracción decimal (FD) y la otra, de subunidades del SMD. Es importante destacar, que ambos tipos de representaciones fueron expresadas por los equipos mediante lenguaje común o bien mediante el matemático. Por ejemplo, E1 expresa la FD en lenguaje matemático (imagen ***a***, figura 5.5), contrario a E2, que la expresa en lenguaje matemático pero mediante subunidades del SMD (imagen ***b***, figura 5.5).



(a) E1: Fracción decimal

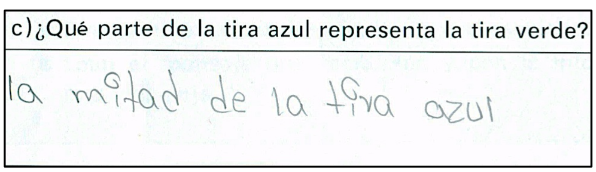


(b) E2: Subunidades del SMD

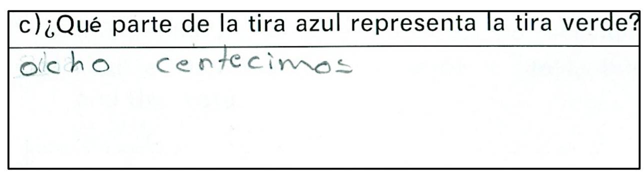
Figura 5.5. Medida de la tira construida, en lenguaje matemático

Otro cuestionamiento, consistió en que los equipos escribieran qué parte representa la medida de la tira verde respecto de la tira-unidad. Aparecieron tres formas de expresar la medida de la tira, en forma de:

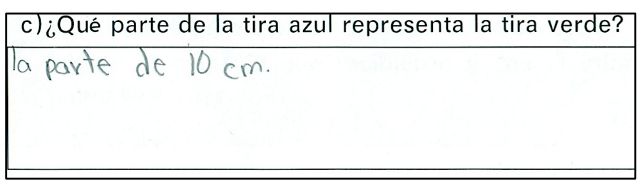
a) Fracción en lenguaje común (E1).
b) Fracción decimal en lenguaje común (E2).
c) Subunidades del SMD (E3 y E4).



(a) E1: Fracción en lenguaje común



(b) E2: Fracción decimal en lenguaje común

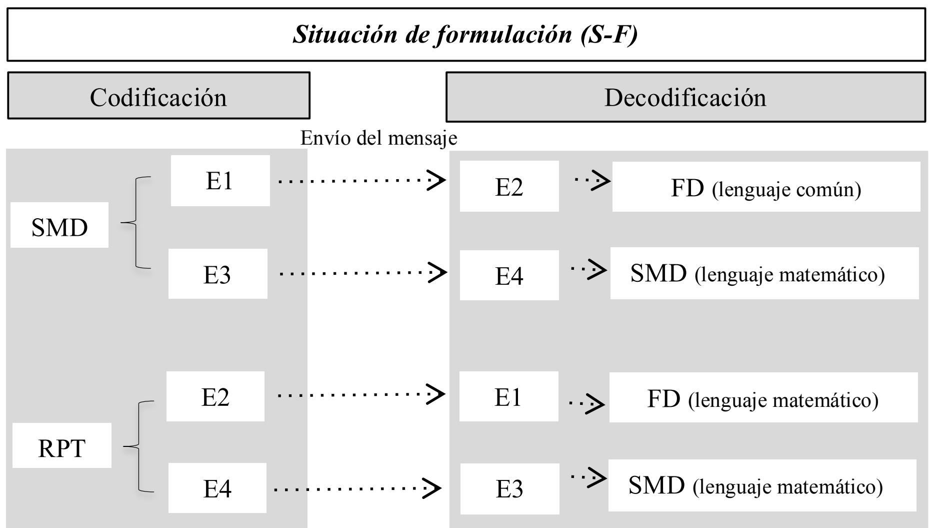


(c) E3: Subunidades del SMD

Figura 5.6. Expresiones de la longitud de la tira.

De estas tres formas de expresión, se reconoce que en el caso de E1, aun cuando eran conscientes de que su tira medía 59/100, dijeron que era “la mitad”. En el caso de E2, E3, y E4, las medidas se corresponden con la longitud de la tira que construyeron. Sin embargo, representan la medida en lenguaje común de la FD (E2) y en subunidades del SMD (E3 y E4).

Se reconoce que evolucionan los modelos del Momento 1 (CODIFICACIÓN) al Momento2 (DECODIFICACIÓN), pues deja de aparecer RPT como representación del modelo explícito. Al decodificar la representación de este segundo modelo, aparecen otras representaciones, la FD (en lenguaje común y en el matemático) y las subunidades del SMD. Cabe destacar además, que en E1, E2 y E4, evolucionan sus representaciones (del momento 1 al 2), tal como se muestra en el esquema 1. Para mostrar la trayectoria que siguió la evolución de los modelos y formas de representarlos, por los equipos, se esquematiza como sigue:



Esquema 5.1. Evolución de los modelos en S-F.

Con base en el esquema se muestran las representaciones de cada equipo:

- **E1** transita de SMD (codifica), por RPT (decodifica) y concluye en FD en el lenguaje matemático (expresión de medidas).
- **E2** transita de RPT (codifica), por SMD (decodifica) y a FD en lenguaje común (expresa las medidas de sus tiras).
- **E3** transita de SMD (codifica), por RPT (decodifica) y vuelve a expresar las medidas de sus tiras mediante el SMD.
- **E4** transita por RPT al codificar, por SMD cuando decodifica y expresa las medidas de sus tiras.

c) Situación de validación (S-V)

En la S-V se discute a nivel grupal el modelo explícito que emerge en S-F que consiste en expresar medidas de longitud a través de la fracción decimal en lenguaje matemático. A modo de ejemplo de la discusión que se suscitó en el grupo durante S-V, se retoma la que se dio con E2, quien expresó las medidas de las tiras mediante FD en lenguaje común (véase esquema 5.1). La figura 5.7 evidencia como E2 muestra al resto del grupo -considerando al profesor- la medida de la tira que decodificaron y las representaciones que usaron para expresarla, de manera que al discutirlas con el grupo se validaron. En esta etapa se da la evolución del segundo modelo (ME) al modelo explícito justificado (MJ) cuando E2 comparte y argumenta sus formas de representar las medidas de sus tiras con el resto del grupo, quienes a su vez validaron las representaciones de medidas de longitud expresadas en fracciones decimales.

Figura 5.7. Medidas que muestra E2.

d) Situación de institucionalización (S-I)

Este cuarto y último momento de interacción con la tarea se destinó a la institucionalización del saber matemático en juego, en términos de noción de la fracción decimal, de la forma $n = \frac{a}{10^p},\ con\ a, p\ \in Z$, asignándole el estatus de conocimiento matemático culturalmente validado. Es en la S-I, en la que el profesor dirigió una recapitulación de la actividad orientada a explicar las **características** de las fracciones decimales y posterior a ello propicia una discusión sobre el **uso** que se le asignó al objeto matemático durante la actividad.

1**) Características de la fracción decimal:**

El profesor pregunta a los estudiantes sobre las formas e instrumentos que utilizaron para medir las tiras, haciendo énfasis en las fracciones decimales (1/10, 1/100) como expresiones para representar medidas de longitud. Al final presenta al grupo las características invariantes de este tipo de fracciones, que por el nivel cognoscitivo del estudiante se le mencionan la que se describe en seguida:

- Son aquellas fracciones que tiene como denominador al 10, 100, 1000, 10 000, …

2) Uso de la fracción decimal:

Después de la explicación que da el profesor, los estudiantes logran distinguir entre una fracción decimal y otra que no lo es, esto se observa cuando se les pide compararlas con otras de la forma $\frac{m}{2^n}$. Hasta el momento ellos han manipulado fracciones que tienen como denominador al 10 y 100.

En seguida, el profesor concluye que las fracciones decimales también se pueden utilizar para expresar medidas de longitud y para este caso, representan las subunidades de un metro. Esto es, $\frac{1}{10}$ corresponde a una décima parte del metro o 1 dm, en tanto $\frac{1}{100}$ representa una centésima parte de un metro o también 1 cm.

Reflexiones sobre la evolución de los modelos en T1

Con esta tarea los estudiantes transitaron por los cuatro modelos, por el MI, ME, MJ y MV cuando se les ubicó a representar medidas de longitud mediante fracciones decimales. Esto en función de hacer evolucionar la noción de número decimal partiendo de la fracción decimal en un contexto de longitud. Como resultado de la interacción con la tarea se evidencia lo siguiente:

- En S-A usan implícitamente la FD de manera verbal.
- Durante S-F surge el modelo explícito de la fracción decimal (lenguaje matemático y lenguaje común) en términos de tres tipos de representaciones: RTP, SMD y FD.
- En S-V se valida la FD como modelo explícito, al transitar de su lenguaje común al matemático y viceversa.

- En S-I se presentan las características invariantes de la fracción decimal en un contexto de medición de longitudes (uno de sus usos).

Un aspecto que vale la pena destacar en esta tarea, es que la misma naturaleza de la medición, conduce a errores, que pueden ser provocados por la colocación errónea de las tiras mientras las comparan. Pero además, porque medir produce este tipo de situaciones, tal como lo reconocen los mismos estudiantes (véase extracto de algunas discusiones)

[…]		…
[67]	E2 (Jorge):	¡Ya vimos cuanto miden las tiras!
[68]	E2 (Jorge):	"…Las chamacas se pasaron *(se refería al E1),* no midieron bien…"
[…]		
[70]	Profesor:	¿Por qué dices que se pasaron?
[71]	E2 (Jorge):	"…Porque el mensaje decía 7 centímetros y no midieron bien *(se refiere a la medida de la tira verde)…"*
[72]	Profesor:	Entonces, ¿Por cuánto se pasaron?
[73]	E2 (Yael):	¡Un centímetro!
[…]		…
[75]	E1 (Thalia)	¿Entonces cuánto mide la verde? *(se muestra no tan convencida)*
[76]	E2 (Jorge):	¡Ocho centésimos *(indica la parte de la tira unidad)!*

Cabe señalar que durante el desarrollo de la tarea se presentaron algunos obstáculos de tipo didáctico que impidieron que emergieran los modelos esperados en algunos equipos y en ciertos momentos de interacción. El más destacado corresponde al uso de las subunidades del SMD para expresar medidas de longitud por parte de los estudiantes. Una de las cuestiones que propiciaron este tipo de escrituras tiene que ver con la información contenida en la consigna, ya que se le dice al estudiante que la tira-unidad mide 1 m de largo. Otro de los aspectos que interviene, está relacionado con el mismo discurso matemático escolar y las prácticas cotidianas, puesto que han privilegiado el uso de medidas convencionales del SMD (su unidad es el metro y de ello derivan el cm, dm y mm) para representar longitudes, siendo que la medición es una práctica social en todo el mundo y es regida por un sistema de medición estandarizado. Entonces, cuando se trata de medir longitudes menores a la unidad se opta por usar las subunidades del metro (en la mayoría de los casos) que usar números decimales o fracciones, específicamente, en la vida cotidiana usan más a la unidad y el cm que el dm y mm.

5.2.2. Análisis de la Tarea 2: ¡Representando fracciones decimales!

La construcción de la noción número decimal mediante esta tarea se enmarca en la propiedad de orden, en la que se comparan fracciones decimales y se verifican resultados de esta comparación, en un contexto de medidas de longitud y de áreas. La construcción de esta noción por los estudiantes en esta etapa, se le atribuye a la evolución de los modelos MI, ME, MJ y MV. En el primer modelo (MI), producto de la comparación de dos fracciones decimales, aparecen relaciones de orden en forma de lenguaje común (*mayor, menor, igual*). En ME, estas relaciones se estudian en un contexto de medidas de longitud (A2) y áreas (A3). Se apoyan de este tipo de magnitudes para verificar las relaciones de orden que emergen de comparar las fracciones decimales planteadas en A1. Las relaciones de orden en ME también son expresadas en lenguaje común (verbal y/o escrito). En el tercer modelo, validan las relaciones de orden que establecieron en A2 y A3. En el último modelo, las relaciones de orden entre fracciones decimales aparecen como objetos socialmente admitidos, en forma de lenguaje común (verbal y/o escrito).

La tarea contempla tres actividades (A1, A2 y A3). En A1 se les pide determinar qué fracción decimal es mayor. En cambio, en A2 y A3 verifican los resultados obtenidos en la comparación de A1, producto de representar y comparar medidas de longitud y de áreas. Este hecho se da, al representar ambas fracciones decimales sobre una recta numérica (A2) para luego comparar las longitudes generadas. También representan las fracciones decimales de A1 sobre una superficie delimitada (área) dividida en 100 partes iguales (A3), luego las comparan y con base en ello, determinan cuál de ellas es mayor, menor o igual. Las medidas se validan en equipo y posteriormente a nivel grupal, consecuentemente, también las relaciones de orden establecidas. Se espera que las representaciones de estas relaciones de orden aparezcan en lenguaje común, ya sea verbal o por escrito o bien usando ambas formas.

a) Situación de acción (S-A)

A1 se trabajó de manera individual y se enmarca en la S-A. En esta actividad se favorece el surgimiento del MI (véase Tabla 5.2), que conlleva a expresar en lenguaje común (verbal y/o escrito) las relaciones de orden *mayor, menor o igual*, más que en términos de la simbología matemática, es decir: >, < o =.

Como resultado de las interacciones de los estudiantes con esta actividad, surge MI cuando usan las relaciones de orden al comparar este tipo de fracciones sin usar alguna regla matemática. Con base en las producciones escritas de los estudiantes, se tiene que cinco de ellos eligen como fracción mayor a $\frac{3}{10}$ (elección **a**) y el resto, a ***ii*** (elección **b**).

a) **b)**

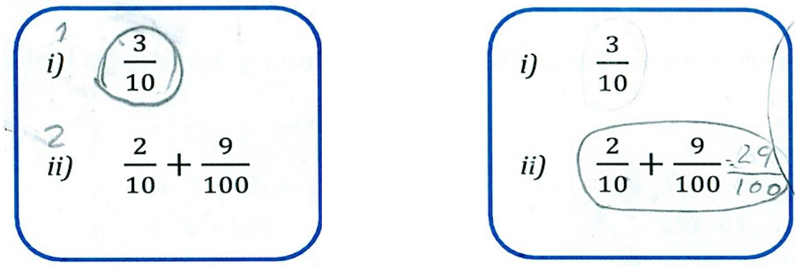


Figura 5.8. Comparación de fracciones decimales en i) e ii).

Si bien en esta etapa ningún estudiante reconoció a las relaciones de orden como objetos de estudio, es claro que ponen en juego conocimiento previo mientras comparan fracciones decimales. Ejemplo de ello es el caso de Érika (integrante de E3), quien al preguntarle dejó ver que su elección atendió a que sabe que $\frac{9}{100}$ es menor que $\frac{1}{10}$, y además, que $\frac{2}{10}$ es menor que $\frac{3}{10}$. De ahí que al compararlas elige a la fracción *i*), tal como se evidencia en el siguiente extracto:

[…]		…
[25]	Profesor:	¿Por qué elegiste la primera opción?
[26]	E3 (Erika):	"…Porque es mayor…"
[…]		
[28]	Profesor:	¿Por qué es mayor?
[29]	(Erika):	"…Porque nueve centésimos es una parte de un décimo y dos décimos es menor que este … (señala la primera opción)".

En los casos que eligieron a la segunda fracción (la expresada mediante una suma), dos de ellos omiten presentar explicaciones escritas acerca de los procedimientos realizados al determinar qué fracción es mayor (o menor o igual si es el caso). Una estudiante en cambio, dijo que sumó las fracciones decimales indicada en *ii)* y le resultó: $\frac{29}{100}$. Para ello, primero transformó mentalmente la fracción $\frac{2}{10}$ a una equivalente en términos de centésimos y ese resultado lo comparó con la fracción decimal indicada en *i).* Para decidir cuál de ellas es mayor, argumenta que *"como este de acá* (señala a *ii*) *tiene un cien y el otro diez, entonces es mayor"*. Esta frase, deja ver que comparó los denominadores, por ello eligió la del mayor, que es cien. Es importante resaltar que al comparar *i*) e *ii*), en ningún momento transforma a centésimos la fracción 3/10 como lo hizo con la fracción 2/10, uno de los sumando de la suma expresada en *ii*).

Es en la siguiente etapa en que los estudiantes verifican los resultados obtenidos en A1, al comparar las dos fracciones decimales.

b) Situación de formulación (S-F)

En la situación de formulación se espera que surja el ME, el cual implica que los estudiantes usen y expresen también en lenguaje común (verbal y/o escrito) las relaciones de orden *mayor*, *menor* e *igual*. Todo ello, derivado de trabajar con las fracciones decimales en un contexto de medidas de longitud y de áreas. Esta etapa se desarrolló en dos momentos. El primero (A2) refirió a representar cada fracción decimal de A1 sobre una recta numérica. El segundo momento consistió en representar estas mismas fracciones (A3) sobre una superficie delimitada (cuadrados divididos en cien partes iguales).

En esta segunda etapa se ubicó a los estudiantes a trabajar con este tipo de representaciones a objeto de que verificaran el resultado obtenido de comparar ambas fracciones decimales de A1. Así también, que comprendieran a la fracción decimal como una expresión de medida, mientras comparan y representan magnitudes continuas.

b. 1) ***Momento 1: Verificando resultados en un contexto de medidas de longitud***

En esta primera etapa trabajaron en equipo. Trazaron sobre el piso de su salón de clases una recta numérica, en la que representaron cada fracción decimal de A1. En el caso de E1 trazó en el piso una réplica de la tira modelo y sobre ella trabajaron, la subdividen en décimos para después representar cada fracción decimal, luego comparan las dos medidas de longitud. Con base en ello verifican el resultado al que llegaron en A1, pero ahora en un contexto de medir longitudes.

La imagen 5.9 evidencia parte de la actividad desarrollada por E1 (lo integran dos de los tres estudiantes que eligieron la fracción incorrecta). Se observa tanto la tira modelo (en papel blanco) como la réplica que trazaron en el piso del salón de clases. Asimismo, las subdivisiones que hacen sobre esta segunda tira y cómo representan las fracciones decimales mientras verifican los resultados a los que llegaron en A1. Con esta actividad, ellos verifican que el pedazo de tira (réplica) que mide $\frac{3}{10}$ es más largo que el que mide $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$, por consiguiente identifican que la elección que realizaron en E1 fue errónea, siendo que la primer fracción era mayor que la segunda aún cuando tuviera un denominador mayor. E2 y E4 realizan los mismos procedimientos, ellos rectifican los resultados obtenidos en A1, ya que la anticipación de estos cuatro estudiantes fue correcta.

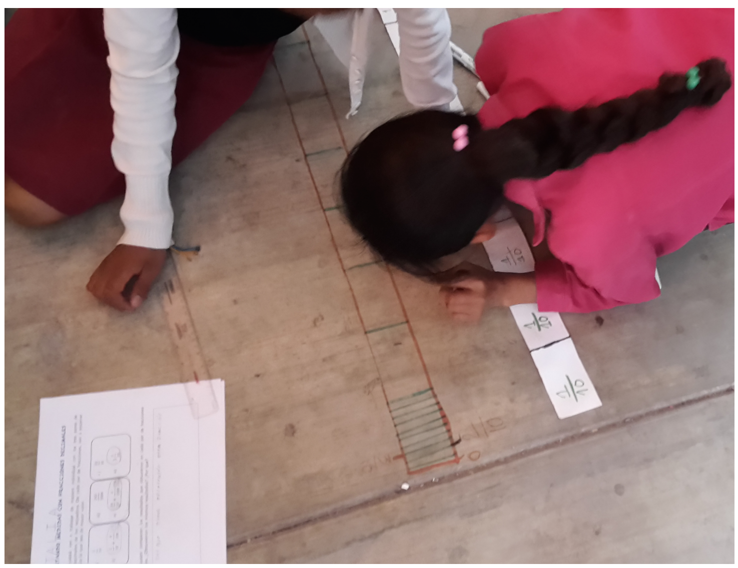


Figura 5.9. Fracciones decimales en la recta numérica.

E3 por su parte, traza la recta numérica sobre uno de los bordes del piso del salón de clases. En seguida, marcan el inicio con un 0 (cero). La tira unidad la usan para medir la distancia a la que quedará representada cada fracción decimal. Marcan esa distancia con un segmento. En este equipo, una estudiante identifica que la anticipación que realizó en A1 era incorrecta, ya que observa que el segmento que mide $\frac{3}{10}$ es más largo que el que mide $\frac{2}{10} + \frac{9}{100}$.

En general, los estudiantes realizan las acciones siguientes:

1) Representan el par de fracción decimal, sobre la recta numérica construida.
2) Comparan las representaciones de cada fracción sobre la recta numérica, en términos de distancias. Con base en ello, determinan cuál es mayor, menor o igual, objetivo de A2.
3) Verifican si el resultado que obtuvieron en A1, concuerda con el que obtienen en A2.

En los cuatro equipos el ME está articulado al uso consciente de las relaciones de orden, esto es, como instrumentos útiles en la comparación de fracciones decimales en un contexto de medida de longitud, apoyándose de la recta numérica. Sin que éstas relaciones sean consideradas como objetos de estudio en sí mismas.

b. 2) *Momento 2: Verificando resultados en un contexto de medidas de áreas*

En esta etapa los estudiantes interactuaron de manera individual en un contexto de área (A3). Se les situó a representar sobre una superficie delimitada el par de fracciones decimales de A1, para ello se les proporcionó un cuadrado dividido en cien partes iguales. El modelo explícito (ME) emerge cuando los estudiantes comparan las porciones de área que quedan sombreadas al representar las fracciones decimales de A1, el cual se expresa en términos de las relaciones de orden, en lenguaje común.

Con base en las respuestas de los estudiantes en A3, se reconoce que sólo tres de ocho representaron las fracciones decimales de manera adecuada. Hubo quienes usaron dos colores para representarlas sobre los cuadrados (inciso a), otros sólo un color (inciso b).

¿Cómo verifican los resultados de A1?

a) Uso de dos colores para representar y comparar fracciones decimales

Dos de los estudiantes que representaron de manera adecuada las fracciones decimales usaron dos colores. En estos dos casos, al igual que en A2, logran verificar cuál de las dos fracciones es *mayor* y cuál *menor*, lo hace al observar (visual y/o conteo) qué color cubre más o menos cuadritos (les llamaron centésimos). Ejemplo de ello es la representación de Yael, quien reconoce a la primer fracción como mayor (Figura No. 5.10).

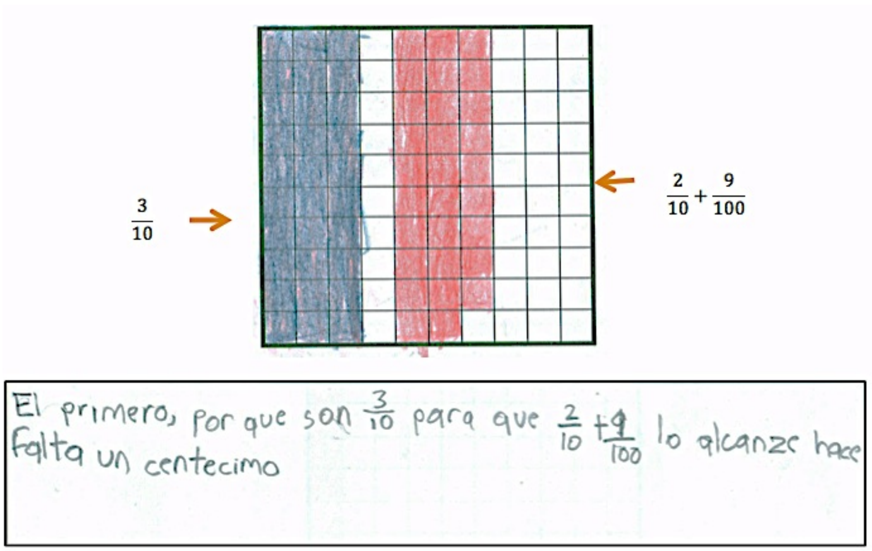


Figura 5.10. Representación y comparación de fracciones decimales

Destaca su argumento, pues articula a las tres relaciones de orden (*mayor*, *menor* e *igual*) para justificar que $\frac{3}{10}$ es mayor (véase tabla No. 5.2).

Tabla No. 5.2.
Relaciones de orden en el argumento de Yael

Parte de su argumento	Relación de orden articulada a su argumento
“El primero ….”	Aquí Yael se refiere a la *mayor* de las fracciones decimales del inciso v).
“Para que $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$ lo alcance …..”	Esta parte de su argumento, lo relaciona con la *igualdad* entre $\frac{3}{10}$ con la suma $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$.
“… Falta un centésimo”	En esta parte, hace explícito que $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$ es *menor* que $\frac{3}{10}$.

Cinco estudiantes también usaron dos colores para representar las fracciones decimales sobre la región cuadriculada, sin embargo, fueron erróneas. Se reconocen al menos dos maneras erróneas de representarlas:

Caso 1: Cuatro estudiantes consideraron que un décimo también es un cuadrito del cuadrado grande (figura 5.11).

Caso 2: Un estudiante: indescifrable sus representaciones.

Las relaciones de orden que emergen como ME en estos estudiantes, son las relaciones *mayor* y *menor,* pues al decir que una de las fracciones decimales representadas es mayor, reconocen que la otra es menor. No obstante, se puede observar que hay dificultades al representar la primera fracción, puesto que consideran que un décimo es un cuadrito pequeño, por lo tanto con $\frac{3}{10}$ se deben pintar tres.

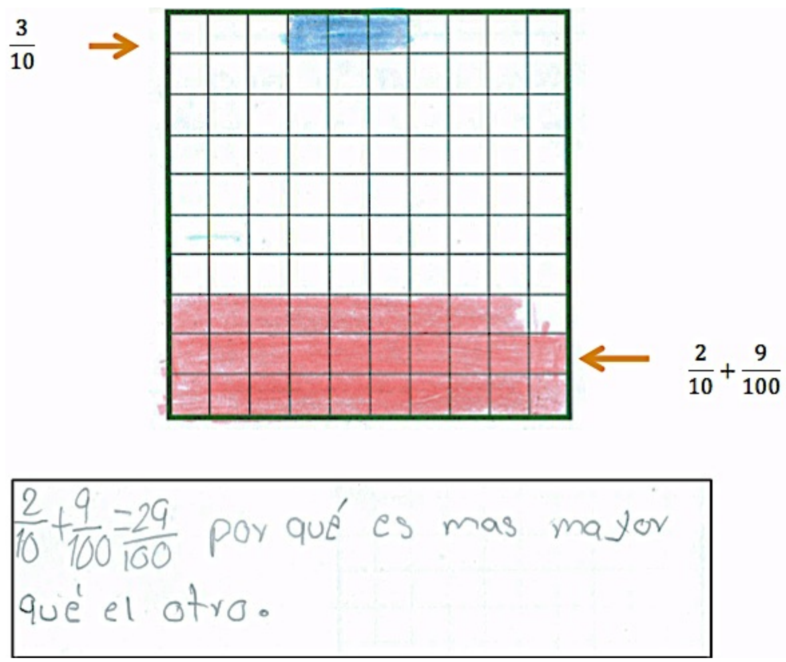


Figura 5.11. Estudiantes que reconocen cada parte de la unidad, en términos de décimos.

a) Uso de un color para representar y comparar fracciones decimales

Uno de los estudiantes que representaron de manera adecuada las fracciones decimales, usó un color. Verifica qué fracción decimal de A1 es *mayor*, *menor* o *igual*, de contar cuántos cuadritos del todo ocupa cada fracción decimal, y es así que corrobora que $\frac{3}{10}$ es mayor (Figura 5.12), reconociendo de manera implícita que la otra es menor.

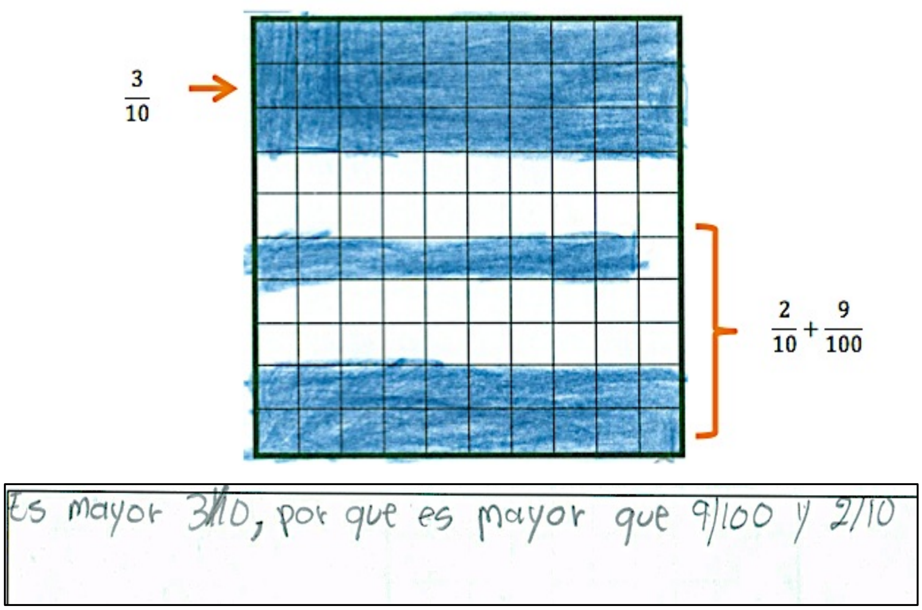


Figura 5.12. Uso explícito de la relación “mayor”

c) *Situación de validación (S-V)*

En la S-V se discute en grupo las relaciones de orden en fracciones decimales al representarlas como medidas de longitud y sobre áreas. En este momento de interacción surge el MJ cuando los estudiantes validan tales relaciones al este tipo de fracciones en los dos contextos de medida. En la figura 5.13 se evidencia la representación que realizó Erika al tratar de demostrar al grupo los fundamentos de su elección en la comparación de A1, de este modo, los demás estudiantes comparan sus resultados con los de su compañera, replantean sus representaciones y validan las relaciones de comparación “mayor, menor e igual” utilizadas tanto en S-A (anticipación en A1) como en S-F (verificación en A2 y A3).

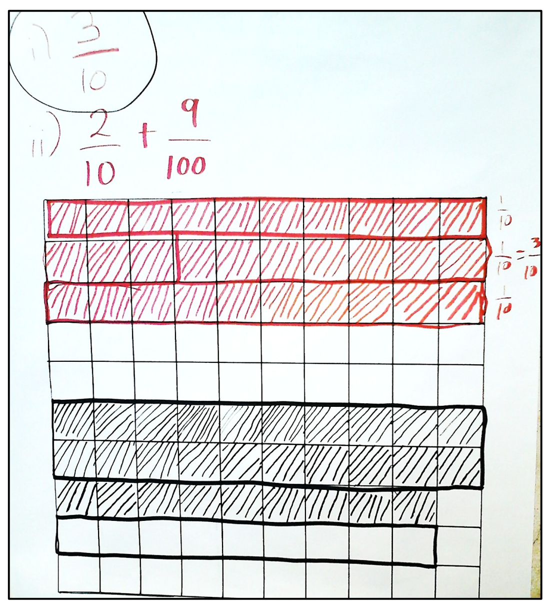


Figura 5.13. Argumentos del modelo usado en la S-F.

Hasta este momento se evidencia que existe una evolución del MI al ME y al MJ, esto debido a que los mismos estudiantes usan las relaciones de orden al comparar fracciones decimales representadas sobre áreas y longitudes.

d) Situación de institucionalización (S-I)

La S-I se enfoca a institucionalizar la noción matemática en juego (MV), la cual corresponde al orden de fracciones decimales a través de las relaciones >, < e = en lenguaje común (mayor, menor e igual). La intervención del profesor en este último momento de la T2, se orienta a formalizar el uso de las relaciones mayor, menor e igual al comparar fracciones decimales. Para tal efecto, su participación comprende dos momentos: el primero consiste en recapitular las dos representaciones realizadas en S-F (en longitud y en área) y las discusiones producidas en S-V, y en un segundo, mostrar las características invariantes de la noción de relación “orden en fracciones decimales”.

Momento 1) Fracciones decimales como medida de longitud y sobre áreas.

a) *Como medida de longitud.* El profesor pregunta al grupo sobre las fracciones decimales representadas en la recta numérica, como apoyo vuelve a representar la comparación en el pizarrón y declara la fracción mayor, en seguida explica las consideraciones que hay que tomar en cuenta para determinar si la fracción es mayor o menor que la otra. La noción de fracción decimal se presenta como medida de longitud, por tanto, la comparación se realiza en términos de largo y corto.

b) *Como medida sobre área.* Representa el mismo par de fracciones sobre el cuadrado, con base en ello determina cuál de las dos es mayor y posteriormente argumenta las consideraciones que tomó en cuenta en su elección. Además enfatiza en las dos formas de representar fracciones decimales para obtener un mismo resultado, es decir, menciona que tanto la recta numérica y el cuadrado son recursos que permiten verificar si una fracción decimal es mayor, menor o igual que otra.

Momento 2) Características invariantes

En una segunda intervención, el profesor presenta al grupo las características invariantes de la noción de relación “orden en fracciones decimales” en términos de consideraciones, por el nivel cognoscitivo de los estudiantes se muestran como sigue:

- Consideremos que con las fracciones decimales se pueden establecer equivalencias, por ejemplo: $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ (retoma el ejemplo de la representación sobre el área).

- Cuando se comparan dos fracciones decimales hay que tomar en cuenta dos cosas:

  1) Si se tiene dos fracciones con igual denominador, entonces hay que comparar solo los numeradores, aquella que tenga el numerador mayor será la fracción mayor.

  2) Si se tienen dos fracciones con diferente denominador, entonces se pueden hacer equivalencias, de tal modo que se obtengan denominadores iguales, así se pueden comparar solo los numeradores (ejemplificó con la primer comparación).

Reflexiones sobre la evolución de los modelos en la T2

En la interacción con la T2, se evidencia que los estudiantes transitaron por los cuatro modelos cuando se les situó a comparar fracciones decimales tanto en longitudes como en áreas. La evolución hacia la noción de número decimal se enmarca dentro de la transición de la noción de objeto *fracción decimal* a la propiedad de *orden en fracciones decimales*, está propiedad se estudia en términos de establecer las relaciones de orden: mayor, menor e igual.

Con esta tarea se observa lo siguiente:

- En S-A surge un modelo implícito cuando los estudiantes comparan fracciones decimales mediante el uso de las relaciones de orden en lenguaje común (mayor, menor e igual), sin utilizar ningún tipo de regla matemática o recurso para verificar.

- En S-F surge el modelo explícito de las relaciones de orden en lenguaje común cuando representan fracciones decimales en longitudes y sobre superficies. En este caso, la fracción decimal se presenta en términos de largo y regiones sombreadas.
- Durante S-V se presenta el MJ cuando se discuten las consideraciones utilizadas por los estudiantes para determinar si una fracción decimal es mayor, menor o igual que otra.
- En S-I se presentan las características invariantes de la propiedad de "orden en fracciones decimales", estas características son presentadas en términos de "consideraciones".

Es importante destacar que durante el desarrollo de la T2 surgieron obstáculos de tipo didáctico y cognitivo, los cuales incidieron en la emergencia o no de los modelos en algunos casos, mientras los estudiantes interactuaban con la tarea. Se reconocen los siguientes:

- *Comparar expresiones fraccionarias decimales con distinto denominador* (Obstáculo cognitivo). Al momento de realizar las comparaciones sin utilizar ningún tipo de representación (A1) se observa que los estudiantes proceden como con los naturales, sus argumentos inciden en afirmar que "si el denominador es mayor, entonces la fracción debería ser mayor".

- *Cambio de magnitud al representar fracciones decimales con distinto denominador* (Obstáculo didáctico). A objeto de comparar fracciones decimales, primeramente los estudiantes las representan como medidas de longitud y después como medida sobre áreas. Sin embargo, cuando pasan de la primera representación (longitud) a la segunda (área) se observa que recurren a las representaciones realizadas sobre la recta numérica para determinar si una fracción es mayor o menor. Esto se le atribuye al discurso matemático escolar, debido a que escasamente se estudian fracciones decimales como medidas representadas sobre áreas.

De manera general, se reconoce que al menos cinco estudiantes anticiparon correctamente cuál de los fracciones de A1 era mayor y cuál menor, en su caso, la medición de longitudes ayudó a corroborar dichas anticipaciones. Por lo que respecta a los estudiantes que eligieron la fracción equivocada, el medir longitudes (actividad realizada en equipo) les permitió corregir su anticipación en A1.

Pero cuando representan ambas fracciones sobre el cuadrado, se observa que tres estudiantes lo hacen correctamente y solo corroboran lo que realizaron en A1 y A2. El resto de los estudiantes lo hacen incorrectamente, debido a que consideran que cada parte representa un décimo, cuando en realidad es una décima parte de la unidad. Este tipo de representaciones dejan en claro que los estudiante tienen dificultades conceptuales sobre lo que es una fracción (incluyendo a las fracciones decimales).

5.2.3. Análisis de la Tarea 3: ¿Qué pasa con los milésimos?

La evolución de la noción número decimal en esta tarea se plantea en un contexto de fracciones decimales y de medida sobre una superficie delimitada. Se pide a los estudiantes representar una fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ (milésimos) sobre un cuadrado dividido en cien partes iguales.

Específicamente, T3 está orientada a que el estudiante, por una parte, establezca la relación entre las partes con el todo (entre las décimas, centésimas y milésimas con el cuadrado) y por otra que comprenda la notación desarrollada de una fracción decimal, mediante el tránsito de una representación a otra, esto es, pasar de su representación numérica en forma de fracción decimal a su representación gráfica sobre una superficie (la fracción decimal como medida sobre área), a su vez, pasar de esta segunda representación a su notación desarrollada.

En cuanto a la comprensión de la notación desarrollada de este tipo de fracciones se le atribuye a la evolución de los modelos MI, ME, MJ y MV. En el primer modelo (MI), aparecen representaciones gráficas de la fracción decimal (expresada en milésimos) mediante diversos procedimientos (tránsito de la fracción decimal a su representación), a partir de esta representación se aborda de forma implícita la notación desarrollada. En el segundo modelo (ME), como resultado de la interacción entre pares e intervención del docente, surgen las expresiones aditivas de la fracción decimal en lenguaje matemático (uso explícito de la notación desarrollada), estas tienen presencia cuando los estudiantes expresan la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que representaron en el cuadrado. Es en MJ donde se valida los tres tipos de representación de la fracción decimal: la numérica, la gráfica y las expresiones aditivas. En este sentido, en este tercer modelo se inicia el estudio de la notación desarrollada de las fracciones decimales. En el último modelo (MV) aparece la notación desarrollada de la fracción decimal como objeto culturalmente validado, en lenguaje matemático y por escrito.

La T3 está conformada por una actividad (A1), que sitúa a los estudiantes a representar fracciones decimales como medidas de área sobre superficies delimitadas y a establecer relaciones de equivalencia entre fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ (milésimos) con fracciones del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 1{,}2$ (décimos y centésimos) respecto a la unidad. A1 se desarrolla en dos momentos: 1) Se les proporciona un cuadrado dividido en cien partes iguales (en centésimas partes) para que representen $\frac{25}{1000}$ mediante sus propios procedimientos y recursos. Y 2) Se les ubica a representar las expresiones aditivas (en lenguaje matemático y en forma de fracción decimal) de esta fracción mediante una interrogante.

Siendo que T3 versa sobre relacionar el todo con las partes y comprender la descomposición de la fracción decimal en expresiones aditivas, nos interesa analizar y describir los procedimientos que siguieron los estudiantes al representar $\frac{25}{1000}$ (tránsito de la fracción decimal a su representación gráfica), a objeto de profundizar sobre cómo relacionan las milésimas partes con la unidad, y a su vez con las centésimas.

a) Situación de acción (S-A)

El primer momento de A1 se inscribe dentro de S-A y se lleva a cabo de manera individual. Como producto de la interacción que tiene el estudiante con la actividad surge el modelo implícito de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p}$, $con\ p = 3$, esto, cuando establecen dos relaciones de equivalencia: 1) Entre la representación de milésimos y la unidad, y 2) Entre la representación de milésimos y los centésimos. Ambas relaciones se evidencian cuando representan $\frac{25}{1000}$ mediante el procedimiento que más le convenga. Al analizar las respuestas, se identifica dos tipos: el concreto y el abstracto.

1. **Procedimiento concreto.** Corresponde a subdividir gráficamente cada centésima parte de la unidad (cuadrado), a objeto de obtener milésimas partes. En es tipo de procedimiento se reconocen dos formas de realizar la subdivisión:

a) Subdivisión de los cuadrados con centramiento en el numerador .

Este procedimiento fue realizado solo por un estudiante. Para representar los $\frac{25}{1000}$ sobre el cuadrado, en primer instante identificó que debía sombrear 25 partes del total, con esto, se centra en el numerador y deja de lado al denominador. Cuando observa que solo tiene 100 partes (centésimos) opta por dividir en cuatro partes iguales a cada centésimo, al parecer, usó un procedimiento cómodo sin tomar en cuenta la cantidad de partes que obtuvo al subdividir cada centésimo de tal forma, más bien, se ocupó de sombrear las 25 partes solicitadas. En la figura 5.14 se evidencia el procedimiento descrito.

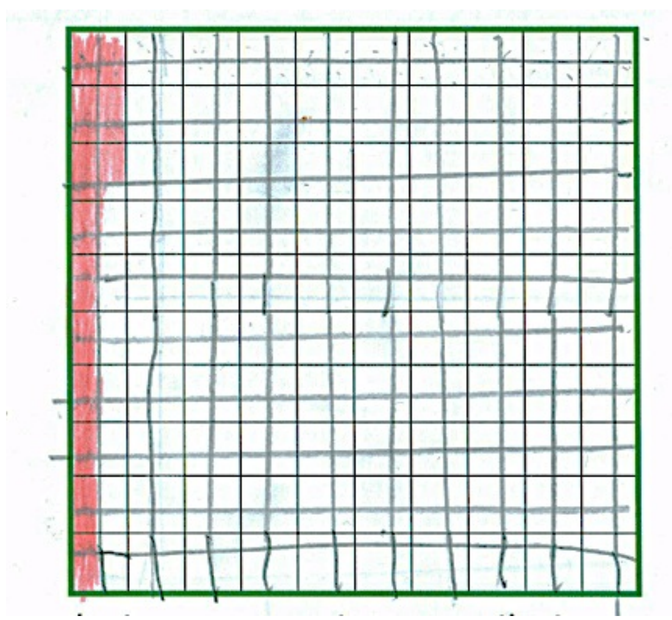


Figura 5.14. Representación de 25 partes del total.

b) Usar la multiplicación para calcular la cantidad de partes de un centésimo.

Se reporta que al menos dos estudiantes usan este tipo de procedimientos, el cual consiste en usar la multiplicación para calcular la cantidad de partes que debe contener cada centésimo. Cabe destacar que ambos calcularon y se aproximaron a dicha cantidad mediante ensayo y error, sin embargo, los resultados que obtuvieron fueron erróneos debido a que realizaron multiplicaciones como las que se muestran en la figura 5.15, con base en ello identifican que el resultado no era el que se esperaba (1000), uno de ellos obtuvo 1080.

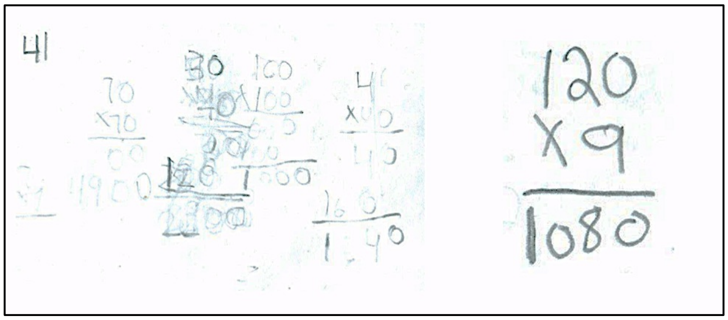


Figura 5.15. Uso de la multiplicación para obtener 1000 partes.

Al no obtener las mil partes, optaron por subdividir cada centésima parte en dieciséis partes iguales. De esto, se observa que si relacionan el todo con los milésimos, sin embargo, presentan dificultades al momento de realizar la subdivisión. La figura 5.16 evidencia las representaciones realizadas, en ambos casos se avocaron a sombrear 25 partes pequeñas que se obtuvieron de la subdivisión.

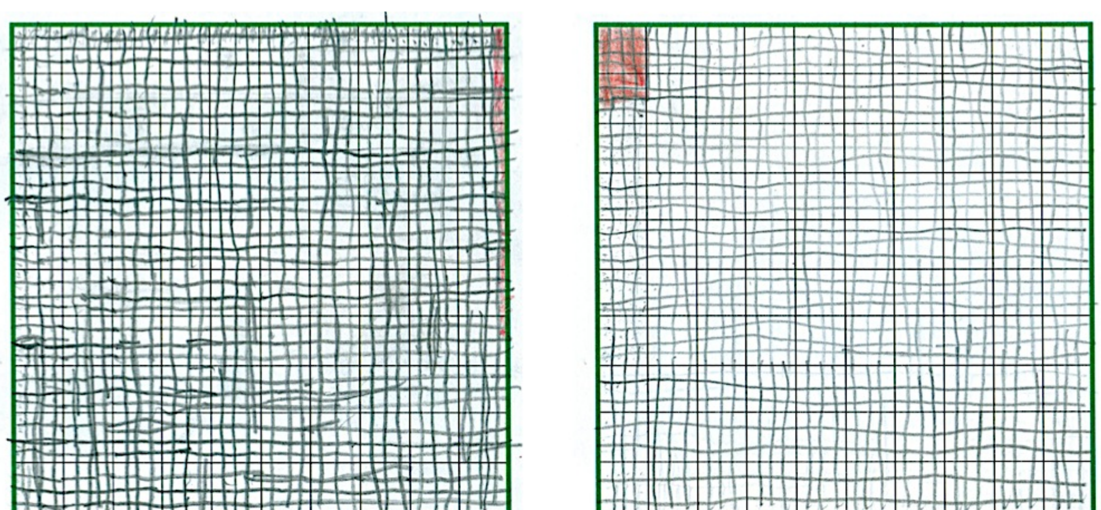


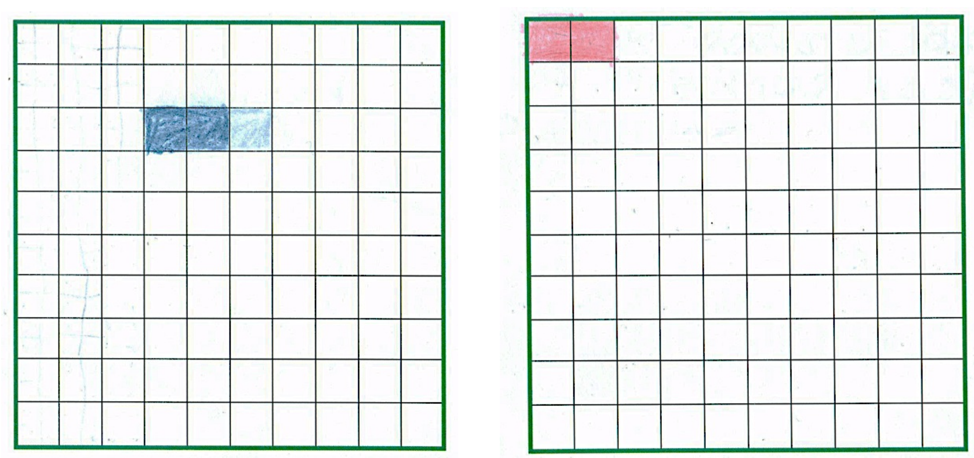
Figura 5.16. Subdivisión de cada centésima parte en dieciséis.

2. **Procedimiento abstracto.** Implica calcular de forma mental la cantidad de milésimos que corresponden a una centésima parte sin usar ninguna subdivisión

gráfica. Este tipo de procedimientos fueron utilizados por el resto de los estudiantes (5), quienes a su vez, representaron $\frac{25}{1000}$ mediante dos formas:

a) Colorean dos centésimas partes.

Tres estudiantes representaron la fracción decimal indicada al sombrear solo dos cuadros pequeños (centésimos) sin usar ningún tipo de subdivisión gráfica. Cuando se les pregunta sobre lo realizado argumentan que "si pinto tres, se pasaría", esto indica que sí establecen una relación de equivalencia entre centésimos y milésimos, sin embargo, solo representan veinte milésimos. Las representaciones de los estudiantes se muestran en la figura 5.17, en a) se evidencia la representación de uno de ellos, este estudiante colorea tres cuadrados pequeños pero cuando identifica que ha sobrepasado la cantidad de milésimos indicados en la fracción decimal opta por borrar el color del tercer cuadrito (centésimo). En cambio, en b) se muestra la forma de proceder de los otros dos estudiantes, quienes solo iluminaron dos centésimos.



a) b)

Figura 5.17. Representación de veinte milésimos.

b) Colorean dos centésimas partes más otra parte de centésimo.

Este tipo de procedimientos fueron utilizados solo por dos estudiantes. En la Figura 5.18 se muestra la representación de uno de ellos, consistió en sombrear dos centésimas partes más una parte de otra. Se hace evidente que el estudiante es consciente de que debe sombrear veinticinco partes de mil en total, sin embargo, no establece las relaciones de equivalencia entre los milésimos y centésimos, debido a que cada centésimo lo divide en 12 partes iguales. Con esto, él sombrea dos centésimos más otro cuadrado pequeño (que en este caso representa $\frac{1}{12}$ parte del centésimo). Cuando se le cuestiona sobre el procedimiento, argumenta que "partí cada cuadrito en doce partes para obtener veinticuatro, entonces tuve que dividir otro y esta vez solo tomé uno para completar veinticinco" (la subdivisión de los dos primeros cuadritos lo realiza de forma mental).

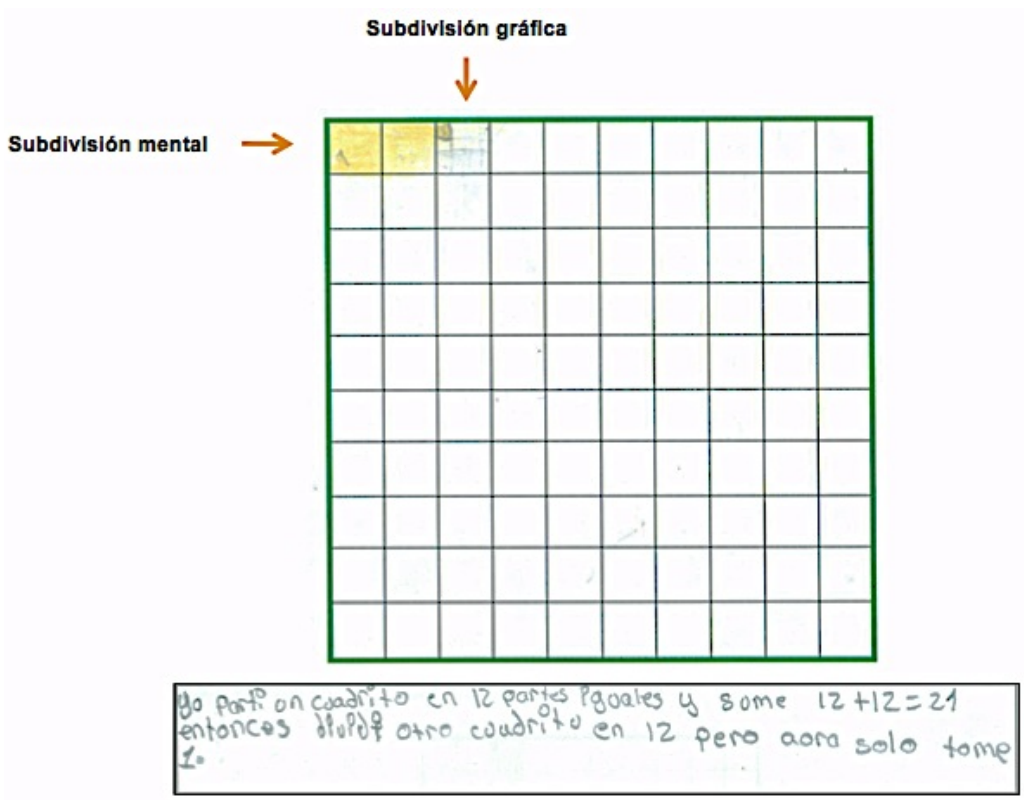


Figura 5.18. Subdivisión de cada centésimo en dieciséis partes de forma gráfica y mental.

Por otra parte, el otro estudiante realiza la representación de la fracción indicada de forma correcta, para ello, sombrea dos cuadros pequeños (centésimos) y la mitad de otro sin subdividir gráficamente a cada uno, es decir, lo realiza de manera mental. Tal representación se presenta en la figura 5.19, en ella se observa que el estudiante fue capaz de establecer la equivalencia entre centésimos y milésimos, tales como:

- Un centésimo es igual a diez milésimos.
- Cinco milésimos es igual a la mitad de un centésimo

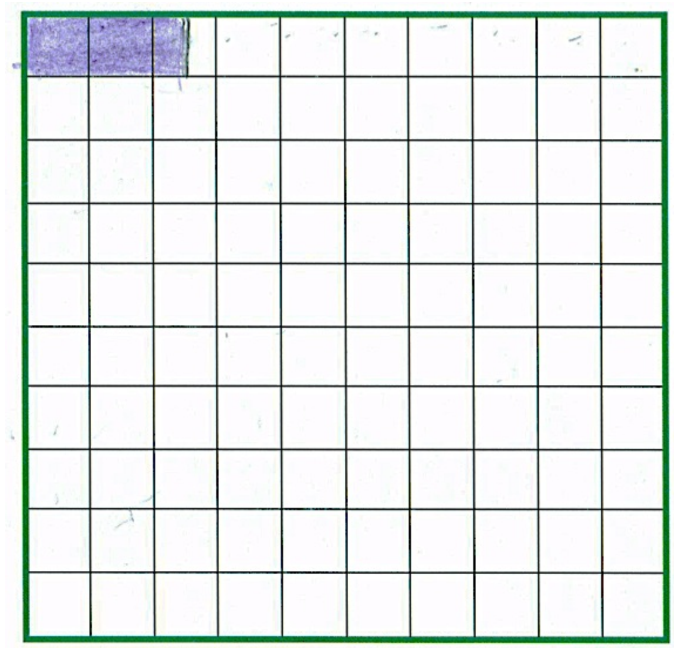


Figura 5.19. Subdivisión del centésimo en forma mental.

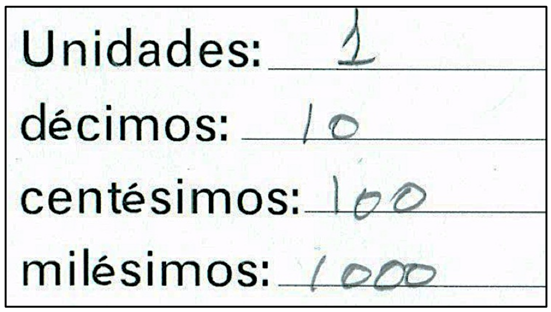
b) Situación de formulación (S-F)

En el marco de la S-F se contempla el segundo momento de A1, el cual se desarrolla en equipo y está orientado a que el estudiante pase de la representación gráfica de la fracción decimal realizada en el cuadrado a su representación numérica, a través de la descomposición de la fracción decimal en expresiones aditivas (uso explícito de la notación desarrollada). Para ello, se les plantea la siguiente interrogante:

¿Cuántas unidades, décimos, centésimos y milésimos están representados en el cuadrado?

Con base en ella, se esperaba que los estudiantes descompusieran la fracción $\frac{25}{1000}$ en expresiones aditivas ($\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}$) y las expresaran en lenguaje matemático y por escrito, específicamente, en forma de fracción decimal. Sin embargo, las respuestas fueron expresadas en lenguaje común, las más destacadas son las siguientes:

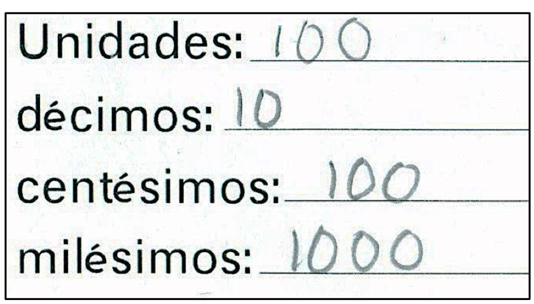
a) *Establecen relaciones de equivalencia del todo con las partes en términos de la unidad usada (cuadrado).* Algunos estudiantes respondieron a la pregunta tomando en cuenta a la unidad y no a la fracción decimal representada ($\frac{25}{1000}$), es decir, establecieron equivalencias entre milésimos, centésimos, décimos y la unidad (en lenguaje común). A modo de ejemplo, en la figura 5.20 se observa que el estudiante identifica que el cuadrado representa 1 unidad, además que en ella hay 10 décimos, también está conformada por 100 centésimos y a su vez, tiene 1000 milésimos.



Unidades: 1
décimos: 10
centésimos: 100
milésimos: 1000

Figura 5.20. Relación de la unidad con las partes (fracciones decimales).

b) *Establecen relaciones de equivalencia entre las partes de la unidad.* En otros casos se identifica que los estudiantes toman al centésimo como unidad, esto, después de subdividirlo para obtener milésimas partes del entero. Al igual que en el caso anterior, identifican que en le cuadrado hay 10 décimos, 100 centésimos y 1000 milésimos (véase figura 5.21).



Unidades: 100
décimos: 10
centésimos: 100
milésimos: 1000

Figura 5.21. El décimo concebido como unidad.

Después de analizar las respuestas de los estudiantes, destacamos que no se hizo presente el modelo explícito de las expresiones aditivas de la fracción decimal representada sobre el cuadrado, sino más bien, aparecieron las expresiones aditivas (en lenguaje común) de la unidad. Cabe destacar que, una de las razones que justifican la ausencia del modelo es la presencia de un obstáculo de tipo didáctico, a razón de que el planteamiento de la interrogante no especifica el objeto de estudio (la fracción $\frac{25}{1000}$).

c) Situación de validación (S-V)

En la S-V se discute en grupo la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ al representarlas como medidas sobre áreas. En este caso, se analiza la representación de $\frac{25}{1000}$ sobre el cuadrado y también su descomposición en expresiones aditivas, para ello, un estudiante comparte su representación al grupo, lo realiza nuevamente en una lámina ubicada en la pizarra. En cuanto a la discusión de la descomposición de la fracción decimal representada fue necesaria la intervención del profesor, debido a que en S-F no emergió el modelo esperado. Su intervención consistió en preguntar sobre “otra forma de representar a $\frac{25}{1000}$, pero usando fracciones decimales”, el estudiante junto con sus compañeros determinan que dicha fracción también se puede escribir como $\frac{2}{100}$ y $\frac{5}{1000}$.

Posteriormente los estudiantes validan estas expresiones aditivas de la fracción decimal como resultado de descomponerla, es aquí cuando se surge el modelo justificado (MJ) cuando. La figura 5.22 muestra parte del cuadrado (unidad), en ella se evidencia la descomposición de $\frac{25}{1000}$ ejecutada por el estudiante, apoyándose de la representación gráfica realizada en la pizarra. De este modo, los demás estudiantes comparan su representación con la que se discutió en grupo, además comprenden que las expresiones aditivas de una fracción constituyen otra forma de representarlas (uso explícito justificado de la notación desarrollada).

Figura 5.22. Descomposición de $\frac{25}{1000}$.

d) Situación de institucionalización (S-I)

Este último momento de interacción con la tarea se orientó a institucionalizar el uso de la notación desarrollada de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ (MV), asignándole el estatus de conocimiento matemático culturalmente validado. La intervención del profesor en S-I consistió en formalizar la notación desarrollada de las fracciones decimales, por tanto, retoma las discusiones sobre la representación de la fracción decimal y su descomposición en expresiones aditivas, ambas producidas en S-V. Esto, a objeto de mostrar sus características invariantes.

a) Características invariantes

Una forma de explicar a los estudiantes que la notación desarrollada representa las expresiones aditivas de una fracción decimal se describe como sigue:

- La notación desarrollada es otra forma de expresar una fracción decimal.
- Una fracción decimal puede expresarse en notación desarrollada cuando se descomponen en sus partes.
- Una fracción decimal puede estar conformada por otras fracciones decimales, a las que vamos a llamarle partes. Por ejemplo, en la fracción que representaron en el cuadrado (se trae a colación $\frac{25}{1000}$) se conforma de dos fracciones decimales: de $\frac{2}{100}$ y $\frac{5}{1000}$. Entonces podemos escribirlo así:

$$\frac{25}{1000} = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

Para saber si esto es cierto, podemos ver la parte que se pintó en el cuadrado (les solicita verificar).

Reflexiones sobre la evolución de los modelos en la T3

En la interacción con la T3, se evidencia que los estudiantes transitaron solo por tres modelos (MI, MJ y por MV), esto, cuando se les situó a representar fracciones decimales en un contexto de medida sobre superficies. Lo realizaron de tres formas: expresión numérica, representación gráfica y notación desarrollada. La evolución hacia la noción de número decimal se inscribió en la comprensión de la noción notación desarrollada de la fracción decimal.

Como resultado de la interacción con T3, se evidencia lo siguiente:

- En S-A surge un modelo implícito de la notación desarrollada de la fracción decimal cuando los estudiantes la representan gráficamente sobre una superficie delimitada, esta representación versa sobre el establecimiento de relaciones de equivalencia entre el todo con las partes.
- Durante S-F no emerge el modelo explícito (ME), a razón de que los estudiantes no logran representar las expresiones aditivas de $\frac{25}{1000}$. En este momento de la T3 fue necesaria la intervención del profesor para transitar a MJ.
- Durante S-V se presenta el MJ cuando se discute tanto la representación de la fracción decimal del tipo $n = \frac{a}{10^p},\ con\ p = 3$ como medida sobre áreas así como su descomposición en expresiones aditivas (notación desarrollada).
- En S-I se presentan las características invariantes de la noción "notación desarrollada de la fracción decimal", en términos de reconocer que es otra forma de representarla.

Es pertinente enfatizar que durante el desarrollo de T3 se presentaron obstáculos de corte didáctico, los cuales impidieron que surgiera el MJ en S-F y favoreciera la producción de errores al representar la fracción decimal como medida sobre áreas. Se describen a partir de dos aspectos:

1) Representar $\frac{25}{1000}$ sobre una unidad dividida en centésimas partes.

El cuadrado dividido en cien partes iguales planteado en T3 constituye un modelo usado para representar cantidades continuas. Para intereses de este estudio, se usa para que los estudiantes representen fracciones decimales expresadas en milésimos y relacionen la parte (fracción decimal) con el todo (unidad). Cabe destacar que la consigna fue clara y el objetivo contundente, sin embargo, se observa que este tipo de actividades causaron dificultades en los estudiantes y por consecuencia los condujeron a errores. Al respecto, la mayoría de los estudiantes comprenden a la fracción decimal como parte-todo, sin embargo, el subdividir cada centésima parte de la unidad para obtener milésimos representa un procedimiento complejo para ellos, lo realizaron mediante tres formas: *centramiento solo en el numerador, por aproximación (ensayo y error) y mediante la relación de equivalencia entre centésimos y milésimos.* En este sentido, los estudiantes tienen claro que solo deben sombrear 25 partes de las mil, y para obtener esas mil partes hay que dividir los cuadros chicos (centésimos) en cierto número de partes.

La presencia de este tipo de obstáculos se debe a que el discurso matemático escolar escasamente trabaja con representaciones de fracciones decimales sobre áreas, más bien, se estudian en un contexto de medición de longitudes.

2) Expresar $\frac{25}{1000}$ en notación desarrollada.

Uno de los obstáculos provocados por el diseño (de tipo didáctico) está relacionado a la forma en que se plantea la interrogante *¿Cuántas unidades, décimos, centésimos y milésimos están representados en el cuadrado?,* la intención de esta pregunta correspondía a que el estudiante identificara y representara en lenguaje matemático las expresiones aditivas de la fracción decimal $\frac{25}{1000}$. Las respuestas de los estudiantes no corresponden a lo esperado, pero si relacionan tal cuestionamiento con la unidad (el cuadrado) y las fracciones que la conforman ($\frac{10}{10}$, $\frac{100}{100}$ y $\frac{1000}{1000}$), en términos de establecer equivalencias entre ellas. En función de esto, dichas relaciones fueron expresadas en lenguaje común y no en forma de fracciones decimales.

5.2.4. Análisis de la Tarea 4: Distintas escrituras para un mismo número

La construcción de la noción número decimal en T4 se presenta a partir de expresar en lenguaje matemático tres tipos de representación del decimal: como fracción decimal, como notación desarrollada de la fracción y como notación decimal. En el proceso de construcción de esta noción se evidencia que evolucionan los cuatro modelos (MI, ME, MJ y MV), en MI aparece el uso implícito de la notación decimal (escritura con punto) en términos de representar la notación desarrollada de una fracción decimal, tanto en lenguaje matemático como en lenguaje común. En cambio, en ME surge explícitamente la notación decimal como otra forma de representar a la fracción decimal, de modo que ambas figuran como dos expresiones de un mismo número: el decimal. En el tercer modelo (MJ) validan en grupo el ME. Ya en MV se formaliza la noción de número decimal a partir de las tres formas de representarlo (como fracción decimal, como notación desarrollada de la fracción decimal y como notación decimal), dicho proceso está a cargo del docente, quién es el responsable de asignarle el estatus de conocimiento culturalmente validado.

T4 se conforma de dos actividades: A1 y A2, ambas se resuelven en equipo. La primera ubica a los estudiantes a representar en notación desarrollada fracción decimales propias e impropias (en lenguaje matemático y en lenguaje común), la consigna especifica representar las expresiones aditivas de cada fracción en forma de fracciones decimales y/o enteros para las unidades. Para ello, se les presenta una tabla en la que se les muestra un ejemplo (véase figura 5.23).

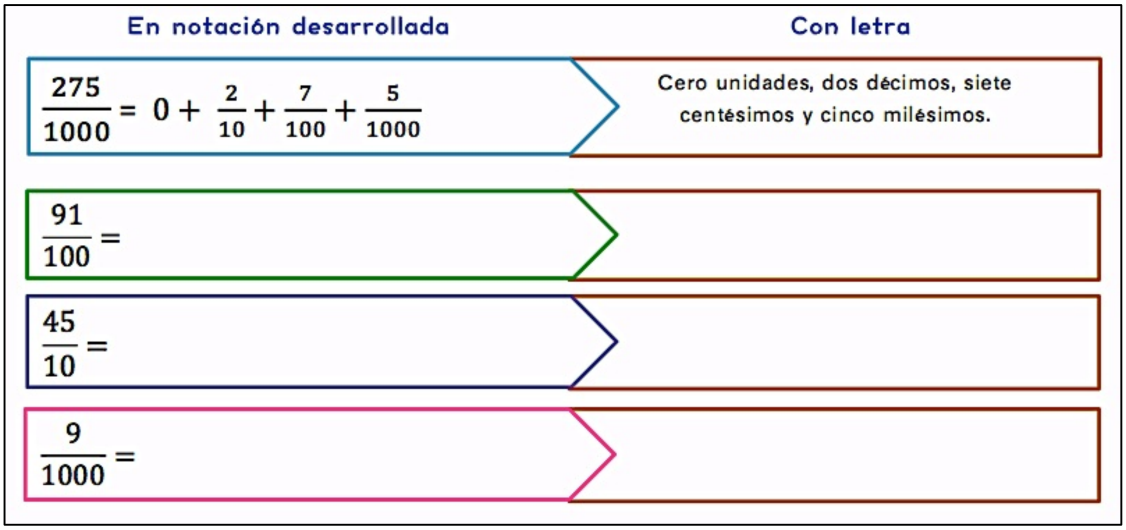


Figura 5.23. Notación desarrollada de la fracción decimal.

En cambio A2 sitúa al estudiante a expresar números decimales mediante dos tipos de representación: como fracción decimal y como notación decimal. En estos términos, expresar ambas representaciones constituye un proceso que consiste en transitar de la primera representación a la segunda, y también de manera inversa. La transición está prevista a partir del uso de dos tablas, en la **tabla 1** se plantean las tres fracciones decimales de A1, los estudiantes por su parte, deben representar la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que conforman a la fracción decimal dada, a objeto de obtener una escritura con punto decimal (notación decimal). En la **tabla 2**, el procedimiento se da a la inversa, esto es, de una notación decimal dada, reconocer y representar por escrito la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos para obtener una fracción decimal.

Cabe destacar que un aspecto relevante de A2 es que el estudiante comprende el valor posicional de cada cifra, ya sea que se encuentre antes o después del punto decimal, esto se logra cuando establecen relaciones de equivalencia entre las tres formas de representación del número decimal.

a) Situación de acción (S-A)

En S-A surge implícitamente la notación decimal, esto se da a partir de representar las expresiones aditivas de cada fracción decimal, tanto en lenguaje matemático como en lenguaje común. En el marco de la S-A se inscribe A1, en ella se evidencia que todos los equipos (E1, E2, E3 y E4) logran descomponer cada fracción decimal en expresiones aditivas. En las fracciones $\frac{91}{100}$ y $\frac{9}{1000}$ reconocen la ausencia de unidades y las expresan como sigue:

a) **Implícita.** Cuando no escriben el 0 para representar que no hay unidades, ya sea en lenguaje matemático y/o común.
b) **Explícita.** Cuando escriben “0” para representar que no hay unidades (lenguaje matemático) y/o “cero” (lenguaje común).

Por ejemplo E3 (véase figura 5.24) sigue el ejemplo al pie de la letra, se observa que representan explícitamente la ausencia de unidades (enteros) en las dos fracciones impropias, en cambio en la fracción $\frac{45}{10}$ reconoce que se pueden completar 4 unidades, lo expresa también de manera explícita.

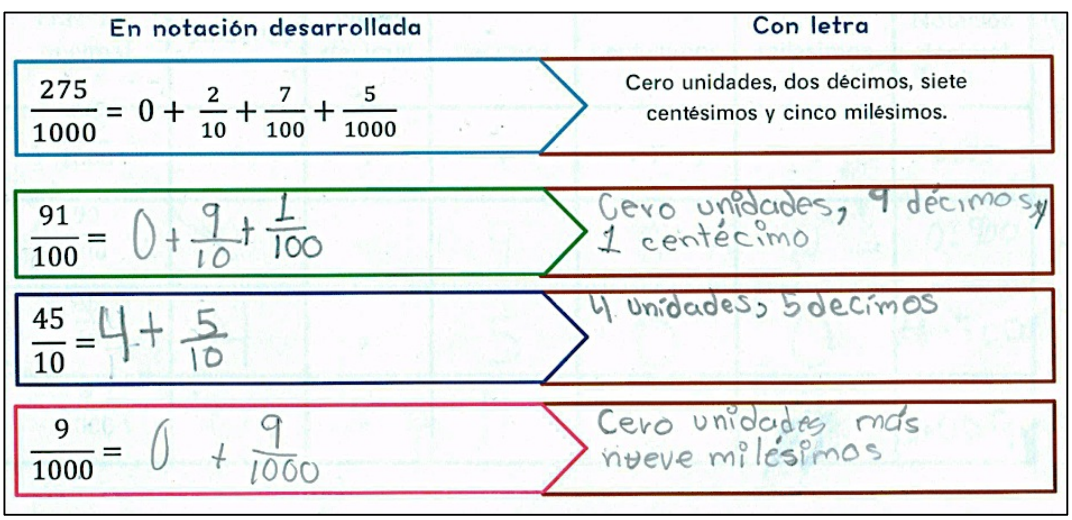


Figura 5.24. Representaciones explícitas en E3.

En la figura 5.25 se evidencia que E2 también descompone las tres fracciones decimales y las expresa tanto en lenguaje matemático como en lenguaje común, al igual que E3, reconoce que en $\frac{91}{100}$ y $\frac{9}{1000}$ hay ausencia de unidades (enteros), sin embargo, sus representaciones son implícitas (en notación desarrollada) y explícitas (con letra). Por cuanto a la fracción $\frac{45}{10}$, representa las unidades de manera explícita en ambos tipos de lenguaje.

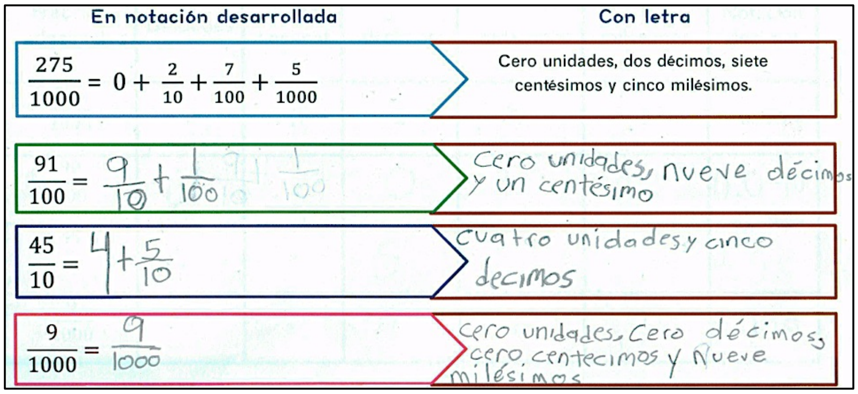


Figura 5.25. Representaciones implícitas en E3.

E1 y E4, proceden de la misma manera, a diferencia de los otros equipos (E2 y E3) tienen dificultades con la fracción $\frac{45}{10}$, ya que al representarla en notación desarrollada afirman que hay $\frac{4}{10} + \frac{5}{10}$ o "cuatro décimos y cinco décimos", estas respuestas evidencian que los estudiantes comprenden que una fracción decimal se puede descomponer en expresiones aditivas, sin embargo, erróneamente consideran que las fracciones impropias también tienen que ser menores a la unidad (véase figura 5.26).

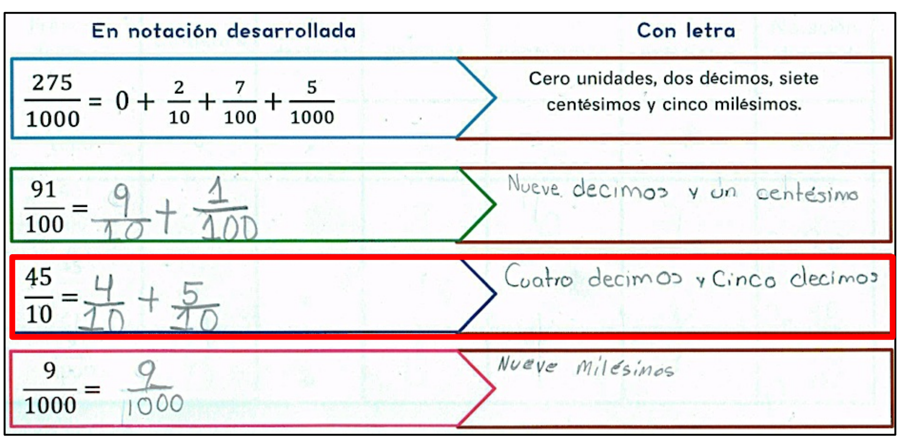


Figura 5.26. Representaciones implícitas en E1 y E4.

b) ***Situación de formulación (S-F)***

Desde el punto de vista teórico, se evidencia que evoluciona el MI al ME cuando deja de aparecer la notación decimal de manera implícita para convertirse en una representación explícita del número decimal. De este modo, se espera que en S-F emerja la notación decimal en lenguaje matemático y por escrito. En esta etapa se inscribe la segunda actividad (A2), la cual se desarrolla en equipo y está orientada a que el estudiante transite de la fracción decimal a la notación decimal y viceversa, además que establezca una relación de igualdad entre ambas y reconozca que son dos formas de representar al número decimal.

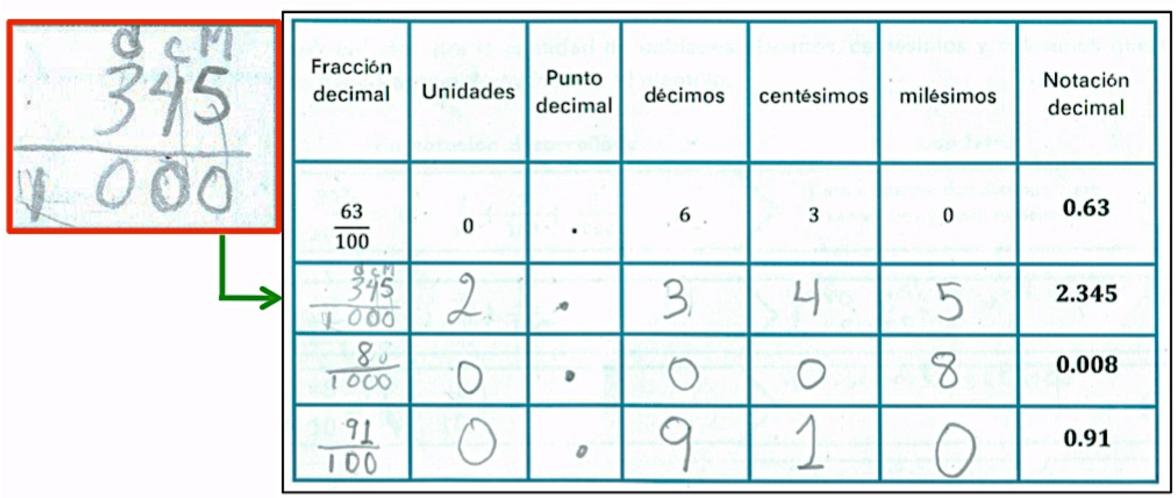
En lo que sigue se describen los resultados de cada equipo:

En la **tabla 1**, E3 y E2, sin ninguna dificultad logran transitar de la primera representación a la segunda mediante el uso de la notación desarrollada de cada fracción decimal de A1, el uso de esta noción se expresa en términos de identificar “cuántas unidades, décimos, centésimos y milésimos hay en cada fracción decimal”. En la figura 5.27 se evidencian los resultados de los dos equipos, como se observa, usan implícitamente la notación desarrollada para determinar el valor posicional de cada expresión aditiva, ubicándolas por escrito en las casillas correspondientes. Al final reconocen que han obtenido una escritura con punto decimal que se deriva de la fracción decimal, es decir, que la notación decimal constituye otra forma de representar a una fracción decimal.

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275
$\frac{90}{100}$	0	.	9	0	0	0.900
$\frac{45}{10}$	4	.	5	0	0	4.500
$\frac{9}{1000}$	0	.	0	0	9	0.009

Figura 5.27. Tránsito de la fracción decimal a la notación decimal.

En la **tabla 2** realizan el procedimiento a la inversa, ambos equipos, al igual que en la tabla 1, no muestran dificultad alguna. Una cuestión que sobresale es que reconocen el valor posicional de cada expresión aditiva de una fracción decimal, esto se muestra de forma explícita en tabla usada por E3 (véase figura 5.28).



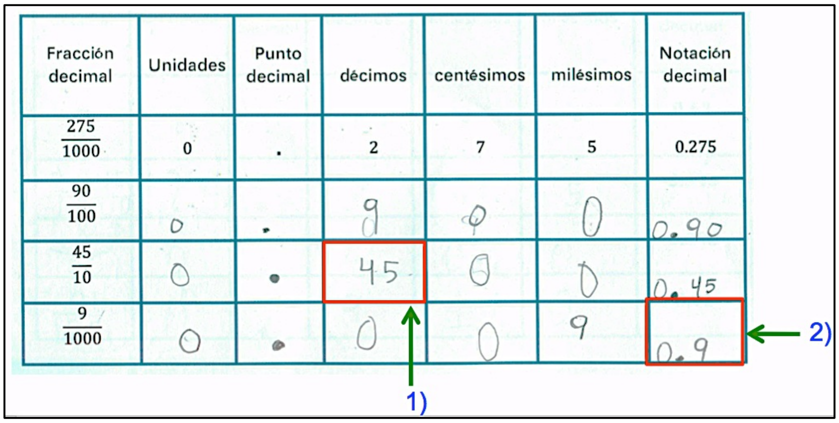
Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{63}{100}$	0	.	6	3	0	0.63
d c M $\frac{345}{1000}$	2	.	3	4	5	2.345
$\frac{80}{1000}$	0	.	0	0	8	0.008
$\frac{91}{100}$	0	.	9	1	0	0.91

Figura 5.28. Valor posicional en una fracción decimal.

Como resultado de la interacción de E1 y E4 con la **tabla 1**, se reconoce que también proceden de la misma manera cuando descomponen fracciones propias, sin embargo, para con las impropias se identificaron dos tipos de errores (véase figura 5.29):

1) Ambos equipos muestran dificultades al descomponer la fracción decimal $\frac{45}{10}$, ya que al representar la cantidad de décimos que se tienen argumentan que "son cuarenta y cinco décimos y se debe representar como 45 en la casilla que corresponde", esto se debe a que en A1 no representan de manera adecuada la notación desarrollada de esta fracción decimal.

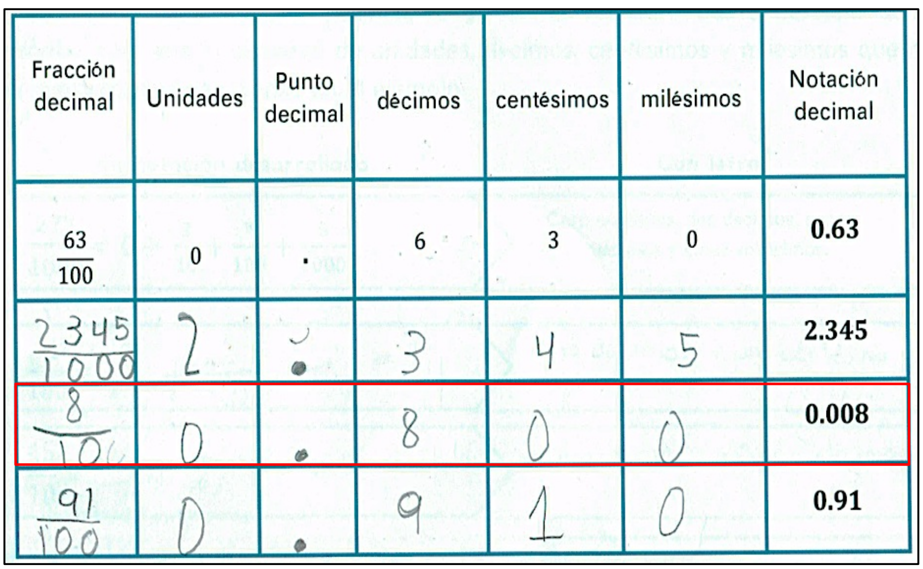
2) Particularmente E1 no reconoce que en los decimales los ceros a la derecha tienen un valor posicional, al respecto, cuando representa la notación decimal de las expresiones aditivas de la fracción $\frac{9}{1000}$ omite la escritura de los ceros.



Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275
$\frac{90}{100}$	0	.	9	0	0	0.90
$\frac{45}{10}$	0	.	45	0	0	0.45
$\frac{9}{1000}$	0	.	0	0	9	0.9

Figura 5.29. Errores de E1 y E4.

En la **tabla 2**, E1 transita de la notación decimal a la fracción decimal al igual que E2 y E3. Pero en el caso de la expresión 0.008 difiere, este equipo no ubica correctamente las cifras contenidas en esta notación decimal debido a que el 8 (milésimos) lo anota en la casilla de los décimos, sin embargo, cuando pasan a la escritura fraccionaria decimal lo hacen correctamente, pasan de escribir 0.800 a $\frac{8}{10}$ (véase figura 5.30).



Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{63}{100}$	0	.	6	3	0	0.63
$\frac{2345}{1000}$	2	.	3	4	5	2.345
$\frac{8}{10}$	0	.	8	0	0	0.008
$\frac{91}{100}$	0	.	9	1	0	0.91

Figura 5.30. Tránsito de la notación desarrollada a la fracción decimal.

En la figura 5.31 se muestra los resultados de E4, este equipo también ubica cada cifra de la notaciones decimales planteadas en la casilla que corresponde, pero cuando transitan a representar en fracción decimal solo consideran a la parte decimal. Por ejemplo, el número 2.345 lo representan como $\frac{345}{1000}$ (omiten los enteros).

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{63}{100}$	0	.	6	3	0	**0.63**
$\frac{345}{1000}$	2	.	3	4	5	**2.345**
$\frac{8}{1000}$	0	.	0	0	8	**0.008**
$\frac{910}{1000}$	0	.	9	1	0	**0.91**

Figura 5.31. Tránsito de la notación desarrollada a la fracción decimal.

c) *Situación de validación (S-V)*

En S-V se discute en grupo el modelo explícito que emergió en S-F, el cual consiste en establecer relaciones de equivalencia entre la fracción decimal y la notación decimal, en términos de reconocer que la escritura con punto es otra forma de escribir una fracción decimal. Por tanto en esta etapa surge el MJ cuando los estudiantes validan las relaciones establecidas entre ambas representaciones.

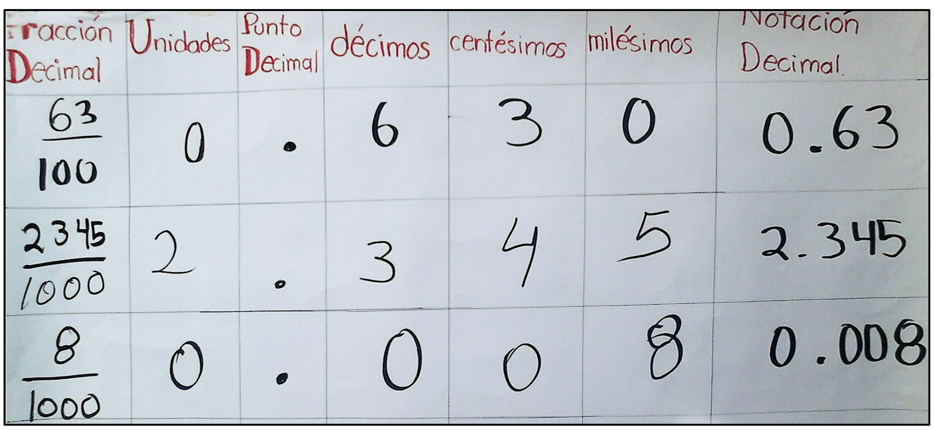
La discusión se dio en dos momentos: primero entre E3 y el resto del grupo y posteriormente entre E2 y el grupo. En la figura 5.32 se evidencia como E3 muestra al grupo su resultados obtenidos en la **tabla 1**, para ello se apoyó de una lámina colocada sobre la pizarra. Explican de manera verbal las expresiones aditivas de cada fracción, por ejemplo, en el primer caso argumenta que "noventa y un centésimos está formado de un centésimo y nueve décimos, entonces solo hay que anotar cuantos son para obtener este número que está en notación decimal". Esta frase demuestra que si establecen relaciones de equivalencia entre la fracción decimal $\frac{91}{100}$, su notación desarrollada en lenguaje matemático ($\frac{1}{100}+\frac{9}{10}$) y en lenguaje común (un centésimo más nueve décimos) y la notación decimal (0.910). Durante la demostración que realiza E3 surgen comentarios del grupo, como: "¡esos números ya los vimos!", un estudiante dice "¡Son números decimales!".

Una vez que concluye el equipo, los demás estudiantes se encargan de compararlos con los suyos, a objeto de validar o refutar las relaciones de equivalencia establecidas entre la fracción decimal y la notación decimal. E1 y E4 reconocieron que sus resultados en $\frac{45}{10}$ fueron erróneos, pero no corrigen.

Fracción Decimal	U	Punto Decimal	d	c	m	Notación decimal.
$\frac{91}{100}$	0	.	9	1	0	0.910
$\frac{45}{10}$	4	.	5	0	0	4.500
$\frac{9}{1000}$	0	.	0	0	9	0.009

Figura 5.32. Tránsito de la fracción decimal a la notación decimal.

De la interacción de E2 con el grupo se discuten los resultados obtenidos en la **tabla 2**, estos se evidencian en la figura 5.33.



Fracción Decimal	Unidades	Punto Decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación Decimal
$\frac{63}{100}$	0	.	6	3	0	0.63
$\frac{2345}{1000}$	2	.	3	4	5	2.345
$\frac{8}{1000}$	0	.	0	0	8	0.008

Figura 5.33. Tránsito de la notación decimal a la fracción decimal.

d) *Situación de institucionalización (S-I)*

En esta última etapa de la tarea, emerge el modelo culturalmente validado (MV) de la noción número decimal a partir de comprender la relación de equivalencia entre sus tres tipos de representación: la fracción decimal, la notación desarrollada y la notación decimal (estudiadas en A1 y A2). MV comprende formalizar el conocimiento matemático en juego, proceso que será realizado por el docente en términos de mostrar a los estudiante las características invariantes del número decimal. Su intervención se ocupa de:

1) Mostrar las relaciones de equivalencia entre la fracción decimal y su notación decimal.

El docente retoma lo realizado en A1 y A2, con base en ello explica que una fracción se puede descomponer en otras fracciones decimales. Como ejemplo muestra la primera fracción de A1:

$$\frac{275}{1000} = \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

También afirma lo siguiente:

> "Cada fracción que se obtiene de la descomposición representa una parte de la fracción decimal inicial, además estas fracciones también se pueden representar de otra forma según su denominador. Por ejemplo, en la tabla (usada en A2) también están escritas con letra, solo hay que anotar cuántos se tienen de cada uno. Después vamos a obtener una escritura con punto decimal llamada notación decimal". Ejemplifica con la primer fracción de A1 (véase figura 5.34).

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275

Figura 5.34. Tránsito de la fracción decimal a la notación decimal.

2) Mostrar las características invariantes de la noción de número decimal.

El profesor discute con los estudiantes sobre el número obtenido en la casilla de *Notación decimal*, al respecto pregunta: ¿Los han visto?, ¿En dónde?. Las respuestas de los estudiantes fueron:

- Si, en los libros.
- Si, son números decimales que utilizábamos para resolver problemas de dinero.
- Si, en la tienda.

Después de que los estudiantes vierten sus respuestas, el docente concluye que esta escritura con punto también se conoce como número decimal. Por el nivel cognoscitivo de los estudiantes y con lo realizado en T1, T2, T3 y T4 muestra las siguientes características:

- Son números que se puede escribir en forma de fracción decimal.
- Son números que tienen una parte entera (unidades, decenas, centenas, …) y una parte decimal (décimos, centésimos, milésimos, …), divididas por un punto decimal.

A modo de cierre les comenta que este tipo de números decimales también se pueden utilizar para resolver problemas que involucren medir longitudes y áreas.

Reflexiones sobre la evolución de los modelos en la T4

Con esta tarea los estudiantes transitaron por los cuatro modelos (MI, ME, MJ y MV) cuando se les situó a expresar números decimales mediante tres tipos de representación: en fracción decimal, en notación desarrollada y en notación decimal. Como resultado de la interacción que tiene los estudiantes con T4, se evidencia lo que acontece en cada etapa:

- En S-A usan implícitamente la notación decimal, en función de expresar la notación desarrollada de una fracción decimal en dos lenguajes: el matemático y el común.
- Durante S-F surge el modelo explícito de la notación decimal, como resultado de descomponer una fracción decimal en expresiones aditivas y representarlas en lenguaje común. Aparece una transición de la noción fracción decimal a la notación decimal.

- En S-V se valida el proceso de transición de la fracción decimal a su representación en notación decimal.
- Durante S-I se presentan las características invariantes de la noción número decimal, también se formalizan las tres maneras de representarlos.

Durante T4 se manifestaron obstáculos de tipo didáctico, el más destacado se evidencia cuando los estudiantes conciben que toda fracción representa solo una parte del entero, y por lo tanto asumen que siempre será menor que la unidad. Esto se debe a que el discurso matemático escolar privilegia el estudio de fracciones propias y escasamente trabaja las fracciones impropias, más bien se presentan como fracciones mixtas, esto es, convertir a enteros y dejar el sobrante como fracción propia.

Capítulo 6. Conclusiones

En este último capítulo se describen las conclusiones de la presente investigación, se desarrolla en dos momentos, en el primero se describe la evolución hacia la construcción de la noción número decimal y los obstáculos en términos de aprendizaje suscitados durante tal proceso. En el segundo momento se presentan las reflexiones finales.

Capítulo 6. Conclusiones

Esta investigación se interesó por que estudiantes de primaria construyeran la noción de número decimal al transitar de la fracción decimal a la notación decimal, en el contexto de una situación didáctica. Para llevar adelante este trabajo, nos sustentamos en la teoría de la Situaciones Didácticas y como metodología *ad hoc*, en la Ingeniería Didáctica. Con base en ello, nos planteamos dos hipótesis:

a) La noción del número decimal se construye cuando los estudiantes comprenden la expresión en notación decimal de la fracción decimal.

b) Los estudiantes comprenden la noción de número decimal como expresión de medidas, mediante la comparación y representación de magnitudes continuas.

La validación de estas hipótesis, se sustenta en una confrontación entre el análisis *a priori* y el *a posteriori*, tal como se plantea en la Metodología de la Ingeniería Didáctica.

El análisis preliminar, primera fase de toda ingeniería didáctica nos dio una visión del desarrollo de los números decimales, centrándonos fundamentalmente en las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva.

- **Dimensión epistemológica.** El surgimiento de los números decimales se remite a la necesidad de facilitar los cálculos matemáticos con números menores a la unidad, sustituyendo así a las fracciones. Surgen como noción paramatemática en contextos sociales y culturales, evoluciona a noción protomatemática cuando se usan para explicar las fracciones decimales y se constituyen como noción matemática cuando se fundamentan bajo una teoría.

  Debido a esta evolución, los números decimales son objeto de ambigüedades al momento de definirlos, puesto que se conciben como aquellos números que llevan punto decimal, generalmente se consideran a los números decimales y a las expresiones decimales como sinónimos. Al indagar sobre su definición matemática formal, encontramos que los decimales son números racionales que poseen al menos una escritura en forma de fracción decimal de la forma: $n = \frac{a}{10^p} con\ a, p\ \in Z$, las expresiones decimales en cambio, son solo una forma de representarlos.

- **Dimensión cognitiva.** Desde el punto de vista cognitivo, se reconocen dificultades en su comprensión. Se conciben como uno de los temas en que los estudiantes obtienen más bajos resultados al realizar pruebas estandarizadas, sobre todo, cuando se trata de definirlos, compararlos, representarlos y comprender sus propiedades.

- **Dimensión didáctica**. Su estudio inicia en la educación elemental, se introducen de diversas formas y en diversos contextos, las más representativas son (Centeno, 1997): como extensión natural del sistema de numeración decimal, a partir de la medida y como la representación a partir de funciones numéricas. Los números racionales positivos –incluyendo a los números decimales- se introducen mediante dos sistemas de representación simbólica (Escolano, 2001): la **notación fraccionaria** y la **notación decimal**, no obstante, reconoce que desde el punto de vista didáctico, existe una desconexión entre ambas.

El análisis al discurso matemático escolar, sustentado en los libros de texto de matemáticas de primaria, da cuenta que en el sistema educativo mexicano el estudio formal de estos números principia a partir de cuarto grado, mediante situaciones asociadas a la medición de longitudes y de repartos. Este objeto matemático se asocia con otras nociones matemáticas, tal como la división, la fracción y el porcentaje, sin embargo, en la mayoría de los casos son vistos como objetos desligados, sin relación alguna.

La practicidad de los números decimales permite usarlos frecuentemente tanto en contextos escolares como extraescolares, contrario al uso de las fracciones, en virtud de que éstas representan una forma más compleja para hacer cálculos y operar con ellas. En este sentido, su importancia radica en la gran cantidad de aplicaciones que tienen en la vida cotidiana y en otras áreas del conocimiento.

6.1. La Situación Didáctica: conjunción de dos contextos.

Pese a la presencia de una desconexión de los sistemas de representación para la introducción de los números decimales (la notación fraccionaria y la notación decimal) en el actual discurso matemático escolar, en este trabajo interesó establecer esa conexión, en función de comprender que la notación fraccionaria y la notación decimal son dos formas diferentes de expresar un mismo número. Para ello, se diseñó una Situación Didáctica (SD), la cual consideró a la vez, aspectos del análisis preliminar y del *a priori*.

La construcción de la noción de número decimal por los estudiantes, desde el punto de vista del diseño de la SD y la fase de experimentación, se planificó, de transitar de la fracción decimal al número decimal, tal transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres representaciones matemáticas del número decimal:

- Fracción del tipo $n = a/10^p$
- Notación desarrollada de la fracción decimal
- Notación decimal.

Las tareas que constituyeron la SD, se ubicaron en dos contextos de enseñanza: el de las *fracciones decimales* y el contexto de *medición de longitudes y superficies*. Éstos se determinaron con base en la descripción realizada por Gómez (2010) en un estudio sobre concepciones de los números decimales. La conjunción de ambos contextos se desarrolla en términos de transitar de la notación fraccionaria a la notación decimal a través de la medición, esto es, representar medidas como “mide $\frac{3}{10}$ de largo” o “se han pintado $\frac{45}{100}$ del cuadrado”.

La SD se constituyó de cuatro tareas (T1, T2, T3 y T4), la primera situó a los estudiantes a expresar medidas de longitud mediante fracciones decimales, la T2 favoreció comparar fracciones decimales en la recta numérica y sobre áreas, la T3 ubicó a descomponer una fracción decimal al representarla sobre áreas, y; la T4 consistió en transitar de la fracción decimal a la notación decimal mediante la notación desarrollada de la fracción.

Con la SD se construye el número decimal, tal construcción se mide en términos de su evolución durante el desarrollo de la SD y en cada momento de interacción con las tareas.

6.2. ¿Cómo evoluciona la noción que los alumnos tienen sobre el número decimal?

Desde la perspectiva teórica, la evolución en la TSD se concibe como un proceso de transformación gradual de: el alumno hacia el conocimiento del cual debe apropiarse y de la situación misma. Estos dos aspectos de la evolución, parte central de este trabajo, se describen como sigue:

6.2.1. Evolución hacia el aprendizaje del número decimal

La evolución del conocimiento matemático, de acuerdo a la TSD, requiere pasar por las cuatro tareas que constituyen la SD, a su vez, transitar de momento a momento en cada tarea, son cuatro: situación de acción (S-A), situación de formulación (S-F), situación de validación (S-V) y situación de institucionalización (S-I). El primero está orientado a que el estudiante confronte y resuelva el problema, En S-F se discute en quipo los resultados obtenidos en S-A. El tercer momento se desarrolla de manera grupal, en él se validan o refutan las nociones y modelos matemáticos surgidos en S-F. Ya en S-I se formaliza el conocimiento matemático en juego, proceso a cargo del docente.

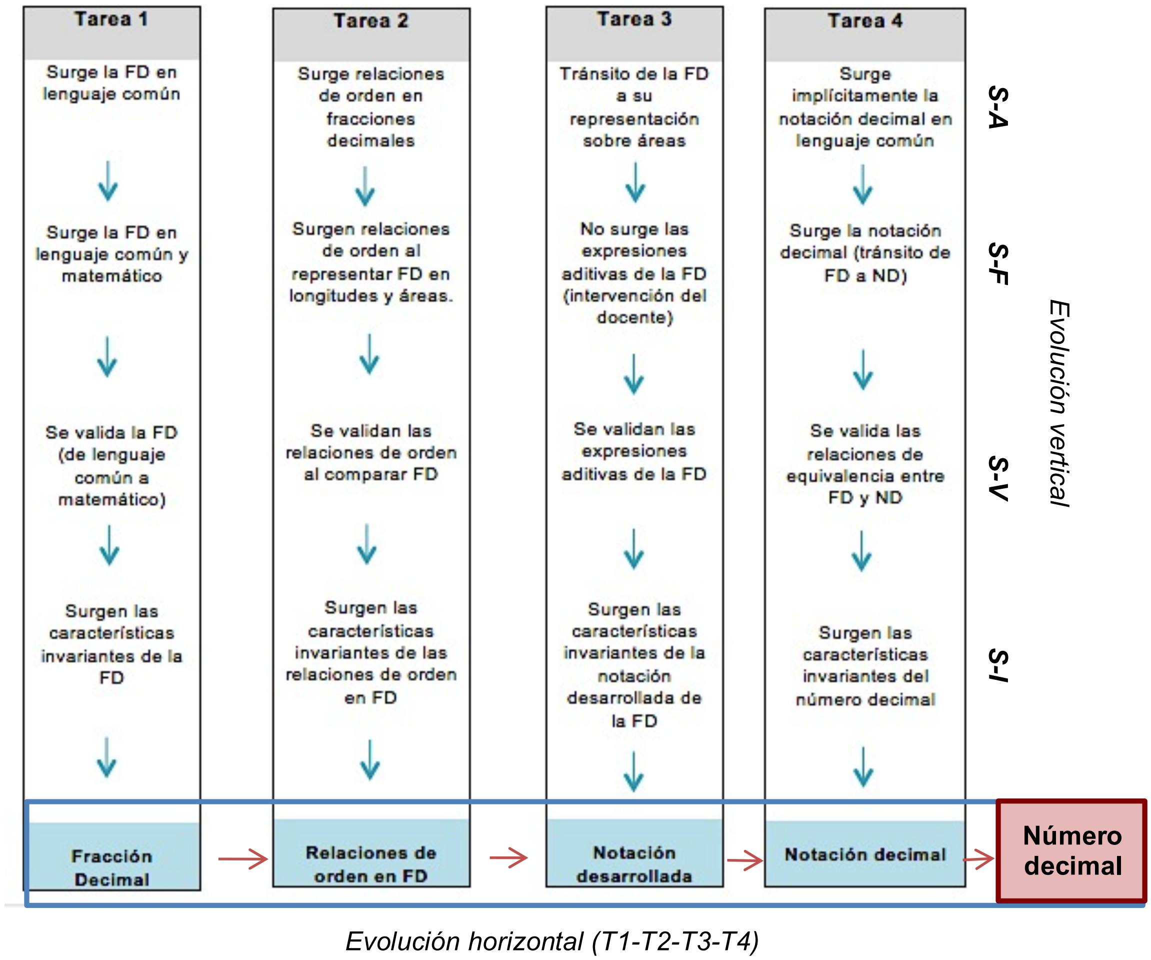
En esta vía, la evolución de la noción se traza en dos direcciones, de forma horizontal y de forma vertical, horizontal porque en cada tarea de la SD se propone favorecer el tránsito de la fracción decimal al número decimal (evolución de una noción a otra), y vertical porque durante cada tarea se construye una noción en particular a partir de cuatro modelos que emergen en los momentos de interacción (evolución de un modelo a otro). A objeto de describir tal evolución se presenta el esquema 6.1, en él se evidencia que:

- En la **Tarea 1**, la evolución hacia la noción de número decimal se enmarca en la construcción de la noción **fracción decimal**. Los estudiantes transitaron por los cuatro modelos: implícito (MI), explícito (ME), explícito justificado (MJ) y culturalmente validado (MV) a lo largo de los cuatro momentos de interacción con la tarea (véase esquema 6.1). De manera general, se reconoce que en T1 surgen dos formas de comunicar las medidas de longitud, mediante las subunidades del SMD y mediante fracciones decimales, de manera verbal y por escrito. No obstante, cuando se discute en grupo los modelos explícitos todos los estudiantes logran comprender las características invariantes de la noción fracción decimal y por consecuencia construirla.

- En la **Tarea 2** se evidencia que los estudiantes transitaron por los cuatro modelos cuando se les situó a comparar fracciones decimales tanto en longitudes como en áreas. La evolución hacia la noción de número decimal se enmarca dentro de la transición de la noción de objeto fracción decimal a la propiedad de **orden en fracciones decimales**, está propiedad se estudia en términos de establecer las relaciones de comparación: mayor, menor e igual. Una de las cuestiones que sobresale está relacionada al uso de la recta numérica y el de una superficie delimitada, a efecto de verificar las comparaciones entre dos fracciones decimales. Ambos instrumentos permitieron corregir resultados y comprender cuando una fracción decimal (con igual o diferente denominador) es mayor, menor o igual que otra.

- En la **Tarea 3** los estudiantes transitaron solo por tres modelos (MI, MJ y por MV), esto, cuando se les situó a representar fracciones decimales sobre superficies. Lo realizaron de tres formas: *expresión numérica, representación gráfica y notación desarrollada*. La evolución hacia la noción de número decimal se inscribió en la comprensión de la noción **notación desarrolla de la fracción decimal**, en términos de reconocer que es otra forma de representar la fracción decimal**.** Conviene destacar que durante S-F no emerge el modelo explícito, a razón de que los estudiantes no logran representar las expresiones aditivas de la fracción decimal, en este segundo momento fue necesaria la intervención del profesor para transitar al modelo justificado.

- En la **Tarea 4**, los estudiantes transitaron por los cuatro modelos cuando expresaron número decimales mediante tres tipos de representación: en fracción decimal, en notación desarrollada y en **notación decimal,** esta última representación concreta la construcción de la noción número decimal. Esta construcción se logra al transitar de la notación fraccionaria (decimal) a la notación decimal, tal transición es el resultado de descomponer una fracción decimal en expresiones aditivas y representarlas en lenguaje común y matemático.



Esquema 6.1. Evolución de la noción número decimal.

6.2.1.1. Obstáculos en el proceso de aprendizaje

En el proceso de evolución hacia la noción de número decimal se reconoce que surgieron obstáculos en cada una de las tareas, los cuales incidieron en el surgimiento de los modelos en algunos casos, o en determinado momento de interacción. Se rescatan los siguientes:

En la T1 se reconoce que surge un obstáculo de tipo didáctico cuando los estudiantes usan las subunidades del SMD para expresar medidas de longitud y no fracciones decimales. En este sentido, se observa que en algunos casos se impone el uso de centímetros ante el uso de las fracciones decimales para expresar medidas de longitud, de este modo, los estudiantes que los usaron determinan que la fracción es innecesaria para expresar medidas, sobre todo cuando se trata de longitudes. Sin embargo, al usarlos les permitió identificar que los centímetros son centésimas partes del metro.

Lo anterior se debe a dos factores:

1) El diseño provocó que se las medidas de la tiras se expresaran en centímetros, puesto que en la consigna se les afirma que la tira-unidad medía un metro, con esta información dedujeron que las partes grandes (décimas) medían 10 cm y que las partes chiquitas (centésimas) medían 1 cm. Ante esto, consideramos que si no se le diera esa información al estudiante, se les induciría a expresar las medidas en fracciones decimales.

2) El discurso matemático escolar y las prácticas cotidianas también han privilegiado el uso de medidas convencionales del SMD para representar longitudes, específicamente, cuando se trata de medir longitudes menores a la unidad se hace en términos de centímetros más que en decímetros.

En T2 se identifican obstáculos cognitivos y didácticos:

a) Se reconoce un obstáculo cognitivo cuando algunos estudiantes proceden como con los naturales al comparar expresiones fraccionarias decimales con distinto denominador, pues afirman que "si el denominador es mayor, entonces la fracción deberá ser mayor". Esto se externa cuando señalan que $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$ es mayor que $\frac{3}{10}$.

b) Se presenta un obstáculo didáctico cuando se presenta un cambio de magnitud para representan fracciones decimales con distinto denominador. Pasar de representar fracciones decimales como medidas de longitud a medidas sobre áreas constituye un proceso complejo para los estudiantes, esto se observa cuando recurren a las representaciones realizadas sobre la recta numérica para determinar si una fracción es mayor o menor aún cuando están representadas en áreas. Esto se le atribuye al discurso matemático escolar, debido a que escasamente se estudian fracciones decimales como medidas representadas sobre áreas. Además, es evidente que los estudiantes presentan dificultades relacionadas a la conceptualización de la fracción y sus equivalencias, es decir, no tienen clara la relación entre los décimos y los centésimos de una misma unidad, en este caso no identifican que $\frac{3}{10}$ es igual a $\frac{30}{100}$.

En T3 surgen obstáculos didácticos cuando los estudiantes representan fracciones decimales ($\frac{25}{1000}$) sobre áreas divididas en centésimas partes. En general, se observa que todos los estudiantes comprenden a la fracción decimal como parte-todo, sin embargo, el procedimiento de subdividir cada centésima parte de la unidad para obtener milésimos se realiza de dos maneras: *centramiento solo en el numerador y por aproximación mediante ensayo y error.* Esto también se le adjudica al discurso matemático escolar, pues escasamente trabaja con representaciones de fracciones decimales sobre áreas, más bien, se estudian en un contexto de medición de longitudes.

Durante T4 se manifestaron obstáculos didácticos cuando se ubica a los estudiantes a expresar la fracción decimal impropia $\frac{45}{10}$ en notación desarrollada y en notación decimal, al respecto se evidencia que consideran que toda fracción representa una parte del entero, y por lo tanto asumen que siempre será menor que la unidad. Esto se debe a que el discurso matemático escolar privilegia el estudio de fracciones propias y escasamente trabaja las fracciones impropias, más bien se presentan como fracciones mixtas, esto es, convertir a enteros y dejar el sobrante como fracción propia.

6.2.2. Evolución de la SD.

Cuando hablamos de evolución desde la perspectiva de la TSD, no solo del conocimiento en juego sino también de la Situación Didáctica misma, nos referimos al rediseño de las tareas y actividades que la conforman. Para ello tomamos como base los resultados obtenidos del análisis a posteriori y la identificación de obstáculos presentados en los procesos de aprendizaje.

En estos términos, enfatizamos las siguientes consideraciones:

- En la SD, la idea de medir con fracciones decimales está estrechamente ligada a las subunidades del SMD, está relación se hace evidente cuando se les dice a los estudiantes que la tira-unidad mide un metro de longitud. Siendo que el uso de estas medidas intervinieron (en algunos casos) en el surgimiento de la fracción decimal como expresión de medida, se propone que en la consigna no se declare la medida de la tira-unidad, sino más bien que solo sea considerada como entero. Otra de las sugerencias tiene que ver con cambiar la unidad por otra tira que no precisamente mida un metro, sino que sea mayor o menor.

- El trabajo con superficies en la SD, da pauta a que los estudiantes relacionen el todo con las partes, sin embargo, se observó que el cuadrado dividido en centésimas partes condujo a la producción de errores por parte de los estudiantes al momento de representar fracciones decimales sobre áreas, específicamente cuando se trata de comprender que $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ y $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$. A objeto de favorecer el establecimiento de relaciones de equivalencia entre la unidad y sus partes fraccionarias decimales se propone que se el estudiante quien subdivida el entero, en décimas, centésimas y milésimas.

- Otra de las sugerencias que se proponen para mejorar la SD, redunda en el proceso de transición de la fracción decimal a la notación decimal a partir de la descomposición en expresiones aditivas de la fracción. La sugerencia versa sobre extender el uso de la notación desarrollada al campo de las representaciones sobre medidas y longitudes y no solo quedarse en lo numérico.

- Se reconoce que el tiempo de experimentación de la SD en la clase fue insuficiente, por lo que se sugiere destinar dos sesiones por tarea. Además, se destaca que en las puestas en común (S-V) solo se discuten los casos exitosos, sin embargo, consideramos necesario que se recuperen aquellos que no lo son, pues revisar los errores y dificultades dan pauta al análisis, y en algunas ocasiones, a la superación de los mismos.

- Finalmente, se propone ampliar la SD con tareas que involucren la comparación y representación de números decimales en un contexto de medida de longitud y de áreas, como por ejemplo, sombrear 0.127 unidades del cuadrado o construir una tira que mida 2.35 unidades de largo.

Reflexiones finales

Al inicio de este trabajo de investigación, nos planteamos como objetivo que estudiantes de primaria construyan la noción de número decimal a partir de vincular dos de sus sistemas de representación: la **notación fraccionaria** y la **notación decimal**. Por los resultados que aquí se han presentado, consideramos que sí es posible establecer un vínculo entre ambas representaciones y por consecuencia comprender a la noción número decimal en su conjunto.

Sin perder de vista los aciertos y desaciertos de este diseño, se reconoce que:

- El vínculo de las fracciones decimales con los números decimales constituye un proceso complejo, pero al mismo tiempo significativo para los estudiantes, esta afirmación cobra sentido cuando se reconoce que la relación entre ambas les permite comprender el valor posicional de cada cifra de la notación decimal.

- En general, hay una tendencia por parte de los estudiantes, en usar el SMD para representar medidas de longitud menores a la unidad, particularmente el uso de los cm. De este modo, consideramos que el contexto de medida en el que se enmarca la SD es poco favorecido por el discurso matemático escolar y por el diseño mismo.

- Los estudiantes logran construir la noción número decimal en términos de reconocer sus características invariantes, principalmente, que son números que también se pueden expresar en forma de fracción decimal. Para el caso, la fracción y la notación decimal son vistos como dos nociones que se relacionan.

- Con base en lo que ya se argumentó se validan las hipótesis enunciadas al inicio de esta investigación. Como parte de la tesis, se reconoce que los estudiantes comprenden la noción de número decimal cuando establecen un vínculo entre la fracción decimal y su notación decimal al representarlas como medidas continuas.

Por otra parte, consideramos crucial el desarrollo de la presente investigación en el ámbito educativo, debido a que nos permite reflexionar sobre la propia práctica docente, específicamente sobre la enseñanza y aprendizaje de los números decimales. Ésta reflexión nos permite modificar y mejorar nuestra intervención el aula, tomando como referente a:

a) Concebir a los números decimales desde su definición matemática formal, así como las diferentes maneras de representarlos.

b) Considerar los tipos de obstáculos que se presentaron en el desarrollo de la SD (algunos también reportados por otras investigaciones) a objeto de mejorar los diseños llevados al aula.

c) Favorecer el estudio de las fracciones decimales como conocimiento previo al estudio de los números decimales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia: Una empresa docente.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: Los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Ciencies Cognitives*, *18*. pp. 29-59.

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática*, *20* (2), pp. 5-33.

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura. Reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza.* México: INEE.

Block, D. (2015). *Lectura, escritura y orden de números decimales*. Manuscrito no publicado.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. España: Alianza.

Broitman, C., Itzcovich, H. y Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a al densidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6* (1), 5-26.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, *Trabajos de Matemática*, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des mathématiques 2*(1). Grenobrle: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1994): "Los diferentes roles del maestro". *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones,* C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathematiques, 1970-198*0. London: Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas". *Educación Matemática*, México.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 1: Rationals as measurement. *Mathematical Behavior 23* (1), 1-20.

Castro, E. (2001). Los decimales. *Didáctica de las matemáticas en Educación Primaria*. España: Síntesis.

Chevallard, Y. (1985) La transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Trad. esp., *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires*: Aique, 1997.)

Cid, E., Godino, J. y Batanero, C.(2004). Sistemas numéricos para maestros, en J. D. Godino (Director), *Matemáticas para maestros*. Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Centeno, J. (1997). *Números decimales, ¿Por qué?, ¿Para qué?* España: Síntesis.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 2006, 2.

Escolano, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 151-158). Almería: SEIEM.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (tesis inédita de maestría). México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas, en C. Parra, I. Saiz (comp.). *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.

Gómez, B. (2010). Concepciones de los números decimales. *Revista de Investigación en Educación*, 8, 97-107. Descargado de: http://webs.uvigo.es/reined/

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libro de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza en secundaria en España en el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*, 22(3), 389-408.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales.* (Tesis inédita de Doctorado). España: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números, 74*, 57-74.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas* (tesis inédita de doctorado). México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2013). Didactical Situation for the Enhancement of Meta-analogical Awareness. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 160– 172.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas. *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de E.G.B.: análisis y propuestas.* Buenos Aires : Paidós.

Ruiz, C. (2008). *Sobre el origen de los números decimales. Ensayo centrado en Europa y Oriente Medio*. Recuperado de https://carc1975.files.wordpress.com /2011/11/ sobre-el-origen-de-los-nc3bameros-decimales.pdf

Ruiz, M. (2003). Aprendizaje y matemáticas, en M. Chamorro, J. Belmonte, M. Ruiz, S. Llinares, F. Vecino (comp). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A., y Sadovsky, P. (Eds). *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Saiz, I., Gorostegui, E. y Vilotta (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemática*, *23*, 123–151.

SEP (2014). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* México: SEP.

SEP (2011). *Programas de Estudio. Educación Básica Primaria. Cuarto grado*. México: SEP.

Socas, M. (2002). La organización de los sistemas numéricos, desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Revista de didáctica de las matemáticas, 50*, pp. 19-34.

Valverde, Gilbert A., Leonard J. Bianchi, William H. Schmidt, Curtis C McKnight, & Richard G. Wolfe. (2002). *According To the Book: Using TIMSS To Investigate The*

Translation Of Policy Into Practice In The World Of Textbooks. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Descargado de: https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=e48FwrR8IAQC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Valverde+et+al.,+2002+textbook&ots=P44_a4cWCT&sig=wOcEAYTtt1HrkG7PqFoUHrJj3BE#v=onepage&q&f=false

Anexos

PLANIFICACIÓN DOCENTE

Sesión 1.

TAREA	OBJETIVO	ACTIVIDADES	NO. SESIÓN	MATERIALES
Tarea 1: **¿QUÉ DICE EL MENSAJE?**	Que los estudiantes expresen medidas de longitud mediante fracciones decimales.	**A1:** Representar medidas de longitud mediante fracciones decimales.	1	-Tiras azules de un metro y graduadas en décimos y centésimos. -Tiras verdes de diferente tamaño -Tijeras -Cartoncillo rojo -Pedazo de papel -A1

Desarrollo de la actividad		
Consigna	Se va a trabajar con la Actividad 1, consiste en que cada pareja debe construir una tira verde apoyándose de la información que proporcione otro equipo. La medida de la tira debe ser representada en fracción decimal. Las acciones del docente son: 1) Entregar a cada pareja los siguientes materiales: • La Actividad1 a cada pareja. • La tira azul graduada que debe medir un metro de longitud • Una tira verde sin graduar que serán de diferente medida en cada equipo y diferente a la tira verde utilizada en la T1. • Cartoncillo rojo. • Tijeras • Un pedazo de papel 2) Pedir a los estudiantes que la realicen. • En parejas deben de seguir las siguiente indicación de A1. • Después las parejas asociadas deben reunirse e intercambiar las tiras verdes • Compararán la tira roja con la tira verde que tenía el equipo asociado que mandó el mensaje. • Discutirán y anotarán sus resultados	30 minutos
Puesta en común	3) Organizar una puesta en común: • Pedir a cada equipo que pase a compartir sus resultados al grupo, con base en ello, discuten sobre: a) Si los resultados son o no correctos y por qué. b) Qué es lo que decía el mensaje y cuál fue la interpretación del quipo para recortar la tira.	15 minutos
Cierre	4) El profesor afirma que al medir usando décimos, centésimos, etc. de la unidad (metro) es la que se ha establecido socialmente para medir en casi todo el mundo, pero también se puede medir utilizando fracciones decimales, las cuales, en este caso, son las subunidades del metro.	15 minutos

Sesión 2 y 3

TAREA	OBJETIVO	ACTIVIDADES	NO. SESIÓN	MATERIALES
Tarea 2: **REPRESENTANDO MEDIDAS CON FRACCIONES DECIMALES**	Que los estudiantes comparen fracciones decimales y verifiquen al representarlas como medidas de longitud y de área.	**A1:** Comparar fracciones decimales. **A2:** Representar fracciones decimales sobre la recta. **A3:** Representar fracciones decimales en superficies.	2	- Tira azul graduada - A1, A2 y A3.

Desarrollo de la actividad

SESIÓN 2

Consigna	1) Se va a trabajar con la Actividad 1, la cual contiene un par de fracciones decimales y consiste en identificar cuál es mayor. Las acciones del docente son: • Entregar a cada alumno la A1, la resuelven individualmente. • Mencionar a los estudiantes que para contestar la segunda parte de la actividad se deben reunir en equipo (recordarles que los equipos se mantienen por lo que deben trabajar con su mismo compañero). • Entregar a cada equipo la A2 y pedir que la resuelvan. Solicitar que hagan sus anotaciones en la misma ficha o al reverso.	30 minutos
Puesta en común	2) Organizar una puesta en común, las acciones a seguir son: • Solicitar a un equipo que exponga sus resultados (caso exitoso), con base en ello, discutir sobre: a) Qué fracción es mayor y cuál menor. b) Cómo verificar en la tira.	15 minutos
Cierre	3) El profesor afirma que: Los números pueden ser utilizados para representar medidas de longitud, de área, peso, tiempo, volumen, etc. En el caso de las fracciones decimales también, por lo que la tira de papel de un metro de largo representa una unidad de medida convencional, y con ella se mide la longitud. Y que además es un recurso que permite verificar qué fracción es mayor.	15 minutos

SESIÓN 3

Consigna	1). Se va a trabajar con la Actividad 3, que consiste en representar las fracciones decimales de A1 sobre un cuadrado (dividido en cien partes iguales) y así verificar cuál es mayor.	20 minutos
Puesta en común	2) Organizar una puesta en común con el grupo: • Pedir a un estudiante que pase a representar sus resultados (caso exitoso). Con base en ello, analizar: a) Si los resultados son correctos o no. b) Cómo representa ambas fracciones decimales.	15 minutos
Cierre	3) El docente señala que tanto la tira y el cuadrado son recursos que permiten probar qué medida es mayor o menor, al respecto, enuncia algunas consideraciones que hay que tomar en cuenta al comparar fracciones.	15 minutos

Sesión 4

TAREA	OBJETIVO	ACTIVIDADES	NO. SESIÓN	MATERIALES
Tarea 3: **REPRESENTANDO MEDIDAS CON FRACCIONES DECIMALES**	Que el estudiante represente fracciones decimales (milésimos) sobre superficies y en notación desarrolla.	**A1:** Representar $\frac{25}{1000}$ en el cuadrado y descomponerla en expresiones aditivas.	1	- Colores - Marcadores - A1

Desarrollo de la actividad		
Consigna	1) En esta actividad el estudiante debe representar $\frac{25}{1000}$ en el cuadrado. Las acciones del docente son: • Entregar a cada alumno la Actividad 1, la resuelven individualmente.	30 minutos
Puesta en común	2) El docente organiza una puesta en común y sus acciones a seguir son: • Pegar sobre la pizarra un cuadrado grande, el cual es trazado previamente en una cartulina. • Pedir a un estudiante que exponga el procedimiento que utilizó para representar $\frac{25}{1000}$. Con base en ello, discutan a cerca de: a) Si los resultados son correctos o no. b) Qué otro tipo de procedimientos se utilizaron realizar la representación.	15 minutos
Cierre	3) El docente afirma que: La notación desarrollada es otra forma de expresar una fracción decimal, esto es, descomponer en otras fracciones decimales, a las que vamos a llamarle partes. Por ejemplo, en la fracción $\frac{25}{1000}$ que representaron en el cuadrado se conforma de dos fracciones decimales: de $\frac{2}{100}$ y $\frac{5}{1000}$. Entonces podemos escribirlo así: $\frac{25}{1000} = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$	15 minutos

Sesión 5

TAREA	OBJETIVO	ACTIVIDADES	NO. SESIÓN	MATERIALES
Tarea 4: **DISTINTAS ESCRITURAS PARA UN MISMO NÚMERO**	Que los estudiantes representen fracciones decimales utilizando la notación desarrollada, y transitar a su notación decimal.	**A1**: Representar fracciones decimales mediante la notación desarrollada. **A2**: Transitar de la fracción decimal a la notación decimal como expresión equivalente. **A3**: Transitar de la notación decimal a la fracción decimal como expresión equivalente.	1	- A1, A2 y A3 - Marcadores

Desarrollo de la actividad		
Consigna	1) En esta actividad se va a trabajar en equipo y consiste escribir la notación desarrollada de tres fracciones decimales. Las acciones del docente son: • Entregar la A1 a cada equipo 2) Se va a trabajar con la A2 y A3, en la segunda actividad se propone una tabla en donde el estudiante va a representar con notación decimal a cada una de las fracciones decimales planteadas en la A1. En la tercera actividad, el estudiante deberá representar con fracción decimal a cada notación decimal (procedimiento inverso a A2). Las acciones del docente son: • Entregar la A2 y la A3	30 minutos
Puesta en común	3) El docente organiza una puesta en común y sus acciones a seguir son: • Pedir a un equipo que exponga sus resultados de las tres actividades. Con base en ello, discutan sobre: a) Cómo se expresa la notación desarrollada de una fracción decimal. b) Los resultados reportados en la tabla son correctos o no y por qué.	15 minutos
Cierre	El docente afirma que: • La notación decimal (escritura con punto) es otra forma de representar a la fracción decimal y se le conoce simplemente como número decimal. • Los números decimales son aquellos que se utilizan para representar cantidades no enteras. • Este tipo de números, a diferencia de otros que ya conocen, constan de dos partes, una parte entera y una parte decimal dividida por un punto (llamado punto decimal). • Explicar que la primera cifra a la derecha del punto representa los décimos, la segunda los centésimos, la tercera los milésimos, etc., y se nombran de esa manera: “décimos”, “centésimos”, milésimos, etc. (poner un ejemplo).	15 minutos