UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

RAZONAMIENTO INDUCTIVO QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa

Presenta:

Carolina Dorantes Velasco

Director de tesis:

Dra. María Guadalupe Cabañas-Sánchez

Co-director:

Dr. Armando Morales Carballo

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero — Julio de 2018

Razonamiento inductivo que manifiestan estudiantes de secundaria en la generalización de patrones

Tesis de Maestría

Carolina Dorantes Velasco

Directora de Tesis: Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez
Co-director: Dr. Armando Morales Carballo

Comité evaluador:
Mtra. Landy Elena Sosa Moguel
Mtra. Melby Guadalupe Cetina Vázquez

2018
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México.

Esta investigación fue financiada por el
Consejo Nacional de Ciencias y
Tecnología

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Carolina Dorantes Velasco
Becaria No. **778656**

A Victor Manuel, Patricia, Sira y Victor Alberto.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido a que este trabajo sea una realidad.

A mis padres, a quienes debo gran parte de mis logros, por su apoyo y cariño incondicional. A mi hermano, abuela, y demás familiares; así como también a Carlos y Ana, por su paciencia, apoyo, ánimo y cariño que han sido imprescindibles en esta etapa de formación profesional.

A la directora de este trabajo, la Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez, que me ha orientado con sus conocimientos y experiencia para llevar a cabo este trabajo.

A mi co-director, el Dr. Armando Morales Carballo, por sus contribuciones.

A mis revisoras, la Mtra. Landy Elena Sosa Moguel y la Mtra. Melby Guadalupe Cetina Vázquez, por tomarse el tiempo de leer el trabajo y haberlo enriquecido con sus conocimientos.

A los estudiantes de secundaria que compartieron sus respuestas e ideas en las tareas propuestas, y a los profesores que nos permitieron acceder a sus aulas.

A mis profesores de la maestría, que han contribuido a mi formación profesional.

A mis compañeras, Diana, Rosa Iris y Nayeli, con quienes he compartido muchos momentos durante esta etapa.

Tabla de contenido

Introducción 11
Capítulo 1. Problema de investigación 13
1.1. Antecedentes del estudio 13
1.1.1. Investigaciones sobre el razonamiento 13
1.1.2. Investigaciones sobre el razonamiento inductivo 14
1.1.3. Importancia del razonamiento inductivo 17
1.2. Problema de investigación 20
1.3. Pregunta y objetivos de investigación 21
1.4. Pertinencia de la Investigación 22
Capítulo 2. Fundamentos Teóricos 23
2.1. Razonamiento y tipos de razonamiento 23
2.2. Modelo para el Razonamiento Inductivo 24
2.3. Patrón Matemático 25
2.4. Generalización 26
2.4.1. Generalización de patrones 26
2.4.2. Tipos de generalización 27
2.5. Representaciones y sistemas de representación 28
2.5.1. Representaciones 28
2.5.2. Sistemas de representación 28
Capítulo 3. Contenido Matemático 31
3.1. Análisis de contenido matemático 31
3.1.1. Estructura conceptual 33
3.1.2. Sistemas de representación 37
3.1.3. Sentidos y modos de uso 39
Capítulo 4. Metodología 41
4.1. Participantes 41
4.2. Tareas y contexto 42
4.3. Aplicación de las tareas 45
4.4. Análisis de datos 46
Capítulo 5. Resultados 47
5.1. Razonamiento inductivo 47

5.1.1 Razonamiento inductivo en la tarea 1 47
Sistemas de representación en la tarea 1 59
Reflexiones sobre el trabajo con la Tarea 1 63
5.1.2. Razonamiento inductivo en la tarea 2 65
Sistemas de representación identificados en la tarea 2 74
Reflexiones sobre el trabajo con la tarea 2 78
5.1.3. Razonamiento inductivo en la Tarea 3 80
Sistemas de representación identificados en la tarea 3 87
Reflexiones sobre el trabajo con la tarea 3 90
Capítulo 6. Conclusiones 93
6.1. Pasos del razonamiento inductivo en que se involucraron los estudiantes 93
6.2. Razonamiento inductivo que siguen los estudiantes de secundaria 100
6.3. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes 101
6.4. Limitaciones del estudio 102
6.5. Aportes de la investigación 103
Referencias Bibliográficas 104
Anexos 109

Índice de figuras

Figura 2.1. Sistemas de representación de las progresiones aritméticas (Tomado de Cañadas, 2007, p.122). 29
Figura 2.2. Progresión aritmética $an = 2n + 1$ en distintas representaciones. 30
Figura 3.1. Progresiones aritméticas en otras estructuras matemáticas (Tomado de Cañadas y Castro, 2013). 32
Figura 3.2. Ejemplos de actividades sobre sucesiones planteadas de primero a tercero de primaria.. 36
Figura 3.3. Ejemplos de actividades sobre sucesiones planteadas de cuarto a sexto de primaria.. 36
Figura 3.4. Ejemplo de actividades sobre sucesiones planteadas en primer y segundo grado de secundaria. 37
Figura 3.5. Ejemplos de representaciones utilizadas para el trabajo con sucesiones en primaria.. 38
Figura 3.6. Ejemplo de representación algebraica utilizada para las sucesiones en secundaria. 39
Figura 3.7. Ejemplos de los modos de uso de las sucesiones en educación básica......... 40
Figura 5.1. Trabajo con casos particulares de E8 utilizando representación numérica..... 48
Figura 5.2. Uso de una representación pictórica por E1 al trabajar con casos particulares. 50
Figura 5.3. Organización de casos particulares en una tabla por E12. 50
Figura 5.4. Organización de casos particulares por E15, implica una relación de correspondencia. 51
Figura 5.5. Identificación de patrones en E6. 51
Figura 5.6. Cambio en la forma de proceder y conjetura “multiplicar por 4” en E12.......... 53
Figura 5.7. Conjetura de E2 basada en la relación de correspondencia. 54
Figura 5.8. Conjetura de E10, que se basa en la figura uno como unidad. 55
Figura 5.9. Conjetura de E11 expresada con una estructura aditiva. 55
Figura 5.10. Conjetura de E14, empleando una estructura multiplicativa. 56
Figura 5.11. Generalización de E15 expresada en forma verbal. 57
Figura 5.12. Generalización en forma numérica de E2. 58
Figura 5.13. Generalización en forma algebraica de E15. 58
Figura 5.14. Cambio de representación pictórica a numérica por E1. 67

Figura 5.15. Trabajo sobre casos particulares de E15 con un sistema de representación numérico. 68
Figura 5.16. Organización de casos particulares en dos columnas por E2. 68
Figura 5.17. Organización de casos particulares en dos filas por E7. 68
Figura 5.18. Identificación de un aumento constante en el patrón por E8. 69
Figura 5.19. Conjetura de E4, basada en la recurrencia de la sucesión. 70
Figura 5.20. Conjetura de E7 expresada en lenguaje común. 71
Figura 5.21. Conjetura de E11 expresada como una estructura aditiva. 72
Figura 5.22. Conjetura de E10, basada en la figura 5 como unidad. 72
Figura 5.23. Generalización de E12, expresada como una estructura aditiva y multiplicativa. 73
Figura 5.24. Generalización de E15, expresada como estructura aditiva. 73
Figura 5.25. Generalización de E11, expresada como estructura aditiva. 73
Figura 5.26. Cambio de representación por E1, al trabajar con casos particulares. 82
Figura 5.27. Organización de casos particulares de E2. 83
Figura 5.28. Reconocimiento del patrón recurrente de E11. 83
Figura 5.29. Conjetura de E2, “sumar dos”, expresada de manera verbal. 84
Figura 5.30. Conjetura de E9, “multiplicar por dos” expresada de forma numérica. 85
Figura 5.31. Conjetura de E7, multiplicar por dos y quitar uno. 85
Figura 5.32. Generalización de E7, multiplicar por dos y quitar uno. 86

Índice de tablas

Tabla 3.1. Definiciones asociadas al contenido de sucesiones lineales en los libros de texto.. 34
Tabla 4.1. Patrón, generalización y cuestiones que se demandan en la Tarea 1. 43
Tabla 4.2. Patrón, generalización y cuestiones que se demandan en la Tarea 2. 44
Tabla 4.3. Patrón, generalización y cuestiones demandadas en la Tarea 3..................... 45
Tabla 5.1. Pasos del razonamiento inductivo que evidencian los estudiantes en la tarea 1. 49
Tabla 5.2. Tipos de generalizaciones según la estructura matemática en la tarea 1. 58
Tabla 5.3. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 1.. 60
Tabla 5.4. Distintos formas de proceder al formular conjeturas en la tarea uno. 64
Tabla 5.5. Pasos del razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en la tarea 2. ... 66
Tabla 5.6. Tipos de generalizaciones según la estructura matemática, en la tarea 2. 74
Tabla 5.7. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 2.. 76
Tabla 5.8. Formas de proceder en la formulación de conjeturas de la tarea 2.................. 79
Tabla 5.9. Pasos del razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en la tarea 3. ... 81
Tabla 5.10. Tipos de generalizaciones según la estructura matemática, en la tarea 3. 86
Tabla 5.11. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 3.88
Tabla 5.12. Formas de proceder en la formulación de conjeturas de la tarea 3................ 91
Tabla 6.1. Pasos de razonamiento inductivo que se siguen en las tareas........................ 93
Tabla 6.2. Tipos de relaciones identificadas por estudiantes de séptimo grado en patrones figurales. 96
Tabla 6.3. Tipos de conjeturas en el proceso de razonamiento inductivo de los estudiantes de séptimo grado. 97
Tabla 6.4. Tipos de generalización que emergen en las tareas....................................... 99
Tabla 6.5. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes. 101

Introducción

En esta investigación se examinó el razonamiento inductivo que siguen estudiantes de primer grado de secundaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales. La generalización, es un aspecto fundamental que contribuye en promover este tipo de razonamiento, y en el ámbito del quehacer matemático, se concibe como una forma de llegar al álgebra (Cañadas & Castro, 2004).

Los fundamentos teóricos que sustentan el estudio, son el modelo de siete pasos para el razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), los sistemas de representación correspondientes al objeto matemático sucesiones lineales (Cañadas, 2007), los conceptos de patrón matemático y generalización; y los tipos de generalización (Dörfler, 1991; Rivera, 2010).

Para el logro sel objetivo de investigación, se diseñaron tareas de patrones figurales asociados a una sucesión lineal, que demandaron el establecimiento de una generalización. Participaron en la investigación, estudiantes matriculados en séptimo grado (primer grado) en una escuela secundaria, del municipio de Eduardo Neri del estado de Guerrero. Una característica de esta población es que recién habían concluido su formación en educación primaria. De manera que al momento de su participación, su experiencia académica con las sucesiones lineales de acuerdo con el currículum de ese nivel educativo, se limitó al reconocimiento del patrón de recurrencia y de correspondencia. Los sistemas de representación a los que recurrieron al resolver la tareas, fueron el verbal, numérico, algebraico y gráfico.

El estudio del razonamiento inductivo, tomó como base las producciones escritas de los estudiantes, y su exploración se sustentó en los pasos del modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) que siguieron, así como los sistemas de representación a los que recurrieron al resolver las tareas. Los resultados evidencian que los pasos del razonamiento inductivo en los que se involucran con más frecuencia los estudiantes son: el trabajo con casos particulares, identificación de patrón, formulación de conjeturas y generalización. Se reconoce que el paso en que realizan con menor frecuencia, es la organización de los casos particulares; y que no se involucran en la justificación de conjeturas y en la demostración.

El estudio se reporta en cinco capítulos. El primero, presenta los antecedentes y el problema de investigación. Se señala que se ha estudiado con respecto al razonamiento inductivo en matemáticas. Asimismo, se plantea la pregunta de investigación y los objetivos, generales y específicos.

En el segundo capítulo se describen los referentes teóricos en los que se apoya la investigación. En el tercer capítulo, se presenta el análisis de contenido del objeto matemático sucesiones lineales, que sirve como apoyo para el diseño de las tareas de generalización de patrones. El cuarto capítulo presenta la metodología, se describen las tareas diseñadas y su aplicación. En el quinto se analizan los datos y se discuten los resultados de la investigación. En el sexto, se tratan conclusiones y se responde la problemática planteada.

Capítulo 1
Problema de investigación

1.1. Antecedentes del estudio

Es ampliamente aceptado que el razonamiento es importante, tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en hacer matemática (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014). En el contexto escolar, el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes es una meta de varios currículos (Jeannotte & Kieran, 2017; NCTM, 2000; OCDE, 2009) y en la agenda de investigación en Educación Matemática, es un elemento esencial. La habilidad de razonar está vinculada al pensamiento, es propia de los seres humanos (Cañadas & Castro, 2004) y debe ser desarrollada. En general, el razonamiento resulta sumamente práctico para desarrollar la capacidad de los estudiantes de analizar las nuevas situaciones a las que se enfrentan en todos los aspectos, tales como concebir suposiciones lógicas, expresar sus pensamientos, obtener conclusiones y justificar las mismas (Arslan, Göcmencelebi & Tapan, 2009).

1.1.1. Investigaciones sobre el razonamiento

Las investigaciones que han tomado como objeto de estudio al razonamiento, han aplicado múltiples enfoques, con la finalidad de indagar acerca de la manera en la que se desarrollan y manifiestan los distintos tipos de razonamiento. Conner y colaboradores (Conner et al., 2014) por ejemplo, combinan las ideas de Toulmin (1958) y Pierce (1956) en un solo diagrama para examinar los tipos de razonamiento presentes en la argumentación colectiva en un aula de noveno grado, mientras se resuelven problemas en un curso de geometría, en el que los estudiantes investigaron, probaron y aplicaron resultados matemáticos relacionados con triángulos, cuadriláteros y otros polígonos. Con base en los procesos de prueba reconstruidos desde la argumentación colectiva, caracterizan cuatro tipos de razonamientos: el inductivo, deductivo, abductivo y el de analogía. Reconocen que este último, aparece porque es el profesor quien lo promueve. La combinación de ambas perspectivas teóricas por estos investigadores, se constituye además, en un aporte metodológico. Con el cual, puede estudiarse cómo los maestros apoyan a sus estudiantes en la producción de argumentos a medida que pasan de la conjetura a la prueba.

De manera similar, Soler-Álvarez y Manrique (2014) adaptan el modelo de Toulmin y la teoría propuesta por Peirce relativa al desarrollo del método científico, a fin de caracterizar las formas de razonamiento de profesores en formación, cuando se involucran individualmente en tareas relacionadas con números racionales e irracionales. Derivado de su estudio, afirman que el proceso de descubrimiento matemático en las clases de matemáticas, particularmente aquellas que son para profesores de matemáticas, se caracteriza por el desarrollo de tres tipos de razonamiento: abductivo, deductivo e inductivo, y que la estructura propuesta por Pierce, es útil en la descripción de este proceso. Jeannotte y Kieran (2017) proponen un modelo conceptual de razonamiento matemático para las matemáticas escolares, en el que interrelacionan los procesos de comunicación y cognitivos. Lo conciben como un modelo general que puede ser aplicado a varias áreas de contenido matemático, en el que unifican un dominio previamente no estructurado según dos aspectos centrales: el estructural y el de proceso. Arslan, Göcmencelebi y Tapan (2009) por su parte, analizan cómo se relacionan los estilos de razonamiento y aprendizaje de docentes en formación, a través de preguntas abiertas. Reconocen que existe una relación significativa entre el razonamiento y estilo de aprendizaje de los estudiantes; y que el razonamiento más utilizado es el inductivo.

1.1.2. Investigaciones sobre el razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es en el que se enfoca esta investigación. La literatura especializada reconoce que la investigación empírica sobre este tipo de razonamiento no es nueva. Klauer y Phye (2008) destacan que su comienzo data de unos cien años, en el contexto de la investigación sobre inteligencia cuando Spearman descubrió que su factor g de inteligencia general estaba principalmente determinado por procesos inductivos de "educción de las relaciones" (Spearman, 1923, en Klauer y Phye, 2008). Se reconoce además, que gran parte de las investigaciones sobre razonamiento inductivo se realizaron en el campo de la psicología, y en muchos casos, desligadas del aprendizaje escolar (Cañadas, 2007).

En Educación Matemática, el razonamiento inductivo es tema de interés en la agenda de investigación desde hace ya varios años (e.g. Ortiz, 1997; Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Cañadas, 2002; Castro, 2002). En ese contexto, se han reportado estudios que atienden a cuestiones como: marcos y/o modelos teóricos y metodológicos (e.g. Cañadas & Castro, 2007; Klauer & Phye, 1994; Klauer, 1996; Phye, 1997; Reid, 2002), además de estudios de tipo cognitivo, en estudiantes principalmente (e.g. Barkl, Porter & Ginns, 2012; Reid, 2002; Haverty, et al, 2000; Barrera, Castro & Cañadas, 2008), pocos con profesores de matemáticas (e.g. Sosa-Moguel & Cabañas-Sánchez, 2017).

Entre las investigaciones que refieren al razonamiento inductivo, algunas se han enfocado a la construcción de métodos, teorías o a instruir a los estudiantes en el uso del mismo. Destaca el método de Pólya (1965, 1966), para el estudio del razonamiento inductivo, al que considera junto con la generalización, la especialización y la analogía, como las bases del razonamiento informal al que también llama razonamiento plausible. El método, consiste de cuatro etapas: a) observación de casos particulares, b) búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, c) formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y; d) verificación posterior de dicha conjetura. Además, describe el papel que juegan la generalización, la especialización y la analogía en el razonamiento inductivo. Considera a este tipo de razonamiento como un caso particular de razonamiento plausible y afirma que las matemáticas son el contexto más apropiado para estudiarlo. El modelo de Pólya ha sido sustento de otros (e.g. Reid, 2002; Cañadas & Castro, 2007).

Reid (2002) estructura un modelo para el estudio del razonamiento inductivo, sustentado en el método de Pólya, consiste de cinco etapas: a) trabajo con casos particulares, b) observación del patrón, c) formulación de una conjetura que no ha sido comprobada, d) generalización de la conjetura, y; e) utilización de la generalización como base para realizar comprobaciones. Se vale de esta propuesta para explorar el razonamiento que expresan niños de quinto grado de primaria al resolver un problema y puntualiza en tres casos que siguen distintas etapas del modelo. Afirma que el razonamiento al que recurren los estudiantes es parcialmente matemático, puesto que no involucran explicaciones deductivas, que se consideran fundamentales en la matemática de acuerdo al currículo.

Entre los estudios con objetivos orientados en la instrucción, destaca el de Klauer, Willmes y Phye (2002) en el área de psicología, quienes desarrollaron un programa de capacitación para el razonamiento inductivo, con niños pertenecientes a doce grupos de primer grado (7 años de edad). De los doce grupos, se entrenó a los niños de seis de ellos, para que se valieran de una estrategia para razonar inductivamente, mientras que el resto continuaron sus actividades académicas regulares. El estudio evidencia que los niños sometidos al entrenamiento, superaron al resto en las pruebas cognitivas. Un estudio de corte longitudinal desarrollado en Holanda por Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer (2002) con niños de tercero y cuarto grado de primaria, evidencia que si se les instruye en el uso del razonamiento inductivo, se desarrolla una mejor capacidad para utilizarlo, así también el que logren un mejor rendimiento académico. En el mismo marco, se distingue la investigación de Barkl, Porter y Ginns (2012), en la que se evalúan los efectos que produce un programa de instrucción del razonamiento inductivo en estudiantes de primaria, denominado Entrenamiento Cognitivo para Niños (Cognitive Training for Children en inglés). Sostienen que instruir a los estudiantes en el uso del razonamiento inductivo aumenta sus capacidades para utilizarlo y que la enseñanza individual ayuda a desarrollar las habilidades de los estudiantes en mayor medida, que la instrucción en grupos.

En ese mismo ámbito, Klauer y Phye (2008) presentan una teoría prescriptiva desarrollada varios años atrás por su grupo de investigación en estudios previos (Klauer, 1989; 1991; 1993 en Klauer & Phye, 2008), orientada a entrenar a estudiantes de primaria en este tipo de razonamiento. Con base en esta teoría, se reconoce lo que llaman el *procesamiento cognitivo*, consistente en una estrategia de procedimiento para hacer comparaciones, es decir, buscar similitudes y diferencias. Desde esta teoría, plantean la hipótesis de que el entrenamiento en el uso de la estrategia de razonamiento inductivo mejora el funcionamiento cognitivo en términos de (a) un mayor rendimiento de la inteligencia fluida y (b) un mejor aprendizaje académico de la materia del aula. Ambas hipótesis fueron confirmadas, con base en setenta y cuatro experimentos de entrenamiento con casi 3,600 niños.

En el campo de la investigación en Educación Matemática, Christou y Papageorgiou (2007) formulan y validan un marco que enfatiza tanto en el entrenamiento como en la evaluación del razonamiento inductivo de estudiantes de primaria. Se fundamentan en el enfoque de Klauer (1988, 1992, 1999) sobre la capacitación en el razonamiento inductivo. Proponen una manera de describir y predecir el razonamiento inductivo de los estudiantes a través de factores relacionados con la detección de similitudes y diferencias en las propiedades y relaciones de conceptos matemáticos. Sostienen, que este marco puede ser utilizado por profesores para ayudar a mejorar el razonamiento inductivo de sus alumnos, así también, que proporciona una base teórica auxiliar para los diseñadores de currículos y programas de evaluación de este tipo de razonamiento en matemáticas.

En Cañadas (2007) se describe y caracteriza el razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de tercero y cuarto grado de Educación Secundaria Obligatoria en España (equivalentes a tercero de secundaria y primero de educación media superior en México), cuando resuelven problemas que refieren a sucesiones lineales y cuadráticas. Con base en esta investigación, Cañadas y Castro (2007) proponen un modelo teórico para analizar el razonamiento inductivo de estudiantes en el contexto del álgebra. Se sustentan además, en las etapas propuestas en Pólya (1965), Reid (2002) y el trabajo empírico de Cañadas (2002). Es así que delimitan siete pasos para describir el razonamiento inductivo: a) Trabajo con casos particulares, b) organización de casos particulares, c) identificación de patrones, d) formulación de conjeturas, e) justificación de conjeturas, f) generalización, y; g) demostración. El modelo ha sido utilizado en diversos estudios para describir este tipo de razonamiento en tareas de generalización de patrones, tanto en estudiantes (e. g. Cañadas, Castro & Castro, 2008; Cañadas, 2009; Cañadas, Castro & Castro, 2009) como en profesores en formación (Barrera, Castro & Cañadas, 2008) y en servicio (Sosa-Moguel & Cabañas-Sánchez, 2017).

Con el razonamiento inductivo como objeto de estudio, Haverty y colaboradores (2000) analizan los procesos cognitivos de estudiantes universitarios en tareas que involucran a la función cuadrática. Identifican lo que llaman tres áreas fundamentales de la actividad inductiva: recopilación de datos, búsqueda de patrones y generación de hipótesis. Sugieren que el conocimiento numérico es esencial en la detección de patrones, consecuentemente en la resolución de problemas.

1.1.3. Importancia del razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es reconocido como un elemento importante en el campo de la Educación Matemática. Castro, Cañadas y Molina (2010) le confieren dos funciones, con implicaciones en el campo de nuestra disciplina. La primera, afirman, que permite el descubrimiento de conocimiento nuevo mediante la formulación de conjeturas basadas en casos particulares, llegando a la generalización. La otra, refiere a la verificación o comprobación de conjeturas mediante la consideración de casos particulares.

En el marco curricular, en los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se enfatiza en la importancia porque los estudiantes sean competentes en el uso del razonamiento inductivo. En México, un referente curricular, son los planes y programas de estudios de educación secundaria (SEP, 2011a, SEP, 2011b), en los que se reconoce de manera implícita, la importancia del razonamiento inductivo en el estudio de las Matemáticas en la Educación Básica, ya que como parte de los fines del estudio de las mismas, se demanda que los niños y adolescentes *desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas.* Como bien se sabe, la formulación de conjeturas es intrínseca al razonamiento inductivo, y éste debe ser desarrollado en los estudiantes. El razonamiento inductivo es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Su importancia radica en la generalización, considerada una forma de introducir a los estudiantes en el álgebra (Cañadas y Castro, 2004; Radford, 2010).

Desde la investigación y los planteamientos curriculares, se reconoce que el razonamiento inductivo es fundamental en el desarrollo del pensamiento de los individuos, pues numerosas conclusiones inferidas en la vida cotidiana se derivan de este tipo de razonamiento. El razonamiento inductivo apoya tanto el planteamiento como la validación de conjeturas (Soler-Alvarez & Manrique, 2014). Usualmente su finalidad es la obtención de generalizaciones, sin embargo también es útil como un refuerzo cuando los estudiantes buscan justificar las mismas. El razonamiento inductivo se presume un importante camino de acceso al conocimiento matemático, principalmente en los primeros niveles educativos (e.g. Cañadas & Castro, 2002). Además, es el tipo de razonamiento al que los estudiantes suelen recurrir con mayor frecuencia para inferir sus conclusiones, en situaciones en las que existe una regla o regularidad a ser descubierta (e. g. Arslan, Göcmencelebi & Tapan, 2009; Klauer & Phye, 2008).

Es claro que un elemento fundamental para hacer matemática es la formulación de conjeturas. Cuando una conjetura es formulada, debe someterse a un proceso de comprobación, y una vez que ha sido comprobada y puede ser utilizada sobre todos los casos de una misma clase, es denominada generalización. La generalización a su vez, se considera una parte fundamental en el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007), esta se articula a la observación y reconocimiento de patrones y regularidades. Investigaciones como la de Cañadas, Castro y Castro (2008) afirman que una generalización válida en el proceso de razonamiento inductivo depende en gran medida de la identificación de un patrón adecuado.

Una característica notable en las investigaciones cuyo objeto de estudio es el razonamiento inductivo, es que son efectuadas en contextos en los cuales es posible la identificación de patrones, como la resolución de problemas o tareas que se articulen a una sucesión de patrones ya sea figurales o numéricos. De acuerdo con Neubert y Binko (1992) el razonamiento inductivo en matemáticas en nivel secundaria está vinculado con el hallazgo de patrones y relaciones entre números y figuras; además, sugieren que el profesor, contribuya a que los estudiantes arriben a una generalización mediante patrones que lo favorezcan.

En la investigación se reconoce que el estudio de patrones contribuye al desarrollo del razonamiento matemático, asimismo, que posibilita la formulación y justificación de generalizaciones (e.g. Barbosa & Vale, 2015; Rivera, 2013). Rivera (2013) sostiene que en el caso de los patrones figurales, implican a las formas como los objetos principales de una generalización. Y que al igual que con todas las formas en matemáticas, se analizan en términos de sub configuraciones o partes o componentes que operan o tienen sentido dentro de algunas estructuras interpretadas. Un aspecto fundamental de este tipo de patrones (ya sea crecientes o decrecientes), es que promueven diferentes maneras de visualizar y generalizar. Basados en las maneras de visualizar, Rivera y Becker (2011) distinguen dos tipos de generalización en sucesiones con patrones figurales, que se caracterizan según la estructura en la que se organizan los componentes de la figura, en constructivas y deconstructivas. Otros tipos de generalización pueden distinguirse, de considerar distintas formas en que se sigue el proceso de generalización. Dörfler (1991) por ejemplo, distingue dos tipos con base en las maneras de abstraer de lo particular a lo general, que clasifica como generalización empírica y generalización teórica.

Las actividades que implican a la generalización, pueden considerarse como una forma para introducir a los estudiantes al álgebra (e.g., Mason 1996; Cañadas & Castro, 2007). Cuando los estudiantes formulan las generalizaciones a partir de un proceso de razonamiento inductivo, pueden expresarlas por medio del lenguaje natural y simbólico para representar variables. En ese sentido, Radford (2010) considera que inducir una generalización vía patrones, resulta útil para introducir a los estudiantes en el álgebra y que los patrones resultan ser un apoyo en la formulación de generalizaciones.

Un aspecto fundamental en la generalización de patrones, es la visualización, particularmente en los patrones de tipo figural. Con base en la visualización, puede promoverse el que los estudiantes infieran conjeturas a partir de la observación de la manera en que se organizan los componentes de cada figura que forma parte del patrón. De otra parte, los tipos de generalización a las que el estudiante puede arribar dependen del análisis de diferentes formas de organizar las partes que conforman la figura, es decir, el análisis de su estructura.

La visualización también es un aspecto ligado al razonamiento inductivo, ya que al ser un proceso de pensamiento, resulta necesario que existan formas de manifestar las acciones y etapas relacionadas al mismo, apoyándose del lenguaje, ya sea el natural, el simbólico y/o el figural, para representar los objetos y relaciones matemáticas que se establecen entre ellos. En ese sentido, las representaciones son fundamentales, como una manera de evidenciar el razonamiento. Además, el uso de una variedad de representaciones contribuye en la construcción de conocimiento matemático (Brizuela & Earnest, 2008).

1.2. Problema de investigación

Tanto en el marco curricular (e.g., NCTM, 2000; SEP, 2011a, 2011b) como en la investigación en Educación Matemática, se reconoce la importancia del razonamiento inductivo en la construcción de conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento algebraico (e.g., Neubert & Binko 1992; Cañadas, 2007; Ayalon & Even, 2015).

A pesar de la importancia que se le confiere al razonamiento inductivo desde el currículo y de la investigación en el reconocimiento de patrones, en la formulación de conjeturas y de generalizaciones, poco se sabe del desarrollo de este tipo de razonamiento, por parte de estudiantes mexicanos, así como en profesores de matemáticas en formación y en servicio. Las aportaciones que la investigación ha dado, refieren principalmente a estudios en Estados Unidos (e.g. Haverty et al., 2000), Australia (e.g. Barkl, Porter & Ginns, 2012) y Europa (e.g. Christou & Papageorgiou, 2007; Cañadas & Castro, 2007).

Como se documentó en párrafos previos, la investigación que refiere al razonamiento inductivo, ha atendido cuestiones como el desarrollo de métodos y modelos teóricos, la instrucción de estudiantes en el mismo y estudios de tipo cognitivo. Los de tipo cognitivo, se han enfocado en su mayoría, en estudiar el razonamiento inductivo en el contexto de la resolución de problemas y se han realizado atendiendo a los procesos cognitivos de estudiantes de nivel superior (e.g. Haverty et al., 2000), de niveles avanzados de secundaria (e.g. Cañadas, 2007; Cañadas, Castro & Castro, 2008;

Cañadas, 2009; Cañadas, Castro & Castro, 2009) y profesores de primaria en formación (e.g. Barrera, Castro & Cañadas, 2008).

Con base en la literatura especializada, se reconoce que las investigaciones que estudian el razonamiento inductivo se han llevado a cabo con estudiantes que han sido instruidos desde la currícula o la investigación, en el tema de las sucesiones lineales y cuadráticas. Pocos estudios que analizan el razonamiento inductivo se han enfocado en estudiantes que no han sido formados en este ámbito, donde la generalización de patrones, se plantee como una de las demandas cognitivas. Es necesario reconocer el razonamiento inductivo que ponen en juego al construir una regla que explique el comportamiento de una sucesión lineal.

El interés de este estudio es analizar el razonamiento inductivo en estudiantes que no han sido instruidos de manera formal en este tema y a quienes no se les ha exigido construir y justificar una estructura plausible y algebraicamente útil que exprese y conecte propiedades generales de situaciones particulares. Estudiantes cuya experiencia previa, se articula al reconocimiento de propiedades como la recursividad y la correspondencia en sucesiones lineales, en el contexto de patrones figurales y numéricos.

1.3. Pregunta y objetivos de investigación

La presente investigación está enfocada en analizar el razonamiento inductivo de estudiantes de secundaria en México. En particular interesa responder la **pregunta de investigación** siguiente:

¿Cuál es el razonamiento inductivo que evidencian estudiantes de secundaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales?

Para dar respuesta a esta pregunta, se plantearon los **objetivos generales** siguientes:

1. Describir el razonamiento inductivo que siguen estudiantes de secundaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales.
2. Examinar los sistemas de representación que emplean estudiantes de secundaria al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales.

Con los siguientes **objetivos particulares**:

1. Identificar y describir los pasos del razonamiento inductivo que evidencian estudiantes de secundaria al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales.
2. Identificar y describir qué sistemas de representación emplean los estudiantes al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales.

1.4. Pertinencia de la Investigación

La investigación en Educación Matemática y diversos currículos escolares, han reconocido al razonamiento matemático en general, y al inductivo en particular, como un aspecto fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Específicamente, como una vía para descubrir conocimiento nuevo, establecer conjeturas y verificarlas. Los estudios en este contexto, recurren a tareas que involucran patrones tanto numéricos como figurales. Se reconoce que los patrones resultan un apoyo importante en la formulación de generalizaciones y son útiles para introducir a los estudiantes al álgebra. Otros estudios, han formulado marcos teóricos y metodológicos, para explorar y/o desarrollar razonamiento inductivo. Asimismo, que se han enfocado fundamentalmente en explicar lo que hacen o dejan de hacer los estudiantes en tareas que promueven este razonamiento. No obstante, se requiere mayor información acerca de los procesos de razonamiento inductivo que siguen estudiantes de secundaria, particularmente quienes no han sido instruidos en el tema de sucesiones, en tareas de generalización de sucesiones de patrones figurales lineales, interés de esta investigación.

Capítulo 2
Fundamentos Teóricos

La investigación explora el razonamiento inductivo de estudiantes de secundaria, al resolver tareas que refieren a patrones figurales, asociados a sucesiones lineales. Se presta atención tanto al proceso de razonamiento inductivo que siguen y a las generalizaciones que establecen, como a las maneras en que los exteriorizan. Los fundamentos teóricos en que se sustenta el estudio, toman como base el modelo de pasos del razonamiento inductivo propuesto en Cañadas y Castro (2007), los sistemas de representación, los tipos de generalización, así como los conceptos de patrón y generalización. Aspectos que son utilizados en la descripción del razonamiento inductivo de los estudiantes en las tareas de generalización de patrones figurales.

2.1. Razonamiento y tipos de razonamiento

El razonamiento, en general se entiende como el acto de usar la razón para derivar una conclusión de ciertas premisas (Arslan, Göcmencelebi & Tapan, 2009). Es un proceso de pensamiento en el cual se consideran hipótesis específicas a partir de las cuales se obtiene una conclusión. En esta investigación se considera al razonamiento en el sentido de Castro, Cañadas y Molina (2010), como el proceso de pensamiento a partir del cual se pueden obtener conclusiones partiendo de premisas previamente establecidas (p. 55). Se estudia en el ámbito de la matemática escolar, de ahí que el razonamiento matemático, se asume como la inferencia significativa sobre entidades o relaciones matemáticas (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014). Esta naturaleza inferencial es una de las características más importantes del razonamiento matemático, puesto que el desarrollo de conocimiento matemático está ligado al establecimiento de conjeturas. En la investigación la distinción más frecuente y aceptada que habitualmente se evidencia entre tipos de razonamiento es la que se establece entre razonamiento deductivo, inductivo y abductivo.

La **deducción** presume una ley general y un caso (o casos) observado que lógicamente infiere un resultado válido necesario que no tiene que depender del conocimiento real o empírico para la verificación (Goswami, 2011). Este razonamiento es el realizado desde un caso general a lo particular. Al involucrarse en el razonamiento deductivo, se construyen conclusiones como la consecuencia lógica de supuestos o condiciones mencionados previamente (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014). El razonamiento inductivo o **inducción** es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y sus combinaciones (Pólya, 1965). Este razonamiento es el que se realiza partiendo desde casos particulares para llegar a una conjetura o generalización. Mientras que la **abducción** consiste en examinar un conjunto de hechos y permitir que estos apunten a una teoría (Peirce, Hartshorne, Weiss & Burks, 1994). La abducción se puede observar dentro del aula de matemáticas cuando los estudiantes primero encuentran un resultado y después tienen que hipotetizar qué regla y caso particular produce (o podría permitir) tal resultado (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014).

2.2. Modelo para el Razonamiento Inductivo

El tipo de razonamiento que esta investigación se enfoca en analizar es el inductivo. Como se ha señalado antes, inicia de casos particulares con el fin de establecer una generalización. Para caracterizar el razonamiento inductivo que emplean los estudiantes de secundaria, se han de describir los pasos del razonamiento inductivo a los que recurren. Para tal propósito se utiliza el modelo de Cañadas y Castro (2007, p. 69), que consta de los siguientes siete pasos:

1. *Trabajo con casos particulares*. El punto de partida son las experiencias con casos particulares del problema planteado. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.
2. *Organización de casos particulares*. Los estudiantes usan diferentes estrategias para sistematizar y facilitar el trabajo con casos particulares. Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas o con algún orden.
3. *Identificación de patrones*. Observando casos particulares (organizados o no), es posible pensar en el próximo caso desconocido. En este sentido, los estudiantes están pensando en un posible patrón solo para los casos que están observando, no en aplicar el patrón a todos los casos.
4. *Formulación de conjeturas*. Una conjetura es una afirmación basada en hechos empíricos, que no ha sido validada.

5. *Justificación de las conjeturas*. Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación.
6. *Generalización*. La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.
7. *Demostración*. En este punto, una prueba formal puede proporcionar la justificación final que garantiza la veracidad de la conjetura.

2.3. Patrón Matemático

Un concepto fundamental en el desarrollo del razonamiento inductivo en matemáticas, es el de patrón, que favorece el que los estudiantes identifiquen regularidades en una sucesión a partir de su observación y con base en ello establecer conjeturas.

Un **patrón** es lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse (Castro, Cañadas & Molina, 2010), este proporciona la base necesaria para generar una conjetura. Las actividades con patrones implican construir y estar dispuesto a establecer regularidades y estructuras matemáticas tanto en datos ordenados como en los no ordenados (Rivera, 2013).

Considerando el contexto de la investigación, se tiene en cuenta a la noción de **patrón matemático,** la cual se comprende como cualquier regularidad predecible, que involucra relaciones numéricas, espaciales o lógicas (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Esta regularidad, se explica y justifica a través de una estructura plausible y algebraicamente útil (Rivera, 2010) que conlleva a la regla general o generalización.

Por la forma en que suelen expresarse, los patrones pueden ser numéricos o figurales. En esta investigación, se considera **patrón numérico** en el sentido de Bishop (2000), como una secuencia de números en la que existe una regla bien definida para calcular cada número a partir de los números anteriores o desde su posición en la secuencia. Bishop (2000) define además, lo que denomina patrón numérico geométrico, es cuándo los números se relacionan con una secuencia de figuras geométricas en las que cada figura se deriva de la figura anterior mediante algún procedimiento bien definido. Reconociendo que las figuras que forman la secuencia no necesariamente son de tipo geométrico, nos referimos a este tipo de patrón como **patrón figural**, resaltando que las etapas de la secuencia están relacionadas con una secuencia numérica. Este tipo de patrones, implican a las figuras como los objetos principales de una generalización, tal como sostiene Rivera (2013), quien reconoce además, que al igual que con todas las formas en matemáticas, se analizan en términos de sub configuraciones o partes componentes que operan o tienen sentido dentro de algunas estructuras interpretadas.

El estudio del razonamiento inductivo en esta investigación, se realiza a través de tareas que involucran patrones figurales asociadas a alguna sucesión numérica de tipo lineal.

2.4. Generalización

Un paso esencial en el modelo del razonamiento inductivo es la generalización. No sólo es un aspecto fundamental en promover este tipo de razonamiento, también en el quehacer matemático, ya que es valorada como una forma de llegar al álgebra (Cañadas & Castro, 2004). Esta se reconoce, cuando conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada (Cañadas, 2007).

2.4.1. Generalización de patrones

Rivera (2010) afirma que cuando los estudiantes se involucran en una generalización de patrones, enlazan la coordinación de sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas para poder construir y justificar una estructura válida y algebraicamente útil que podría transmitirse en forma de una fórmula directa. Documenta también, que la construcción de una generalización significativa de patrones, conlleva a la coordinación de dos acciones interdependientes:

> (1) acción abductiva-inductiva sobre objetos, que implica emplear diferentes formas de contar y estructurar objetos o partes discretas en un patrón de una manera algebraicamente útil; y (2) acción simbólica, que implica traducir (1) en la forma de una generalización algebraica.(Rivera, 2010, p. 300)

Radford (2008, 2013) por su parte, reconoce que la generalización algebraica de patrones implica varias ideas: a) identificar una característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia; b) la aplicación de esta característica a todos los términos de la secuencia en consideración; y c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

El razonamiento inductivo en estudiantes se analiza en el contexto de tareas que les demandan el establecimiento de una generalización algebraica de patrones.

2.4.2. Tipos de generalización

La investigación ha documentado que existen distintos tipos de generalización, que se identifican de acuerdo a su naturaleza o características. En este estudio, se atiende a cuatro tipos de generalización, en las que se toman en cuenta: a) la forma de abstracción de lo particular a lo general (Dörfler, 1991); y b) la manera en que se organiza se estructuran los objetos o partes discretas en un patrón y se traduce a una expresión simbólica (Rivera, 2010).

Considerando la forma de abstraer de lo particular a lo general, se atiende a dos tipos, la empírica y la teórica. Dörfler (1991) sostiene que cuando un estudiante establece una generalización **empírica** extrae y aísla mentalmente características estables y comunes o sistemas de características de sus contextos originales a través de procesos de comparación y observación. Así también, que cuando un estudiante realiza generalización **teórica** se enfocan ya sea en las acciones relevantes o en los sistemas de acciones que acompañan al proceso general, los resultados de tales acciones o sistemas, o las condiciones (relaciones y propiedades) que hacen factibles las acciones o sistemas.

De acuerdo a la forma de estructurar las partes que conforman el patrón y la manera de traducir esta expresión al lenguaje simbólico, se contemplan otros dos tipo de generalización: constructivas y deconstructivas (Rivera, 2010). La **constructiva** refiere al hecho de que, se considera que una estructura interpretada en relación con algún patrón, consiste en partes no superpuestas que, cuando se suman, constituyen una forma percibida que se aplica a través de las etapas del patrón. Mientras que una generalización **deconstructiva**, es cuando se ven las etapas figurales conocidas en un patrón, como consistentes en partes superpuestas que se pueden descomponer de manera conveniente. Ambos tipos de generalizaciones reflejan el uso de un esquema que puede ser aditivo o multiplicativo; y pueden expresarse de forma estándar o no estándar, lo que refiere a los términos algebraicos en una expresión directa, es decir, estándar significa que los términos ya están en forma simplificada, mientras que no estándar contiene términos que se pueden simplificar aún más.

En el análisis del razonamiento inductivo que siguen los estudiantes, se examinan los tipos de generalización que construyen.

2.5. Representaciones y sistemas de representación

Todo proceso cognitivo se encuentra asociado a las representaciones como formas de expresión del mismo. El razonamiento inductivo al ser un proceso de este tipo, precisa de la utilización de representaciones. Este proceso en el que se involucra el individuo puede ser expresado de distintas formas, ello implica la utilización de diferentes representaciones.

2.5.1. Representaciones

En esta investigación, las representaciones constituyen aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, mediante las que se hacen presentes y nombran los conceptos y procedimientos de esta disciplina, así como sus características, propiedades y relaciones más relevantes (Lupiáñez, 2016).

2.5.2. Sistemas de representación

Las representaciones pueden organizarse, según sus características y propiedades, en diferentes sistemas de representación. Cada sistema de representación compone un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de una serie de reglas y convenios, que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático y posibilitan su uso para determinadas funciones (Lupiáñez, 2016).

Los diferentes sistemas de representación no sólo permiten identificar diferentes facetas o relaciones de las nociones matemáticas, también, evidencian diferentes significados de los mismos (Lupiáñez, 2016). Entre los diferentes sistemas de representación se pueden realizar conversiones, que son traducciones de una determinada expresión hecha en un sistema a la expresión de esa misma noción en otro sistema distinto (Lupiáñez, 2016). Estas conversiones permiten a los estudiantes expresar la misma idea de maneras diferentes. Brizuela y Earnest (2008) afirman que las conexiones entre representaciones ayudan a aclarar parte de la ambigüedad que presentan las representaciones individuales y afirman que para un completo desarrollo de los conceptos, los niños deben representarlos de diversas maneras. Asimismo, sugieren que la flexibilidad de los estudiantes para trabajar con múltiples representaciones evidencia conocimientos matemáticos más profundos.

En esta investigación se analizan los sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en el proceso de razonamiento inductivo. Los sistemas de representación considerados de acuerdo al contenido matemático son el numérico, el gráfico, algebraico y verbal, reportados previamente en Cañadas (2007) (Figura 2.1).

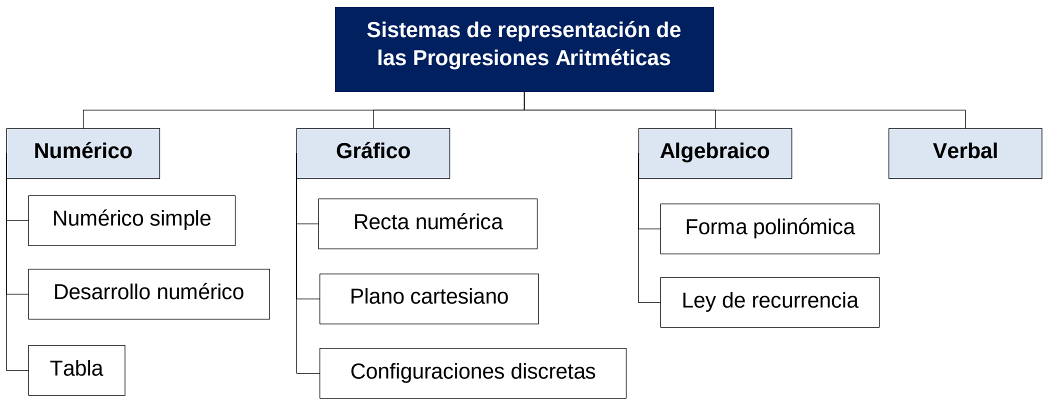


Figura 2.1. Sistemas de representación de las progresiones aritméticas (Tomado de Cañadas, 2007, p.122).**¡Error! Marcador no definido.**

El sistema numérico, incluye la representación numérica simple, el desarrollo numérico (descomposición aritmética) y la tabla de valores (tabular). El sistema gráfico, abarca la representación mediante la recta numérica, el plano cartesiano y la representación por configuraciones discretas (pictórica). El sistema algebraico, incluye la representación por medio de una expresión algebraica mediante la ley de recurrencia y la expresión algebraica en su forma polinómica funcional (término general), la recurrencia refiere al caso en el que un término se escribe en función del anterior. El sistema verbal es el que está determinado por el lenguaje cotidiano. La Figura 2.2 muestra ejemplos de las distintas representaciones para la sucesión lineal cuyo término general es $a_n = 2n + 1$.

En el contexto de la presente investigación se analizan los sistemas de representación que los estudiantes emplean en el proceso de razonamiento inductivo y para manifestar generalizaciones.

$1,3,5,7,\ldots$

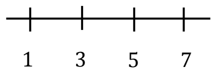
Numérica simple

$1, 2+1, 2+2+1, 2+2+2+1, \ldots$

Desarrollo numérico

$a_n = 2n+1$

Forma polinómica funcional



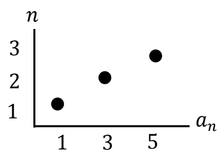
Recta numérica

n	1	2	3	4	...
a_n	1	3	5	7	...

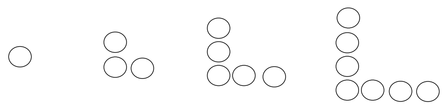
Tabular

$a_{n+1} = a_n + 2$, con $a_0 = 1$

Ley de recurrencia



Plano cartesiano



Configuraciones discretas (pictórica)

"Sucesión de los números impares"

Verbal

Figura 2.2. Progresión aritmética $\boldsymbol{a_n = 2n + 1}$ en distintas representaciones.

Capítulo 3
Contenido Matemático

El contenido matemático en este estudio refiere a la sucesión lineal, progresión aritmética de orden uno. Son sucesiones de números naturales cuyos términos y generalización pueden expresarse a través de polinomios lineales.

3.1. Análisis de contenido matemático

El análisis de contenido matemático toma como base la propuesta de organizadores curriculares planteada en Rico (2016), que se centra principalmente en la estructura y análisis formal, los sistemas de representación y la fenomenología, entendida como sentidos y modos de uso en los que el contenido de las sucesiones lineales tiene su campo de problemas. Este análisis examina los diferentes modos de expresión y uso del elemento matemático, las relaciones con distintas estructuras matemáticas, la utilización de diferentes procedimientos y los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, como plantean Cifuentes y colaboradores (2014).

Los tres organizadores curriculares que conforman el análisis de contenido matemático sobre progresiones aritméticas de orden uno son: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. La estructura conceptual alude a la estructura de las progresiones en el currículo y se divide en dos campos para su caracterización: el conceptual y procedimental. Los sistemas de representación refieren a las distintas maneras en las que el concepto puede ser expresado. La fenomenología implica aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto. El análisis se centra en los planes y programas de estudio de educación básica (SEP, 2011a, 2011b); en los libros de texto gratuitos del estudiante y el profesor de los seis grado de educación primaria (SEP, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d, 2014e, 2014f, 2014g, 2014h, 2014i, 2014j, 2014k, 2014l) y en libros de texto utilizados en primer y segundo grado de secundaria (Arriaga & Benítez, 2016a, 2016b).

Progresiones aritméticas de orden uno

Con el propósito de analizar cómo se manifiesta la estructura conceptual de las progresiones aritméticas en el currículo, se puntualiza en su estructura dentro de la matemática en general. Esta incluye las relaciones del concepto con otros, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que forma parte, como a la que configura.

En primer lugar, es preciso definir qué se entiende por progresión aritmética en el contexto de esta investigación: "Se denomina progresiones aritméticas de orden p a la sucesión de números resultantes de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable" (García, 2005, p.258). Este estudio se enfoca en progresiones de un orden particular: las progresiones aritméticas de orden uno. Son las que resultan a partir de la determinación de los valores numéricos de un polinomio de grado uno para valores enteros consecutivos de su variable.

Para el estudio de la estructura del contenido de interés, se retoma el análisis reportado en Cañadas y Castro (2013), quien divide la estructura conceptual de las progresiones aritméticas (de orden 1 y 2) en dos partes: a) la relación entre progresiones aritméticas y otros objetos matemáticos y; b) las progresiones aritméticas como estructura matemática.

La primera parte que se enfoca en la relación de inclusión de las progresiones aritméticas con los objetos matemáticos sucesión, función, aplicación y correspondencia (Figura 3.1). Esta relación permite reconocer que las progresiones aritméticas son un tipo de sucesiones que cumplen con características específicas, en particular las progresiones aritméticas de orden uno, que también son denominadas sucesiones lineales. En adelante se utiliza sucesión lineal para referir a las progresiones aritméticas de orden uno.

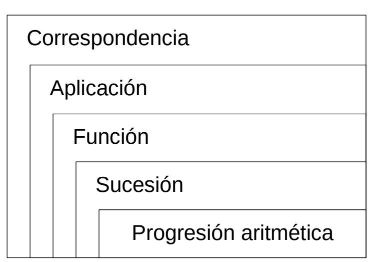


Figura 3.1. Progresiones aritméticas en otras estructuras matemáticas (Tomado de Cañadas y Castro, 2013).

La segunda parte, se enfoca en analizar las sucesiones lineales como una estructura matemática y se centra en los *elementos* de una sucesión lineal, en las *relaciones* que existen entre dichos elementos y en las *propiedades* características de una sucesión lineal. Retomando el análisis realizado por Cañadas y Castro (2013), en la presente investigación se distinguen dos **elementos** fundamentales del tipo de sucesión que se tratan: el *término general* y los *términos particulares*. El *término general* de una sucesión es el polinomio a partir del cual surge la misma, y es denotado regularmente por $a_n = c_0 n^p + c_1 n^{p-1} + c_2 n^{p-2} + \cdots + c_{p-1} n + c_p$, siendo c_i un valor conocido; el término general de una sucesión lineal es el polinomio $a_n = c_0 n + c_1$ con n un número natural. Los *términos particulares* (también llamados términos k-ésimos), son denotados por a_k, donde k es el número natural que corresponde al lugar que ocupa el término como parte de la sucesión ($a_1, a_2, a_3, \ldots$).

Entre los elementos de las sucesiones mencionados, se pueden establecer ciertas **relaciones**. En este estudio, las relaciones que se implican son las que pueden establecerse entre términos particulares y generales de la sucesión lineal. La relación que se establece entre los *términos particulares consecutivos* de la sucesión (términos cercanos); la relación que se establece entre los *términos particulares no consecutivos* (términos lejanos) de la sucesión y la relación que se establece entre los *términos particulares y el término general* (generalización). En cuanto a las **propiedades,** las sucesiones lineales, al ser un tipo específico de sucesiones, cuentan con propiedades particulares: *estrictamente crecientes*, *infinitas*, *no acotadas*, *divergentes* y *recurrentes lineales*.

3.1.1. Estructura conceptual

La estructura conceptual, refiere a los aspectos formales y a los de tipo cognitivo con que se caracterizan y describen los contenidos matemáticos objeto de estudio, tal como se reconoce en Rico (2016), quien los describe como sigue:

> Los aspectos formales se establecen en términos de nociones, conceptos, propiedades, razonamientos y demostraciones matemáticas. Los aspectos cognitivos se especifican en términos de la dicotomía conceptual/procedimental, procedente del marco del procesamiento de la información y los niveles establecidos por la psicología cognitiva (Rico, 2016, p. 161).

Atendiendo a los aspectos formales, se identifican los conceptos característicos de la estructura matemática del tema particular, aspectos que refieren al *campo conceptual*. Mientras que como parte de los aspectos cognitivos se reconocen los procedimientos que son aplicados sobre la estructura, dichos aspectos aluden al *campo procedimental*.

El contenido matemático de esta investigación, son las sucesiones lineales. En este contexto, en el campo conceptual se identifica la estructura matemática que configura este tipo de sucesión en el currículo. En el campo procedimental se identifican las destrezas, los razonamientos y las estrategias que son necesarias para el trabajo con las mismas.

Campo conceptual

En los libros de texto de matemáticas oficiales, para el profesor de educación básica primaria, se distinguen varias definiciones relacionadas a las sucesiones lineales. En primer grado se implica la definición de sucesión numérica, patrón y secuencia de figuras. En segundo grado, se define sucesión con progresión aritmética y sucesión; mientras que en cuarto grado, término de una sucesión (Véase tabla 3.1.).

Tabla 3.1.
Definiciones asociadas al contenido de sucesiones lineales en los libros de texto.

Concepto	**Definición**	**Grado**
Secuencia de figuras	Se construye siguiendo un patrón, que es el que permite continuar la secuencia o averiguar que pieza falta.	1
Sucesión numérica	Es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente.	1
Patrón	Una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se construyen siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad.	1, 2 y 4
Sucesión	Una sucesión en un conjunto ordenado de objetos, (números, letras, figuras o etcétera) que responden a una ley de formación o regla.	2 y 4
Sucesión con progresión aritmética	Son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante	2 , 3 y 4
Término de una sucesión	A los elementos de la sucesión se les llama términos.	4

Además de las definiciones, el campo conceptual abarca los elementos, relaciones y propiedades que han sido descritos anteriormente, y como se encuentran presentes en el currículo de educación básica, tanto en primaria como en secundaria.

En el currículo de educación primaria, se distingue que los elementos de las sucesiones lineales incluidos son los términos particulares. Las relaciones entre elementos, que están presentes son entre términos particulares consecutivos y términos particulares no consecutivos, mientras que no se establece la relación entre términos particulares y el término general. De las propiedades particulares, únicamente la recurrencia lineal se encuentra de manera implícita, el resto de las propiedades no se presentan de ninguna forma.

Por cuanto a educación secundaria, a partir de primer grado se continúa el estudio de las sucesiones lineales, en el que se trabaja con los términos particulares y se incorpora el término general. Las relaciones que se implican son entre términos particulares (tanto consecutivos, como no consecutivos). A partir de primer grado, también se introduce la relación entre el término particular y el general, así como a la propiedad de recurrencia lineal.

Campo procedimental

En el campo procedimental, se distinguen las destrezas, razonamientos y estrategias que se precisan al involucrarse en el trabajo con tareas de sucesiones lineales. Las *destrezas* son procedimientos bien definidos que incluyen expresiones simbólicas, los *razonamientos* hacen referencia a las relaciones de inferencia en el concepto y las *estrategias* consisten en la ejecución de los procedimientos dentro de la estructura conceptual (tomando en cuenta a los elementos, relaciones y propiedades) (Rico, 2016).

Las destrezas elementales para el trabajo con este contenido matemático, son la jerarquía de operaciones; conocimiento de las propiedades de los números naturales; los algoritmos de la suma, la resta y el producto; y el uso de diversas representaciones de una sucesión lineal.

Se implica el uso del razonamiento inductivo al involucrarse con tareas de sucesiones lineales, utilizado durante el reconocimiento del patrón y la formulación de términos generales; se utiliza el razonamiento deductivo al utilizar el término general sobre términos particulares.

Las estrategias que se han identificado son: cálculo mental, estimación de resultados, análisis de la estructura del patrón figural y reconocimiento de las distintas formas de representación de los elementos de una sucesión lineal.

Las tareas planteadas en educación básica encierran diversas demandas cognitivas que se formulan a los estudiantes con el fin que progresen en su aprendizaje. De primer a tercer grado de primaria la demanda cognitiva correspondiente a los contenidos de sucesiones lineales, es la identificación de la regularidad en patrones figurales y numéricos para continuar la sucesión y encontrar términos faltantes en sucesiones con progresión lineales, utilizando números enteros (Figura 3.2).

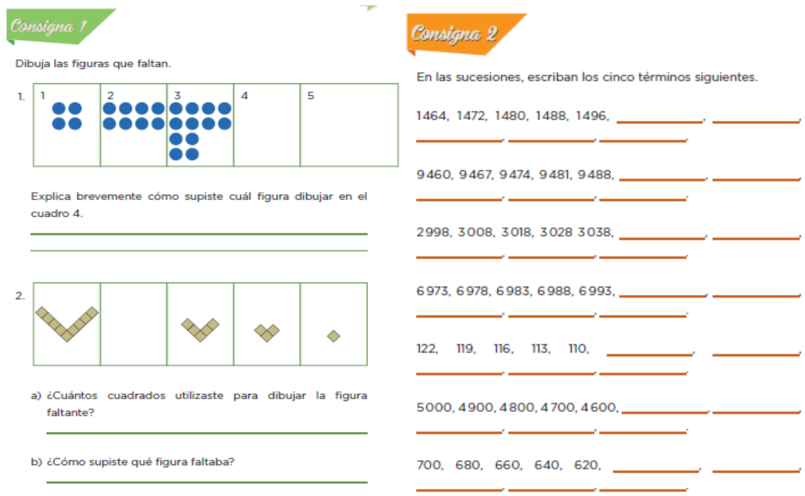


Figura 3.2. Ejemplos de actividades sobre sucesiones planteadas de primero a tercero de primaria.

En cuarto, quinto y sexto de primaria la demanda cognitiva es la identificación de la regularidad en patrones figurales y numéricos para continuar y encontrar términos faltantes en sucesiones compuestas con progresión lineal y cuadrática, añadiendo los números fraccionarios en quinto grado y los decimales en sexto (Figura 3.3).

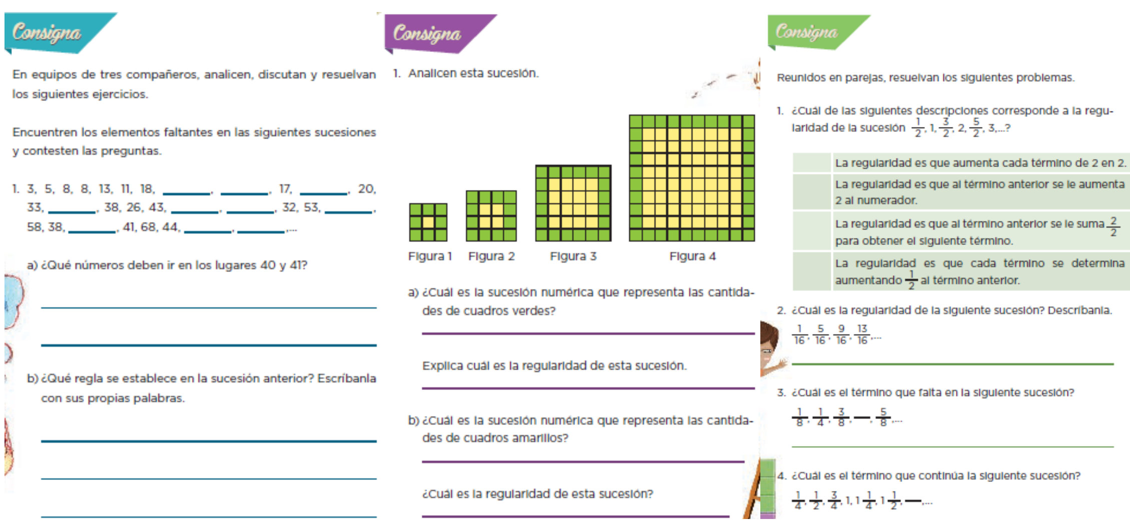
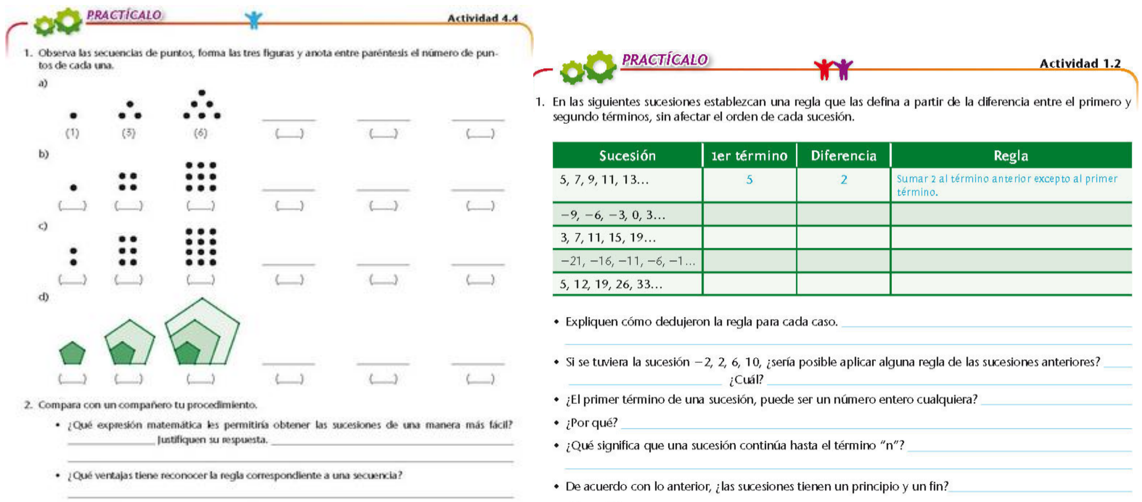


Figura 3.3. Ejemplos de actividades sobre sucesiones planteadas de cuarto a sexto de primaria.

En primero y segundo de secundaria se demanda el establecimiento del término general de la sucesión lineal numérico asociada a un patrón figural , y el uso del término para generar los términos particulares faltantes de sucesiones lineales y cuadráticas, utilizando números enteros y añadiendo los enteros negativos en segundo (Figura 3.4).

En tercero de secundaria se trabaja únicamente con contenidos sobre sucesiones cuadráticas.



PRACTÍCALO Actividad 4.4

1. Observa las secuencias de puntos, forma las tres figuras y anota entre paréntesis el número de puntos de cada una.

a) (1) (3) (6) ( ) ( ) ( )

b) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

c) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

d) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

2. Compara con un compañero tu procedimiento.

- ¿Qué expresión matemática les permitiría obtener las sucesiones de una manera más fácil? ____ Justifiquen su respuesta. ____
- ¿Qué ventajas tiene reconocer la regla correspondiente a una secuencia? ____

PRACTÍCALO Actividad 1.2

1. En las siguientes sucesiones establezcan una regla que las defina a partir de la diferencia entre el primero y segundo términos, sin afectar el orden de cada sucesión.

Sucesión	1er término	Diferencia	Regla
5, 7, 9, 11, 13...	5	2	Sumar 2 al término anterior excepto al primer término.
−9, −6, −3, 0, 3...			
3, 7, 11, 15, 19...			
−21, −16, −11, −6, −1...			
5, 12, 19, 26, 33...			

- Expliquen cómo dedujeron la regla para cada caso. ____
- Si se tuviera la sucesión −2, 2, 6, 10, ¿sería posible aplicar alguna regla de las sucesiones anteriores? ____ ¿Cuál? ____
- ¿El primer término de una sucesión, puede ser un número entero cualquiera? ____
- ¿Por qué? ____
- ¿Qué significa que una sucesión continúa hasta el término "n"? ____
- De acuerdo con lo anterior, ¿las sucesiones tienen un principio y un fin? ____

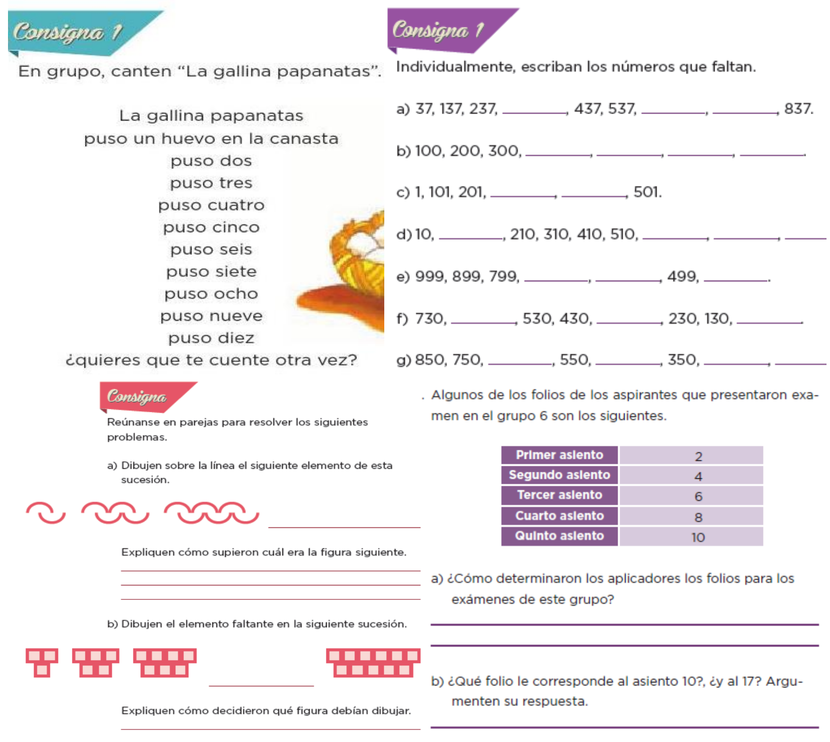
Figura 3.4. Ejemplo de actividades sobre sucesiones planteadas en primer y segundo grado de secundaria.

Se ha reconocido que la mayor demanda cognitiva en las tareas del libro de texto de primaria es el reconocimiento del patrón, sin el establecimiento de una generalización. Si bien se exige a los estudiantes encontrar la regularidad y aplicarla, esto hace referencia a la obtención un término particular a partir del término anterior, es decir, a encontrar la relación de recurrencia entre los términos. La obtención de una generalización para el término que genere a todos los elementos de la sucesión, se exige en nivel secundaria, sin embargo los estudiantes que conforman la población de este estudio aún no se enfrentaban a esos contenidos al momento de aplicar las tareas.

3.1.2. Sistemas de representación

Como se ha presentado en el capítulo anterior, los sistemas de representación hacen referencia a las diferentes maneras en las que se pueden expresar los conceptos, en este caso los elementos de las sucesiones y las relaciones entre ellos. Para las progresiones aritméticas se utilizan los sistemas de representación numérico, gráfico, algebraico y verbal (Cañadas, 2007). El sistema numérico, incluye la representación numérica simple, la descomposición aritmética y la tabla de valores. El sistema gráfico, abarca la recta numérica, el plano cartesiano y la representación por configuraciones discretas (pictórica). El sistema algebraico, incluye la expresión de recurrencia en su forma algebraica, obteniendo cada término a partir del anterior ($a_{n+1} = a_n + c_0$); y la expresión general en su forma polinómica ($a_n = c_0 n + c_1$). El sistema verbal refiere al que está determinado por el lenguaje cotidiano.

Los contenidos de sucesiones lineales son desarrollados utilizando la representación verbal, numérica simple y configuraciones discretas de primer hasta el sexto grado de primaria, incorporando la representación tabular en quinto grado (Figura 3.5). Mientras que en educación secundaria comienza a utilizarse la representación algebraica en su forma polinómica funcional (Figura 3.6).


Consigna 1

En grupo, canten "La gallina papanatas".

La gallina papanatas
puso un huevo en la canasta
puso dos
puso tres
puso cuatro
puso cinco
puso seis
puso siete
puso ocho
puso nueve
puso diez
¿quieres que te cuente otra vez?

Consigna 1

Individualmente, escriban los números que faltan.

a) 37, 137, 237, ______, 437, 537, ______, ______, 837.

b) 100, 200, 300, ______, ______, ______, ______.

c) 1, 101, 201, ______, ______, 501.

d) 10, ______, 210, 310, 410, 510, ______, ______, ______

e) 999, 899, 799, ______, ______, 499, ______.

f) 730, ______, 530, 430, ______, 230, 130, ______.

g) 850, 750, ______, 550, ______, 350, ______, ______

Consigna

Reúnanse en parejas para resolver los siguientes problemas.

a) Dibujen sobre la línea el siguiente elemento de esta sucesión.

Expliquen cómo supieron cuál era la figura siguiente.

b) Dibujen el elemento faltante en la siguiente sucesión.

Expliquen cómo decidieron qué figura debían dibujar.

. Algunos de los folios de los aspirantes que presentaron examen en el grupo 6 son los siguientes.

Primer asiento	2
Segundo asiento	4
Tercer asiento	6
Cuarto asiento	8
Quinto asiento	10

a) ¿Cómo determinaron los aplicadores los folios para los exámenes de este grupo?

b) ¿Qué folio le corresponde al asiento 10?, ¿y al 17? Argumenten su respuesta.

Figura 3.5. Ejemplos de representaciones utilizadas para el trabajo con sucesiones en primaria.

Los resultados del análisis de contenido sobre progresiones aritméticas de orden uno, muestran que en educación primaria sólo se trabaja con tres sistemas de representación: a) verbal, b) gráfico, del que se considera la representación pictórica; y c) numérico, del que se implican la representación numérica simple y tabular. En nivel secundaria se incorpora el trabajo con el sistema de representación algebraico, empleando la forma polinómica funcional. Puesto que no se han involucrado con el contenido sobre sucesiones de nivel secundaria al momento del estudio, los estudiantes que conforman la población solamente están familiarizados con las representaciones utilizadas en primaria.

1. Encuentren la expresión algebraica que determine el modelo para obtener el último término (n) de cada sucesión.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …	
b) −13, −10, −7, −4, −1, …	
c) 4, 9, 14, 19, 25, …	
d) −17, −10, −3, 4, 11, …	
e) 2, 10, 18, 26, 34, …	

2. Expliquen el procedimiento que siguieron para obtener las expresiones algebraicas de estas sucesiones.

3. ¿Cuál es el decimoprimero de los términos en cada sucesión?

a) c) e)

b) d)

4. ¿Qué lugar ocupa el número 39 en la sucesión del inciso d)?

Figura 3.6. Ejemplo de representación algebraica utilizada para las sucesiones en secundaria.

3.1.3. Sentidos y modos de uso

La fenomenología refiere a todos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto matemático. También, posibilita determinar los contextos en los cuales se utiliza el concepto, con el fin de formular las tareas que se esperan que los alumnos desarrollen.

En educación básica el trabajo con sucesiones se realiza en contextos que atienden a cuestiones como estrategias de conteo y variación entre dos cantidades. Mientras que las situaciones o problemas en que se realiza el trabajo con progresiones aritméticas de orden uno, son en sucesiones con patrón figural o numérico (Figura 3.7).

A fin de tener un conocimiento más amplio de la trayectoria que sigue el estudio de las sucesiones lineales, de las competencias a desarrollar en los estudiantes en secundaria así como la demanda cognitiva, se analizó el contenido matemático del currículo tanto de primaria como secundaria. Derivado de este análisis, se reconoció que desde primaria, los estudiantes han experimentado con el estudio de sucesiones lineales en el marco de patrones numéricos y figurales. En ese ámbito, trabajaron con los sistemas de representaciones gráfico, numérico y verbal, en primaria; incorporando la representación algebraica en secundaria. Es en el libro de texto de matemáticas del profesor, donde se presentan las definiciones de secuencia de figuras, patrón, sucesión, sucesión numérica y término de una sucesión. Las actividades planteadas a los estudiantes en primaria, se habían enfocado en las relaciones de recursividad y correspondencia de la sucesión, sin establecer la relación entre los términos particulares y el término general (generalización), ahí se distingue que la mayor demanda cognitiva es el reconocimiento del patrón. Es en educación secundaria, cuando se le demanda determinar el término general de una sucesión y su utilización para obtener términos particulares. En un primer momento, el término general de la sucesión lineal (primer grado) y al final de esta etapa de su formación, el que refiere a la cuadrática.

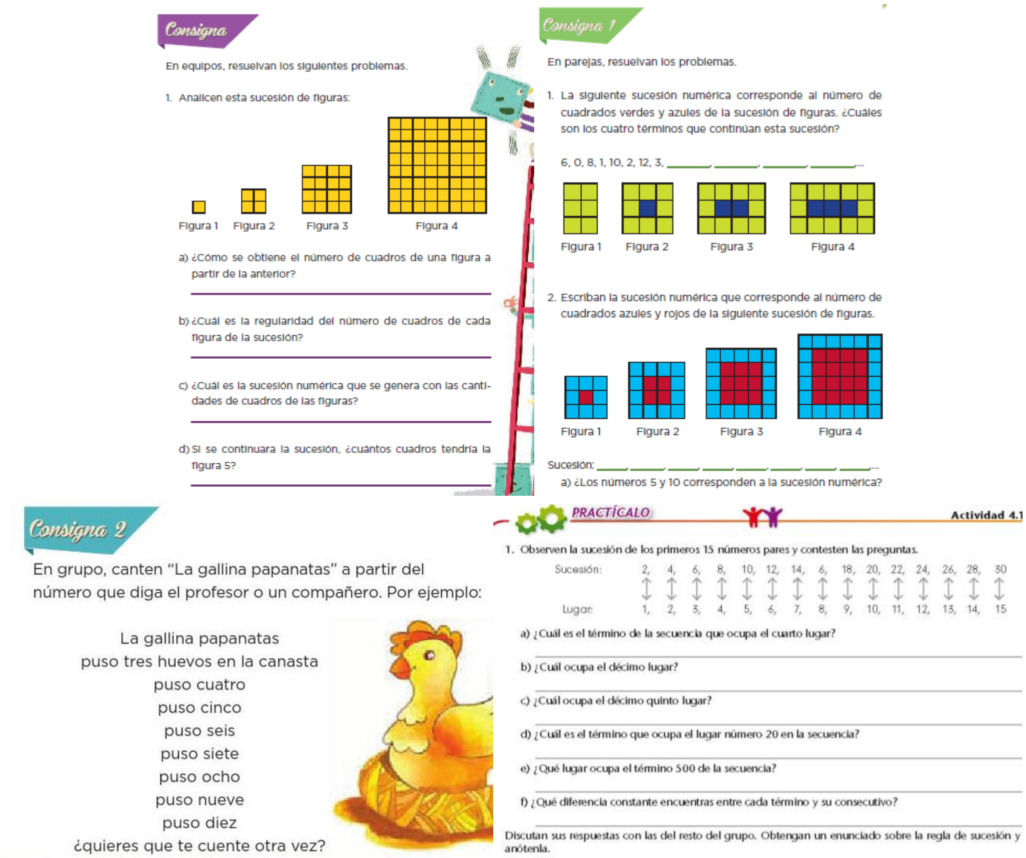


Figura 3.7. Ejemplos de los modos de uso de las sucesiones en educación básica.

El análisis de contenido matemático hace posible estudiar de qué manera se han involucrado los estudiantes de séptimo grado en el estudio de las sucesiones, y las propiedades, elementos y representaciones que se han utilizado. Esto resulta útil para sustentar el diseño de las tareas que se les aplican.

Capítulo 4
Metodología

El enfoque de esta investigación es cualitativo, sin pretender generalizar sus resultados para poblaciones más amplias, su propósito más bien, es la expansión de la información. Un estudio desarrollado desde esta perspectiva emplea un conjunto de procesos sistemáticos y empíricos para aplicarlos al estudio de algún fenómeno (Baptista, Fernández & Hernández, 2010). Conforme a sus objetivos, la investigación es de carácter descriptivo, pretende especificar las propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Baptista, Fernández & Hernández, 2010). El estudio se sustenta en tareas de generalización de sucesiones lineales, cuyo diseño considera el análisis del contenido matemático progresiones aritméticas de orden uno en la educación básica, y el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007).

4.1. Participantes

En el estudio participaron 15 estudiantes (6 hombres y 9 mujeres), cuyas edades van de los 11 a los 13 años de edad. Al momento de su participación, esta población estaba matriculada en séptimo grado (primer grado de secundaria) del turno vespertino de una Escuela Secundaria General, en el municipio de Eduardo Neri en el estado de Guerrero. Los antecedentes académicos básicos considerados para que se involucraran en la exploración, fue el trabajo previo con patrones que se articulan a sucesiones lineales. El análisis al contenido curricular, evidenció que desde primaria habían tenido experiencias en el trabajo con patrones figurales y numéricos, asociados a sucesiones lineales. Experiencias que se relacionan al trabajo con propiedades de las sucesiones tales como la recursividad y la correspondencia; y el uso de distintas representaciones de las sucesiones, como las verbales, numéricas y gráficas.

4.2. Tareas y contexto

Se diseñaron tres tareas, que refieren a sucesiones de patrones figurales relacionadas a una sucesión lineal numérica, cuyos términos particulares y generalización pueden formularse a través de una expresión general de la forma $a_n = c_0 n + c_1$ con $n \in N$. En las tareas, se dan distintos valores para c_1: en la tarea uno $c_1 = 0$, en la dos $c_1 > 0$ y en la tres $c_1 < 0$.

Su diseño consideró la revisión al contenido curricular sobre sucesiones lineales y el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). De la revisión se reconocen elementos de las sucesiones lineales presentes en el currículo de matemáticas en la educación básica, que refieren a la estructura conceptual, los sistemas de representación, los sentidos y modos de uso, así como la demanda cognitiva. Se recurre al modelo de razonamiento inductivo para estructurar las tareas, de manera que se plantearon para que los estudiantes las resuelvan trabajando de lo particular a lo general.

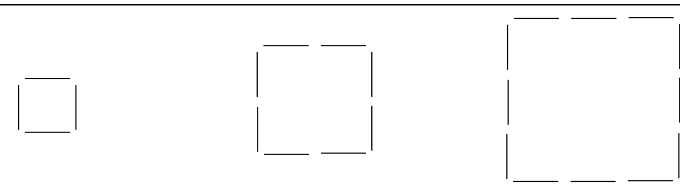
En las tareas, se implican elementos del contenido matemático con los que los estudiantes están familiarizados desde su formación previa, como los términos particulares de la sucesión; las secuencias numéricas, el trabajo con patrones figurales y los sistemas de representación verbal, gráfico y numérico. También se integran cuestiones en las que aún no se habían involucrado, como son: los términos generales de una sucesión, la relación entre término general y términos particulares y el sistema de representación algebraico.

La demanda cognitiva planteada a los estudiantes en estas tareas, es la generalización de patrones. Se plantearon de modo que implique para los estudiantes, el uso del razonamiento inductivo en el proceso de solución. En ellas se les demanda determinar términos particulares cercanos, términos particulares lejanos y el término general de la sucesión correspondiente. Esto implica de manera implícita a los pasos del razonamiento inductivo, trabajo con casos particulares, formulación de conjeturas y generalización. Del mismo modo, que expresen sus conjeturas utilizando las representaciones verbal y algebraica. Implicando la representaciones numérica y pictórica de manera implícita. Se les exige a los estudiantes la formulación de una generalización de patrones, utilizando una representación algebraica, dos aspectos que, de acuerdo a la revisión curricular no se les ha demandado.

El contexto de las tareas son patrones figurales construidos de una manera bien definida. Consisten de etapas cuyas partes podrían interpretarse como configuradas de cierta manera, donde la percepción visual juega un rol importante. Se plantearon en un ambiente de lápiz y papel. A continuación, se presentan las tareas que fueron aplicadas a los estudiantes de séptimo grado.

Tarea 1

Tabla 4.1.
Patrón, generalización y cuestiones que se demandan en la Tarea 1.

Patrón	 Figura 1 Figura 2 Figura 3
Cuestiones planteadas	a) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura 6 de la secuencia? ¿Cuántos el de la figura 15? Justifica tu respuesta para cada caso. b) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura 240? Argumenta tu respuesta. c) Escribe un mensaje a un compañero donde le expliques cómo puede determinar rápidamente el número de palillos con los que se forman el contorno de cualquier figura de la secuencia. d) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.
Generalización	$a_n = 4n$,

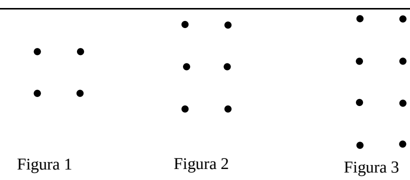
La tarea corresponde a una sucesión de patrones figurales asociada a una sucesión lineal de orden uno cuyo término general es $a_n = 4n$, el caso cuando $c_1 = 0$. El patrón figural de esta tarea fue tomado del libro *Lessons for algebraic thinking: Grades 6-8. Math Solutions (*Lawrence & Hennessy, 2002) y las cuestiones planteadas fueron diseñadas por el investigador.

Esta tarea consta de cuatro cuestiones que orientan al estudiante a establecer una generalización a través de patrones figurales utilizando el razonamiento inductivo. La primera cuestión ubica al estudiante a determinar dos términos particulares cercanos de la sucesión. Proceso que puede implicar, que reconozca un patrón recursivo. La segunda cuestión demanda al estudiante determinar un término particular lejano de la progresión aritmética, actividad que puede provocar que los estudiantes formulen una conjetura o generalización antes de que se les demande de manera explícita. La tercera orienta al estudiante a establecer una conjetura o generalización y formularla de manera verbal. La última exige al estudiante el establecimiento de una generalización algebraica. Las cuestiones planteadas que conforman las cuatro tareas aplicadas involucran una estructura similar.

Se espera que los estudiantes reconozcan el patrón de distintas maneras, que pueden involucrar al incremento constante entre los términos de la sucesión o a la forma que se estructuran los componentes de la figura. A partir de ello, que construyan una estructura matemática que les permita determinar todos los términos particulares de la sucesión, para luego verificarla y establecer una estructura matemáticamente plausible, que se valida como una generalización. Las figuras que componen el patrón figural de esta tarea pueden promover que el estudiante realice la generalización basándose en la estructura multiplicativa asociada al perímetro de un cuadrado. La estructura algebraica de la sucesión, $a_n = 4n$ puede incidir a que los estudiantes consideren estrategias que impliquen relaciones de proporcionalidad para formular la generalización.

Tarea 2

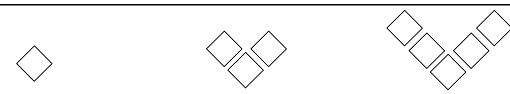
Tabla 4.2.
Patrón, generalización y cuestiones que se demandan en la Tarea 2.

Patrón	
Cuestiones planteadas	a) ¿Cuántos puntos se necesitan para formar la figura 4 de la secuencia? ¿Cuántos forman la figura 16? ¿Y la figura 144? Justifica tu respuesta para cada caso. b) Escribe un mensaje a tus compañeros donde les expliques cómo pueden encontrar rápidamente la cantidad de puntos que forman cualquier figura de la secuencia. c) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.
Generalización	$a_n = 2n + 2$

La tarea corresponde a una sucesión de patrones figurales asociada a una progresión aritmética de orden uno cuyo término general es $a_n = 2n + 2$, el caso donde $c_1 > 0$. El patrón figural ha sido tomado de *Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria* (Callejo & Zapatera, 2014). La primera cuestión ubica al estudiante a determinar dos términos particulares y cercanos, además de un término lejano de la progresión aritmética. Esto puede implicar, que reconozca un patrón recursivo y/o que formulen un método útil para determinar los términos de la sucesión. La segunda sitúa al estudiante a formular una conjetura o generalización de manera verbal. La última demanda al estudiante el establecimiento de una generalización algebraica.

Tarea 3

Tabla 4.3.
Patrón, generalización y cuestiones demandadas en la Tarea 3.

Patrón	 Figura 1 Figura 2 Figura 3
Cuestiones planteadas	a) ¿Cuántos rombos forman las figuras 4 y 5? ¿Cuántos forman la figura 17? Justifica tu respuesta en cada caso. b) ¿Cuántos rombos forman la figura 211? Argumenta tu respuesta. c) ¿Cuántos rombos forman la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.
Generalización	$a_n = 2n - 1$

La tarea corresponde a una sucesión de patrones figurales asociada a una sucesión lineal cuyo término general es $a_n = 2n - 1$, el caso cuando $c_1 < 0$. El patrón figural correspondiente ha sido tomado de *Visual templates in pattern generalization activity* (Rivera, 2010) y las cuestiones planteadas fueron diseñadas por el investigador. Se han considerado las estrategias y estructuras que pueden presentarse basados en la figura que compone el patrón, así como también los obstáculos cuando los estudiantes se enfoquen en la relación de recurrencia. De acuerdo al orden de aplicación de las tareas, en este punto los estudiantes están más familiarizados con las mismas.

Se compone de tres incisos, el primero implica al estudiante en determinar tres términos particulares de la sucesión. Proceso que puede implicar, que reconozca un patrón recursivo. El segundo establece determinar un término particular lejano de la sucesión, lo que puede provocar que los estudiantes formulen una conjetura o generalización antes de que se les demande. El último exige el establecimiento de una generalización algebraica. La generalización de manera verbal no se demanda de manera explícita en esta tarea, sin embargo es posible que se presente.

4.3. Aplicación de las tareas

Los estudiantes resolvieron las tareas en un ambiente de lápiz y papel. Se desarrollaron en cuatro sesiones de 50 minutos, al inicio del primer semestre del ciclo escolar 2017-2018. En la aplicación, participaron tres investigadores, cumpliendo el rol de observadores. Los datos toman como base las producciones escritas de los estudiantes, consistentes en las justificaciones a las respuestas de cada tarea y además se tomaron en cuenta las notas de campo a partir de las observaciones realizadas por los investigadores a cargo de la aplicación.

4.4. Análisis de datos

En el análisis cualitativo de los datos el modelo de Cañadas y Castro (2007) permitió reconstruir el proceso de razonamiento inductivo que evidencian los estudiantes. Se identifican y describen los pasos del modelo a los que recurren al resolver las tareas.

Se distingue que un estudiante se involucra en *trabajo con casos particulares* cuando se ocupa de determinar términos particulares de la sucesión correspondiente, ya sea de manera numérica, figural o verbal. Se implican en *organización de casos particulares* cuando ordena los casos particulares de alguna manera, ya sea con tablas, columnas o en filas. Se distingue que se involucran en la *identificación de patrones* cuando muestran evidencia que reconocen la forma en que varían los valores de la sucesión (por ejemplo: "aumenta de dos en dos"). Se implica en *formulación de conjeturas*, cuando expresan una proposición que les permite determinar todos los términos particulares de la sucesión, y no han sometido dicha proposición a verificación. Realizan una *justificación de las conjeturas,* cuando expresan razones por las cuales su conjetura es verdadera. Una *generalización* se distingue cuando la conjetura que formuló el estudiante ha sido verificada con la exploración mediante casos particulares. El paso de la *demostración* no se presenta en el proceso de los estudiantes ya que no ha sido demandada por las tareas que se plantearon.

Los datos empíricos, provienen de las producciones escritas de los estudiantes en el proceso de solución de las tareas. Para organizar la información, a los estudiantes se les codificó como E1, E2, E3,....E15.

Capítulo 5

Resultados

El objetivo del estudio reportado aquí, fue analizar el proceso de razonamiento inductivo que evidencian estudiantes de séptimo grado (primer grado de secundaria), al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales en el marco de las sucesiones lineales, así también, los sistemas de representación en los que se apoyan en ese contexto. Como base teórica, se consideró el modelo de Cañadas y Castro (2007), los sistemas de representación (Cañadas, 2007; Lupiañez, 2016) y los tipos de generalización (Dörfler, 1991; Rivera, 2010). Los hallazgos obtenidos se presentan bajo dos temas: (1) Pasos del razonamiento inductivo que siguieron los estudiantes al resolver las tareas y los tipos de generalización que emergen en el proceso; y (2) Los sistemas de representación que articulan a su forma de razonar.

5.1. Razonamiento inductivo

Se analizan los pasos del razonamiento inductivo que sigue la población participante en el proceso de solución de las tres tareas descritas en el capítulo 4. Se identifica qué pasos del proceso de razonamiento inductivo siguen, se describe la manera en que se involucran en estos, los tipos de generalización que aparecen y las representaciones a las que recurren. Los resultados se presentan por tarea.

5.1.1 Razonamiento inductivo en la tarea 1

La tarea 1 involucra a una sucesión de patrones figurales, asociada a una sucesión numérica cuyo término general es $a_n = 4n$ (véase Capítulo 4). La resolvieron todos los estudiantes. De la evidencia empírica, se reconoce que, puesto que la tarea se los demanda, todos trabajan con casos particulares, tres de ellos se involucran en la organización de estos casos. Doce identifican el patrón en la secuencia, reconociendo las regularidades de distintas formas. Todos formulan conjeturas sin justificarlas, y las expresan en términos de una estructura aritmética, algunos apoyados del lenguaje verbal, y otros, del numérico. Se evidencia que diez de estos casos, examinan la conjetura a través de la exploración con casos particulares (cercanos y lejanos) y con ello, verifican que se cumple para otros términos de la sucesión. Esta es la evidencia empírica de que generalizaron. De otra parte, se observa que ninguno se involucra en el paso de la demostración, lo que es entendible, en razón de que la tarea no se los demanda. La tabla 5.1., organiza los pasos del razonamiento inductivo que los participantes del estudio evidencian en esta tarea.

a) Trabajo con casos particulares

La tarea demanda la determinación de términos particulares (cercanos y lejanos) del patrón, exigencia que implica a los estudiantes en el trabajo con casos particulares, de ahí que es uno de los pasos del razonamiento inductivo en el que todos se involucran. De ellos, diez exploran únicamente los casos planteados, y cinco (E1, E2, E10, E12 y E15), trabajan con casos adicionales. La forma de proceder que siguen, se sustenta del conteo. Con base en ello, reconocen que en cada etapa, la figura aumenta cuatro palillos respecto de la que se ubica en la previa, esta es evidencia empírica de la relación de recurrencia (Figura 5.1). El incremento en el número de palillos, una mayoría lo expresa a través del lenguaje común, el resto, sustentados de lenguaje común y numérico, implicando así, a la representación verbal y a la numérica simple.

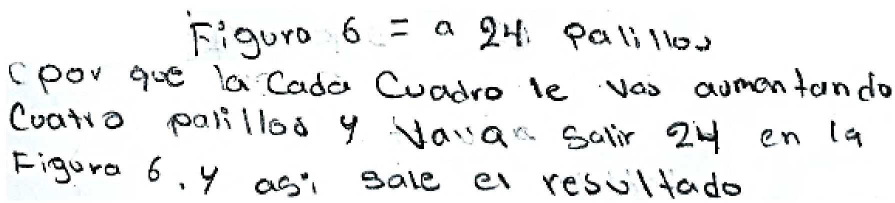


Figura 5.1. Trabajo con casos particulares de E8 utilizando representación numérica.

Se observa además, que cuatro estudiantes que se apoyan de la representación numérica, también usan la de tipo pictórico (E1, E6, E10 y E11), fundamental para ellos, en el sentido de que les permite reconocer que el número de palillos que conforma cada lado de los cuadrados, se corresponde con el número de la figura, evidencia empírica de una relación de correspondencia. Quienes usan este tipo de representación en este paso, se remiten a ella, al trabajar con casos particulares cercanos consecutivos (Figura 5.2). Para casos particulares lejanos, se apoyan de la representación numérica. Ello, por el tiempo y trabajo que conlleva el representar los cuadrados, por ejemplo, cuando se trata de casos donde la figura es la 240. De manera que el situarlos a trabajar con casos lejanos, de algún modo los obliga a cambiar el lenguaje al que recurren para expresar sus procedimientos.

Tabla 5.1.
Pasos del razonamiento inductivo que evidencian los estudiantes en la tarea 1.

	Pasos del razonamiento inductivo						
Estudiante	**Trabajo con casos particulares**	**Organización de casos particulares**	**Identificación de patrones**	**Formulación de conjeturas**	**Justificación de las conjeturas**	**Generalización**	**Demostración**
E1	✓		✓	✓		✓	
E2	✓	✓	✓	✓		✓	
E3	✓		✓	✓		✓	
E4	✓		✓	✓		✓	
E5	✓			✓			
E6	✓		✓	✓		✓	
E7	✓		✓	✓		✓	
E8	✓		✓	✓		✓	
E9	✓			✓			
E10	✓		✓	✓		✓	
E11	✓		✓	✓		✓	
E12	✓	✓	✓	✓			
E13	✓		✓	✓			
E14	✓			✓			
E15	✓	✓	✓	✓		✓	
Total	15	3	12	15	0	10	0

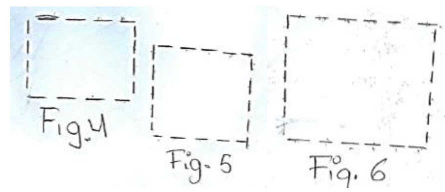


Figura 5.2. Uso de una representación pictórica por E1 al trabajar con casos particulares.

En general, en el trabajo con casos particulares, los estudiantes se apoyan de tres tipos de representaciones: pictórica, numérica simple y verbal. La representación pictórica, en la exploración con casos cercanos; la numérica y verbal para casos lejanos y cercanos.

b) Organización de casos particulares

Si bien la organización de casos particulares no es parte de las demandas de la tarea, algunos estudiantes (E2, E12 y E15) los organizan. Este es uno de los pasos del razonamiento inductivo que se manifiesta con menor frecuencia. La hipótesis, es que se debe a que una mayoría formula conjeturas sin recurrir a la exploración de varios casos particulares, entonces la necesidad de organizarlos es mínima. Uno de quienes se involucran en ese paso (E12), organiza los casos en dos filas, una correspondiente al número de figura y otra al número de palillos que la conforman (Figura 5.3). En este caso, la organización de los casos favorece el reconocimiento del incremento constante entre las etapas del patrón. La forma de estructurar los datos, implica una representación de tipo tabular.

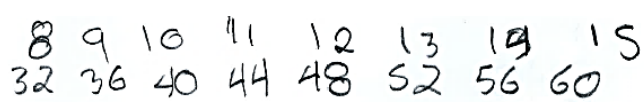


Figura 5.3. Organización de casos particulares en una tabla por E12.

E2 y E15 organizan los casos relacionando el número de figura y su correspondiente número de palillos, a través del signo igual (Figura 5.4). Si bien este signo indica relaciones de equivalencia, el uso que le dan los estudiantes refiere a la relación de correspondencia entre el número de figura y el número de palillos en la misma. La manera en que disponen los datos, implica el uso de una representación numérica simple (E15) y verbal (E2).En general, las representaciones involucradas en la organización de casos particulares son la tabular y numérica simple. Se observa que la organización de los casos, favorece el reconocimiento de distintos tipos de relaciones entre cantidades, como la de recurrencia y de correspondencia.

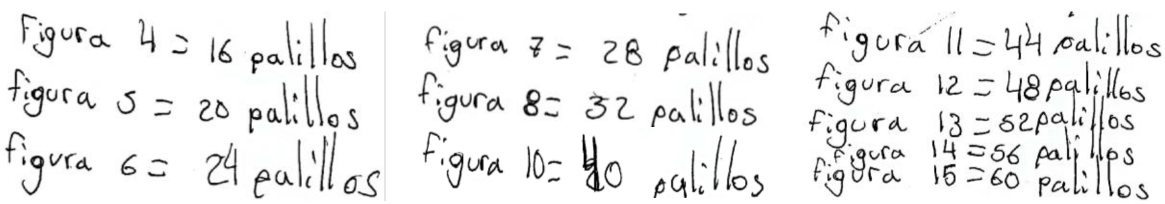


Figura 5.4. Organización de casos particulares por E15, implica una relación de correspondencia.

c) Identificación de patrones

La identificación de patrones por los estudiantes en esta tarea, se reconoce al momento en que visualizan el todo, esto es, la secuencia de figuras. Desde lo figural, reconocen que hay un comportamiento que se mantiene, el cual se remite al crecimiento del patrón. En este sentido, doce de los quince estudiantes, evidencian que se involucraron en este paso, nueve reconocen que el patrón “aumenta cuatro” (E1, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E12 y E15), mientras que tres que el número de figura se repite cuatro veces (E2, E11 y E13). Identifican estas regularidades con formas de proceder diferenciadas, lo que permite presentarlos por casos.

Caso 1: Análisis del número total de partes que componen el todo

Seis estudiantes se ubican en este caso (E1, E6, E7, E8, E12 y E15). Su razonamiento inicial se sustenta del conteo del número total de palillos que conforman las figuras de cada etapa. De ahí, reconocen que es creciente y que ese crecimiento es constante, el cual manifiestan en lenguaje común, como sigue: E6 y E7 afirman que “es una sucesión que va de 4 en 4” (Figura 5.5.); E1 y E8, enuncian que el número de palillos “aumenta cuatro”; E12 y E15 consideran que “se le va sumando cuatro palillos” en cada etapa. Esta evidencia empírica, alude a la relación de recurrencia de la sucesión. De otra parte, se observa que conforme progresan en su intervención en la tarea, abandonan esta forma de proceder (conteo de palillos), en particular, una vez que se involucran en el trabajo con casos particulares lejanos; ya que para ello, recurren a un método que les permite establecer los términos particulares de manera más eficiente.

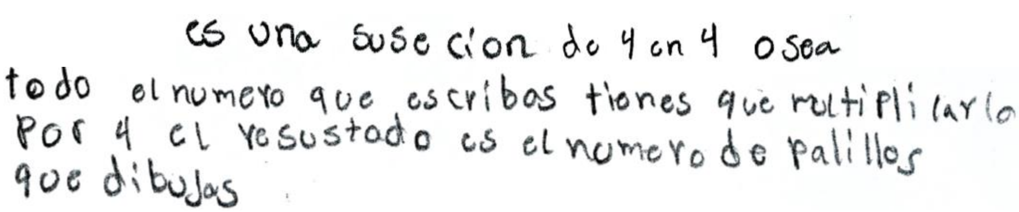


Figura 5.5. Identificación de patrones en E6.

Caso 2: Análisis del número palillos que incrementa por lado el cuadrado

E3, E4 y E10 se ubican en este caso. Parten de la observación de las figuras, luego cuentan los palillos que hay en cada lado de los cuadrados que conforman el patrón figural. A partir de este conteo, reconocen que cada lado en cada uno de cuadrados, aumenta un palillo cuando se avanza de una etapa del patrón a otra. Expresan este incremento apoyados del lenguaje común, así, enuncian que los palillos "aumentan cuatro", en cada etapa de la secuencia de figuras. A partir de esta evidencia, se reconoce que los estudiantes observan un crecimiento constante entre los términos de la sucesión, desde otro modo de razonar.

Caso 3: Relación de correspondencia del número de figura de la etapa, con el número de palillos de cada lado del cuadrado

Se ubica a dos estudiantes (E11 y E13) en este caso. Su razonamiento se basa en el conteo de palillos por lado. Es así que observan, que el número de figura en cada etapa se corresponde con el número de palillos que forman cada lado del cuadrado, evidencia de una relación de correspondencia. De ahí derivan, que el total de palillos que forman la figura, se obtiene de considerar cuatro veces al número de la figura, algunos suman, otros multiplican. Es decir, reconocen que el número de figura se repite cuatro veces en cada etapa del patrón figural.

Caso 4: El número de palillos es cuatro veces el número de figura.

Este caso involucra a E2, quien parte de la relación de correspondencia entre número de figura y número de palillos que forman su contorno y reconoce que el número total de palillos en el contorno es cuatro veces el número de figura. Lo que evidencia que reconoce que el número de palillos es un múltiplo del número de figura en todas las etapas del patrón.

d) Formulación de conjeturas

En la tarea exige la determinación del número de palillos que forman las figuras de distintas etapas de la secuencia, exigencia que implica al estudiante en la formulación de una conjetura. Se les pide además, escribir un mensaje donde expliquen su forma de proceder para obtener el número de palillos en cualquier figura, cuestión que los ubica a expresar su conjetura recurriendo al lenguaje común. En este sentido, una conjetura se reconoce cuando el estudiante construye una estructura matemática que desde su perspectiva, le permite determinar el número de palillos de una figura en una etapa lejana o cercana, sin validarla. Catorce estudiantes determinan que deben multiplicar por cuatro o sumar cuatro veces el número de figura para obtener el número de palillos en las etapas del patrón, mientras que E14 afirma que debe multiplicar por dos. Todos los estudiantes formulan conjeturas, recurriendo a distintas formas de proceder, lo que permite distinguirlos en casos. Quienes las formulan, se apoyan del lenguaje común o del simbólico o bien, de su combinación.

Caso 1: Conjetura basada en el incremento entre cada etapa del patrón

Por la forma de proceder de seis estudiantes (E1, E6, E7, E8, E12 y E15), se les ubica en este caso. En un principio, se enfocan en "sumar cuatro" a cada término para obtener el siguiente, procedimiento que llevan a cabo para determinar los casos particulares cercanos que se demandan. Abandonan esta forma de proceder y formulan su conjetura "multiplicar por cuatro", el número de figura, cuando se les demandan casos particulares lejanos (Figura 5.6). Aquí, la exigencia de términos particulares lejanos es lo que provoca que los estudiantes cambien su forma de proceder y establezcan la conjetura.

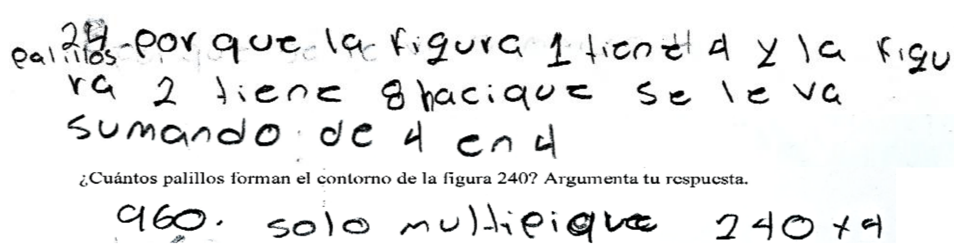


Figura 5.6. Cambio en la forma de proceder y conjetura "multiplicar por 4" en E12.

En este caso, la identificación de patrones se articula a la formulación de conjeturas, ya que al reconocer que la sucesión "aumenta de cuatro en cuatro", los estudiantes conjeturan que se debe "multiplicar por cuatro" para obtener los términos de dicha sucesión. Su formulación, se basa en que el número que va aumentando (o que se repite), es el que debe multiplicarse por el número de figura. Los estudiantes expresan la conjetura por medio de una estructura multiplicativa que corresponde a $n \times 4$, con n que representa el número de figura y 4 es el incremento que reconocieron. Estructura que expresan en algunos casos, recurriendo al lenguaje común y de forma aritmética (E1, E7, E12 y E15); y en otros únicamente de manera aritmética (E6 y E8). Esto implica a las representaciones verbal y numérica simple.

Caso 2: Conjetura basada en la relación de correspondencia entre número de figura y número de palillos

E2 y E5 se ubican en este caso. Analizan los casos particulares planteados de la tarea. En ese proceso, cambian de la representación pictórica a una numérica. Reconocen una relación entre el número de figura y el número de palillos que forman su contorno. Identifican que el número de figura multiplicado por cuatro, es igual al número de palillos que forman el contorno de la figura. Seguidamente, formulan la conjetura, “se multiplica (el número de figura) por cuatro”, para determinar el número de palillos que forman su contorno (Figura 5.7). En estos casos, se evidencia que los estudiantes reconocen de manera implícita, una relación de correspondencia entre número de figura y número de palillos, lo que favorece la formulación de la conjetura. Ambos la formulan en términos de una estructura multiplicativa tipo $n \times 4$, con n que representa el número de figura y 4 la cantidad que deben multiplicar por el número de figura, para obtener el total de palillos. La conjetura se expresa en términos aritméticos. En este caso, el tipo de representación implicada consiste de la numérica simple.

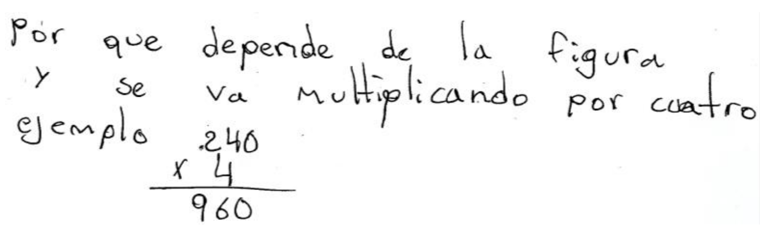


Figura 5.7. Conjetura de E2 basada en la relación de correspondencia.

Caso 3: Conjetura basada en la figura uno como unidad (objeto entero)

Este caso implica a E3, E4 y E10, quienes luego de analizar las etapas dadas en el patrón figural, se ubican en la uno, en la que reconocen que su contorno se forma por cuatro palillos. En seguida, asumen esta figura como unidad, para determinar los palillos que conforman otras, en etapas cercanas y lejanas. Por ejemplo, para determinar el número de palillos de la figura cinco, multiplican el número de palillos de la figura uno por cinco, es decir, 4×5 (Figura 5.8). Los estudiantes parten del razonamiento que $figura\,1 \times 5 = figura\,5$, implica que $palillos\ en\ figura\,1 \times 5 = palillos\ en\ figura\,5$. Esta forma de proceder se reconoce como objeto entero (whole object en inglés) en Jurdak & El Mouhayar (2014). Los tres estudiantes expresan su conjetura, tanto en lenguaje común como de forma aritmética, empleando una estructura multiplicativa $n \times 4$, con n que representa el número de figura y 4 el número de palillos en la figura uno. Las representaciones a las que se recurren en este caso, son la numérica simple y la verbal.

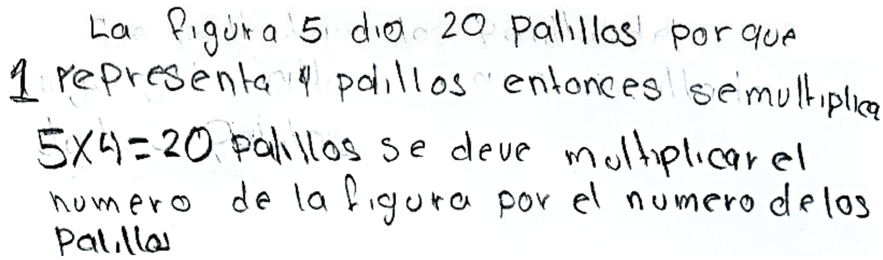


Figura 5.8. Conjetura de E10, que se basa en la figura uno como unidad.

Caso 4: Conjetura basada en la determinación del perímetro de un cuadrado

En este caso se ubican los estudiantes E9, E11 y E13, cuya forma de proceder se asocia a la determinación del perímetro de un cuadrado, considerando cada palillo como una unidad de medida. Reconocen que en cada cuadrado, el número de palillos que forma cada uno de sus lados, se corresponde con el número de etapa. En el caso de E11, afirma que, de acuerdo al número de figura, tiene que “poner” cierto número de palillos en cada lado del cuadrado. Entonces para determinar el número total de palillos que forma cada figura, el número de figura se debe multiplicar por cuatro (o sumar cuatro veces). Por ejemplo, la figura tres, cuenta con tres palillos en cada uno de sus cuatro lados, entonces en total tiene 3×4 o bien, $3 + 3 + 3 + 3$ palillos en su contorno.

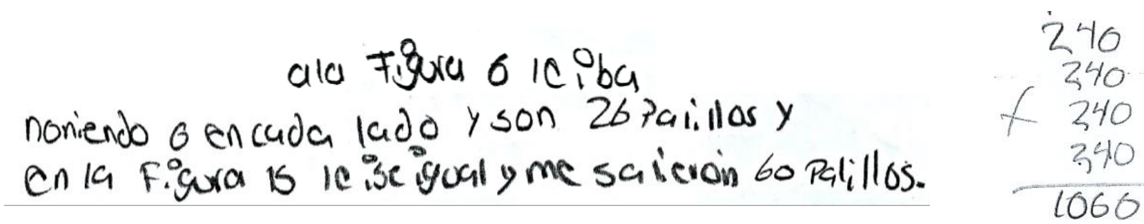


Figura 5.9. Conjetura de E11 expresada con una estructura aditiva.

Se reconocen dos maneras de expresar esa conjetura. E9 y E13 la expresan en términos de una estructura multiplicativa de la forma $n \times 4$ donde n representa el número de figura y 4 el número de veces que el número de figura se repite (número de lados del cuadrado). Para esto recurren a una representación numérica. Por su parte, E11 la expresa a través de una estructura aditiva, que corresponde a $n + n + n + n$, donde n representa el número de figura (Figura 5.9). En su caso, recurre a la representación verbal y la numérica simple.

Caso 5: Conjetura basada en el análisis de las dos primeras figuras en el patrón

En el caso de E14, se reconoce que su conjetura no se corresponde con el comportamiento del patrón figural. Su procedimiento consiste en contar los palillos que componen cada figura sólo para las dos primeras etapas dadas de la secuencia, y seguidamente las expresan de manera numérica. Su conjetura consiste de lo siguiente: "multiplicar por dos" (Figura 5.10). Su razonamiento remite a considerar que para saber el número de palillos en la etapa 2 del patrón, se procede multiplicando por dos el número de palillos en la etapa 1. Esta estructura, multiplicativa, la expresa a través del lenguaje común. Sin embargo, a partir de esta conjetura no es posible formular una generalización.

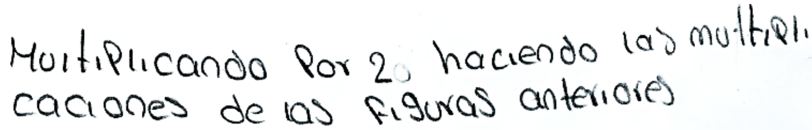


Figura 5.10. Conjetura de E14, empleando una estructura multiplicativa.

e) Justificación de conjeturas

En la tarea, la frase "argumenta tu respuesta" está implícita a la justificación de las conclusiones a las que arriban los estudiantes, entre ellas, lo que se reconoce como su conjetura. No obstante, este paso no se demanda de manera explícita en su planteamiento. En diez casos (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E11 y E15), se observa que verifican que su conjetura puede aplicarse a ciertos casos y consideran que era válida sin necesidad de justificación, por ello continúan utilizándola sin proporcionar argumentos. La verificación de una conjetura no se considera justificación, ya que no implica enunciar argumentos para convencer de su veracidad. En los otros cinco casos, se observa que no verifican su conjetura ni proporcionan argumentos.

f) Generalización

La tarea sitúa al estudiante a determinar el número de palillos que forman la figura n, cuestión que los remite a expresar una generalización recurriendo al lenguaje algebraico. En este paso, la conjetura se verifica a partir de casos particulares cercanos o lejanos; y pasa de ser una proposición a una generalización. De los quince estudiantes que formularon conjeturas, diez las verifican, lo que se constituye en una generalización (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E11 y E15). Verifican su conjetura a través de la exploración con casos particulares lejanos y cercanos; y formulan el término general que conlleva a determinar todos los términos particulares de la sucesión correspondiente. Es decir, establecen una regla que les permite determinar cuántos palillos forman cada figura del patrón y que se aplica a todos los casos en esta tarea particular.

Se reconoce que el número de estudiantes que construye una generalización es menor al que formula una conjetura. Se explica, porque no las verifican o bien, formulan expresiones distintas a aquellas que generan los términos particulares de la sucesión. En nueve casos, expresan sus generalizaciones en forma de una estructura aritmética de tipo multiplicativa $n \times 4$ y en otro como estructura aditiva $n + n + n + n$, en donde n representa el número de figura y 4 es una constante que determinan a partir de distintos razonamientos. Estructura que expresan en lenguaje común (E1 y E4), aritmético (E6 y E11), de ambas maneras (E2, E3, E7y E10), o recurriendo al lenguaje algebraico (E8 y E15). Lo que implica el uso de la representación verbal (Figura 5.11), numérica simple (Figura 5.12) y algebraica en su forma polinómica funcional (Figura 5.13).

En algunos casos, si bien el estudiante emplea la letra n al formular la estructura aritmética que ha establecido, le asigna un valor particular, de manera que la representación se considera de tipo numérico. Es tipo algebraico, cuando el estudiante reconoce que n representa el número de figura dentro de la estructura matemática, y que además, este n puede tomar cualquier valor.

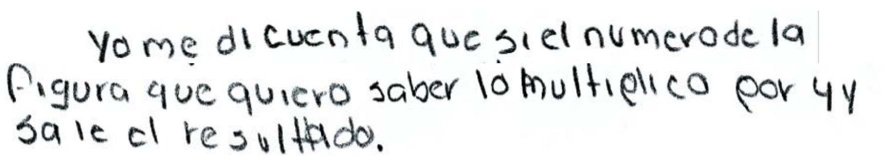


Figura 5.11. Generalización de E15 expresada en forma verbal.

Las generalizaciones que establecen, se sustentan de la estructura aditiva y/o multiplicativa, lo que depende de su noción de la multiplicación como una suma iterada, de acuerdo a su nivel de abstracción. Por la forma en que se manifiesta la estructura matemática, se categorizan dos tipos de generalización en esta tarea: aditiva constructiva no estándar y multiplicativa constructiva estándar (véase tabla 5.2). Estos tipos de generalización están ligadas a la forma en que se analiza la organización de las figuras del patrón y en la que se expresa la estructura matemática establecida.

Tabla 5.2.
Tipos de generalizaciones según la estructura matemática en la tarea 1.

Tipo de generalización	**Descripción**	**Inferencia simbólica**	**Ejemplo**
Multiplicativa constructiva estándar	Estructura matemática multiplicativa y aditiva, que se basa en el análisis de las figuras en el patrón como compuestas de partes no superpuestas. Los términos en la expresión aritmética están de forma simplificada	$a_n = n \times 4$ Donde $n = número\ de\ figura$ $a_n = número\ de\ palillos\ en\ la\ figura$	Nx4
Aditiva constructiva no estándar	Estructura aritmética aditiva, basada en el análisis de las figuras en el patrón como compuestas de partes no superpuestas. Los términos en la expresión aritmética están en forma expandida, no simplificada	$a_n = n + n + n + n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $a_n = número\ de\ palillos\ en\ la\ figura$	240 de cada lado y me salieron 1060

De otra parte, se reconoce que todas las generalizaciones que construyen quedan a nivel empírico, ya que las formas de razonamiento que emplean para establecerlas, se basan en la observación de similitudes en las etapas del patrón y en procesos de verificación empíricos, sin tomar en cuenta propiedades y/o conceptos matemáticos. Este tipo de generalización, se articula a las formas de razonamiento de las que se valen los estudiantes para establecerlas.

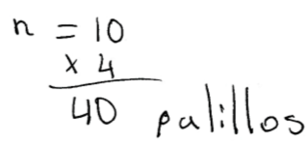


Figura 5.12. Generalización en forma numérica de E2.

Figura 5.13. Generalización en forma algebraica de E15.

g) Demostración

Ningún estudiante se involucra en procesos demostrativos en esta tarea. Esto se explica, porque en ningún momento se le demanda. De otra parte, dada la experiencia académica de los estudiantes en su nivel inmediato anterior (recién egresados de sexto grado de primaria), se remite a la construcción de generalizaciones desde el reconocimiento de patrones recursivos y de correspondencia en el marco de las sucesiones lineales, objeto de estudio en esta investigación.

Sistemas de representación en la tarea 1

En esta tarea, los estudiantes recurren a cinco diferentes representaciones para exponer sus procedimientos: numérica simple, tabular, pictórica, algebraica y verbal. La numérica simple y la tabular forman parte del sistema de representación numérico. La pictórica del sistema gráfico. El sistema de representación algebraico se utilizó en su forma polinómica funcional. El sistema verbal refiere al lenguaje común. En total se emplearon los cuatro sistemas: numérico, gráfico, algebraico y verbal. Las representaciones y sistemas de representación a los que recurren los estudiantes se organizan en la tabla.

a) Sistema de representación numérico

Uno de los sistemas de representación empleados en esta tarea es el numérico, del que se involucran la representación numérica simple y la tabular. Los estudiantes recurren a las dos representaciones en su proceso de razonamiento inductivo, implicándolas en los diferentes pasos.

La representación numérica simple la emplean todos los estudiantes. Los pasos del razonamiento inductivo implicados en su uso, son el trabajo con casos particulares, formulación de conjeturas y la generalización. En el trabajo con casos particulares, se utiliza para representar las etapas cercanas y lejanas del patrón que exploran. En la tarea se plantean las tres primeras etapas del patrón en forma figural, la mayor parte de los estudiantes cambian a una representación numérica para trabajar con los términos siguientes del patrón. Ello da cuenta de una conversión entre sistemas de representación, del sistema numérico al gráfico. La formulación de generalización, como parte de las demandas de la tarea, implica el uso del lenguaje algebraico, y al no tener experiencia con este tipo de lenguaje la mayoría de estudiantes recurren a la representación numérica simple para expresar la estructura aritmética.

Un estudiante es quien se apoya en la representación tabular. El paso del razonamiento inductivo en el que se implica es la organización de casos particulares. En esta tarea, la sistematización de los datos apoyados de este tipo de representación favorece el reconocimiento de un incremento constante entre las etapas del patrón. Evidencia que identifica una relación de recurrencia.

Tabla 5.3.
Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 1.

	Sistemas de representación								
	Numérico			**Gráfico**			**Algebraico**		**Verbal**
Paso del razonamiento inductivo	Numérica simple	Tabular	Descomposición aritmética	Recta numérica	Plano cartesiano	Pictórico	Polinómica funcional	Ley de recurrencia	
Trabajo con casos particulares	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15					E1, E6, E10, E11			E2, E4, E5, E8
Organización de casos particulares	E2, E15	E12							E2
Identificación de patrones	E2, E3, E4, E10, E11,								E1, E5, E6, E7, E8, E9, E12, E13, E14, E15
Formulación de conjeturas	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E15								E1, E3, E4, E7, E10, E11, E12, E14, E15
Justificación de conjeturas									
Generalización	E2, E3, E6, E7, E10, E11						E8 E15		E1, E2, E3, E4, E7, E10
Demostración									

En esta tarea, el sistema de representación numérico es empleado en el trabajo con etapas lejanas y cercanas del patrón, para representar el número de figura y el número de palillos en la misma, en lugar de las representaciones verbal y pictórica. Así como también, para formular las estructuras aritméticas que permiten a los estudiantes determinar el número total de palillos en las etapas. En algunos casos, este sistema de representación, favorece la identificación del patrón recurrente.

b) Sistema de representación gráfico

Este sistema de representación es uno de los menos utilizados, del que incluyen sólo las de tipo pictórica. Se implica en el trabajo con casos particulares.

Cuatro estudiantes se apoyan de la representación pictórica al trabajar en etapas cercanas del patrón. Un cambio en el tipo de representación que venían usando para determinar el número de palillos que forman las figuras, se observa al momento en que se sitúan a trabajar con etapas lejanas del patrón. En particular, para las etapas 15 y 240 que demanda la tarea. La hipótesis que se plantea, es que se debe al tiempo que debían invertir en dibujarlas. En su lugar, se involucran en el trabajo con la representación numérica. Este cambio en representaciones, evidencia una conversión entre sistemas de representación, del gráfico al numérico.

En esta tarea, el sistema gráfico se emplea para representar etapas cercanas inmediatas del patrón. En algunos casos, la de tipo pictórico favorece que identifiquen una regularidad entre las etapas, como en el caso de la correspondencia entre el número de figura y número de palillos en sus lados. Lo que resulta útil en la construcción de estructuras matemáticas plausibles para determinar el número de palillos en cualquier etapa.

c) Sistema de representación algebraico

El sistema de representación algebraico también se usa con menor frecuencia, sólo se involucran las representaciones de tipo polinómica funcional, que aparecen en el paso de la generalización, articulado a la demanda en la tarea.

Dos estudiantes recurren al sistema algebraico, en su forma polinómica funcional, para expresar las estructuras aritméticas que establecen. La representación se considera de tipo algebraico ya que reconocen que n representa el número de figura dentro de la estructura matemática que construyen, y que es variante. Los estudiantes expresan la estructura aritmética de forma numérica, y cambian a expresarla en lenguaje algebraico cuando la tarea lo demanda. Este cambio de representaciones implica una conversión entre sistemas de representación, del numérico al algebraico.

El sistema algebraico se emplea por pocos estudiantes, para expresar las estructuras matemáticas que construyen en su generalización. Pocos recurren a este sistema de representación, se plantea la hipótesis que es debido a que aún no habían estudiado (o bien experimentado) este tipo de lenguaje. Dada su formación académica al momento de la intervención, la mayoría recurren a la representación numérica simple en la construcción de las estructuras aritméticas que establecen.

d) Sistema de representación verbal

Todos los estudiantes recurren al sistema de representación verbal, lo involucran en los casos siguientes: el trabajo con casos particulares, la identificación de patrones, la formulación de conjeturas y la generalización.

a) *Trabajo con casos particulares*. Se emplea en este paso para expresar etapas lejanas y cercanas del patrón.
b) *Identificación de patrones*. Los estudiantes reconocen las regularidades en las etapas del patrón figural y las describen empleando el lenguaje común, esto implica al sistema como un medio para evidenciar la identificación de patrones.
c) *Formulación de conjeturas y generalización*. Se involucra para expresar las estructuras aritméticas que permiten obtener el número de palillos de una figura en cualquier etapa del patrón. En algunos casos, se emplea tanto el sistema de representación verbal como el numérico para una enunciar la conjetura y/o generalización establecida, lo que evidencia la conversión entre sistemas de representación, tanto del numérico al verbal, como del verbal al numérico.

Lo que favoreció el que recurrieran al sistema de representación verbal, son las demandas de la tarea, que los involucran en la expresión de sus conjeturas por medio del lenguaje común, así como también en la argumentación de sus procedimientos.

Reflexiones sobre el trabajo con la Tarea 1

En esta tarea, el trabajo de los estudiantes se articula a los siguientes pasos de razonamiento inductivo: trabajo con casos particulares, identificación del patrón, formulación de conjeturas y generalización; con la organización de casos particulares en menor medida. Por cuanto a la justificación de conjeturas y demostración no se evidencian.

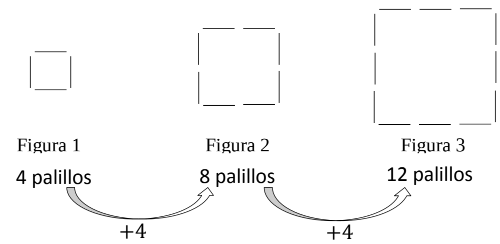
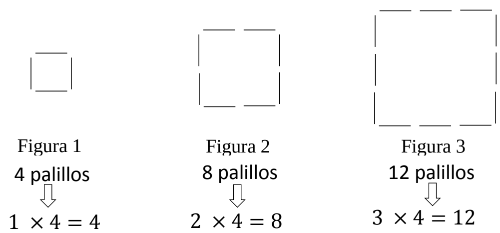
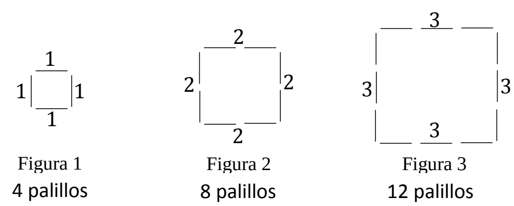
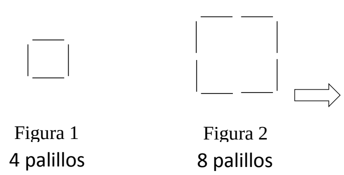
El trabajo con casos particulares, de manera pictórica y numérica, es esencial en el reconocimiento y análisis de las regularidades entre las etapas del patrón figural. La identificación del patrón es fundamental en la construcción y verificación de una estructura plausible y algebraicamente útil (como sostiene Rivera, 2010) en la determinación del número de palillos en cualesquiera de las etapas de la secuencia. En un primer momento, a modo de conjetura, que de validarla, se constituye en una generalización.

Los estudiantes se involucran en la formulación de conjeturas desde diversas formas de razonamiento, lo que permite analizarlos en cinco casos. De ellos, cuatro la verifican explorando con casos particulares, y así establecen una generalización. En el otro caso por su parte, la conjetura que formulan no permite determinar el número de palillos en las etapas del patrón correspondiente, de ahí que resulta imposible establecer una generalización. Los cinco casos se organizan en la Tabla 5.4.

Por cuanto a las representaciones utilizadas para expresar las conjeturas en esta tarea, son de tipo verbal y numérica simple. La de tipo verbal se articula a las demandas de la tarea, que implican a los estudiantes en el uso del lenguaje común. La numérica simple, se reconoce por otra de las formas en que expresan su conjetura, en términos de una estructura aritmética. Este tipo de representación es la que predomina. La representación empleada para expresar la estructuras aritméticas, luego de verificarlas como generalización, son la numérica simple y la algebraica en su forma polinómica funcional.

En esta tarea, los estudiantes manifiestan cuatro distintas conversiones entre sistemas de representación: a) Del gráfico al numérico, b) del numérico al verbal, c) del verbal al numérico, d) del numérico al algebraico. Las cuatro conversiones entre sistemas que emergieron, se articulan a las demandas de la tarea.

Tabla 5.4.
Distintos formas de proceder al formular conjeturas en la tarea 1.

Caso	Forma de proceder	Conjetura
1		$n \times 4 = palillos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $4 = incremento\ entre\ los\ términos$
2		$n \times 4 = palillos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $\times 4 = relación\ entre\ figura\ y\ palillos$
3	$Palillos\ en\ Figura\ 1 = 4$ $\frac{Figura\ 1 \times 5}{Figura\ 5} \Longrightarrow \frac{Palillos\ en\ Figura\ 1 \times 5}{Palillos\ en\ Figura\ 5}$	$n \times 4 = palillos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $4 = palillos\ en\ la\ figura\ uno$
4		$n \times 4 = palillos\ en\ la\ figura\ n$ ó $n + n + n + n = palillos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $4 = número\ de\ lados\ del\ cuadrado$
5	 $\frac{Palillos\ en\ Figura\ 1 \times 2}{Palillos\ en\ Figura\ 2}$	$n \times 2 = palillos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura\ previa$ $2 = multiplo\ de\ la\ figura\ 1\ a\ la\ 2$

a) *Del gráfico al numérico*. Se manifiesta al trabajar con etapas lejanas en un patrón figural, donde cambian de la representación pictórica a la numérica, para representar las etapas del patrón. Aun cuando todos los estudiantes estaban en condiciones de recurrir a este tipo de conversión como un modo de análisis menos tedioso, ello dependía además, de su nivel de abstracción.

b) *Del numérico al verbal*. Se presenta cuando se les demanda escribir un mensaje donde expliquen su manera de proceder para obtener el número de palillos en cualquier figura.

c) *Del verbal al numérico*. Se exterioriza cuando se les demanda el uso del lenguaje algebraico para expresar la conjetura que han enunciado de manera verbal y para esto, recurren a lo numérico.
d) *Del numérico al algebraico*. Aparece cuando emplean el lenguaje algebraico para expresar la estructura aritmética que han verificado como generalización, una vez que se les demanda.

De acuerdo a la manera de analizar la configuración de las figuras del patrón y de presentar la estructura matemática, surgen dos tipos de generalización en esta tarea: constructiva no estándar y multiplicativa constructiva estándar. Las generalizaciones que establecen son de tipo empíricas, basada en observaciones, con ello, identificaron propiedades generales de la sucesión lineal (como la recurrencia y la correspondencia) y de los números, que establecen como relaciones entre sus elementos, lo que de acuerdo a Mason, Stephens y Watson (2009) constituye una estructura matemática.

5.1.2. Razonamiento inductivo en la tarea 2

La tarea dos involucra una sucesión de patrones figurales, en el marco de una sucesión numérica con progresión aritmética $a_n = 2n + 2$ (véase Capítulo 4). La resolvió el total de participantes. Con base en sus argumentos escritos**,** se identificó que el 100% trabaja con casos particulares. De ellos, cuatro organizan los casos que exploraron. Catorce evidencian la identificación de regularidades en el patrón figural. Todos formulan conjeturas sin justificarlas. Diez las verifican por medio de casos particulares lejanos y cercanos, y establecen una estructura aritmética que les permite determinar el número de puntos en cada etapa del patrón figural, una generalización. Ninguno se implica en el paso de la demostración, dado que la tarea no lo demanda. Los pasos del razonamiento inductivo que evidencian los estudiantes en el proceso de solución de la tarea dos, se organizan en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5.
Pasos del razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en la tarea 2.

	Pasos del razonamiento inductivo						
Estudiante	**Trabajo con casos particulares**	**Organización de casos particulares**	**Identificación de patrones**	**Formulación de conjeturas**	**Justificación de las conjeturas**	**Generalización**	**Demostración**
E1	✓	✓	✓	✓		✓	
E2	✓	✓	✓	✓		✓	
E3	✓		✓	✓			
E4	✓		✓	✓			
E5	✓		✓	✓			
E6	✓		✓	✓		✓	
E7	✓	✓	✓	✓		✓	
E8	✓		✓	✓			
E9	✓	✓	✓	✓		✓	
E10	✓			✓			
E11	✓		✓	✓		✓	
E12	✓		✓	✓		✓	
E13	✓		✓	✓		✓	
E14	✓		✓	✓		✓	
E15	✓		✓	✓		✓	
Total	15	4	14	15	0	10	0

a) Trabajo con casos particulares

La tarea plantea determinar el número de puntos que componen las figuras en etapas lejanas y cercanas del patrón, ello ubica a los estudiantes a trabajar con casos particulares, de ahí que todos se involucran en este paso. De los quince, diez trabajan con los casos cercanos y lejanos demandados por la tarea, mientras que cinco (E1, E2, E7, E9 y E10) exploran con casos particulares adicionales. En primer lugar, los estudiantes se involucran en la observación de las tres etapas del patrón mostradas de forma figural, en el planteamiento de la tarea. Analizan las figuras en cada etapa el patrón y cuentan los puntos que conforman cada una. De esta manera, la mayoría reconoce que, al pasar de una etapa del patrón a la siguiente, se añaden dos puntos en cada figura. Es decir, que el patrón crece de manera constante en dos, evidencia empírica que se involucran en una relación de recurrencia en la sucesión.

La tarea, muestra las tres primeras etapas del patrón de manera figural. Para atender las demandas planteadas, en casos cercanos, siete estudiantes (E1, E6, E7, E9, E10, E11 y E12) se mantienen en el sistema de representación pictórico de las etapas dadas del patrón. Se apoyan de este sistema de representación, en los primeros diez casos. Cambian la forma de expresar su procedimiento al comenzar a trabajar con casos particulares lejanos (Figura 5.14), entonces recurren a una representación numérica. Esto evidencia una conversión del sistema de representación gráfico al sistema numérico. Abandonan la representación pictórica, por el tiempo a invertir en dibujar las figuras en etapas lejanas de la sucesión que se le demandan, como la 16 y 144. De manera similar a la tarea uno, la demanda de casos lejanos, favorece que los estudiantes cambien los sistemas de representación a las que recurren para expresar sus procedimientos.

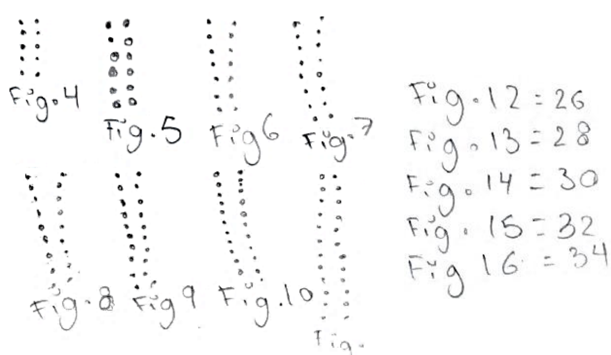


Figura 5.14. Cambio de representación pictórica a numérica por E1.

A partir de la etapa cuatro, ocho estudiantes (E2, E3, E4, E5, E8, E13, E14 y E15) expresan el número de figura y de puntos de forma numérica simple (Figura 5.15). En general, en esta tarea se observa que para el trabajo con casos particulares, los estudiantes se apoyan de tres tipos de representaciones: pictórica y numérica simple. La pictórica en la exploración con casos cercanos, mientras que la numérica simple tanto en casos lejanos como cercanos.

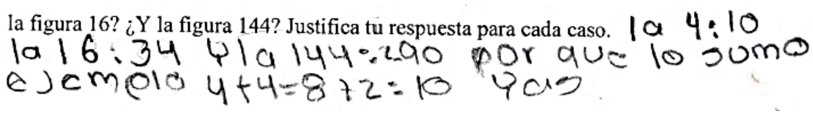


Figura 5.15. Trabajo sobre casos particulares de E15 con un sistema de representación numérico.

b) Organización de casos particulares

Si bien la organización de casos particulares no forma parte de las demandas de la tarea, se involucran en este paso cuatro estudiantes (E1, E2, E7 y E9). Dos los organizan en columnas (E1 y E2), la primera correspondiente al número de figura y la segunda al número de puntos en la misma, que relacionan a través del signo igual (Figura 5.16). El uso de este signo, en este caso, no refiere a una relación de equivalencia, si no a la relación de correspondencia entre número de figura y los puntos que la forman. La manera de disponer de los datos implica una representación de tipo numérica simple. E7 y E9 organizan los casos en dos filas, que corresponden al número de figura y el número de puntos que la conforman (Figura 5.17). Esta forma de estructurar los datos, implica una representación de tipo tabular.

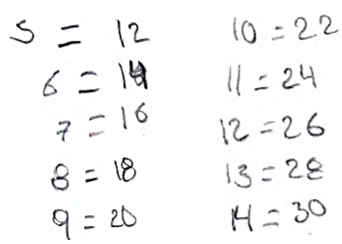


Figura 5.16. Organización de casos particulares en dos columnas por E2.

En estos casos, la organización de los datos favorece que reconozcan la relación entre el número de puntos de una etapa de la secuencia a la siguiente. En ese proceso, identifican el crecimiento constante en el patrón, evidencia de que reconocen de modo implícito, una relación de recurrencia.

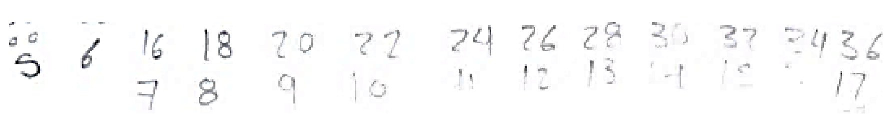


Figura 5.17. Organización de casos particulares en dos filas por E7.

Este paso del razonamiento inductivo aparece con menor frecuencia en la tarea, la hipótesis que se plantea, es porque no forma parte de las demandas en la tarea al estudiante. Dado que la mayor parte de los participantes se involucran en la identificación de patrones y formulación de conjeturas al trabajar con pocos casos, no se ven en la necesidad de organizarlos.

c) Identificación de patrones

La identificación de patrones, se evidencia cuando el estudiante expresa las regularidades y similitudes que reconoce entre las etapas que conforma el patrón figural y/o numérico. Catorce estudiantes se involucran en este paso (excepto E10), con distintas formas de proceder, lo que permite analizarlos en casos.

Caso 1: Análisis del número total de puntos que conforman la figura

Trece estudiantes se ubican en este caso. Parten del conteo de todos los puntos que forman cada una de las figuras en el patrón. Reconocen que el número de puntos en cada una, incrementan de manera constante respecto de la anterior. Así, distinguen que en cada etapa del patrón se aumentan dos puntos y expresan este crecimiento constante apoyándose del lenguaje común. Afirman que deben “sumar dos” puntos a cada figura (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E9, E10, E12, E13, E14 y E15) o bien, que las figuras “aumentan dos puntos” (E7 y E8) de una etapa a otra (Figura 5.18). Expresiones con las que se reconoce que los estudiantes refieren de modo implícito a la relación de recurrencia entre los términos de la sucesión. En todos los casos, se emplea el lenguaje común para expresar esta relación, lo que implica el uso de la representación verbal.

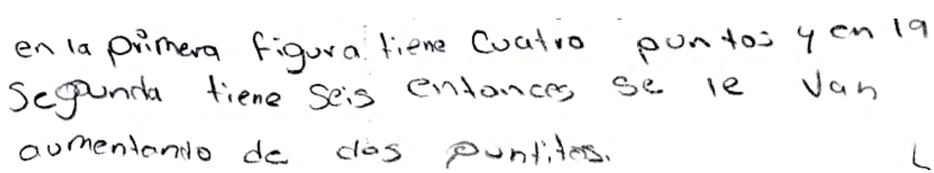


Figura 5.18. Identificación de un aumento constante en el patrón por E8.

Caso 2: Análisis del número de puntos que forman cada columna

E11 se ubica en este caso. Cuenta los puntos que forman cada una de las dos columnas en las figuras del patrón. Reconoce que en cada etapa, cada una de esas columnas, se constituye del mismo número de puntos; y que este número corresponde al número de figura más uno. Seguidamente, distingue que en cada etapa del patrón, el total de puntos que forma la figura se corresponde a sumar dos veces, el número de figura más uno. Por ejemplo, para obtener los puntos en la figura cuatro, enuncia que "le aumenta un punto más", de esta manera suma $5 + 5 = 10$. Expresa esta regularidad por medio del lenguaje común, lo que involucra el uso de la representación verbal.

d) Formulación de conjetura

La tarea demanda la determinación del número total de puntos que forman figuras en etapas lejanas del patrón, cuestión que implica a los estudiantes en la formulación de una conjetura. Otra de las demandas planteadas, consiste en escribir un mensaje, a fin de explicar el procedimiento usado para determinar el número de puntos en cualquier figura, lo que exige expresar la conjetura en lenguaje común. Este paso, se reconoce cuando el estudiante expresa la estructura matemática que ha construido y que, desde su perspectiva, le permite determinar el número de puntos que forma cualquiera de ellas en el patrón. Todos los estudiantes se involucran en este paso, en el que subyacen distintas formas de proceder, lo que permite analizarlos en casos.

Caso 1: Conjetura basada sólo en el aumento constante entre las etapas del patrón

Ocho estudiantes (E3, E4, E5, E6, E7, E8, E12 y E13) se ubican en este caso. Reconocen el crecimiento constante entre las etapas del patrón y formulan su conjetura basándose en este incremento. Manifiestan que, en cada una de las etapas del patrón, deben "sumar (los puntos) de 2 en 2", para obtener el número total de puntos que forma cada figura (Figura 5.19). Expresan su conjetura utilizando el lenguaje común, implicando a la representación verbal. Su conjetura se fundamenta únicamente en la recurrencia de la sucesión y sólo les permite obtener términos particulares cercanos, de ahí que a partir de esta conjetura no les es posible establecer una generalización.

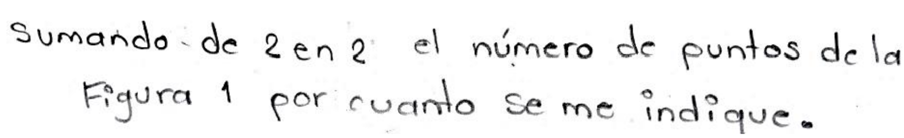


Figura 5.19. Conjetura de E4, basada en la recurrencia de la sucesión.

Seis de los ocho estudiantes (E5, E6, E7, E8, E12 y E13), se valen de esta conjetura para determinar el número de puntos en casos particulares cercanos. Cambian su forma de proceder para casos lejanos. E3 y E4 continúan con esta forma sin involucrarse en los casos lejanos que se demandan. En este caso, la conjetura se basa sólo en la recurrencia de la sucesión, y no les resulta eficiente para determinar etapas lejanas. La hipótesis es que este hecho favorece el que no logren establecer una generalización.

Caso 2: Conjetura basada en el análisis del número de puntos en la figura y el incremento constante

En este caso se ubican once estudiantes (E1, E2, E5, E6, E7, E8, E9, E12, E13, E14 y E15), cuyo razonamiento se sustenta del conteo de los puntos que constituyen cada una de las figuras dadas del patrón, del que reconocen que, al pasar de una etapa a otra, aumenta en dos. También, que a partir de la figura dos, cada etapa del patrón figural se forma de la figura de la etapa anterior, más dos puntos añadidos en la parte superior (Figura 5.20). Derivado de este razonamiento, formulan su conjeturan, enuncian que es necesario "multiplicar por dos y después sumar dos" al número de figura, para obtener el número total de puntos que la forman. En todos los casos la expresan recurriendo al lenguaje común, lo que involucra la representación verbal.

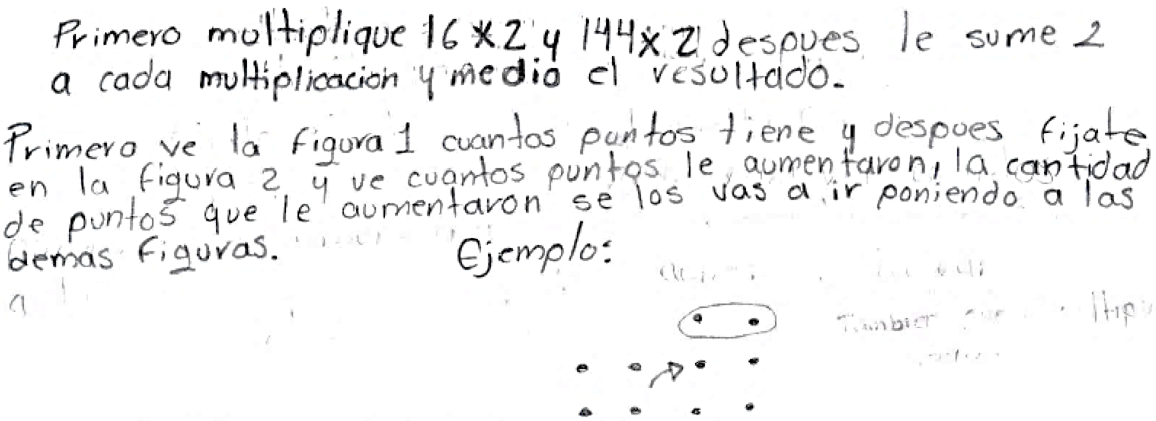


Figura 5.20. Conjetura de E7 expresada en lenguaje común.

La conjetura corresponde a una estructura aritmética, que en términos del lenguaje algebraico se corresponde con la forma siguiente: $n \times 2 + 2$ ó bien, $n + n + 2$ (en el caso de E15), donde n representa el número de figura, el 2 que ocupa el lugar de factor por su parte, el incremento entre etapas del patrón; y el 2 que forma parte de los sumandos, representa a los dos puntos que se añaden en cada figura. De los once estudiantes, seis se ubican tanto en el caso uno como en el caso dos (E5, E6, E7, E8, E12 y E13), esto implica que formulan dos tipos de conjetura: "sumar dos" a cada etapa del patrón (para determinar casos particulares cercanos) y "multiplicar por dos y sumar dos" al número de figura (para casos lejanos). En este caso, la demanda de términos lejanos, favorece el cambio en la forma de proceder.

Caso 3: Conjetura basada en el análisis del número de puntos en las columnas de la figura

E11 se ubica en este caso. Cuenta los puntos que forman cada una de las dos columnas en las figuras del patrón y reconoce que, en cada etapa, una columna se forma por cierto número de puntos. Este número corresponde al número de figura más uno. Con base en ello, conjetura que debe "aumentar un punto y sumar dos veces" al número de figura, para obtener el número total de puntos en la misma (Figura 5.21). En términos de una estructura matemática, esta conjetura se corresponde con una de tipo aditivo, esto es: $n+1+n+1$, donde n representa el número de figura y 1 el incremento de puntos en cada una de las columnas. La estructura se expresa recurriendo al lenguaje común, lo que implica al sistema de representación verbal.

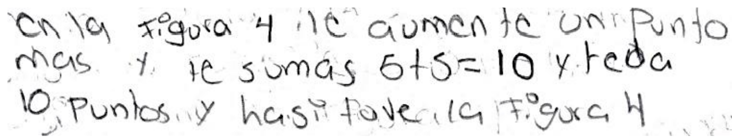


Figura 5.21. Conjetura de E11 expresada como una estructura aditiva.

Caso 4: Conjetura basada en una figura como unidad (objeto entero)

Este tipo de conjetura la plantea E10, quien toma como base a la figura 5 y los puntos que la conforman (12 puntos). Es así que emplea a esta figura como unidad para determinar el número de puntos en la etapa diez del patrón. En ese contexto, reconoce que 10 es múltiplo de 5 (lo percibe como la suma de dos veces 5), de ahí que toma a la figura 5 para determinar el número de puntos de la figura 10. Con base en esa idea matemática, procede como sigue: suma dos veces el número de puntos de la figura cinco, es decir $12+12$ (Figura 5.22). Esta forma de proceder se reconoce como objeto entero en Jurdak y El Mouhayar (2014). En este caso, el estudiante emplea la misma forma de proceder que en la tarea uno y no verifica su conjetura con otros casos. La conjetura la expresa a través del lenguaje común, que conlleva el sistema de representación verbal. No establece una generalización, ya que la estrategia empleada no permite determinar el número de puntos, en alguna etapa del patrón.

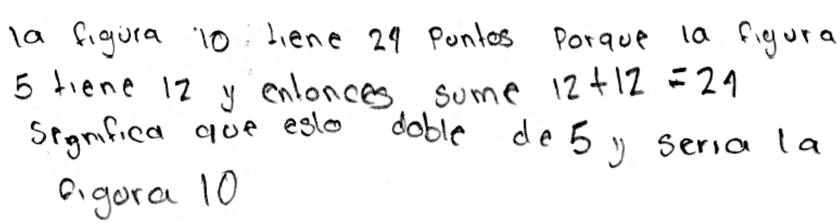


Figura 5.22. Conjetura de E10, basada en la figura 5 como unidad.

e) Justificación de conjeturas

Si bien la tarea no demanda de manera explícita el que justifiquen sus conjeturas, una manera de que lo hicieran, se planificó desde las tareas, al pedirle en cada pregunta, argumentar sus respuestas, por lo que podrían haberse implicado en realizarlo. Sin embargo, ningún estudiante se involucró en este paso del razonamiento inductivo.

f) Generalización

La generalización se implica, una vez que las conjeturas se han verificado a través de la exploración con casos particulares cercanos y/o lejanos, de manera que se establece una estructura aritmética que permite determinar el número de puntos en cualquier etapa de patrón. Diez estudiantes se involucran en este paso (E1, E2, E6, E7, E9, E11, E12, E13, E14 y E15), quienes verifican su conjetura explorando con casos lejanos y expresan la generalización de forma aritmética o algebraica. Establecen una regla que les permite determinar el número de puntos que forma cualquier figura en el patrón y que se aplica a todos los casos en esta tarea.

Las generalizaciones que construyen, se sustentan de la estructura aditiva y/o multiplicativa. Ocho (E1, E2, E6, E7, E9, E12, E13 y E14) recurren a una estructura multiplicativa y aditiva $n \times 2 + 2$ (Figura 5.23), otros dos a estructuras aditivas: $n + n + 2$ en el caso de E15 (Figura 5.24) y $n + 1 + n + 1$ en el caso de E11 (Figura 5.25). La expresan por medio de la representación numérica simple (E1, E2, E6, E9 y E13) o algebraica en su forma polinómica funcional (E7, E11, E12, E14 y E15).

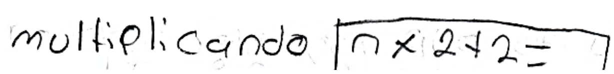


Figura 5.23. Generalización de E12, expresada como una estructura aditiva y multiplicativa.

Figura 5.24. Generalización de E15, expresada como estructura aditiva.

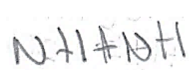


Figura 5.25. Generalización de E11, expresada como estructura aditiva.

Por la forma en que se presenta la estructura matemática, las generalizaciones que expresan se categorizan como multiplicativa constructiva estándar y aditiva constructiva no estándar (véase tabla 5.6).

Tabla 5.6.
Tipos de generalizaciones según la estructura matemática, en la tarea 2.

Tipo de generalización	Descripción	Inferencia simbólica	Ejemplo
Multiplicativa constructiva estándar	Estructura matemática multiplicativa y aditiva, que se basa en el análisis de las figuras en el patrón como compuestas de partes no superpuestas. Los términos en la expresión aritmética están de forma simplificada	$a_n = n \times 2 + 2$ Donde $n = número\ de\ figura$ $a_n = número\ de\ puntos\ en\ la\ figura$	Multiplicando el numero de la figura y sumando 2 × 2 = 8 y +2 10 Generalización de E14
Aditiva constructiva no estándar	Estructura aritmética aditiva, basada en el análisis de las figuras en el patrón como compuestas de partes no superpuestas. Los términos en la expresión aritmética están en forma expandida, no simplificada	$a_n = n + n + 2$ y $a_n = n + 1 + n + 1$ Donde $n = número\ de\ figura$ $a_n = número\ de\ puntos\ en\ la\ figura$	N+1+N+1 +501 501 1002 Generalización de E11

De acuerdo a sus formas de proceder, las generalizaciones son de tipo empírica, ya que se basan en la observación de regularidades en las etapas del patrón. La generalización se construye con menor frecuencia que la formulación de conjeturas, la hipótesis que plantea, es que se debió a que algunos estudiantes no verifican o bien, las que establecen no permiten determinar el número de puntos que forman las figuras en cualquier etapa.

g) Demostración

Ningún estudiante se involucra en procesos demostrativos en esta tarea, ya que en ningún momento se le demanda. De otra parte, la experiencia académica de los estudiantes en su nivel inmediato anterior (sexto grado de primaria), se remite a construir generalizaciones, recurriendo únicamente al reconocimiento de patrones recursivos y de correspondencia en el marco de las sucesiones lineales, objeto de estudio en esta investigación.

Sistemas de representación identificados en la tarea 2

En esta tarea, los estudiantes recurren a cinco diferentes representaciones: numérica simple, tabular, pictórica, algebraica y verbal. La numérica simple y tabular forma parte del sistema de representación numérico. La representación pictórica del sistema gráfico. La representación algebraica fue empleada en su forma polinómica funcional, es parte del sistema algebraico. El sistema de representación verbal refiere al lenguaje común. Los cuatro sistemas empleados fueron el numérico, gráfico, algebraico y verbal. Las representaciones, los sistemas de representación en los que se organizan y los estudiantes que recurren a cada representación se muestran en la tabla 5.7.

a) Sistema de representación numérico

Todos los estudiantes recurren al sistema de representación numérico. Del mismo, involucran la representación numérica simple y tabular. Los pasos del razonamiento inductivo en los que se implica son: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares y generalización.

La representación numérica simple la emplean quince estudiantes, en los pasos: trabajo con casos particulares y generalización. La mayor parte, expresa el número de puntos que componen cada figura del patrón, recurriendo una representación numérica simple, en etapas lejanas y cercanas. Los que trabajan desde la representación pictórica, la abandonan cuando se involucran con etapas lejanas del patrón. Esto evidencia una conversión entre sistemas de representación, del gráfico al numérico.

De otra parte, en las demandas de la tarea se implica el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalización. Dado que no contaban con experiencia en el uso de este lenguaje, algunos estudiantes recurrieron a la representación numérica simple para expresar las estructuras aritméticas que plantearon como generalización. Además de formular estas estructuras de forma numérica, recurrieron al lenguaje común, Lo que evidencia una conversión entre sistemas de representación, del numérico al verbal.

La representación tabular es empleada por dos estudiantes, para organizar los casos particulares que exploran. La organización de los términos favorece el reconocimiento del incremento constante en el patrón, que implica una relación de recurrencia entre los términos particulares.

El uso del sistema de representación numérico se articula a la exploración con etapas cercanas y lejanas del patrón, a organizar las etapas que se exploraron y, para expresar las estructuras aritméticas construidas por los estudiantes que generalizaron.

Tabla 5.7.
Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 2.

Paso del razonamiento inductivo	Sistemas de representación								
	Numérico			**Gráfico**			**Algebraico**		**Verbal**
	Numérica simple	Tabular	Descomposición aritmética	Recta numérica	Plano cartesiano	Pictórico	Polinómica funcional	Ley de recurrencia	
Trabajo con casos particulares	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15					E1, E6, E7, E9, E10, E11, E12			
Organización de casos particulares	E1, E2	E7, E9							
Identificación de patrones									E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E13, E14, E15
Formulación de conjeturas									E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15
Justificación de conjeturas									
Generalización	E1, E2, E6, E9, E13						E7, E11, E12, E14, E15		
Demostración									

b) **Sistema de representación gráfico**

El sistema gráfico se utiliza por cuatro estudiantes. En este contexto, la única representación involucrada fue la pictórica. El paso del razonamiento inductivo en el que se emplea es el trabajo con casos particulares. Se apoyan de esta representación para contar el número de puntos que forma cada figura, únicamente al trabajar en etapas cercanas del patrón. Cambian el tipo de representación al trabajar con etapas lejanas, en su lugar, recurren a la representación numérica simple y la tabular. Este cambio en el tipo de representaciones, evidencia una conversión entre el sistema de representación gráfico y el sistema numérico.

En esta tarea, el sistema gráfico únicamente se emplea para representar etapas cercanas inmediatas del patrón. En la mayoría de los casos, la representación pictórica favorece que identifiquen alguna regularidad entre las etapas, como en el caso de E11. Lo que resulta útil en la construcción de estructuras matemáticas plausibles para determinar el número de puntos en cualquier etapa

c) **Sistema de representación algebraico**

Cinco estudiantes recurren al sistema algebraico, del que incluyen las representaciones de tipo polinómica funcional, que evidencian en la generalización, ya que en la tarea se demanda el uso de lenguaje algebraico para este paso.

Este sistema se manifiesta en la forma polinómica funcional, para expresar las estructuras aritméticas que los estudiantes verifican y establecen como generalización. Quienes utilizan esta representación, en principio formulan la estructura aritmética de forma numérica y/o verbal, y cambian a expresarla en lenguaje algebraico cuando la tarea lo demanda. Este cambio de representaciones implica dos tipos de conversión entre sistemas de representación, del numérico al algebraico y del verbal al algebraico.

Los estudiantes que recurren al sistema de representación algebraico, lo usan para expresar su generalización. Pocos recurren a este sistema de representación, se plantea la hipótesis que es debido a que, al momento de la intervención, aún no habían tenido experiencia previa con el uso de este tipo de lenguaje. La mayoría recurre a la representación numérica simple en la construcción de las estructuras aritméticas que establecen como generalización.

d) Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal es utilizado por todos los estudiantes, los pasos del razonamiento inductivo en los que se evidencia, son la identificación de patrones y formulación de conjeturas. Recurren al lenguaje común, para describir las regularidades que identifican en las etapas del patrón, lo que involucra este sistema de representación como una manera de expresar la identificación de patrones. Este sistema también se emplea para enunciar las conjeturas, articulándose a las demandas de la tarea. Una vez que verifican las conjeturas, las formulan como una generalización, estructuras aritméticas que permiten obtener el número de puntos de una figura en cualquier etapa del patrón. Para expresar esta estructura, recurren a la representación numérica simple. Este cambio entre representaciones, evidencia la conversión entre sistemas de representación, del verbal al numérico.

Las demandas de la tarea involucraron al estudiante en la expresión de sus conjeturas por medio del lenguaje común, de igual manera, se exige la argumentación de sus procedimientos, lo que favorece que todos recurran al sistema verbal.

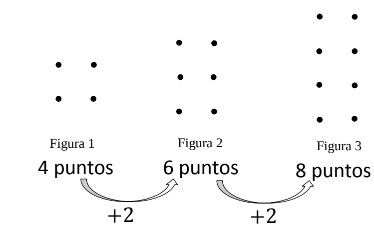
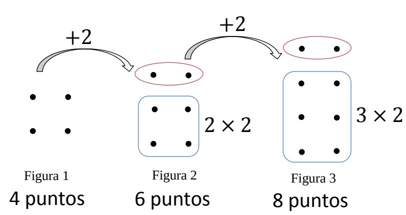
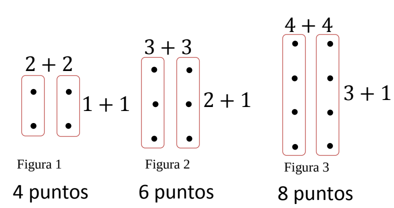
Reflexiones sobre el trabajo con la tarea 2

Los pasos del razonamiento inductivo a los que se articula el trabajo de los estudiantes en esta tarea, son el trabajo con casos particulares, la identificación de patrones, formulación de conjeturas, generalización y organización de casos particulares (este último en menor medida). Los pasos relacionados a la justificación de conjeturas y demostración no se evidencian.

El trabajo con casos particulares, sobre las representaciones pictórica y numérica, es esencial en el reconocimiento de regularidades en las etapas del patrón figural. Al igual que en la tarea uno, la identificación del patrón resulta fundamental en la construcción y justificación de una estructura plausible y algebraicamente útil (como sostiene Rivera, 2010), por medio de la cual, se obtiene el número de puntos en cualquier etapa y con ello, arribar a una generalización. Esta estructura se expresa en un primer momento, como una conjetura, que después de ser validada da lugar a la generalización.

Los estudiantes se involucran en la formulación de conjeturas de diversas maneras, lo que permite analizarlos por casos. En el caso uno, la conjetura sólo puede emplearse para determinar el total de puntos en términos cercanos del patrón, de manera que a partir de esta no es posible establecer una generalización. En los casos dos y tres, las conjeturas se verifican por medio de la exploración con casos particulares y con ello, establecer una generalización. En el caso cuatro, la conjetura no permite determinar el número de puntos en alguna figura del patrón, de ahí no es posible establecer una generalización. Los casos se organizan en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8.
Formas de proceder en la formulación de conjeturas de la tarea 2.

<table>
<tr><th>Caso</th><th>Forma de proceder</th><th>Conjetura</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>$n + 2 = puntos\ en\ la\ figura\ n$
Donde
$n = número\ de\ puntos\ en\ la\ figura\ previa$
$2 = incremento\ en\ el\ patrón$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>$n \times 2 + 2 = puntos\ en\ la\ figura\ n$ ó
$n + n + 2 = puntos\ en\ la\ figura\ n$
Donde
$n = número\ de\ figura$
$+2 = incremento\ de\ puntos$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>$n + 1 + n + 1 = puntos\ en\ la\ figura\ n$
Donde
$n + 1 = puntos\ en\ una\ columna$
$n = número\ de\ figura$
$+1 = aumento\ al\ número\ de\ figura$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\begin{array}{r} Figura\ 5 \\ +Figura\ 5 \\ \hline Figura\ 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} Puntos\ en\ Figura\ 5 \\ +\ Puntos\ en\ Figura\ 5 \\ \hline Puntos\ en\ Figura\ 10 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} Puntos\ en\ Figura\ 5 \\ +\ Puntos\ en\ Figura\ 5 \\ \hline Puntos\ en\ Figura\ 10 \end{array}$</td></tr>
</table>

En todos los casos, la representación con la que expresan las conjeturas es la verbal, articulada a las demandas de la tarea, implicando a los estudiantes en el uso del lenguaje común. La numérica simple y la algebraica, se presentan en el paso de la generalización, ya que la expresan en términos de una estructura aritmética.

En esta tarea, los estudiantes manifiestan cinco distintas conversiones entre sistemas de representación: a) Del gráfico al numérico, b) del numérico al verbal, c) del verbal al numérico, d) del verbal al algebraico y e) del numérico al algebraico. Las cinco conversiones entre sistemas que emergen, se articulan a las demandas de la tarea.

a) *Del gráfico al numérico.* Se manifiesta cuando se les demanda el trabajo con etapas lejanas en un patrón figural, donde cambian de la representación pictórica a la numérica, para representar las etapas del patrón.
b) *Del numérico al verbal*. Surge cuando se les demanda que expliquen su manera de proceder para obtener el número de puntos en la figura.
c) *Del verbal al numérico*. Cuando se les demanda el uso del lenguaje algebraico para expresar la conjetura que enunciaron de manera verbal, y ellos recurren al lenguaje numérico para evidenciarla.
d) *Del verbal al algebraico*. Cuando se les demanda el uso del lenguaje algebraico para expresar su conjetura de manera verbal.
e) *Del numérico al algebraico*. Cuando emplean el lenguaje algebraico para expresar la estructura matemática que construyen, y han formulado de forma numérica.

Con base en la estructura matemática que construyen, se determina el tipo de generalización establecida por los estudiantes en esta tarea. Aparecieron la multiplicativa constructiva estándar y aditiva constructiva no estándar. De acuerdo a las forma de proceder, el tipo de generalización que se efectúa en todos los casos, es la generalización empírica. Se basa en la observación y análisis de las regularidades entre las etapas del patrón, involucrando relaciones de recurrencia y correspondencia, que establecen como una estructura matemática, en el sentido de Mason, Stephens y Watson (2009).

5.1.3. Razonamiento inductivo en la Tarea 3

La tarea tres involucra una sucesión de patrones figurales, relacionada a una sucesión numérica con progresión aritmética $a_n = 2n - 1$ (véase Capítulo 4). De la evidencia empírica**,** se reconoce que los quince desarrollan el trabajo con casos particulares. Dos organizan los casos que exploraron. Catorce evidencian la identificación de un patrón en la secuencia. Los quince se involucran en el paso de formulación de conjeturas y ninguno las justifica. Cuatro verifican su conjetura por medio de casos particulares y establecen una estructura aritmética que les permite determinar el número total de rombos que forma cada figura del patrón, formulando una generalización. Dado que en la tarea no se le demanda, ninguno se implica en la demostración. Los pasos del razonamiento inductivo que evidencian los estudiantes en esta tarea se muestran en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9.
Pasos del razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en la tarea 3.

	Pasos del razonamiento inductivo						
Estudiante	**Trabajo con casos particulares**	**Organización de casos particulares**	**Identificación de patrones**	**Formulación de conjeturas**	**Justificación de las conjeturas**	**Generalización**	**Demostración**
E1	✓	✓	✓	✓			
E2	✓	✓	✓	✓			
E3	✓		✓	✓			
E4	✓			✓			
E5	✓		✓	✓			
E6	✓		✓	✓			
E7	✓		✓	✓		✓	
E8	✓		✓	✓			
E9	✓		✓	✓			
E10	✓		✓	✓		✓	
E11	✓		✓	✓			
E12	✓		✓	✓		✓	
E13	✓		✓	✓			
E14	✓		✓	✓			
E15	✓		✓	✓		✓	
Total	15	2	14	15	0	4	0

a) Trabajo con casos particulares

La tarea demanda determinar el número de rombos que forman las figuras en etapas cercanas y lejanas del patrón, lo que implica el trabajo con casos particulares. De manera que este paso está presente en los procedimientos de todos los estudiantes. Cuatro (E1, E2, E6 y E11), exploran con casos adicionales y el resto trabaja únicamente con los que demanda la tarea. Los estudiantes comienzan involucrándose en el conteo del número de rombos que forma cada una de las figuras del patrón. De ahí, reconocen que de una etapa a otra del patrón, se aumentan dos rombos a cada figura. Es decir, distinguen que el patrón es creciente y aumenta de manera constante. Esto evidencia que los estudiantes identifican la recurrencia en la sucesión.

Como parte de la tarea, se presentan las tres primeras etapas del patrón de manera figural. Trece estudiantes, continúan el patrón desde la etapa cuatro, apoyándose de una representación numérica. Dos estudiantes (E1 y E11), continúan explorando con las etapas el patrón de manera pictórica. Cambian a una representación numérica después de trabajar con pocos casos cercanos, una vez que se vuelve más arduo el trabajo que requiere dibujar la figura (Figura 5.26). Este cambio evidencia una conversión entre sistemas de representación, del gráfico al numérico. La hipótesis que se plantea, es que la demanda de casos lejanos, hace que los estudiantes cambien la forma de expresar su proceder. Quienes se involucraron en el trabajo con los casos particulares recurren a una representación numérica para casos cercanos y lejanos; y algunos pocos, a una representación pictórica para casos cercanos inmediatos.

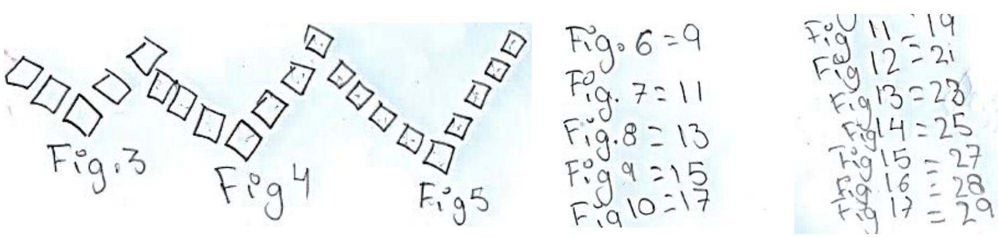


Figura 5.26. Cambio de representación por E1, al trabajar con casos particulares.

b) Organización de casos particulares

La organización de casos particulares no se demanda en la tarea, de aquí que sólo dos estudiantes (E1 y E2) se involucren en este paso. Ambos disponen los datos en dos columnas relacionadas por el signo igual, que corresponden al número de figura y el número de rombos que la forman (Figura 5.27). El signo igual no refiere a una relación de equivalencia como es habitual, sino a una de correspondencia entre número de figura y número de rombos que la conforman. La forma de organizar los casos, implica una representación numérica simple. En este caso, disponer de los datos de esta manera, favorece que los estudiantes reconozcan el incremento constante en el patrón.

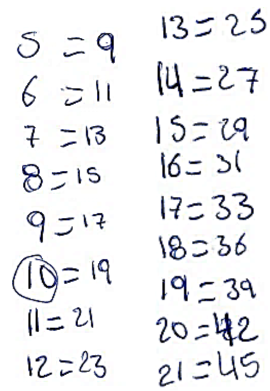


Figura 5.27. Organización de casos particulares de E2.

c) Identificación de patrones

Se reconoce que los estudiantes se involucran en este paso del razonamiento inductivo, cuando identifican similitudes entre las etapas que conforman el patrón figural y evidencian el reconocimiento de alguna regularidad. Catorce estudiantes se involucran en este paso (con la excepción de E4). Cuentan el número de rombos que forman las figuras en etapas del patrón que se presentan. Derivado de ello, reconocen que el patrón crece de manera constante. Expresan este crecimiento por medio del lenguaje común, afirman que el número de rombos "aumenta dos" en cada etapa consecutiva del patrón (Figura 5.28). Esta expresión, es evidencia de que identificaron una relación de recurrencia de la sucesión. Todos enuncian esta regularidad recurriendo al sistema de representación verbal.

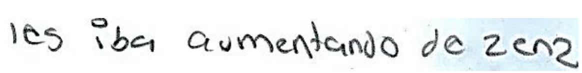


Figura 5.28. Reconocimiento del patrón recurrente de E11.

d) Formulación de conjetura

La formulación de conjeturas se reconoce~~,~~ cuando los estudiantes establecen una estructura aritmética que les permite determinar el número de rombos que conforman una figura cualquiera del patrón, sin verificarla en otros casos. Todos los estudiantes se involucran en este paso empleando distintas formas de proceder, que permiten presentarlos en casos.

Caso 1: Conjetura basada en el incremento del número de rombos en las etapas del patrón

Once estudiantes (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E11, E13 y E14) se ubican en este caso. Del trabajo con casos particulares, reconocen el incremento constante en el patrón. Con este razonamiento conjeturan que es necesario aumentar dos rombos en cada etapa del patrón para obtener el número total de rombos que forma cualquier figura. Expresan su conjetura recurriendo al lenguaje común, lo manifiestan como sigue: “sumar dos” rombos a cada figura del patrón, para determinar el número total de rombos que forma cualquier figura (Figura 5.29). Si bien en el caso de esta tarea no se demanda, emplean una representación verbal para expresarla.

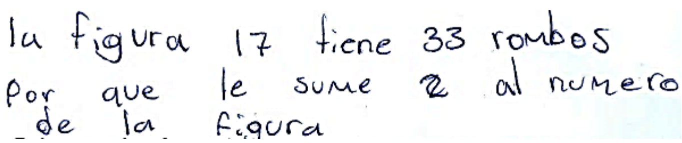


Figura 5.29. Conjetura de E2, “sumar dos”, expresada de manera verbal.

Nueve de los once estudiantes (E1, E5, E6, E8, E9, E11, E13 y E14) cambiaron su conjetura al demandarles la determinación del número de rombos para casos lejanos. Tres (E2, E3 y E4) formulan sólo esta conjetura y no se involucran en el trabajo con casos lejanos. De forma similar a uno de los casos que emergen en la formulación de conjeturas en la tarea dos, en este caso, la conjetura se basa únicamente en la relación de recurrencia de la sucesión. De manera que es factible sólo para determinar el número de rombos en casos cercanos, entonces a partir de esta no es posible establecer una generalización.

Caso 2: Conjetura basada en multiplicar por el número que se incrementa

Nueve estudiantes (E1, E5, E6, E8, E9, E11, E13 y E14) se ubican en este caso. Reconocen el incremento constante en el patrón figural, que “aumenta de dos en dos”. De aquí, conjeturan que, es necesario “multiplicar por dos” el número de la figura correspondiente, para obtener el número total de rombos que forman cada figura (Figura 5.30). Su conjetura corresponde a una estructura de tipo multiplicativa $n \times 2$, donde n representa el número de figura y 2 el incremento constante. La expresan recurriendo al lenguaje común y al numérico, lo que implica a las representaciones verbal y numérica simple. En este caso, la estructura aritmética que establecen, genera los términos de la sucesión de los números pares naturales, que es distinta a la que corresponde al patrón figural en la tarea. De manera que a partir de esta conjetura no es posible establecer una generalización.

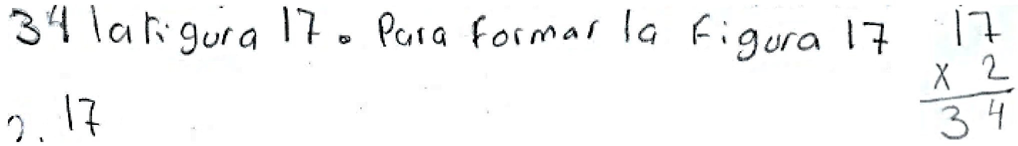


Figura 5.30. Conjetura de E9, “multiplicar por dos” expresada de forma numérica.

Quienes se ubican en este caso, formulan dos tipos de conjetura: “sumar dos” rombos en cada etapa del patrón para determinar el número de rombos en los casos cercanos y “multiplicar por dos” el número de figura, al involucrarse con casos lejanos. La demanda de casos lejanos por la tarea, favorece el cambio en la forma de proceder.

Caso 3: Conjetura basada en el análisis del número de rombos que se incrementan y se “quitan”

Cuatro estudiantes (E7, E10, E12 y E15) formulan la conjetura con una forma distinta de proceder. Por medio del conteo, identifican que se aumentan dos rombos en cada etapa del patrón. Además, a partir del análisis de las figuras en cada etapa, reconocen que para determinar el número total de rombos ellas, es necesario multiplicar el número de figura por dos y luego “quitar” un rombo. De aquí, conjeturan que es preciso “multiplicar el número de figura por dos y luego quitar uno” para obtener el número total de rombos que forman la figura correspondiente (Figura 5.31). La conjetura corresponde a una estructura de tipo multiplicativa $n \times 2 - 1$, donde n representa el número de figura, 2 el incremento en el patrón y 1 el número de rombos que se “quitan” en cada etapa. La expresan apoyándose del lenguaje común y de forma numérica, lo que implica a la representación verbal y numérica simple. La estructura les permite determinar el número de rombos en cualquier etapa de la secuencia, de modo que, en este caso se verifica con casos particulares para establecer la generalización.

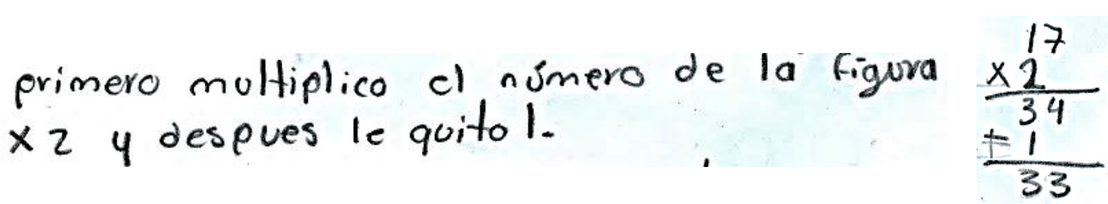


Figura 5.31. Conjetura de E7, multiplicar por dos y quitar uno.

e) Justificación de conjeturas

Si bien se pide a los estudiantes que argumenten sus respuestas a cada cuestión y expliquen su forma de proceder, la tarea no demanda de forma explícita la justificación de conjeturas. De manera que ningún estudiante se involucra en este paso.

f) Generalización

En este paso, la conjetura se verifica a partir de casos particulares cercanos o lejanos y se establece como una generalización. En el caso de esta tarea, las conjeturas que la mayoría de los estudiantes formularon no les permiten determinar el número de rombos que conforman las figuras del patrón correspondiente. De manera que, sólo cuatro estudiantes (E7, E10, E12 y E15) se involucran en este paso, estableciendo una estructura aritmética de tipo multiplicativa que permite determinar el total de rombos en cualquier etapa lejana y cercana del patrón: $n \times 2 + 1$, donde n representa el número de figura (Figura 5.31). La expresan recurriendo al lenguaje algebraico (E7, E10, E12 y E15) y al lenguaje común (E7). Las representaciones que se implican en este paso son la verbal y la algebraica de tipo polinómica funcional.

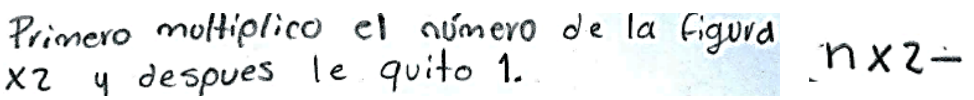


Figura 5.32. Generalización de E7, multiplicar por dos y quitar uno.

Las generalizaciones que establecen los estudiantes, se sustentan de la estructura multiplicativa. Por la forma en que analizan las figuras del patrón y en que manifiestan la estructura matemática, se categorizan como multiplicativa deconstructiva estándar (véase tabla 5.10). Considerando sus formas de proceder, las generalizaciones son de tipo empírica~~s~~, ya se basaron en la observación de regularidades en las etapas del patrón figural y el reconocimiento de relaciones de recurrencia y correspondencia de la sucesión lineal.

Tabla 5.10.
Tipos de generalizaciones según la estructura matemática, en la tarea 3.

Tipo de generalización	Descripción	Inferencia simbólica	Ejemplo
Multiplicativa deconstructiva estándar	Estructura matemática multiplicativa y aditiva, que se basa en el análisis de las figuras en el patrón como compuestas de partes que están superpuestas. Los términos en la expresión aritmética están de forma simplificada	$a_n = n \times 2 - 1$ Donde $n = número\ de\ figura$ $a_n = número\ de\ rombos\ en\ la\ figura$	Siempre se multiplica por 2 y menas uno Generalización de E10

g) Demostración

Como la mayor demanda cognitiva planteada en las tareas es la generalización, el paso de la demostración no se demanda. Se entiende entonces que ningún estudiante lo evidencie en su procedimiento.

Sistemas de representación identificados en la tarea 3

En esta tarea, los estudiantes recurren a cuatro distintas representaciones para exponer sus procedimientos: numérica simple, pictórica, algebraica de tipo polinómica funcional y verbal. La representación numérica simple forma parte del sistema de representación numérico. La representación pictórica del sistema gráfico. La representación algebraica de tipo polinómica funcional es parte del sistema algebraico. El sistema de representación verbal refiere al lenguaje común. Los cuatro sistemas empleados son el numérico, gráfico, algebraico y verbal. Las representaciones, los sistemas de representación en los que se organizan y los estudiantes que recurren a cada una se presentan en la tabla 5.11.

a) Sistema de representación numérico

El sistema de representación numérico se emplea por todos los estudiantes, que involucran la representación numérica simple. Los pasos del razonamiento inductivo en los que aparecen son: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares y formulación de conjeturas.

Todos los estudiantes recurren a la representación numérica simple, se implica en los pasos: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares y formulación de conjeturas. La mayoría de los estudiantes expresa el número de rombos que componen cada figura, con una representación numérica simple para casos lejanos y cercanos. Los dos que analizan casos particulares desde la figura, abandonan esta representación cuando se involucran en etapas lejanas del patrón, lo que evidencia una conversión entre sistemas de representación, del gráfico al numérico.

La representación numérica también se emplea por dos estudiantes, para organizar los casos que exploran. Dispusieron de los datos en dos columnas relacionadas por medio del signo igual, correspondientes al número de figura y número de rombos, que implica una relación de correspondencia.

Tabla 5.11.
Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes en la tarea 3.

Paso del razonamiento inductivo	**Sistemas de representación**								
	Numérico			**Gráfico**			**Algebraico**		**Verbal**
	Numérica simple	Tabular	Descomposición aritmética	Recta numérica	Plano cartesiano	Pictórico	Polinómica funcional	Ley de recurrencia	
Trabajo con casos particulares	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15					E1, E2			
Organización de casos particulares	E1, E2								
Identificación de patrones	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15								
Formulación de conjeturas	E1, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15								E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E11, E13, E14
Justificación de conjeturas									
Generalización							E7, E10, E12, E15		E7
Demostración									

Por otro lado, en las demandas de la tarea se implica el uso del lenguaje algebraico para formular la conjetura y generalización, de manera varios estudiantes recurren a la representación numérica simple para expresar las estructuras aritméticas que plantean como su conjetura. En algunos casos, si bien no se le demanda, las estructuras también se representan en lenguaje común, lo que implica una conversión entre sistemas de representación, del numérico al verbal.

El sistema de representación numérico se emplea para examinar etapas cercanas y lejanas del patrón, para organizar los casos que se exploraron y para expresar las estructuras aritméticas construidas.

b) Sistema de representación gráfico

El sistema gráfico se emplea por dos estudiantes, del que la única representación involucrada es la pictórica, es el usado con menor frecuencia en esta tarea. El paso del razonamiento inductivo en el que se implica es el trabajo con casos particulares. Emplean la representación pictórica únicamente al trabajar con etapas cercanas inmediatas del patrón, para determinar el número de rombos que forma cada figura. Cambian en el tipo de representación cuando se demanda trabajar con etapas lejanas, en su lugar involucran la representación numérica simple. Este cambio en el tipo de representaciones, evidencia una conversión entre sistemas de representación, del gráfico al numérico. De modo similar a las otras tareas, en esta el sistema gráfico sólo se emplea para representar etapas cercanas inmediatas del patrón.

c) Sistema de representación algebraico

El sistema algebraico se emplea por cuatro estudiantes, del que incluyen las representaciones de tipo polinómica funcional, para evidenciar su generalización, articulado a las demandas de la tarea.

El sistema se utiliza para formular las estructuras aritméticas que los estudiantes establecen como generalización. Quienes generalizan, en principio, enuncian la estructura aritmética que construyen, de forma numérica y/o verbal, y pasan a expresarla en lenguaje algebraico cuando la tarea lo demanda. Este cambio de representaciones implica dos tipos de conversión entre sistemas de representación, del numérico al algebraico y del verbal al algebraico.

El sistema de representación algebraico se emplea por cuatro estudiantes para expresar el paso de la generalización. Pocos recurrieron a este sistema, por la poca experiencia con el lenguaje algebraico, la mayoría recurren a la representación numérica simple en la construcción de las estructuras aritméticas que establecieron.

d) Sistema de representación verbal

Todos los estudiantes recurren al sistema de representación verbal. Los pasos en los que se evidencia son identificación de patrones, formulación de conjeturas y generalización.

En el caso de la identificación de patrones, los estudiantes reconocen un crecimiento constante en las etapas del patrón figural y lo describen recurriendo al lenguaje común, de manera que el sistema verbal se articula a la expresión de este paso del razonamiento inductivo.

Aun cuando la tarea no lo demanda, algunos estudiantes emplearon el lenguaje común para expresar las estructuras aritméticas que construyeron en sus conjeturas y generalizaciones. En ciertos casos, también se emplea la representación numérica simple y la algebraica para enunciar una conjetura y/o generalización, lo que evidencia dos tipos de conversión entre sistemas de representación, del verbal al numérico y del verbal al algebraico.

El uso del sistema verbal se articula a la expresión de las regularidades identificadas en el patrón y la formulación de conjeturas y generalizaciones. Si bien, no se demandó la expresión de las conjeturas y generalizaciones en un lenguaje común, los estudiantes también recurrieron a este sistema para expresarlas. Las demandas de la tarea, favorecieron que todos se apoyaran del sistema de representación verbal, puesto que implican al estudiante en la argumentación de sus procedimientos.

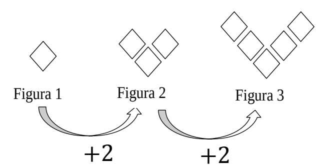
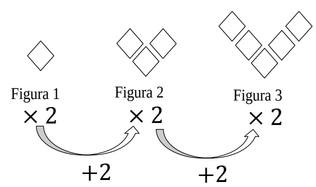
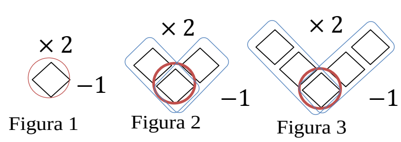
Reflexiones sobre el trabajo con la tarea 3

En esta tarea, el trabajo de los estudiantes se articula a los pasos de razonamiento inductivo: trabajo con casos particulares, identificación del patrón, formulación de conjeturas, generalización y organización de casos particulares (estos dos últimos con menor frecuencia). La justificación de conjeturas y demostración no se evidencian.

El trabajo con casos particulares, por medio de distintas representaciones, es esencial en el reconocimiento de las regularidades entre las etapas del patrón figural, esto a su vez es fundamental en la construcción de la estructura que permite determinar el número de rombos en cualquier etapa de la secuencia.

Los estudiantes se involucran en la formulación de conjeturas desde diversas formas de proceder, lo que permitió organizarlos en tres casos distintos (Tabla 5.12). En los casos uno y dos, las conjeturas que formulan, no permiten determinar el número de rombos que forman las figuras en cualquier etapa del patrón, de modo que no es posible establecer una generalización. En el caso tres, verifican su conjetura explorando con casos particulares cercanos y lejanos, estableciendo una generalización.

Tabla 5.12.
Formas de proceder en la formulación de conjeturas de la tarea 3.

Caso	Forma de proceder	Conjetura
1		$n+2 = rombos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ rombos\ en\ la\ figura\ previa$ $2 = incremento\ en\ el\ patrón$
2		$n \times 2 = rombos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $2 = incremento\ en\ el\ patrón$
3		$n\ \times 2 - 1 = rombos\ en\ la\ figura\ n$ Donde $n = número\ de\ figura$ $\times 2 = incremento\ en\ el\ patrón$ $-1 = rombos\ que\ se\ quitan\ en\ cada\ etapa$

Las representaciones utilizadas para expresar las conjeturas y generalizaciones en esta tarea, son de tipo verbal, algebraica y numérica simple. La numérica simple y la algebraica, se articula a las demandas de la tarea, que implican al estudiante en el uso del lenguaje algebraico. Estos tipos de representación también emergen, ya que la generalización y conjeturas se formulan en términos de una estructura aritmética. Si bien, en este caso la de tipo verbal no se demanda de manera explícita, los estudiantes la implican en las explicaciones a sus procedimientos.

En esta tarea se manifestaron cinco distintas conversiones entre sistemas de representación: a) Del gráfico al numérico, b) del numérico al verbal, c) del verbal al numérico, d) del verbal al algebraico y e) del numérico al algebraico.

a) *Del gráfico al numérico.* Se manifiesta cuando se les demanda determinar los rombos en etapas lejanas del patrón figural y cambian de la representación pictórica a la numérica.
b) *Del numérico al verbal.* Cuando recuren al lenguaje común para explicar el procedimiento que emplean para obtener el número de rombos en cualquier figura.
c) *Del verbal al numérico.* Emerge cuando se demanda el uso del lenguaje algebraico para formular la conjetura y generalización, entonces recurren al lenguaje numérico para expresarla.
d) *Del verbal al algebraico*. Se presenta, ya que se demanda el uso del lenguaje algebraico para formular la conjetura y generalización.
e) *Del numérico al algebraico*. Se exterioriza cuando manifiestan la estructura aritmética que construyeron en su conjetura, por medio del lenguaje algebraico.

Considerando la forma de manifestar la estructura matemática que construyen en la generalización, estas se categorizan como multiplicativa deconstructiva estándar. Por la forma de proceder para establecerla, el tipo de generalización fue de tipo empírica, basada en el reconocimiento de propiedades generales de la sucesión lineal, como la recurrencia, que establecen como relaciones entre sus elementos, lo que constituye una estructura matemática, de acuerdo a Mason, Stephens y Watson (2009).

Capítulo 6

Conclusiones

El estudio analizó el razonamiento inductivo en estudiantes de séptimo grado a través de tareas que demandaron la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones lineales. El modelo de Cañadas y Castro (2007) fue útil para el análisis, así como los sistemas de representación (Cañadas, 2007; Lupiáñez, 2016).

6.1. Pasos del razonamiento inductivo en que se involucraron los estudiantes

Los resultados evidencian que los pasos del razonamiento inductivo en los que se involucran con más frecuencia los estudiantes son: el trabajo con casos particulares, identificación de patrón, formulación de conjeturas y generalización. Se reconoce que el paso en que realizan con menor frecuencia, es la organización de los casos particulares; y que no se involucran en la justificación de conjeturas y en la demostración (Tabla 6.1)

Tabla 6.1.
Pasos de razonamiento inductivo que se siguen en las tareas.

	Pasos del razonamiento inductivo						
Tarea	Trabajo con casos particulares	Organización de casos particulares	Identificación de patrones	Formulación de conjeturas	Justificación de las conjeturas	Generalización	Demostración
T1	15	3	12	15	0	10	0
T2	15	4	14	15	0	10	0
T3	15	2	14	15	0	4	0

a) Trabajo con casos particulares

Todos los participantes se involucraron en el trabajo con casos particulares de dos maneras:

1. En la exploración del comportamiento del patrón. Examinaron este comportamiento a través del conteo de los elementos (palillos, puntos o rombos) que conforman cada una de las etapas del patrón. Desde su análisis, la mayoría reconoció regularidades de dos maneras:

(i) que hay un incremento constante entre cada término de la sucesión. Derivan en una relación de recursividad; y/o,

(ii) que las figuras del patrón están estructuradas en partes que se configuran de cierta manera. Derivan en una relación de correspondencia.

La exploración con casos particulares es fundamental en la identificación de cualquier tipo de regularidad. Todos se involucraron en el conteo y reconocieron regularidades de la primera forma, algunos también de la segunda. Quienes se enfocaron en la primera, no establecieron una conjetura que resultara en una generalización. Los que transitaron de la primera a la segunda forma, logran construir una estructura matemáticamente plausible y algebraicamente útil para explicar el comportamiento del patrón, tal como lo afirma Rivera (2010).

2. Para verificar conjeturas. La estructura matemática que formularon como su conjetura, se validó a través de la exploración con casos particulares lejanos y cercanos, este proceso es esencial en el establecimiento de su generalización.

El trabajo con casos particulares, es fundamental en el análisis y reconocimiento de regularidades en el patrón figural, que llevan identificación de propiedades y relaciones de las sucesiones lineales y los números naturales. Así como también, en la validación de las estructuras matemáticas que construyen. Ambos, aspectos esenciales en el establecimiento de generalizaciones.

Para expresar el número de figura y el número de partes que la conforman, la mayoría recurrió a la representación numérica, su uso facilita la exploración de etapas lejanas. Pocos se apoyan en la representación pictórica, y sólo en etapas cercanas consecutivas, por el trabajo que requiere dibujar figuras de etapas lejanas. No obstante, el análisis desde esta representación fue básico en la formulación de estructuras matemáticas plausibles, que se validaron como generalización.

b) Organización de casos particulares

De los pasos de razonamiento inductivo a los que recurrieron, la organización de casos particulares fue el menos frecuente. Quienes se involucraron, lo hicieron de dos formas:

(i) Dispusieron de los datos en dos filas, en una colocaron el número de figura y en otra el número de partes que la conforma, lo que implicó el uso de una tabla. Esta forma de organizar los datos, favoreció la identificación de la relación de recurrencia en la sucesión.

(ii) Relacionaron el número de figura y el número total de partes que la conforman por medio del signo igual. Su uso implica relaciones de igualdad, no obstante, aquí se empleó para señalar que a cada figura le corresponde un cierto número de partes, lo que favorece la identificación de la relación de correspondencia.

Si bien la organización de casos particulares apoya el reconocimiento de relaciones de recurrencia y correspondencia, no resulta necesario para los estudiantes en la identificación de patrones, puesto que la mayoría que reconocieron regularidades, lo hicieron sin organizar las etapas. En tareas de patrones figurales, la visualización de la manera que se estructuran los elementos de las figuras, juega un papel más importante.

c) Identificación de patrones

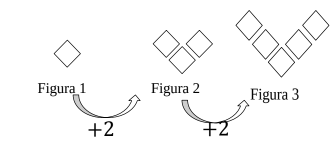
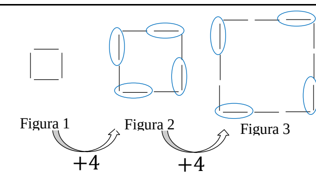
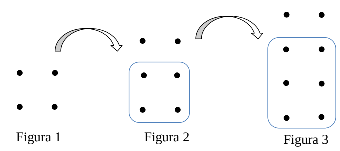
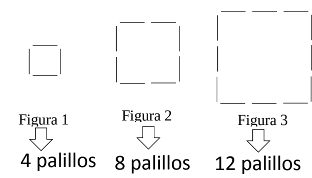
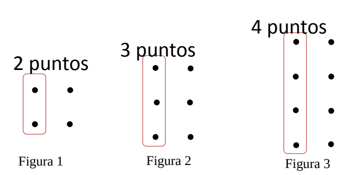
La identificación de patrones es uno de los pasos que se implican con más frecuencia. Se reconoce cuando los estudiantes, se ubican a analizar regularidades en las etapas que conforman el patrón, ya sea numérico o figural. En este estudio, se reconocen tres tipos de relaciones de recurrencia y dos tipos de relaciones de correspondencia, que emergen en el razonamiento inductivo de los estudiantes de séptimo grado, al trabajar con tareas de patrones figurales, que se presentan en la tabla 6.2.

El reconocimiento de las regularidades, se basó principalmente en el análisis de cómo se estructuran los elementos que forman las figuras en el patrón. Las relaciones de recurrencia se asocian al incremento constante en el patrón, analizado desde distintos razonamientos. Mientras que las de correspondencia están ligadas al análisis de una relación directa entre el número de figura y el número de elemento que la forman, ya sea por partes o completa.

La identificación del patrón es fundamental en la construcción de una estructura plausible y algebraicamente útil para determinar el número de partes que conforman cualquier etapa de la secuencia. Si bien este paso no se demanda de forma explícita, la mayoría se involucró, al analizar términos particulares del patrón figural.

Con base en los datos, se reconoce que quienes no se involucran en la identificación del patrón, tampoco lo hacen con el paso de la generalización. De manera que este paso, sin duda es esencial en la formulación de una generalización válida, que explique el comportamiento que guarda una sucesión de patrones bien definidos, como es el caso de las tareas planteadas. Si bien se reconoce que quienes generalizan han identificado regularidades, no todos generalizan, puesto que en ocasiones los patrones identificados no permiten formular una estructura matemática que sea útil para determinar todos los términos de la sucesión. De ahí que la verificación de conjeturas sea también un paso esencial.

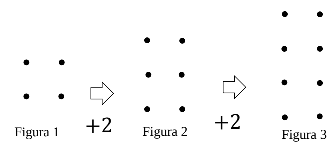
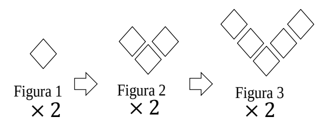
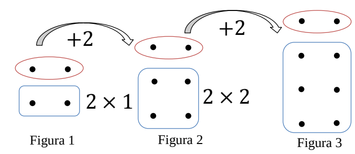
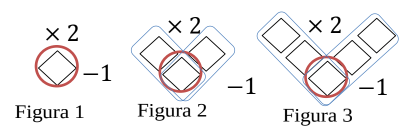
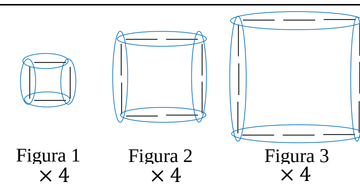
Tabla 6.2.
Tipos de relaciones identificadas por estudiantes de séptimo grado en patrones figurales.

Tipo de relación	**Descripción**	**Tarea**	**Ejemplo**
Recurrencia a partir del análisis del total de elementos en la figura	Reconocen el crecimiento constante en el número total de elementos que conforman las figuras, en cada etapa del patrón.	T1, T2, T3	
Recurrencia a partir del análisis de elementos que forman las partes de la figura	Reconocen el crecimiento constante en el número de elementos que conforman cada una de sus partes, en cada etapa del patrón.	T1	
Recurrencia a partir del análisis de la figura como unidad	Reconocen que la figura en cada etapa del patrón contiene a la figura de la etapa anterior.	T2	
Correspondencia entre la figura y el total de elementos que la conforman	Reconocen la relación de correspondencia entre el número de figura y el número total de elementos que la componen	T1	
Correspondencia entre la figura y los elementos que conforman sus partes	Reconocen la correspondencia entre el número de figura y el número de elementos que conforman cada una de sus partes.	T1, T2	

d) Formulación de conjeturas

Todos se involucran en la formulación de conjeturas. Se reconoce cuando expresan una estructura que les permite, desde su punto de vista, determinar el número de elementos que conforman cualquier figura del patrón, sin verificarla. Las conjeturas se formularon desde distintas formas de proceder y se basaron en las relaciones y propiedades de la sucesión lineal y los números naturales, lo que se explica por la formación de los estudiantes, cuya experiencia previa se suma al reconocimiento de este tipo de relaciones en el contenido matemático. En total surgieron seis tipos de conjeturas, que se organizan y describen en la tabla 6.3.

Tabla 6.3.
Tipos de conjeturas en el razonamiento inductivo de los estudiantes de séptimo grado.

Tipo de Conjetura	Descripción	Tarea	Ejemplo
Aditiva basada en la recurrencia	Consiste en sumar el incremento constante en cada etapa del patrón. Permite determinar términos cercanos consecutivos de la sucesión.	T1, T2, T3	
Multiplicativa basada en la recurrencia	Consiste en multiplicar el número de figura por el incremento constante. Permite establecer una generalización cuando el término general de la sucesión es de la forma $a_n = c_0 n$.	T1, T3	
Multiplicativa basada en la recurrencia y los elementos constantes en la figura	Consiste en multiplicar el número de figura por el incremento constante y a ello, sumarle el número de elementos que se mantienen invariables en las figuras del patrón. Permite establecer la generalización cuando el término general es de la forma $a_n = c_0 n + c_1$	T1, T2	
Basada en la correspondencia total	Consiste en determinar la relación entre el número de figura y el total de elementos que la conforma, con base en ello, multiplicar y sumar las cantidades correspondientes. Permite establecer la generalización en cualquier sucesión lineal.	T1, T3	
Basada en la correspondencia por partes	Consiste en determinar la relación entre el número de figura y el número de elementos que conforman sus partes, con base en ello, multiplicar y/o sumar las cantidades correspondientes. Permite establecer la generalización en cualquier sucesión lineal.	T1, T2	
Una figura como unidad (Whole object)	Consiste en determinar la cantidad de elementos que conforman la figura en una etapa del patrón, y con base en ello, determinar el número de elementos en otras etapas. La forma de proceder es denominada objeto entero, por Jurdak y El Mouhayar (2014). Permite establecer la generalización cuando el termino general es de la forma $a_n = cn$	T1, T2	$Palillos\ en\ Figura\ 1 = 4$ $\dfrac{Figura\ 1 \times 5}{Figura\ 5} \Longrightarrow \dfrac{Palillos\ en\ Figura\ 1 \times 5}{Palillos\ en\ Figura\ 5}$

En principio, para determinar los casos que se demandaron, los participantes recurrieron al primer tipo de conjetura, aditiva basada en la recurrencia. Como puede observarse, esta sólo es viable en casos cercanos consecutivos y no permite obtener una generalización. De manera que, en casos lejanos la mayoría cambió a alguno de los otros tipos de conjetura. La demanda de términos lejanos, favoreció este cambio de estrategias.

De los tipos de conjetura que emergieron, las multiplicativas basadas en recurrencia y de una figura como unidad, pueden validarse para establecer generalizaciones, cuando el término general de la sucesión es de la forma $a_n = c_0 n$. En estos casos es posible, dado que todos los términos particulares en este tipo de sucesión, son múltiplos del otro. Cuando los términos generales son de la forma $a_n = c_0 n + c_1$ y $a_n = c_0 n - c_1$, sus términos particulares no son proporcionales. De manera, que enfocarse en estrategias asociadas a la recurrencia dificulta el establecimiento de una generalización, lo que corresponde con resultados de otras investigaciones, como en Blanton & Kaput (2011), quienes afirman que enfocarse en este tipo de relación puede impedir el desarrollo de pensamiento.

La multiplicativa basada en la recurrencia y los elementos constantes en la figura permite la generalización cuando el término general es de la forma $a_n = c_0 n + c_1$. En este caso, la forma en que se estructura la figura, permite que sea viable una estrategia basada en multiplicar por el incremento y sumar el número de elementos que permanecen constantes en todas las figuras del patrón. Cuando el término general es de la forma $a_n = c_0 n - c_1$, el número de elementos constantes en la figura debe restarse en lugar de sumar.

Los tipos de conjetura que permiten construir una generalización en todos los casos se basan en las relaciones de correspondencia. El análisis de la forma en que se estructuran los componentes de la figura es fundamental en la formulación de una conjetura que pueda ser validada y establecer una generalización. Por ejemplo, en el caso de la estrategia asociada al perímetro del cuadrado en la tarea uno y la que involucra "quitar" un rombo a la figura en la tarea tres. En ese sentido, la identificación de regularidades resulta ser un apoyo esencial en la formulación de generalizaciones.

e) Justificación de conjeturas

La justificación de las conjeturas no formó parte de los argumentos que los estudiantes esgrimieron al resolver las tareas, aun cuando se les exigió que argumentaran sus procedimientos y resultados ante cada cuestión. Algunos verifican sus conjeturas para validarlas sin expresar argumentos destinados a justificar la estructura matemática que construyen.

f) Generalización

Le generalización se reconoce cuando los participantes verifican la conjetura que formulan. La validaron con casos particulares, de manera que construyen una estructura matemática que les permite determinar el número de partes que conforman las figuras en cualquier etapa del patrón. En todos los casos se implica en menor medida que la generalización, puesto que en ocasiones las conjeturas no se validan, no permiten determinar cualquier término en el patrón, ya que son factibles sólo para términos lejanos o bien, generan una sucesión distinta a la correspondiente.

Las generalizaciones que establecieron, se sustentan de la estructura aditiva y/o multiplicativa, lo que depende de su nivel de abstracción, si consideran a la suma iterada como una multiplicación. Considerando la forma de analizar y expresar su estructura matemática (Rivera, 2010), emergieron tres distintos tipos de generalización: a) aditiva constructiva no estándar, b) multiplicativa constructiva estándar y c) multiplicativa deconstructiva estándar (Tabla 6.4). Los tipos de generalización que aparecieron, se relacionaron a las formas de visualizar el patrón y a la estructura del término general de la sucesión. La generalización constructiva se apareció en los casos donde el término general era de la forma $a_n = c_0 n$ y $a_n = c_0 n + c_1$, mientras que la de tipo deconstructiva cuando el término general era de la forma $a_n = c_0 n - c_1$. La hipótesis en este caso, es que tanto la estructura del término general, así como la de las figuras en el patrón, promueven la formulación de cierto tipo de generalización.

Tabla 6.4.
Tipos de generalización que emergen en las tareas.

Tarea	**Tipo de generalización**		
	Aditiva constructiva no estándar	Multiplicativa constructiva estándar	Multiplicativa deconstructiva estándar
T1	1	9	0
T2	2	8	0
T3	0	0	4

De acuerdo con la forma en que se abstraen de lo particular a lo general, todas las generalizaciones que se establecieron son de tipo empíricas, basada en observaciones, con ello, identificaron propiedades generales de la sucesión lineal (como la recurrencia y la correspondencia) que establecen como relaciones entre sus elementos, lo que constituye una estructura matemática de acuerdo a Mason, Stephens y Watson (2009).

g) Demostración

La demostración no está presente en el trabajo sobre las tres tareas, se entiende ya que no se demanda. Además, tomando en cuenta que las generalizaciones que establecen los participantes son de tipo empírica, no involucran elementos que puedan emplearse en una demostración.

6.2. Razonamiento inductivo que siguen los estudiantes de secundaria

Los pasos de razonamiento inductivo que siguen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver tareas que demandan la generalización de patrones se articulan al trabajo con casos particulares, identificación de patrones, formulación de conjeturas y generalización, estos resultados coinciden con el trabajo de Barrera, Castro y Cañadas (2008).lo que también se corresponden a las áreas fundamentales para la actividad inductiva, de acuerdo con Haverty y colaboradores (2000): recopilación de datos, búsqueda de patrones y generación de hipótesis.

Los pasos no se presentan con un orden específico y el hecho que los estudiantes no se hayan involucrado con algún paso en el modelo de razonamiento inductivo no impide que avancen al paso siguiente. Afirmación que refiere a los pasos que están relacionados a la justificación, ya que, si bien no se presentan en el proceso de los estudiantes, esto no impide que construyan una generalización válida. La demostración debido al nivel de abstracción de los estudiantes y a la naturaleza de las generalizaciones que establecieron. Si bien algunos pasos del modelo están estrechamente relacionados, dicho modelo no es necesariamente lineal (Cañadas, 2007). Los sistemas de representación se articularon a todo el razonamiento como una manera de evidenciarlo.

En general, el razonamiento inductivo que siguen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver las tareas de generalización de patrones figurales consta de los siguientes: a) trabajo con casos particulares, analizando las etapas del patrón de forma figural en las primeras etapas consecutivas y cambiando a una representación numérica para el resto de etapas; b) identificación de regularidades, basadas en las relaciones de correspondencia y recurrencia en la sucesión lineal, a parir del análisis de las etapas del patrón figural; c) formulación de conjeturas, que se basan en las regularidades identificadas; d) verificación de las conjeturas, a través de la exploración con casos particulares y; e) generalización, expresada de forma numérica o algebraica, recurriendo a estructuras multiplicativas y aditivas.

6.3. Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes

Los sistemas de representación, se articularon a todo el razonamiento inductivo de los estudiantes, como una manera de evidenciarlo, a los que recurren los estudiantes en su razonamiento inductivo son: a) numérico, b) gráfico, c) algebraico y d) verbal (Tabla 6.5).

Tabla 6.5.
Sistemas de representación a los que recurren los estudiantes.

Tarea	Sistemas de representación								
	Numérico			Gráfico			Algebraico		Verbal
	Numérica simple	Tabular	Descomposición aritmética	Recta numérica	Plano cartesiano	Pictórico	Polinómica funcional	Ley de recurrencia	
T1	15	1	0	0	0	4	2	0	15
T2	15	2	0	0	0	8	5	0	15
T3	15	0	0	0	0	2	4	0	15

a) Sistema de representación numérico

El sistema de representación numérico se articula al trabajo de todos los estudiantes, del que las representaciones que se implican son la numérica simple, por todos los estudiantes y la tabular con menor frecuencia.

La numérica simple predomina, por el tipo de estructuras a las que recurren para expresar las generalizaciones (aditivas y multiplicativas) y; ya que la mayoría de estudiantes emplea esta representación para manifestar las etapas del patrón, debido al tiempo que tomaba continuar con el patrón de manera figural. Lo que puede estar articulado a su experiencia previa con el contenido de sucesiones lineales en el libro de texto, que les exige determinar en forma numérica las etapas de las sucesiones figurales.

La tabular se emplea únicamente para en la organización de los casos particulares, este tipo de representación favorece el reconocimiento de relaciones de recurrencia de la sucesión lineal.

b) Sistema de representación gráfico

El gráfico es el sistema de representación al que los estudiantes recurren con menos frecuencia, implicando únicamente la representación pictórica. Emerge en el trabajo de algunos estudiantes únicamente cuando se involucran con casos particulares cercanos consecutivos y se abandona una vez que se involucran con casos lejanos. Puesto que las primeras tres etapas del patrón se plantean de forma pictórica en las tareas, todos se implican en el análisis desde esta representación, lo que favorece la aparición de distintas formas de proceder para formular conjeturas. Lo que evidencia la importancia de la visualización en la formulación de conjeturas y generalizaciones en los patrones figurales.

c) Sistema de representación algebraico

El sistema de representación algebraico, se evidencia en la formulación de generalizaciones, implicándose en su forma polinómica funcional. Pocos utilizaron este tipo de representación, puesto que, dada su formación previa, contaban con poca experiencia en el uso de este lenguaje. Si bien, la mayoría no emplean el lenguaje algebraico y expresan generalizaciones de forma numérica, estas implican una estructura algebraica. En ese sentido, inducir la generalización por medio de patrones es un medio de introducirlos al algebra, como afirma Radford (2010)

d) Sistema de representación verbal

Todos recurren al sistema de representación verbal es empleado. La frecuencia con la que aparece se relaciona a las demandas de la tarea, que los implican en el uso de lenguaje común para formular sus conjeturas y argumentar sus procedimientos.

e) Conversiones entre sistemas de representación

Se manifestaron cinco distintas conversiones entre sistemas de representación: a) del gráfico al numérico, b) del numérico al verbal, c) del verbal al numérico, d) del verbal al algebraico y e) del numérico al algebraico. Los cambios entre sistemas de representación se articularon en su mayoría a las demandas de la tarea y dependieron del nivel de abstracción del estudiante. Son fundamentales en la construcción de la generalización, en el sentido de que el uso de una variedad de representaciones contribuye en la construcción de conocimiento matemático (Brizuela & Earnest, 2008).

6.4. Limitaciones del estudio

Las limitaciones del estudio están relacionadas a la metodología de investigación. En primer lugar, sólo se tomaron en cuenta las producciones escritas de los estudiantes y las notas del investigador para realizar el análisis de los datos, sin la aplicación de entrevistas individuales o discusión grupal, aspectos que pudieron haber favorecido que los participantes argumentaran sobre la validez de sus conjeturas. La aplicación de una entrevista puede favorecer que se evidencie con claridad el paso de formulación de conjeturas, así como otro tipo de estrategias o procedimientos que pueden haber aparecido en pasos como la formulación de conjeturas o generalización.

En segundo lugar, la aplicación de la tarea de generalización de patrones en la que el término general es de la forma $a_n = c_0 n$ influyó en las estrategias que se emplearon en las otras dos tareas. Aplicar una tarea donde el término general implique una relación de proporcionalidad, promueve que los estudiantes recurran a estrategias que se asocian a esta noción para resolver otras tareas.

6.5. Aportes de la investigación

Los aportes que se implican en la presente investigación, están dirigidos tanto a los profesores como a los investigadores en el campo de la Educación Matemática cuyo interés se articule el pensamiento algebraico y el razonamiento inductivo, en el contexto de la generalización de patrones figurales.

Las tareas de patrones figurales que consideran en su diseño al modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), implican a los estudiantes en el uso de este tipo de razonamiento en su proceso de solución. El diseño de actividades que impliquen la generalización de patrones y promuevan el uso de razonamiento inductivo, es de interés, considerando la importancia de este tipo de razonamiento en el descubrimiento de conocimiento nuevo, además de las demandas que se encuentran de manera implícita en el currículo mexicano. Asimismo, el diseño de este tipo de actividades también se considera como un modo de introducir a los estudiantes al álgebra.

La descripción de los pasos de razonamiento inductivo en los que se involucran los estudiantes, permite identificar los procesos que son esenciales en la formulación de una generalización válida dentro del razonamiento inductivo.

El análisis de los sistemas de representación evidencia la importancia del uso de variedad de representaciones y de las conversiones entre ellas, en el proceso de formulación de una estructura matemática.

Referencias Bibliográficas

Arriaga, A., & Benítez, M. M. (2016a), *Matemáticas 1. Por competencias. Primer grado, Educación Secundaria*, 1a Edición. Pearson Educación, México.

Arriaga, A., & Benítez, M. M. (2016b), *Matemáticas 2. Por competencias. Segundo grado, Educación Secundaria*, 1a Edición. Pearson Educación, México.

Arslan, C., Göcmencelebi, S. I., & Tapan, M. S. (2009). Learning and reasoning styles of pre service teachers': inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 2460-2465.

Ayalon, M., & Even, R. (2015). Students'opportunities to engage in transformational algebraic activity in different beginning algebra topics and classes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 285-307.

Baptista, P., Fernández, C., & Hernández, R. (2010). Metodología de la investigación*. DF, México: Editorial The McGraw-Hill*.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Barkl, S., Porter, A., & Ginns, P. (2012). Cognitive training for children: Effects on inductive reasoning, deductive reasoning, and mathematics achievement in an Australian school setting. *Psychology in the Schools, 49*(9), 828-842.

Barrera, V., Castro, E., & Cañadas, M. C. (2008). Análisis del razonamiento inductivo de maestros en formación en el problema del castillo de naipes.

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 107-126.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer, Berlin, Heidelberg.

Brizuela, B., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "Best Deal" problem. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48).

Cañadas, M. C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. (2009). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. *Educación matemática, 21*(1), 159-164.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2002). La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2004). El razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 173-182). La Coruña: SEIEM.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro, E., & Castro, E. (2009). Utilización de un modelo para describir el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7(17), 261-278.*

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2013). Análisis didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 333-348). Comares.

Castro, E. (2002). *Razonamiento inductivo desde la Didáctica de la Matemática. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds). Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 157-166). Alicante: Universidad de Alicante.*

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55-66.

Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Blacksburg, VA (Vol. 1, pp. 57–63).

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Davydov, V. V. (1990). Type of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 2. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization. In A. Bishop & S. Mellin-Olsen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Netherlands: Kluwer.

Goswami, U. (2011). Inductive and deductive reasoning. In U. Goswami (Ed.), *The Wiley-Blackwell handbook of childhood cognitive development* (pp. 399–419). Malden, MA: Wiley-Blackwell.

Haverty, L. A., Koedinger, K. R., Klahr, D., & Alibali, M. W. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: Not-so-trivial pursuit. *Cognitive Science, 24*(2), 249-298.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16.

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: Some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction, 6*, 37-57.

Klauer, K. J., & Phye, G. D. (1994). Cognitive training for children. A developmental program of inductive reasoning and problem solving. Hogrefe & Huber: Seattle.

Klauer, K. J., & Phye, G. D. (2008). Inductive reasoning: A training approach. *Review of Educational Research, 78*(1), 85-123.

Lawrence, A., & Hennessy, C. (2002). *Lessons for algebraic thinking: Grades 6-8.* Math Solutions.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. L. Rico y A. Moreno (Coords.), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria, 119-137.España: Ediciones Pirámide.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Neubert, G. A & Binko, J.B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom.*

OCDE. (2009). *Panorama de la educación 2009: Indicadores de la OCDE*.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Phye, G. D. (1997). Inductive reasoning and problem solving: The early grades. In G. D. Phye (Ed.), *Handbook of Academic Learning* (pp. 451-471). New York: Academic Press.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (No. 04; QA11, P6.). (trad. Julián Zugazagoitia), J.Trillas.

Pólya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. (trad. José Luis Abellán) *Colección Estructura y Función.*

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328.

Rivera, F. D. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics. N. York, USA: Springer.

Rivera, F., & Becker, J. (2011). Formation of pattern generalization involving linear fi gural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (advances in Mathematics education)* (Vol. 2, pp. 323–366). New York: Springer.

SEP (2011a), *Plan de estudios*, México, Distrito federal.

SEP (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México, Distrito federal.

SEP (2014a), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado.* México: SEP.

SEP (2014b), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado.* México: SEP.

SEP (2014c), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado.* México: SEP.

SEP (2014d), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado.* México: SEP.

SEP (2014e), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado.* México: SEP.

SEP (2014f), *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* México: SEP.

SEP (2014g), *Desafíos Matemáticos. Primer grado.* México: SEP.

SEP (2014h), *Desafíos Matemáticos. Segundo grado.* México: SEP.

SEP (2014i), *Desafíos Matemáticos. Tercer grado.* México: SEP.

SEP (2014j), *Desafíos Matemáticos. Cuarto grado.* México: SEP.

SEP (2014k), *Desafíos Matemáticos. Quinto grado.* México: SEP.

SEP (2014l), *Desafíos Matemáticos. Sexto grado.* México: SEP.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219.

Sosa-Moguel, L. & Cabañas-Sanchez, G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. *Proceedings of the 39th Annual conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, Indiana.

Anexos

*Nombre:*____ *Fecha:*___________

*Escuela:*_____________________________________ *Grado:*________ *Edad:*____

La siguiente secuencia de figuras se construyó con palillos del mismo tamaño.

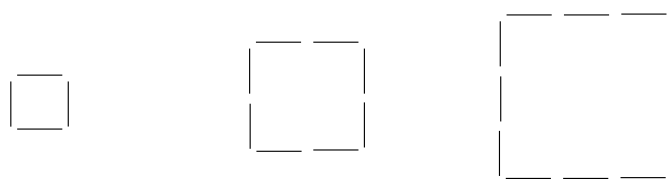


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura 6 de la secuencia? ¿Cuántos el de la figura 15? Justifica tu respuesta para cada caso.

b) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura 240? Argumenta tu respuesta.

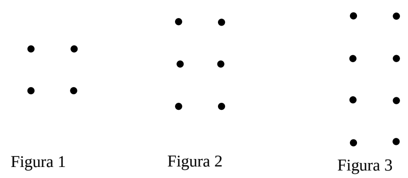
c) Escribe un mensaje a un compañero donde le expliques cómo puede determinar rápidamente el número de palillos con los que se forman el contorno de cualquier figura de la secuencia.

d) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.

*Nombre:*____ *Fecha:*____________

*Escuela:*____ *Grado:*_________ *Edad:*_____

La siguiente secuencia de figuras está formada por puntos.



a) ¿Cuántos puntos se necesitan para formar la figura 4 de la secuencia? ¿Cuántos forman la figura 16? ¿Y la figura 144? Justifica tu respuesta para cada caso.

b) Escribe un mensaje a tus compañeros donde les expliques cómo pueden encontrar rápidamente el número de puntos que forman cualquier figura de la secuencia.

c) ¿Cuántos palillos forman el contorno de la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.

*Nombre:*____ *Fecha:*____________

*Escuela:*____ *Grado:*_________ *Edad:*_____

Considera la siguiente secuencia de figuras, formada por rombos del mismo tamaño.

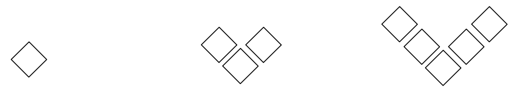


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos rombos forman las figuras 4 y 5? ¿Cuántos forman la figura 17? Justifica tu respuesta en cada caso.

b) ¿Cuántos rombos forman la figura 211? Argumenta tu respuesta.

c) ¿Cuántos rombos forman la figura n de la secuencia? Argumenta tu respuesta.