UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN NIÑOS DE QUINTO GRADO DE PRIMARIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS: ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

NAYELI HUERTA MOYADO

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARIA GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ

Chilpancingo de los Bravo, Gro., Diciembre de 2018.

Pensamiento funcional en niños de quinto grado de primaria

Tesis de maestría

Nayeli Huerta Moyado

Directora de tesis
Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Comité evaluador:

Dr. Armando Morales Carballo
M.C. Melby Guadalupe Cetina Vázquez

2018
Centro de Investigación de Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México.

INVESTIGACIÓN FINANCIADA POR EL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

NAYELI HUERTA MOYADO

NÚMERO DE BECARIA: 777117

Con dedicatoria especial para mí primogénita: Aitana.

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios por permitirme realizar mi maestría. Agradezco también, a todas las personas que han compartido sus conocimientos conmigo, contribuyendo así en mi formación educativa, profesional y personal.

A mi madre Edilia, mi pilar fuerte, la única persona que siempre ha creído en mí y a quien debo la realización de muchos sueños. A mi esposo Víctor Manuel, quien me han apoyado a lo largo de vida universitaria. A mis hermanos, Edwar, Francis Briseida, Xochitl y Johana Michelle, mis motores para seguir adelante. A mi padre Miguel Ángel y demás familiares por su apoyo, ánimo y cariño incondicional que siempre han mostrado conmigo.

A la Dra. Guadalupe Cabañas-Sánchez, directora de esta tesis, por todo el apoyo brindado, la disposición y orientación invaluable para llevar a cabo este trabajo.

A mis compañeras, Rosa Iris, Diana y Carolina, por todas las experiencias compartidas, haciendo esta estadía mejor.

A mis revisores, el Dr. Armando Morales Carballo y la M.C. Melby Guadalupe Cetina Vázquez, por todos los aportes que han sido significativos para la mejora de este trabajo.

A los estudiantes del quinto grado grupo “C” de la Escuela Primaria Dr. Alfonso G. Alarcón, por su resolución a las tareas propuestas; así como también al profesor responsable del grupo y a los directivos por darme la oportunidad de aplicar mi instrumento de exploración en dicha institución.

Finalmente, agradezco a mis profesores de la maestría, que hacen parte de este proceso integral de formación.

Tabla de contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

La investigación que se reporta es de tipo cualitativo, de carácter exploratorio y descriptivo. Tuvo como fin, explorar el pensamiento funcional que manifiestan estudiantes de quinto grado de una escuela primaria urbana, de Zumpango, en el estado de Guerrero. El contexto del estudio, fueron tareas que refieren a sucesiones con progresión aritmética de orden uno, asociadas a patrones figurales. Con base en ello, se demandó a los estudiantes de forma implícita, establecer una generalización, a partir del reconocimiento de las relaciones presentes entre dos cantidades que varían en una sucesión de patrones específica.

El pensamiento funcional es una de las propuestas del enfoque de enseñanza conocido como “álgebra temprana” (*Early Algebra* en inglés), el cual consiste en la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, a fin de incrementar la comprensión de los niños sobre los conceptos algebraicos, y la probabilidad de éxito en el estudio del álgebra, principalmente en secundaria (Kaput 1998: 2000). El desarrollo de este tipo de pensamiento es una de las hebras clave del pensamiento algebraico, ya que es propicio para introducir y desarrollar el álgebra escolar, permitiendo un proceso de construcción, descripción, razonamiento y generalización sobre variables que se encuentran relacionadas (Blanton, 2008). Involucra relaciones generalizadoras entre cantidades covariacionales y que representa el razonamiento con esas relaciones a través del lenguaje natural, notación algebraica (simbólico), tablas y gráficos (Smith, 2008). El trabajo con patrones juega un papel fundamental en el desarrollo de este tipo de pensamiento, en razón de que se constituyen en un poderoso vehículo para comprender las relaciones dependientes entre las cantidades que subyacen a las funciones matemáticas. La generalización es una característica importante del pensamiento funcional (Blanton et al., 2015) y es la máxima demanda cognitiva planteada a los estudiantes a partir de las tareas, por encima de lo que establece el currículum de educación primaria en México.

¿Qué evidencian los resultados? que los estudiantes primaria, son capaces de reconocer patrones (de recurrencia y de correspondencia), y establecer generalizaciones apoyados de las estructuras aditivas y multiplicativas. Así también, que las tareas que involucran a los patrones figurales jugaron un papel fundamental, ya que favorecieron el que los estudiantes organizaran los casos, trabajaran con casos particulares, lo que derivó en el reconocimiento del patrón (de recurrencia y/o de correspondencia), y el establecimiento de relaciones entre las dos variables involucradas, ayudando esta última a deducir perceptualmente y simbólicamente una estructura algebraicamente útil, esto es, una generalización (implícita).

Para efectos de organización, la presente investigación se reporta en seis capítulos. En el primero se describe el problema y contexto de investigación, fundamentalmente se abordan diferentes antecedentes del estudio, se problematiza la importancia del pensamiento funcional y se plantean las siguientes preguntas particulares de investigación: a) ¿Qué tipo de representaciones usan los estudiantes para expresar sus ideas acerca de una actividad que refiere a sucesiones con progresión aritmética de orden uno? b) ¿Qué tipos de enfoques funcionales y generalizaciones reconocen y establecen los estudiantes en una actividad de sucesiones con progresión aritmética de orden uno?

El segundo capítulo presenta los fundamentos teóricos de la investigación, considerando conceptos y formas claves de analizar el pensamiento funcional. En el tercer capítulo se aborda el contenido matemático de esta investigación, que refiere a las progresiones aritméticas de orden uno. Además, se presenta un análisis de contenido matemático del currículo de primaria, nivel educativo en el que se centra el estudio. Este análisis fue fundamental en el diseño de las tareas usadas en la exploración, por las consideraciones que confiere, desde la postura teórica-metodológica que lo sustenta.

El capítulo cuatro presenta los aspectos metodológicos en la que se sustenta la elaboración de las tareas y el análisis de los datos. En el capítulo cinco se muestran los resultados de la investigación. Finalmente, el capítulo seis discute conclusiones y reflexiones finales.

Capítulo 1
El Problema y contexto de investigación

En este apartado se describe el problema y contexto de investigación, fundamentalmente se abordan diferentes antecedentes del estudio, se problematiza la importancia del pensamiento funcional y se plantea la pregunta, objetivo y preguntas particulares de investigación.

1.1. El álgebra temprana como un enfoque de enseñanza

Las investigaciones en Educación Matemática han abordado el problema del estudio del álgebra desde los primeros años de escolaridad (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 1998, 2000; Rivera, 2013), a fin de desarrollar desde edades tempranas maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas. Se trata de un enfoque de enseñanza, al que se le conoce como álgebra temprana (*Early Algebra* en inglés). En términos generales esta expresión considera el álgebra desde una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de las relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000). En palabras de Kaput (2000) se trata de una "algebrización del currículo", que consiste en la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Comprende en definitiva la instrucción a estudiantes de 6 a 12 años tanto de pensamiento algebraico como de las relaciones algebraicas (Vergel, 2014).

El pensamiento algebraico temprano se remite a tres prácticas (Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011; Brizuela & Blanton, 2014): la generalización, la representación y el razonamiento. Estas prácticas se derivan del trabajo de Kaput (Kaput, 2008, p.11) que describe dos aspectos fundamentales del álgebra:

1) Álgebra como la simbolización sistemática de generalizaciones con base en regularidades y restricciones, y;
2) Álgebra como el razonamiento y las acciones sintácticamente guiadas sobre generalizaciones que se expresan en sistemas simbólicos convencionales.

Estos aspectos atraviesan tres líneas longitudinales del álgebra escolar:

- Álgebra como el estudio de las estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones (por ejemplo, álgebra como aritmética generalizada);
- Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y la variación conjunta, y;
- Álgebra como la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelado para expresar y apoyar el razonamiento acerca de situaciones siendo modelado.

La idea central que sugieren (Kaput, 1998, 2000, 2008; Blanton et al., 2011; Brizuela & Blanton, 2014) es que el álgebra temprana enriquece la enseñanza tradicional de las matemáticas, en los diferentes niveles educativos, facilitando a los alumnos un desarrollo adecuado del Pensamiento algebraico. De esta manera se puede organizar la enseñanza de la Aritmética y del Álgebra evitando saltos, rupturas y cortes didácticos entre ambas; y se establecen tres puntos básicos para comenzar con el álgebra temprana: Aritmética y razonamiento numérico, Aritmética y razonamiento cuantitativo, Aritmética y funciones.

1.2. El álgebra temprana en el ámbito Nacional e Internacional

En el ámbito curricular, la NCTM (2000) plantea el desafío del tratamiento del álgebra en el currículo de educación primaria de Estados Unidos, desde un enfoque en el que más allá de favorecer el trabajo algorítmico y manipulación simbólica en los estudiantes, se atienda a la comprensión de conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos, así también, de su uso para en él registrar sus ideas. Las expectativas que declara para tercer, cuarto y quinto grado de primaria, en el marco del pensamiento algebraico consisten de (NCTM, 2000, p.158):

- Comprender patrones, relaciones y funciones: describir, extender y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos; representar y analizar patrones y funciones, utilizando palabras, tablas y gráficos.

- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos: identificar tales propiedades como conmutatividad, asociatividad y distributividad y usarlas para calcular con números enteros; representar la idea de una variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo; expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones.
- Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas: modelar situaciones problemáticas con objetos y usar representaciones tales como gráficos, tablas y ecuaciones para sacar conclusiones.
- Analizar cambios en varios contextos: investigar cómo un cambio en una variable se relaciona con un cambio en una segunda variable; identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables y compararlas.

Con base en ello, se espera que al culminar esos grados de escolaridad, los estudiantes sean capaces de comprender patrones, relaciones y funciones, así como también representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas, utilizando símbolos algebraicos y modelos matemáticos para comprender relaciones cuantitativas.

En el currículum de primaria en México por su parte, el enfoque de enseñanza del álgebra temprana se reconoce a partir de la reforma educativa de 2011, a través de los contenidos matemáticos, más que en los estándares curriculares establecidos para ese nivel educativo. Se articulan al eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SN-PA) y de manera más específica, en el programa de matemáticas y en los libros Desafíos Matemáticos para el alumno y Desafíos Matemáticos para el profesor, distribuidos por la SEP (Cabañas-Sánchez, Salazar & Nolasco-Hesiquio, 2017).

Los contenidos relativos al eje SN-PA se orientan a potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, de primero a sexto grado de primaria. Aluden a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra:

- La modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético. Encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira, en la educación básica, el estudio de la geometría y la medición.
- La exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán ser generalizadas con el álgebra.
- La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

En el contexto de las investigaciones en México sobre pensamiento algebraico temprano, se ha caracterizado el tipo de tareas que lo potencian, desde el libro de texto de matemáticas de primaria (e.g., Cabañas-Sánchez, Salazar & Nolasco-Hesiquio, 2017; López-Mojica y Martínez, 2017; Salazar, 2017). En ese mismo marco institucional, Aké (2017) reconoce en los libros de texto de matemáticas de primaria, el carácter algebraico de la actividad matemática y las tareas que permiten promover el razonamiento algebraico en dicho nivel educativo. López-Mojica, Cárdenas, Sánchez y Aceves (2017) por su parte, evidencian el pensamiento algebraico desarrollado por niños con síndrome de Down, con base en los procesos cognitivos de construcción de un patrón geométrico.

1.3. El pensamiento funcional como una de las hebras claves del pensamiento algebraico

Como se afirma en Tanışlı (2011), el pensamiento funcional es una de las hebras claves del pensamiento algebraico y además, es considerado un tema importante y central en matemáticas. Este tipo de pensamiento (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2015), implica: (a) generalizar las relaciones entre cantidades covariantes; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras usando lenguaje natural, notación variable, tablas y gráficos; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional. Incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos (Fuentes, 2014). Por lo que es propicio para introducir y desarrollar el álgebra escolar, permitiendo un proceso de construcción, descripción, razonamiento y generalización sobre variables que se encuentran relacionadas (Blanton, 2008).

Este tipo de ideas, como sostiene Radford (2018),

> "… van en contra de la concepción curricular tradicional de que el álgebra sólo se puede aprender después de que los alumnos tengan un conocimiento suficiente de aritmética, lo que excluyó, hasta hace poco, el álgebra de la escuela primaria en muchos currículos de todo el mundo…" (Radford, 2018, pp. 4-5).

Existe una conexión estrecha entre el álgebra temprana con el pensamiento funcional, pues se considera que el estudio de las funciones es un punto de entrada importante en el pensamiento algebraico temprano (Carraher & Schliemann, 2007). Esto ha sido respaldado desde los estándares de aprendizaje de los Estados Unidos para los grados elementales (e.g., NCTM, 2000). Esta conexión con el álgebra temprana asegura la importancia de las funciones en los grados elementales, plantea además, preguntas importantes con respecto a la naturaleza de la comprensión de las relaciones funcionales de los niños y cómo surge esta comprensión (Blanton et al., 2015).

La investigación ha evidenciado (e.g. Blanton & Kaput 2004; Blanton, et al, 2015; Tanışlı, 2011) que cuando el currículo y la enseñanza dan la oportunidad a los niños pequeños de involucrarse en el pensamiento funcional desde los grados inferiores, son capaces de transitar lingüísticamente de los registros icónicos y de lenguaje natural desde preescolar, a los sistemas simbólicos de notación de grado tres. De otra parte, Blanton y colaboradores (2015) sostienen que las prácticas del pensamiento algebraico temprano -generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas y estructura- pueden integrarse con éxito en los grados elementales inferiores.

En ese contexto, la investigación ha documentado que los niños de preescolar (e.g., Blanton y Kaput, 2004) reconocen patrones en datos. En primaria (Blanton 2008; Cañadas, Brizuela & Blanton, 2016; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Kaput & Blanton 2005; Vergel, 2014), se ha evidenciado cómo los niños desarrollan y usan una variedad de herramientas de representación para razonar sobre las funciones, pueden describir en palabras y símbolos relaciones recursivas, covariacionales y de correspondencia en datos, así como usar lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas. Otros estudios (e.g., Jurdak & El Mouhayar, 2014; Cañadas y Fuentes, 2015; Morales, Cañadas, Brizuela & Gómez, 2016) han aislado y caracterizado el tipo de estrategias que desarrollan niños de primaria mientras trabajan con patrones figurales. Destacan las de conteo, fragmentación, recursiva, funcional y objeto entero (Jurdak & El Mouhayar, 2014), operatoria, particularizar, de relación directa e inversa, respuesta directa e inadecuada (Morales et al., 2016), entre otras.

Cañadas et al. (2016) documentan cómo los estudiantes de segundo grado comprenden y representan relaciones funcionales de la forma $y = 2x$. Reconocen la relación como una regla de correspondencia, logrando la generalización de manera verbal, haciendo uso de estrategias como: "contando por dos" y/o "duplicando".

Tanışlı (2011) por su parte, documenta cómo los estudiantes de quinto grado de primaria a pesar de las diferencias en su nivel de logro, descubren la relación de correspondencia al trabajar con tablas de funciones lineales y generalizan esta relación. Con base en ello, afirma que los estudiantes pensaron en la covariación mientras trabajaron con tablas. También muestra las formas alternativas de pensar de los estudiantes en la generalización de la relación de correspondencia. Reconocen, que se presentan cuando los estudiantes se enfocan en analizar las tablas y construir un patrón mediante la determinación de la diferencia entre cada variable dependiente y su correspondiente variable independiente ($f(n) - n = g\ (n)$), exhibiendo una manera alternativa de generalización de la forma $n + g\ (n) = f\ (n)$.

El estudio longitudinal de tres años (desde grado 3 a 5) de Stephens y colaboradores (2017) evidencia que las habilidades de los niños para generalizar y representar relaciones funcionales incrementan. Afirman que este tipo de pensamiento puede servir como un aspecto importante de entrada en el álgebra por su implicación en la generalización de relaciones entre cantidades; al representar esas relaciones de múltiples maneras usando lenguaje natural, notación algebraica formal, tablas y gráficos; y para razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función.

Rivera y Becker (2011) por su parte, evidencian la mejora gradual en la capacidad que desarrollan los estudiantes para generalizar el patrón figural a numérico y viceversa, a través de un estudio longitudinal de tres años (de sexto a octavo grado) en el contexto de generalizaciones de patrones figurales. Destacan el desarrollo del pensamiento multiplicativo de los estudiantes en la generalización de patrones y el significativo papel de la mediación sociocultural en el fomento del crecimiento en las prácticas de generalización.

1.4. Planteamiento del problema

El desarrollo del pensamiento funcional en la educación primaria es una propuesta novedosa para la introducción del concepto de función, pretendiendo aminorar las dificultades del álgebra escolar en los grados posteriores, aumentando la probabilidad de éxito en el álgebra formal. Esto es posible debido a que el pensamiento funcional se ha conceptualizado ampliamente, para incorporar la construcción y la generalización de patrones y relaciones, utilizando diversas herramientas lingüísticas y representacionales y el tratamiento de relaciones generalizadas o funciones que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio (Blanton & Kaput, 2011). La investigación ha documentado además, que una de las actividades que apoyan el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros grados son los patrones, pues son un poderoso vínculo para entender las relaciones dependientes entre las cantidades que subyacen a las funciones matemáticas (Tanışlı, 2011). Particularmente, el uso de tareas con patrones figurales permite en los estudiantes la emergencia de diferentes tipos de estructuras algebraicamente útiles.

> Los patrones figurales implican a las formas como los objetos principales de una generalización. Al igual que con todas las formas en matemáticas, se analizan en términos de sub configuraciones o partes o componentes que operan o tienen sentido dentro de algunas estructuras interpretadas. (Rivera, 2013, p.66).

Los estudios internacionales revelan, cómo los niños de primaria desarrollan ideas algebraicas tempranas, usando diferentes representaciones y notaciones simbólicas, apoyados de estructuras como la aditiva y la multiplicativa (e.g. Blanton & Kaput, 2004; Rivera & Becker, 2011; Tanışlı, 2011; Rivera, 2013). También, se han reportado dificultades al momento de generalizar en relaciones funcionales (Tanışlı, 2011), y que la mayoría de los estudiantes tienden a identificar la relación de recurrencia, impidiendo llegar a la generalización (Blanton & Kaput, 2015).

Sin embargo, se sabe relativamente poco, acerca del pensamiento funcional desarrollado por niños mexicanos y de las representaciones que construyen para arribar a ellas. Se requiere mayor evidencia desde la investigación, acerca de la forma en que los estudiantes de primaria en México, reconocen patrones en sucesiones, del tipo de representaciones que usan, de las relaciones que establecen en ese contexto y cómo las expresan. Este trabajo, está enfocado en este problema, y se plantea la pregunta de investigación siguiente ¿De qué manera los estudiantes de primaria evidencian el pensamiento funcional?

Objetivo: Analizar el pensamiento funcional de estudiantes de quinto grado de primaria en tareas que refieren a sucesiones de figuras con progresión aritmética de orden uno.

Con este fin, se abordan las siguientes preguntas particulares de investigación:

a) ¿Qué tipo de representaciones usan los estudiantes para expresar sus ideas acerca de una actividad que refiere a sucesiones con progresión aritmética de orden uno?

b) ¿Qué tipos de enfoques funcionales y generalizaciones reconocen y establecen los estudiantes en una actividad de sucesiones con progresión aritmética de orden uno?

Capítulo 2
Fundamentos Teóricos

El estudio se enmarca en el pensamiento funcional que evidencian niños de primaria al resolver tareas que refieren a sucesiones de figuras con progresión aritmética de orden uno. Toma como base, las relaciones que establecen entre cantidades variantes y cómo las generalizan, los tipos de representaciones que usan para expresar estas relaciones y cómo las justifican, así también, sus formas de razonamiento en ese ámbito.

2.1. Pensamiento funcional y tipos de relaciones funcionales

El estudio del pensamiento funcional se considera de suma importancia por dos grandes razones: 1) es un tema importante y central en matemáticas, y 2) se concibe como una de las hebras clave del pensamiento algebraico porque implica establecer generalizaciones a partir de cómo se relacionan los datos dentro de una situación funcional.

El pensamiento funcional se entiende en el sentido de Smith (2008), quien lo define como:

> El pensamiento representacional que se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente los tipos de pensamiento que conducen desde relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esa relación entre instancias. La parte de razonamiento algebraico del pensamiento funcional ocurre cuando los niños inventan sistemas de representación apropiados para representar una generalización de una relación entre cantidades variables. (p.143)

También se refiere a las ideas de cambio cualitativo, cambio cuantitativo, relaciones entre estos cambios y estas relaciones para resolver problemas (Warren y Cooper, 2005, en Cañadas et al., 2016).

La génesis del pensamiento funcional “comienza cuando un individuo se involucra en una actividad, elige prestar atención a dos o más cantidades variables, y luego comienza a enfocarse en la relación entre esas cantidades” (Smith, 2008, p.45). Es decir, involucra relaciones generalizadoras entre cantidades covariacionales y que representa el razonamiento con esas relaciones a través del lenguaje natural, notación algebraica (simbólico), tablas y gráficos.

En una relación funcional, los valores de una variable (variable dependiente) varían según los valores de la otra (variable independiente). Atendiendo a ambos tipos de variables, se distinguen entre "relación funcional directa" y "relación funcional inversa", según si se conoce el valor de la variable independiente y se desconoce el de la variable dependiente, o viceversa (figura 2.1).

Valor conocido		Valor desconocido	Relación Funcional
Variable independiente	→	Variable dependiente	Directa
Variable dependiente	→	Variable independiente	Inversa

Figura 2. 1. Relación funcional directa e inversa.

2.2. Enfoques funcionales: Modos de analizar patrones y relaciones entre cantidades

El contexto del estudio son situaciones que refieren a sucesiones de figuras con progresión aritmética de orden uno. Las figuras de estas sucesiones, están construidas de una manera bien definida, y siguen una regla o patrón predecible en su construcción.

En el análisis del pensamiento funcional, lo variacional es fundamental, de ahí que, se adopten los enfoques funcionales como modos de analizar patrones y relaciones entre cantidades (Pinto & Cañadas, 2018; Pinto 2016; Tanışlı, 2011; adaptado de Smith, 2008):

Recursividad: Implica reconocer la variación o el valor del patrón (patrón recursivo) dentro de una secuencia de valores, enfocándose sólo en una de las variables involucradas. Por ejemplo, si la relación involucra dos variables (dependiente e independiente), la recursividad se daría: "cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta "$\boldsymbol{x}$" unidades" o "cuando el valor de la variable independiente aumenta "$\boldsymbol{y}$" unidades".

Covariación o pensamiento covariacional*:* Implica reconocer la variación o el valor del patrón (patrón recursivo) dentro de una secuencia de valores, enfocándose en todas las variables involucradas. Si la relación involucra dos variables (dependiente e independiente), la covariación se centraría en la variación de las dos variables simultáneamente, es decir, “cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta "$\boldsymbol{x}$" unidades, el valor de la variable independiente aumenta” "$\boldsymbol{y}$" unidades, o viceversa.

Correspondencia: Consiste en reconocer la correlación entre los pares correspondientes de las variables involucradas. Si la relación involucra dos variables (dependiente e independiente), la correspondencia se daría “si el valor de patrón de la variable dependiente es "$\boldsymbol{x}$", el valor de la variable independiente es "$\boldsymbol{y}$" ”, o viceversa.

Se ejemplifican los enfoques funcionales, con base en la tarea 1 del instrumento de exploración de este trabajo (figura 2.2). La tarea, sitúa al estudiante en una relación funcional de dos variables: número de figura (variable independiente) y número de fósforos (variable dependiente). Dadas ciertas condiciones y etapas figurales de los patrones, se espera que identifique una regularidad para determinar términos consecutivos y no consecutivos (cercanos y/o lejanos). A partir de ello, que exprese y/o represente la relación funcional directa de la forma $f(n) = 3n + 1$.

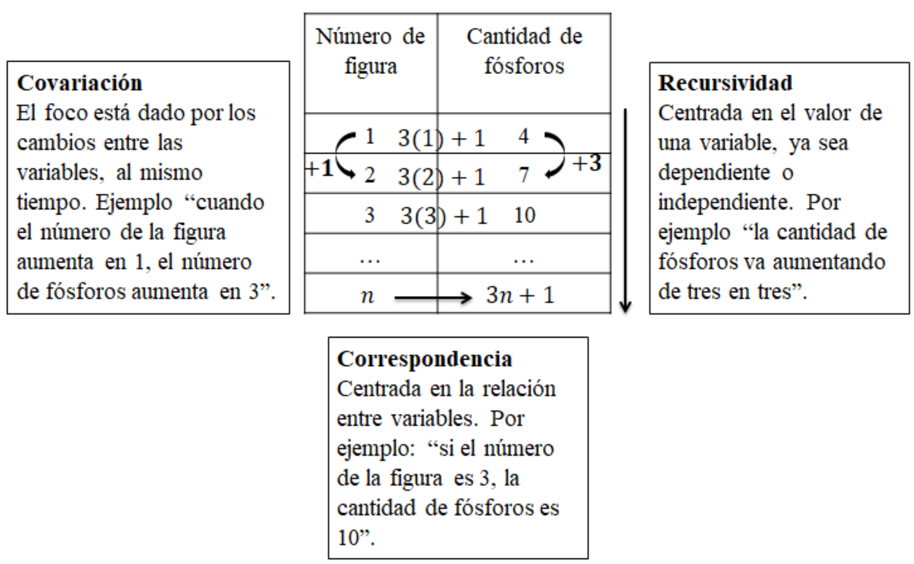


Figura 2. 2. Ejemplo de enfoques funcionales (Pinto & Cañadas, 2018; Pinto 2016; Tanışlı, 2011; adaptado de Smith, 2008).

2.3. Patrones matemáticos

Una de las actividades que apoyan el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros grados son los patrones. Las actividades con patrones son un poderoso vínculo para entender las relaciones dependientes entre las cantidades que subyacen a las funciones matemáticas (Tanışlı, 2011).

Un patrón corresponde a una situación que se repite con cierta regularidad (Castro, 1995). El concepto de **patrón matemático** se concibe en el sentido de Mulligan y Mitchelmore (2009), como "cualquier regularidad predecible, normalmente involucrando relaciones numéricas, espaciales o lógicas" (p.34). Estos investigadores sostienen además, que en la infancia temprana, los patrones que los niños experimentan incluyen patrones de repetición, estructurales espaciales y de crecimiento.

Particularmente, el uso de tareas con patrones figurales permite en los estudiantes la emergencia de diferentes tipos de estructuras algebraicamente útiles.

> Los patrones figurales implican a las formas como los objetos principales de una generalización. Al igual que con todas las formas en matemáticas, se analizan en términos de sub configuraciones o partes o componentes que operan o tienen sentido dentro de algunas estructuras interpretadas. (Rivera, 2013, p.66)

Los patrones figurales están regidos mediante un patrón numérico. Un **patrón numérico**, de acuerdo con Bishop (2000), consiste de "una secuencia de números en la que existe una regla bien definida para calcular cada número a partir de los números anteriores o desde su posición en la secuencia" (p.110). En un patrón figural, los números se relacionan con una secuencia de figuras, en las que cada una de estas figuras se deriva de la figura anterior mediante algún procedimiento bien definido. Se dice que un patrón figural es lineal si cada número se obtiene al agregar un incremento constante al número anterior o, de forma equivalente, si cada número es una función lineal de su posición en la secuencia.

2.4. Generalización y Generalización de patrones

De otra parte, las tareas o situaciones que implican a la generalización, pueden considerarse como una forma para introducir a los estudiantes al álgebra. En particular, "la generalización a través de patrones y el uso de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela elemental, y un punto de partida para familiarizar a los niños de este nivel con la notación algebraica" (Aké, 2013, p.37). Por ello, una de las demandas cognitivas que plantean las tareas a los estudiantes en este trabajo, es la generalización de patrones (GP) en el marco de patrones figurales con sucesiones aritméticas de orden uno (o relación funcional lineal). De manera que el concepto de generalización es básico en este trabajo. Y se entiende en el sentido de Davydov (2008), quien la define como:

> La generalización implica la búsqueda de alguna propiedad invariante dentro de una clase de objetos.... En general, como algo recurrente o estable, es una invariante definida de las diversas propiedades de un tipo dado de objetos, es decir, es esencial. En muchos trabajos, los términos "general" y "esencial" se usan indistintamente: "Para identificar los atributos como esenciales, se debe encontrar que son generales o comunes a un cierto conjunto de objetos pero no a otro conjunto de objetos. (p.74)

2.5. Estructura matemática y tipos de generalización

La *estructura matemática* es fundamental en la *generalización de patrones*, y ambos, son sustanciales en el aprendizaje temprano de las matemáticas (Mulligan & Mitchelmore, 2009). La generalización de patrones implica para el estudiante, coordinar sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas para la construcción y justificación de una estructura plausible y algebraicamente útil (Rivera, 2010).

Por estructura matemática, se comprende como "la identificación de propiedades generales que se instancian en situaciones particulares como relaciones entre elementos" (Mason, Stephens y Watson, 2009, p.10). Esta estructura matemática puede inferirse a través de las representaciones (simbólicas, verbales o gestuales) a las que el estudiante recurre para establecer una generalización, más específicamente en el desarrollo de esas estructuras dado que no siempre pueden ser capaces de establecerlas. De otra parte, las estructuras que construyen los niños de primaria, son incipientes, como las denomina Rivera (2013), en las que transitan de lo gestual/verbal para expresarlas en términos de las estructuras aritméticas.

Rivera (2010, citado por Rivera y Becker, 2011) destaca dos formas básicas algebraicas de desarrollar una generalización de patrones que involucra patrones figurales de acuerdo a la estructura matemática:

1) *Generalizaciones constructivas:* Son aquellas que los alumnos construyen a partir de las etapas conocidas en un patrón figural como resultado de percibir cognitivamente las figuras de manera independiente, es decir, como partes constituyentes no superpuestas.

2) *Generalizaciones deconstructivas:* Son aquellas que los alumnos construyen a partir de las etapas conocidas como resultado de la percepción cognitiva de figuras como constituyentes superpuestos o por partes, es decir, realizan un proceso combinado de suma y resta que cuenta por separado cada sub-configuración y quita partes (lados o vértices) que se superponen.

Estos tipos de generalización refieren a fórmulas polinómicas aditivas o multiplicativas, que pueden expresarse de forma estándar o no estándar, se considera estándar cuando los términos de la formula polinómica están en forma simplificada, mientras que la no estándar contiene términos que se pueden simplificar más.

2.6. Representaciones

En razón de que el pensamiento en general, y el pensamiento funcional en particular, se evidencia a través de las formas de razonamiento, las representaciones desempeñan un papel importante en hacerlo visible. En el estudio del pensamiento funcional, son útiles para reconocer cómo los niños expresan y justifican relaciones entre cantidades covariantes. Rico (2009) concibe al hecho de representar como una práctica que comprende una multiciplidad de opciones. Sostiene, que la representación es más que un acto o estado mental, más bien, lo concibe como:

> "…un acto creador, consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo. No se trata de un cuadro mental, interior e incomunicable, sino el esfuerzo por recoger la polisemia de lo percibido, el desplazamiento que permite modificar su aspecto. No es un estado sino una práctica, una técnica, una manera de tratar lo percibido y lo pensado…" (Rico, 2009, p. 10).

En este sentido, las representaciones y la forma en que se conciben, refieren a ámbitos o contextos diversos. En matemáticas, comprenden a las notaciones simbólicas o gráficas o bien, expresiones verbales, con las que se hacen presentes y se nombran conceptos y procedimientos, así como las características invariantes, propiedades y relaciones más relevantes (Lupiáñez, 2016). De manera que cada concepto o estructura matemática necesita para su total comprensión, del empleo y juego combinado de más de un sistema de representación.

2.7. Sistemas de representación

Lupiáñez (2016) reconoce que las representaciones pueden organizarse, según sus características y propiedades, en diferentes sistemas de representación. Distingue además, dos grandes familias de sistemas: las representaciones simbólicas, y las gráficas.

> "Las simbólicas incluyen símbolos alfanuméricos que se emplean con unas reglas de procedimiento. Las representaciones gráficas son de tipo figurativo y también disponen de unas reglas de composición y de unos convenios de interpretación" (Lupiáñez, 2016, p.120).

La cantidad y tipos de sistemas de representación dependen del concepto que se trabaje, por ejemplo, para las sucesiones de números naturales es usual distinguir cuatro sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal (Cañadas, 2007) (Ver figura 2.3). El sistema de representación numérico contiene tres representaciones: la numérica simple, el desarrollo numérico y la tabla de valores (tabular). En el sistema gráfico están las representaciones recta numérica, ejes cartesianos y configuraciones discretas (pictórica). El sistema algebraico incluye las representaciones de ley de recurrencia y forma polinómica. Finalmente, el sistema de representación verbal es aquel que está regido por el uso del lenguaje cotidiano.

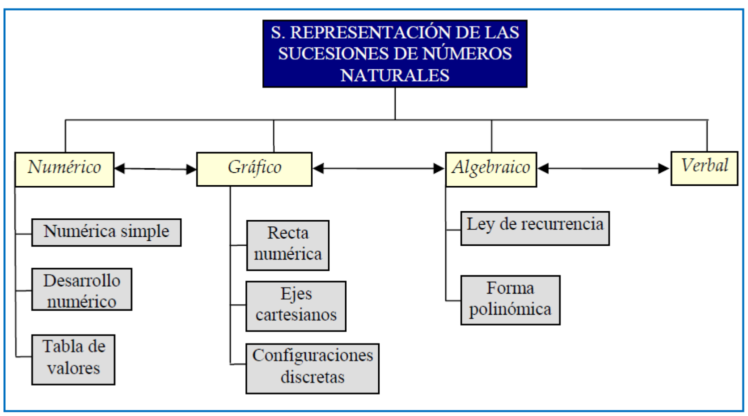


Figura 2. 3. Sistemas de representaciones de las sucesiones de números naturales (Cañadas, 2007, p.122).

A continuación, se muestran ejemplos de los distintos sistemas de representación de la sucesión de números pares.

2.7.1. Sistema de Representación Numérico

Considérese los primeros términos de la sucesión de números pares en:

- Representación numérica simple: $2, 4, 6, 8, \ldots$
- Representación desarrollo numérico: $2, 2+2, 2+2+2, 2+2+2+2, \ldots$
- Representación tabla de valores (Tabular):

Tabla 2.1. Primeros términos de la sucesión de números pares en su representación tabular

n	1	2	3	4	…
$f(n)$	2	4	6	8	…

2.7.2. Sistema de Representación Gráfico

- Representación recta numérica

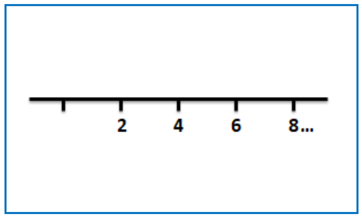


Figura 2. 4. Primeros términos de la sucesión de los números pares en su representación recta numérica.

- Representación plano cartesiano: Considérese que la variable independiente es el lugar que ocupa un término en la sucesión y la variable dependiente es el término del mismo (figura 2.5)

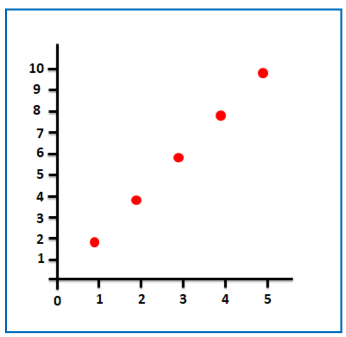


Figura 2. 5. Primeros términos de la sucesión de los números pares en su representación plano cartesiano.

- Representación configuraciones discretas (Pictórica)

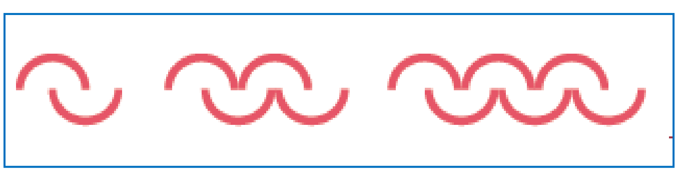


Figura 2. 6. Primeros términos de la sucesión de los números pares en su representación pictórica (SEP, 2011h, p.58)

2.7.3. Sistema de Representación Verbal

Se sirven del lenguaje natural para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos a representar. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2011). En nuestro ejemplo, será "sucesión de números pares"

2.7.4. Sistema de Representación Algebraico

El término general de la sucesión de los números impares se puede expresar algebraicamente mediante:

- Representación ley de recurrencia: $a_{n+1} = a_n + 2, a_0 = 2$
- Representación expresión polinómica funcional: $a_n = 2n$

En nuestra investigación también se consideran las representaciones múltiples, ya que en diferentes investigaciones referentes al pensamiento funcional se han reportado este tipo de representaciones.

2.7.5. Representaciones Múltiples

Van Somersen (1998, citado por Cañadas, Castro y Castro, 2011) consideran las representaciones múltiples como aquellas que resultan de la combinación de dos o más representaciones.

Capítulo 3
Contenido y análisis de contenido matemático

Un método que se ha venido utilizando desde hace varios años en la investigación en Matemática Educativa, es el Análisis de Contenido. Su uso se justifica porque se constituye en una herramienta poderosa para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto. El contenido matemático de esta investigación refiere al concepto de progresiones aritméticas de números naturales de orden uno.

3.1. Contenido Matemático

El contenido matemático de esta investigación refiere al concepto de progresiones aritméticas de números naturales de orden uno.

Los conceptos son los componentes de nuestro pensamiento, aquello con lo que pensamos. Son cruciales para entender e interpretar procesos mentales y psicológicos tales como categorización, inferencia, memoria, aprendizaje y decisión.

3.1.1. Progresión Aritmética

Por progresión aritmética se entiende como **"...** toda sucesión de números tales que uno cualquiera de ellos es igual al anterior añadiéndole un número fijo d, positivo o negativo, denominado razón de la progresión". Una progresión aritmética se indica mediante los elementos que la forman así:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1,} a_n$$

Estos elementos reciben el nombre de términos y la sucesión que forma puede ser creciente o decreciente según sea $d > 0 \; o \; d < 0$, también puede ser finita o infinita.

Una progresión aritmética es una sucesión particular a las que también se les conoce con el nombre de progresiones por diferencia en cuyo caso la razón d recibe el nombre de diferencia... (García, 2005)

3.1.2. Progresiones Aritméticas de Orden Superior

Un concepto más general que el de progresión aritmética ordinaria (presentado anteriormente), es el de progresión aritmética de orden superior.

Se denomina progresión aritmética de orden p a la sucesión de números resultantes de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable (García, 2005, p.258)

El polinomio del cual surge la progresión es el término general de la misma, es decir:

$$a_n = c_0.x^p + c_0.x^p + \cdots + c_p, siendo\ los\ c_i\ números\ conocidos$$

3.1.3. Progresiones Aritméticas de orden uno

Las progresiones aritméticas de primer orden (orden 1), que son las progresiones aritméticas ordinarias, tienen como término general $a_n = c_0.x + c_1$. En efecto, si se asignan a x los valores enteros consecutivos 0, 1,2,…, se obtiene:

$$c_1.\,c_0 + c_1.\,2c_0 + c_1.\,3c_0 \ldots progresión\ aritmética\ ordinaria\ con\ a_1 = c_1\ y\ \ d = c_0$$

De acuerdo con estas definiciones, las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno son sucesiones de números naturales cuyo término general se corresponde con una función polinómicas de primer grado. También llamadas *sucesiones de números naturales lineales* o simplemente *sucesiones lineales* (Stacey, 1989).

3.2. Análisis de contenido matemático

Para comprender la estructura conceptual, los significados y representaciones de este concepto, se analizó el contenido matemático del currículo de primaria, nivel educativo en el que se centra el estudio. Este análisis fue fundamental en el diseño de las tareas usadas en la exploración, por las consideraciones que confiere, desde la postura teórica-metodológica que lo sustenta.

El análisis de contenido matemático toma como base la propuesta de organizadores curriculares planteada en Rico y Fernández-Cano (2013) y en Rico y Moreno (2016), centrándonos principalmente, en la estructura y análisis formal, los sistemas de representación y la fenomenología, entendida como sentidos y modos de uso en los que el contenido de las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno tiene su campo de problemas.

El análisis se avoca en los diferentes modos de expresión y de uso del elemento matemático, las conexiones con distintas estructuras, la utilización de diferentes procedimientos y la diversidad de problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, como plantean Cifuentes y colaboradores (2014).

A continuación, se describen los tres organizadores que conforman el análisis de contenido.

Estructura conceptual. En este organizador, se identifican los aspectos formales y los cognitivos con que se caracterizan y describen los contenidos objeto de estudio, que en este trabajo, refieren a progresiones aritméticas de orden uno (o sucesiones lineales).

“Los aspectos formales se establecen en términos de nociones, conceptos, propiedades, razonamientos y demostraciones matemáticas. Los aspectos cognitivos se especifican en términos de la dicotomía conceptual/procedimental” (Rico, 2016, p. 161).

Lo conceptual /procedimental se analiza en términos de las destrezas, algoritmos, razonamientos y estrategias, articuladas precisamente con el concepto sucesiones lineales.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación refieren a las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros.

Fenomenología. La *fenomenología* implica a aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto y modos de uso.

3.2.1. Análisis de contenido de las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno

El análisis del contenido de las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno, en este trabajo, toma como base los planteamientos curriculares de la educación primaria mexicana. En ese contexto, se revisó el Plan de estudios de la escuela básica (primaria) (SEP, 2011a), los programas de matemáticas de primero a sexto grado publicados por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011b; SEP, 2011c; SEP, 2011d; SEP, 2011e; SEP, 2011f y SEP, 2011g), así como libros de texto Desafíos Matemáticos para el alumno (SEP, 2014a; SEP, 2014b; SEP, 2014c; SEP, 2014d; SEP, 2014e y SEP, 2014f) y los del profesor (SEP, 2014g; SEP, 2014h; SEP, 2014i; SEP, 2014j; SEP, 2014k y SEP, 2014l).

La revisión al plan de estudios de primaria y de los programas de matemáticas, se reconoce que el tema de las progresiones aritméticas forma parte de los contenidos del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico. Este tema se estudia a lo largo de los seis grados escolares de primaria, a través de patrones numéricos y figurales, con el fin de desarrollar habilidades en el reconocimiento del patrones recursivos y de correspondencia. Por cuanto al libro Desafíos Matemáticos para el alumno y para el profesor, es donde se evidencia el tipo de estructura conceptual, los sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso.

3.2.1.1. Estructura conceptual

Para construir la estructura conceptual de las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno, se centró en el estudio de la estructura matemática que configura el propio concepto. Con base en ello, se establecieron los conceptos y procedimientos que los articulan. En el campo conceptual, se identificaron (a) los elementos de una progresión aritmética; (b) las relaciones que existen entre ellos, y (c) las propiedades que puede tener una progresión. En el campo procedimental, los conocimientos se enuncian en (a) destrezas; (b) razonamientos, y (c) estrategias.

Campo conceptual

En el marco de este campo, se analizaron qué propiedades, elementos y relaciones configuran a las progresiones aritméticas como estructura matemática. Se establecieron las propiedades siguientes: monotonía, recurrencia, finitud, convergencia y acotación. Por cuanto a los elementos de las progresiones, el análisis se centró en los términos concretos de las progresiones aritméticas ($a_k = términos\ k - ésimos$) y el término general de la misma (a_n). En las relaciones se consideraron las relaciones que existen entre los elementos de las progresiones aritméticas: 1) la relación que se puede establecer entre los términos $k - ésimos$ de la sucesión y 2) entre los términos $k - ésimos$ y el término general.

En los libros de texto analizados, el estudio de las progresiones aritméticas de orden uno cumplen las propiedades siguientes: monotonía creciente, creciente y estacionaria (sucesiones constantes); recurrentes; finitas e infinitas; convergentes y divergentes, y acotadas (superiormente y/o inferiormente). Por cuanto a los elementos, se reconoce que a los estudiantes la máxima demanda cognitiva que el currículum de primaria les plantea, es la determinación términos concretos de las progresiones aritméticas, omitiendo la generalización (determinación del término general). Respecto de las relaciones, se reconoce a la relación que se puede establecer entre los términos $k - ésimos$ de la sucesión, promoviendo la recurrencia y a la identificación del patrón.

En los libros de matemáticas para el maestro, se definan conceptos asociadas a las sucesiones lineales. En primer grado por ejemplo, se definen conceptos como: sucesión numérica, modelo, patrón y secuencia de figuras. En segundo, definen el término de sucesión, sucesiones con progresión aritmética y nuevamente introducen el de patrón. En cuarto grado, aparece nuevamente el concepto de sucesión, así como el significado de término de una sucesión (figura 3.1).

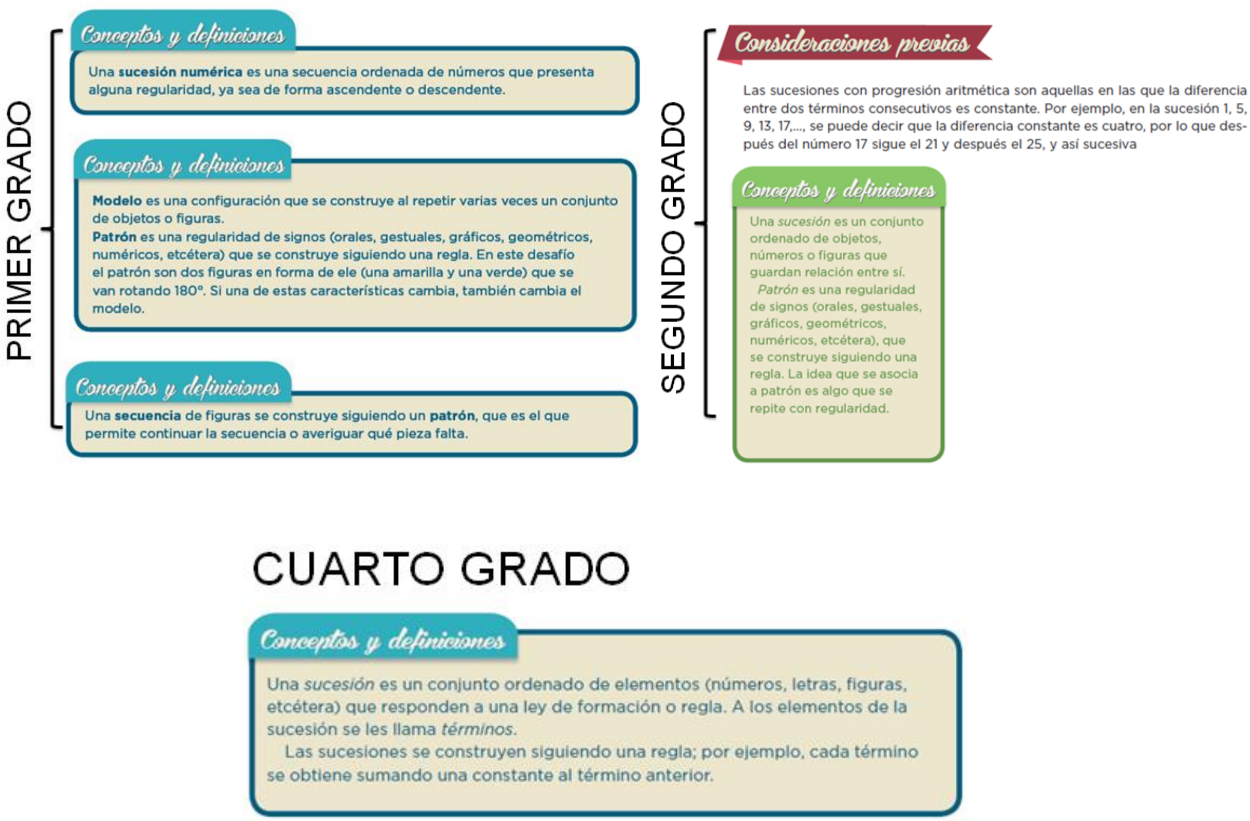


Figura 3. 1. Conceptos (y sus definiciones) asociadas al contenido de sucesiones lineales.

Campo procedimental

El análisis del campo procedimental, favoreció el reconocimiento de las destrezas (procedimientos bien definidos que incluyen expresiones simbólicas), los razonamientos (relaciones de inferencia en el concepto) y las estrategias (ejecución de los procedimientos dentro de la estructura conceptual) cuando trabajan con sucesiones lineales. Siendo las siguientes:

> Destrezas: Jerarquía de las operaciones; algoritmos de la suma, resta y la división; conocimiento de las propiedades de los números naturales; diversidad de representaciones de una sucesión lineal.
>
> Tipos de razonamientos: (a) inductivo — reconocimiento del patrón y formulación de conjeturas (para términos generales); y (b) abductivo —justificación de conjeturas.
>
> Estrategias: Estimación de resultados, cálculo mental, reconocimiento de la diversidad de elementos de una sucesión lineal y análisis del patrón figural.

Por cuanto a la mayor demanda cognitiva plateada a los estudiantes en las tareas en primaria, es la identificación del patrón o regularidad en patrones figurales y numéricos, ya sea para continuar la sucesión y/o encontrar términos faltantes. Lo que se diferencia en estos grados, es el tipo de sucesiones y el conjunto de números en que se trabaja. Por ejemplo, de primero a tercer grado son sucesiones lineales simples de números enteros (ver figura 3.2), mientras que en cuarto grado se les sitúa a trabajar con sucesiones compuestas con progresión aritmética y geométrica de números naturales (figura 3.3), en quinto grado, su estudio se remite a sucesiones simples con progresión aritmética y geométrica de números naturales y fraccionarios (figura 3.4) y en sexto grado son sucesiones simples con progresión aritmética y geométrica de números naturales, fraccionarios y decimales (figura 3.5).

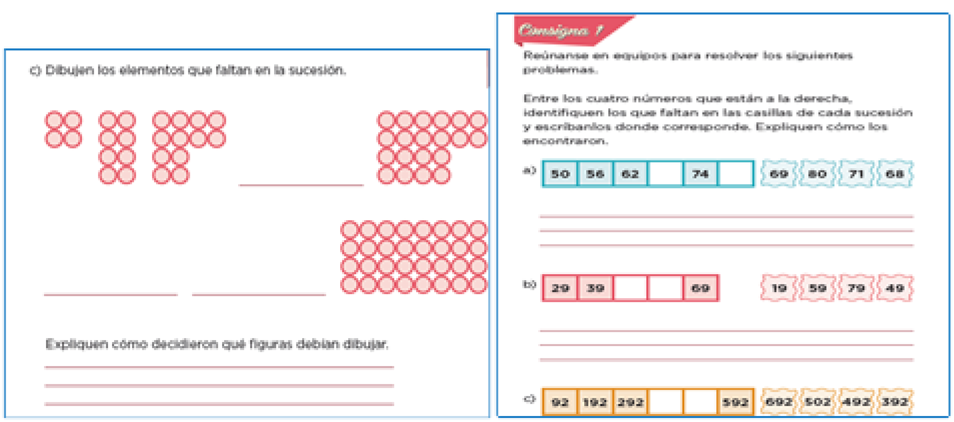
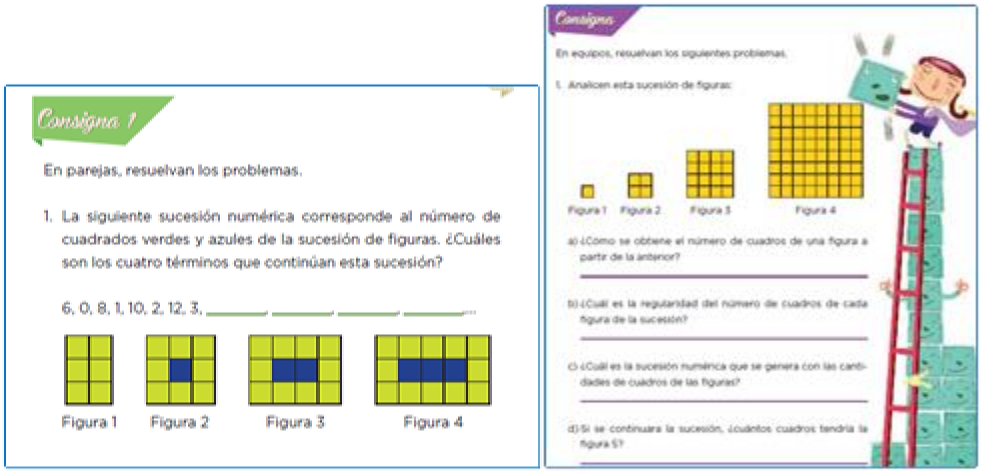


Figura 3. 2. Ejemplos de tareas sobre sucesiones plateadas de primero a tercero de primaria.



Consigna 1

En parejas, resuelvan los problemas.

1. La siguiente sucesión numérica corresponde al número de cuadrados verdes y azules de la sucesión de figuras. ¿Cuáles son los cuatro términos que continúan esta sucesión?

6, 0, 8, 1, 10, 2, 12, 3, ____, ____, ____, ____...

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Analicen esta sucesión de figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

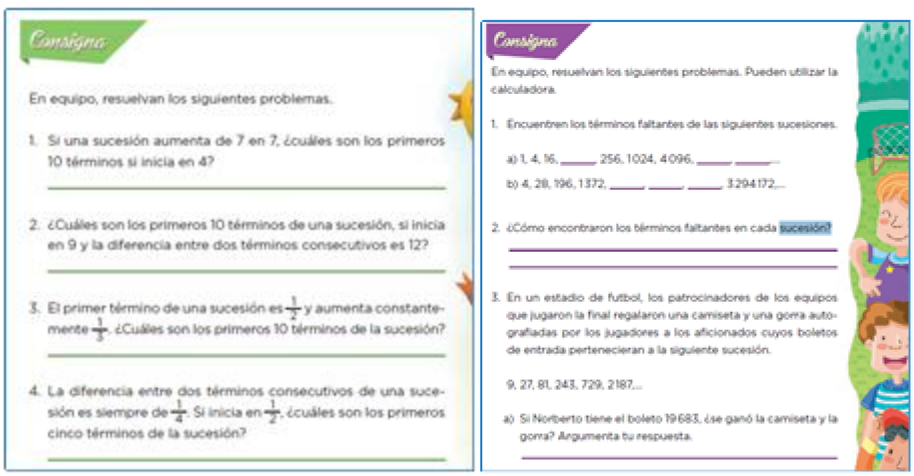
a) ¿Cómo se obtiene el número de cuadros de una figura a partir de la anterior?

b) ¿Cuál es la regularidad del número de cuadros de cada figura de la sucesión?

c) ¿Cuál es la sucesión numérica que se genera con las cantidades de cuadros de las figuras?

d) Si se continuara la sucesión, ¿cuántos cuadros tendría la figura 5?

Figura 3. 3. Ejemplos de tareas sobre sucesiones plateadas en cuarto grado de primaria.



Consigna

En equipo, resuelvan los siguientes problemas.

1. Si una sucesión aumenta de 7 en 7, ¿cuáles son los primeros 10 términos si inicia en 4?
2. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de una sucesión, si inicia en 9 y la diferencia entre dos términos consecutivos es 12?
3. El primer término de una sucesión es $\frac{1}{2}$ y aumenta constantemente $\frac{1}{3}$. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?
4. La diferencia entre dos términos consecutivos de una sucesión es siempre de $\frac{1}{4}$. Si inicia en $\frac{1}{2}$, ¿cuáles son los primeros cinco términos de la sucesión?

Consigna

En equipo, resuelvan los siguientes problemas. Pueden utilizar la calculadora.

1. Encuentren los términos faltantes de las siguientes sucesiones.

a) 1, 4, 16, ____, 256, 1024, 4096, ____, ____...

b) 4, 28, 196, 1372, ____, ____, ____, 3294172,...

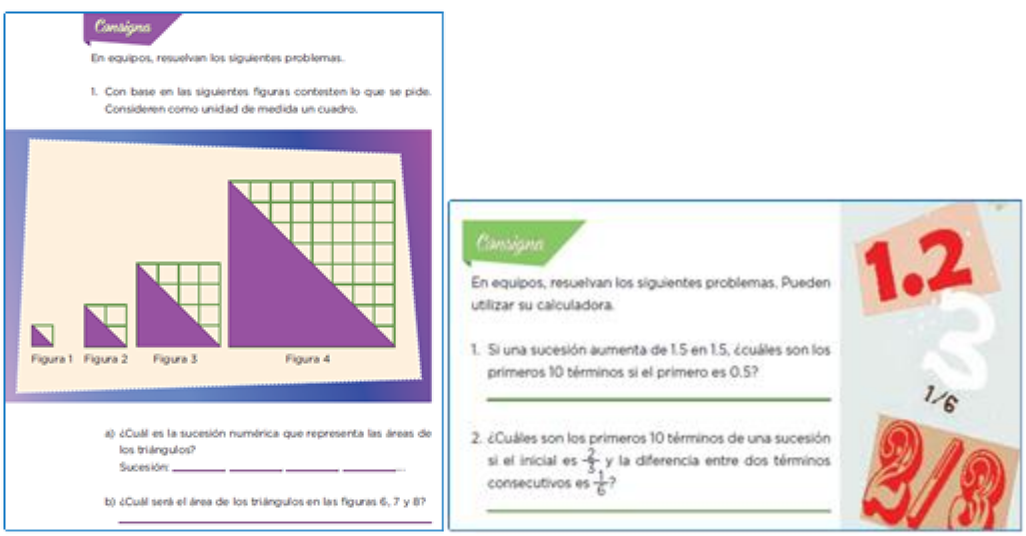
2. ¿Cómo encontraron los términos faltantes en cada sucesión?

3. En un estadio de futbol, los patrocinadores de los equipos que jugaron la final regalaron una camiseta y una gorra autografiadas por los jugadores a los aficionados cuyos boletos de entrada pertenecieran a la siguiente sucesión.

9, 27, 81, 243, 729, 2187,...

a) Si Norberto tiene el boleto 19683, ¿se ganó la camiseta y la gorra? Argumenta tu respuesta.

Figura 3. 4. Ejemplos de tareas sobre sucesiones plateadas en quinto grado de primaria.



Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Con base en las siguientes figuras contesten lo que se pide. Consideren como unidad de medida un cuadro.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuál es la sucesión numérica que representa las áreas de los triángulos?

Sucesión: ____, ____, ____, ____...

b) ¿Cuál será el área de los triángulos en las figuras 6, 7 y 8?

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas. Pueden utilizar su calculadora.

1. Si una sucesión aumenta de 1.5 en 1.5, ¿cuáles son los primeros 10 términos si el primero es 0.5?
2. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de una sucesión si el inicial es $\frac{2}{3}$ y la diferencia entre dos términos consecutivos es $\frac{1}{6}$?

Figura 3. 5. Ejemplos de tareas sobre sucesiones plateadas en sexto de primaria.

Finalmente, en este campo, se reconoce que las tareas de los libros de texto de primaria plantean a los estudiantes como máxima demanda cognitiva, el reconocimiento del patrón. Si bien, se les exige reconocer el patrón o regularidad y aplicarla, no se hace referencia a la recurrencia, es decir, obtener un término particular a partir del anterior. Por ende, al estudiante se le centra en un enfoque de recursividad y correspondencia.

3.2.1.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación aluden a las diferentes maneras en las que se puede mostrar un concepto matemático y sus relaciones con otros conceptos. Las progresiones aritméticas de números naturales pueden representarse de formas diferentes: numérica, gráfica, algebraica y verbal (Cañadas, 2007).

La representación numérica de las progresiones son aquellas que se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático, y se pueden representar en su forma numérica simple, mediante el desarrollo aritmético o en una tabla de valores. En los libros de texto se reconocen las siguientes:

Forma numérica simple: Se representan los términos de la progresión mediante números (Ver figura 3.6)

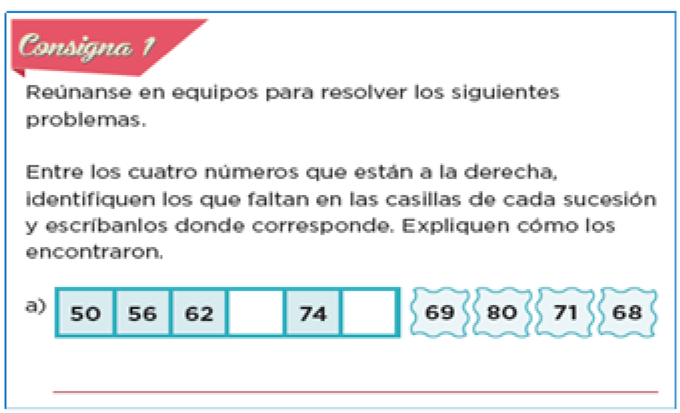
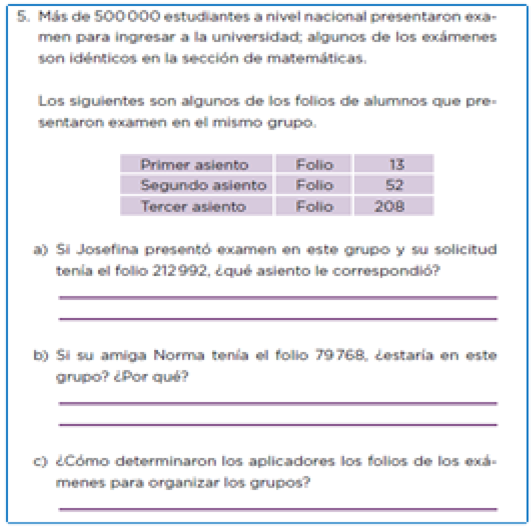


Figura 3. 6. Primeros términos de una sucesión con término general de la forma: $f(n) = 4n + 46$ en su representación numérica simple (SEP, 2014b, p.40)

Tabla de valores (tabular): Tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, donde se representan las relaciones entre los términos y la posición de los términos de la progresión (figura 3.7).



5. Más de 500 000 estudiantes a nivel nacional presentaron examen para ingresar a la universidad; algunos de los exámenes son idénticos en la sección de matemáticas.

Los siguientes son algunos de los folios de alumnos que presentaron examen en el mismo grupo.

Primer asiento	Folio	13
Segundo asiento	Folio	52
Tercer asiento	Folio	208

a) Si Josefina presentó examen en este grupo y su solicitud tenía el folio 212 992, ¿qué asiento le correspondió?

b) Si su amiga Norma tenía el folio 79 768, ¿estaría en este grupo? ¿Por qué?

c) ¿Cómo determinaron los aplicadores los folios de los exámenes para organizar los grupos?

Figura 3. 7. Sucesión con progresión aritmética de orden uno en su representación tabular (SEP, 2014e, p.163)

La representación gráfica de las progresiones son aquellas donde se utilizan únicamente recursos visuales, por lo general un dibujo, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico o algebraico, y se pueden representar en una recta numérica, en el plano cartesiano o mediante una configuración puntual. En los libros de texto se reconocen la siguiente:

Configuración puntual:

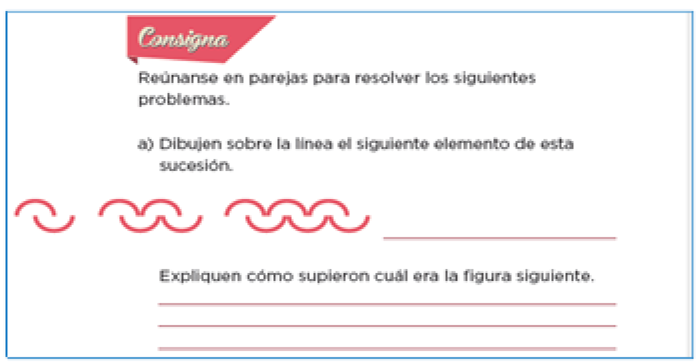


Figura 3. 8. Primeros términos de la sucesión de los números pares en configuración puntual (SEP, 2011b, p.38)

La representación algebraica de las progresiones aritméticas se caracteriza por el uso del simbolismo algebraico para expresar el término general, ya sea mediante la ley de recurrencia, en la que un término se expresa en función del anterior: $a_n = a_{n-1} + d$. O mediante la expresión polinómica funcional: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Sin embargo, en los libros de texto no se reconoce este tipo de representación, ya que se omite la generalización.

La representación verbal de las progresiones aritméticas de primer grado se sirve del lenguaje natural para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos a representar. Se puntualiza que en los libros de texto se reconoce de manera explícita la definición del concepto de progresión aritmética, sin embargo esta se encuentra en el apartado de consideraciones previas, omitiéndola en el apartado de conceptos y definiciones:

Definición de progresión aritmética:

Consideraciones previas

Las sucesiones con progresión aritmética son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Por ejemplo, en la sucesión 1, 5, 9, 13, 17,..., se puede decir que la diferencia constante es cuatro, por lo que después del número 17 sigue el 21 y después el 25, y así sucesivamente. Esto es lo que tendrán que descubrir los alumnos en este desafío, primero al determinar la figura que sigue y después la que falta. Pero también se les pide que digan cómo decidieron qué figura dibujar para que reflexionen acerca de la regularidad de crecimiento que seguramente encontraron.

Figura 3. 9. Definición explícita de progresión aritmética (SEP, 2011h, p.60)

Definición de los conceptos de sucesión y patrón:

Conceptos y definiciones

Una *sucesión* es un conjunto ordenado de objetos, números o figuras que guardan relación entre sí.

Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera), que se construye siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad.

Figura 3. 10. Primer definición explícita de los conceptos sucesión y patrón (SEP, 2011h, p.123)

> **Conceptos y definiciones**
>
> Una *sucesión* es un conjunto ordenado de elementos (números, letras, figuras, etcétera) que responden a una ley de formación o regla. A los elementos de la sucesión se les llama *términos*.
>
> Las sucesiones se construyen siguiendo una regla; por ejemplo, cada término se obtiene sumando una constante al término anterior.

Figura 3. 11. Segunda definición explícita de los conceptos sucesión y término (SEP, 2011j, p.33)

3.2.1.3. Sentidos y modos de uso

La fenomenología atiende a todos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido a un concepto matemático. También, posibilita determinar esos contextos en los cuales se utiliza determinado concepto, con el fin de formular las tareas que se espera desarrollen los alumnos.

En este sentido, a fin de reconocer los contextos en que se estudia a las progresiones aritméticas de orden uno en la escuela primaria mexicana (Reforma educativa 2011), se reflexionó en torno a la pregunta ¿de qué forma se usa el concepto de progresión aritmética de orden uno? Es así que se identificó que las progresiones aritméticas atienden varias funciones como: estrategias de conteo e identificación de variación entre dos cantidades. Mientras que las situaciones o problemas en que se realiza el trabajo con progresiones aritméticas de orden uno, son en sucesiones con patrón figural o numérico.

Se reconoce que en primaria se trabajan con los sistemas de representación gráfico, numérico y verbal. También, que los conceptos y definiciones de secuencia de figuras, patrón, sucesión, sucesión numérica y término de una sucesión se encuentran en los libros para el maestro. Además, que las tareas plateadas a los estudiantes en este nivel, están enfocadas en la relaciones de recursividad y correspondencia, omitiendo el estudio covariacional entre variables y la generalización (relación entre términos particulares y el término general).

El análisis de contenido matemático es una herramienta que puede dar una visión general tanto al profesor de matemáticas como a la investigación, acerca del contexto en el que se sitúa el estudiante cuando se enfrenta al estudio de sucesiones, es decir, conocer las propiedades, elementos y representaciones que se han utilizado. Abriendo así, la pauta para el diseño del instrumento de exploración que se pretende aplicar.

Capítulo 4
Aspectos Metodológicos

4.1. Tipo de Investigación

La investigación es de corte cualitativo, la cual "se ocupa de las relaciones entre las personas…lo que producen, piensan, dicen y lo que hacen frente y con los demás" (Abarca, Alpízar, Sibaja y Rojas, 2012, p.11). Específicamente de carácter exploratorio y descriptivo.

4.2. Población y contexto

Participaron en el estudio, treinta y un estudiantes (9 y 10 años de edad) matriculados en quinto grado, de la Escuela Primaria Dr. Alfonso G. Alarcón ubicada en la ciudad de Zumpango, del estado de Guerrero. Su participación se dio por invitación expresa al profesor titular del grupo. Los antecedentes académicos básicos para que se involucraran en el estudio, fue su habilidad para trabajar con los significados de la suma y la multiplicación, así como su experiencia en el estudio de patrones de recurrencia y de correspondencia. El estudio se desarrolló en el turno matutino, en salón de clases en que trabajan en condiciones normales de enseñanza este grupo.

4.3. Un marco para el pensamiento funcional

La exploración del pensamiento funcional, tomó como base el marco propuesto por Smith (2008, pp. 143-150), el cual refiere a seis actividades, en el contexto de tres fases. Es como sigue:

> **Fase I.** *Participar en una problemática dentro de alguna situación funcional*. Consiste en la creación de una problemática en un proceso individual para los estudiantes, centrándose en la relación entre dos o más cantidades variables. Esta problemática es creada por un profesor y/o investigador, a fin de que el individuo (estudiante en este trabajo) realice las dos actividades siguientes:
>
> 1. Participe en algún tipo de actividad física o conceptual.
> 2. Identifique dos o más cantidades que varían en el curso de esta actividad y enfoque la atención en la relación entre estas dos variables.

En esta fase se ubicó a los estudiantes a resolver tres tareas que le demandaron la generalización de patrones figurales, en el marco de sucesiones con progresión aritmética de orden uno. En ese proceso, trabajaron con dos cantidades covariantes.

Fase II. *Crear un registro*. El sujeto (en este caso el estudiante) crea medios de apoyos para representar y/o expresar los valores entre las cantidades variables. En términos de actividad, consiste en lo siguiente:

3. Que haga un registro de los valores correspondientes de estas cantidades típicamente tabulares, gráficos o icónicos.

En esta fase, cada estudiante se apoyó de representaciones para determinar términos cercanos y/o lejanos (consecutivos y no consecutivos). Con base en ello, tuvo un primer acercamiento sobre el reconocimiento del patrón o regularidad.

Fase III. *Búsqueda de patrones y certeza matemática.* Es cuando el estudiante se enfrenta a una actividad y enfatiza en construir una relación entre variables que se extiende más allá de la mera designación de una correspondencia, a través de uno o varios registros. Esta fase refiere a las siguientes actividades:

4. Identificación de patrones en estos registros.

5. Coordinación de los patrones identificados con las acciones involucradas en la realización de la actividad

6. Uso de esta coordinación para crear una representación del patrón identificado en la relación.

En esta última fase, la coordinación de patrones se demanda a través de la generalización de las sucesiones de figuras, cuyo término general es de forma: $f(n) = ax + b$.

A continuación, se ejemplifica como se implementó este marco para el pensamiento funcional, con base en la tarea 1 del instrumento de exploración de este trabajo (figura 4.1), la cual se describe en la tabla 4.1 de este capítulo.

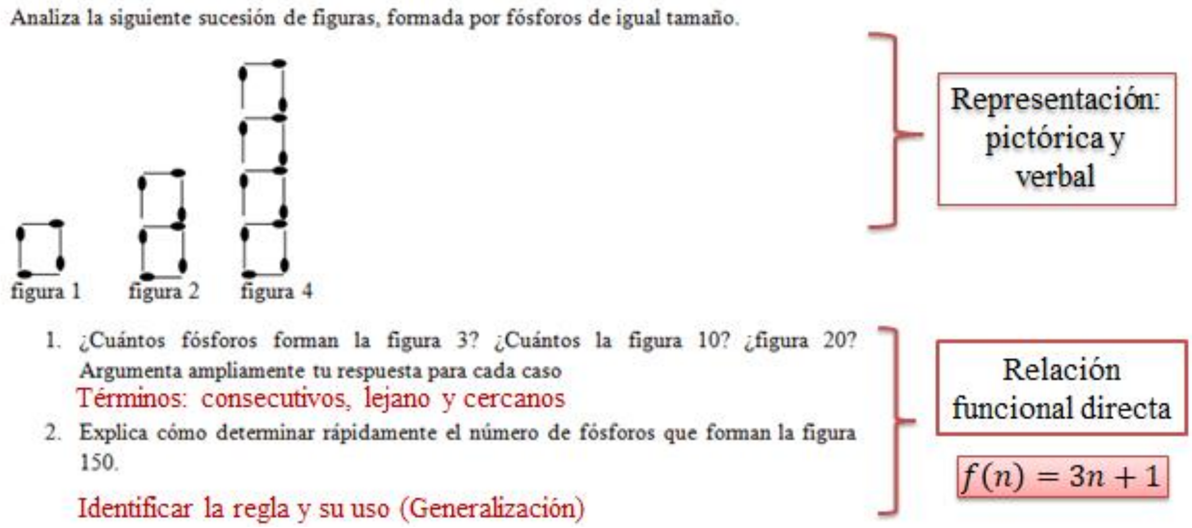


Figura 4. 1. Ejemplo del marco para el pensamiento funcional en la tarea 1.

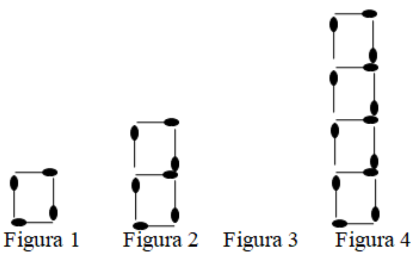
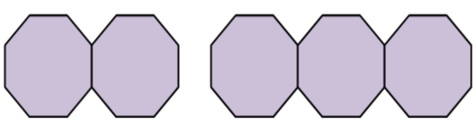
4.4. El instrumento de exploración

El estudio se sustenta de tres tareas que refieren a la generalización de sucesiones crecientes de figuras con progresión aritmética de orden uno. Las tareas se adaptaron de trabajos previos de Rivera (2013), Blanton y colaboradores (2015) y de Radford (2000). La adaptación, consistió en considerar los patrones figurales de sucesiones lineales, en razón de que en estos trabajos, el énfasis estaba sólo en la generalización. Se consideraron dos aspectos importantes:

1. Un análisis del contenido matemático tomando como base la propuesta de organizadores curriculares planteada en Rico y Fernández-Cano (2013) y en Rico y Moreno (2016). Para ello, se analizaron las lecciones que, según la propuesta institucional (SEP, 2011a), refieren al tema de las progresiones aritméticas de números naturales de orden uno, de los seis libros de texto gratuito de la educación básica regular, titulados “Desafíos Matemáticos”. Con los objetivos de: reconocer cuál es la demanda cognitiva que se plantea a los estudiantes ante tareas que refieren a sucesiones de patrones e identificar el contexto en que se plantean tareas de patrones (Capítulo 3).
2. Elementos relacionados con los fundamentos teóricos propuestos.

En este sentido, los patrones figurales implicado en las tareas propuestas refieren de modo implícito, a relaciones de dependencia entre dos variables (dependiente e independiente), relación funcional directa, reconocimiento de una regularidad para determinar términos consecutivos y no consecutivos (cercanos y/o lejanos), representaciones verbal y pictórica. Por cuanto a la demanda cognitiva, se plantea de manera implícita, que los estudiantes construyan y justifiquen una estructura matemáticamente plausible y útil (Rivera, 2010) para explicar el comportamiento que siguen los patrones figurales involucrados en las tareas. Se describen en la tabla siguiente (para ver las tareas detalladamente ir a la parte de anexos).

Tabla 4. 1. Descripción de las tareas del instrumento de exploración.

Número y Descripción de la Tarea	**Relación Funcional Directa**
Tarea 1  Relación entre número de figura y número de fósforos que deben formar cierta figura. Dadas ciertas condiciones y etapas figurales de los patrones, se espera que identifique una regularidad para determinar términos consecutivos y no consecutivos (cercanos y/o lejanos). A partir de ello, que exprese y/o represente la relación funcional directa de la forma $f(n) = 3n + 1$. Variable dependiente: Número de fósforos Variable independiente: Número de figura	Se desconoce el número de fósforos que forman un número de figura conocido.
Tarea 2  Relación entre número de mesas y número de sillas que se colocan alrededor de ellas. Las mesas tienen formas octagonales unidas por uno de sus lados, y se coloca una silla por cada lado. Dadas ciertas condiciones y etapas figurales de los patrones, se espera que identifique una regularidad para determinar términos consecutivos y no consecutivos (cercanos y/o lejanos). A partir de ello, que exprese y/o represente la relación funcional directa de la forma $f(n) = 6n + 2$. Variable dependiente: Número de sillas Variable independiente: Número de mesas	Se desconoce el número de sillas que se colocan alrededor de un número de mesas conocido.

Tarea 3

Se desconoce el número de círculos que forman un número de figura conocido.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Relación entre número de figura y número de círculos que deben formar cierta figura. Dadas ciertas condiciones y etapas figurales de los patrones, se espera que identifique una regularidad para determinar términos consecutivos y no consecutivos (cercanos y/o lejanos). A partir de ello, que exprese y/o represente la relación funcional directa de la forma $f(n) = 2n - 1$.

Variable dependiente: Número de círculos
Variable independiente: Número de figura

4.5. Recolección de los datos

En la recogida de datos, participaron cuatro investigadores. Dos en el rol de profesor (el autor y el director de este trabajo) y dos a cargo de la toma de fotografías y grabación en video. Estos cuatro investigadores cumplieron a la vez, el rol de observador, tomando notas de campo, durante la toma de datos. Por cuanto al profesor responsable académico del grupo de quinto grado, en que se llevó a cabo el estudio, su participación fue nula.

Las tareas se resolvieron por los estudiantes en un ambiente de lápiz y papel, durante tres sesiones (una por sesión). La actividad en el salón de clases se organizó de modo tal, que permitió a los estudiantes trabajar en dos momentos: individual y grupal (o colectivo). En la fase grupal, compartieron a sus compañeros tanto sus respuestas de la etapa individual como las acciones que llevaron a cabo para resolver cada tarea. Con base en ello, se profundizó en las formas de razonamiento que siguieron (Ver tabla 4.2).

Tabla 4. 2. Fecha y tiempo de las sesiones.

Sesión	Fecha	Tipo de relación funcional	Intervención	Tiempo
1	30/09/2017	f(n)=3n+1	Individual	40 min
			Colectivo	30 min
2	31/09/2017	f(n)=6n+2	Individual	50 min
			Colectivo	30 min
3	01/10/2017	f(n)=2n-1	Individual	40 min
			Colectivo	20 min

4.6. Análisis de los datos

El análisis de los datos es cualitativo. Los enfoques funcionales (Pinto & Cañadas, 2018; Pinto 2016; Tanışlı, 2011; adaptado de Smith, 2008), los sistemas de representación (Cañadas, 2007; Cañadas et al., 2011) y los tipos de generalización (Rivera, 2013) permitieron analizar el pensamiento funcional que evidencian los estudiantes de quinto grado primaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales en el marco de las sucesiones lineales. En la Tabla 4.3 presentamos las categorías con las que analizamos el pensamiento funcional de los estudiantes.

Tabla 4. 3. Categorías de análisis para el pensamiento funcional.

Categorías de análisis	
Categorías	**Descripción**
Enfoques funcionales	Los enfoques funcionales se analizan en los estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, es decir, aquellos que generalizan. Estos, se describen en términos de las relaciones que establecen entre cantidades variantes: recursividad, covariación o correspondencia (Pinto & Cañadas, 2018; Pinto 2016; Tanışlı, 2011; adaptado de Smith, 2008).
Tipos de Generalización	Los tipos de generalización se reconocen de acuerdo a la estructura matemática (constructiva o deconstructiva) y a la fórmula polinómica (aditiva o multiplicativa, estándar o no estándar), que los estudiantes generan en su generalización empírica (Rivera, 2013)
Sistemas de representación	Sistemas de representación utilizadas por los estudiantes en la resolución de las tareas: numérico, gráfico, algebraico o verbal, así como las representaciones múltiples, que resultan de las combinaciones de una u otra o ambas con otras representaciones (Cañadas, 2007; Cañadas et al., 2011).

Los datos empíricos, provienen de las producciones escritas de los estudiantes en el proceso de solución de las tareas, así como de las de tipo verbal, que evidenciaron en la etapa de trabajo grupal. Para organizar la información, a los estudiantes se les codificó como E1, E2, E3,..., E31.

Capítulo 5
Resultados

En este estudio se investigó el pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado primaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales en el marco de las sucesiones lineales. Como base teórica, se consideraron los enfoques funcionales (recursividad, covariación y correspondencia), los sistemas de representación (numérico, gráfico, algebraico, verbal o representaciones múltiples) y los tipos de generalización (constructiva o deconstructiva). Los hallazgos obtenidos se presentan bajo dos temas: (1) Enfoques funcionales y tipos de tipos de generalización, y; (2) Sistemas de representación que articulan a su forma de razonar.

5.1. Enfoques funcionales y tipos de generalización

Se analizaron los enfoques funcionales en que se involucraron los participantes por tarea, a fin de reconocer quiénes manifiestan un pensamiento funcional. Es decir, los estudiantes que lograron una generalización.

5.1.1. Enfoques funcionales y tipos de generalización en la tarea 1

La situó a los estudiantes a trabajar con términos consecutivos y no consecutivos, de un patrón figural creciente, construido de una manera bien definida. Los objetos figurales de las etapas del patrón consistieron de torres, formadas por cuadrados, donde la instrucción indicó que estaban construidos con fósforos del mismo tamaño (véase Capítulo 4). Se reconocen dos enfoques funcionales, el de recursividad y el de correspondencia (véase tabla 5.1). Asimismo, que 16 de los 31 estudiantes, construyeron y justificaron una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que siguen los objetos figurales del patrón en las etapas dadas en la tarea. Esta es la evidencia empírica de que generalizaron, consecuentemente, de que manifiestan un pensamiento funcional. Estos son los estudiantes, de quienes se describirán los enfoques funcionales que establecen.

Tabla 5. 1. Análisis de los datos para identificar enfoques funcionales de la tarea 1

Estudiante	Enfoque funcional			Generaliza	
	Rec	Cov	Corr	Si	No
E1	X		X	X	
E2	X		X	X	
E3	X		X	X	
E4	X		X	X	
E5	X		X	X	
E6	X		X	X	
E7	X		X	X	
E8	X				X
E9	X		X	X	
E10	X		X	X	
E11	X		X	X	
E12	X		X	X	
E13	X		X	X	
E14	X				X
E15	X				X
E16	X				X
E17	X				X
E18	X				X
E19			X		X
E20	X				X
E21	X				X
E22	X				X
E23	X				X
E24	X				X
E25	X				X
E26	X		X	X	
E27	X		X	X	
E28	X				X
E29	X		X	X	
E30					X
E31	X		X	X	
Total	**29**	**0**	**17**	**16**	**15**

Nota: Rec=Recursividad; Cov=Covariación; Corr=Correspondencia

a) Enfoque de recursividad

Este enfoque se manifestó en los dieciséis estudiantes (E1,…, E7, E9,…, E13, E26, E27, E29, E31) que generalizaron. Se reconoció cuando enfocaron su atención en el valor del patrón en sólo una de las variables involucradas (“cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta” o “cuando el valor de la variable independiente aumenta”). Con base en las formas en que procedieron, se delimitaron tres casos.

CASO 1: CONTEO RECURSIVO

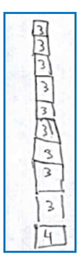
Ocho estudiantes (E3, E4, E7, E9, E10, E12, E13 y E31) recurrieron al conteo de los fósforos que componen cada figura de la etapa dada en el patrón. Reconocen que el patrón figural es creciente, así también, el número de fósforos que aumenta cada figura en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas). Algunas manifestaciones de este incremento se dan en términos verbales, como las siguientes:

E3: “sumé de 3 en 3”
E9: “sumando de 3 en 3”

Con base en estas ideas matemáticas, se identifica que los estudiantes perciben un incremento constante, enfocándose sólo en unas de las variables involucradas (en este caso, “cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta”). Esto es evidencia empírica de un **enfoque de recursividad**.

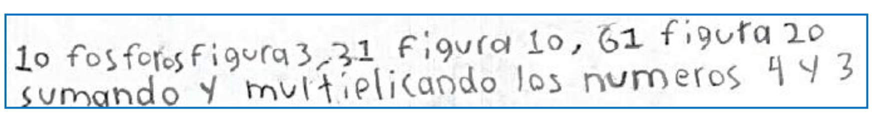
CASO 2: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

Siete estudiantes (E1, E2, E5, E6, E11, E27, E29) se apoyaron del método basado en la figura, documentado en Rivera (2003). Primero visualizan el objeto figura o etapa del patrón, y lo perciben de forma lineal, como una “torre”. De ahí, observan cada etapa como consistente de la unión de dos configuraciones distinguibles y reconocen que en etapas consecutivas y no consecutivas (cercanas) cada figura “tiene una base de cuatro fósforos” y que “el resto de los fósforos es un múltiplo de tres, formando los pisos de la torre”. Esto es, se reconoce una forma de contar que usan para determinar el número de fósforos en las etapas 3, 10 y 20: $f(n) = (4 + 3(n-1))$. Esta forma de proceder se sustenta del “incremento” en los pisos de la torre como “múltiplos de 3”, evidencia empírica de un **enfoque recursivo.** Explicitan el incremento en cada etapa. Se apoyan de los sistemas de representación gráfico y verbal. El primero para contar, apoyados de las configuraciones que perciben en la figura, usando una representación pictórica (ver inciso a en figura 5.1) y el segundo, para explicar cómo obtuvieron el total de fósforos que componen las figuras en las etapas que analizan (inciso b en figura 5.1.).



(a)

Sistema de representación gráfico: representación pictórica



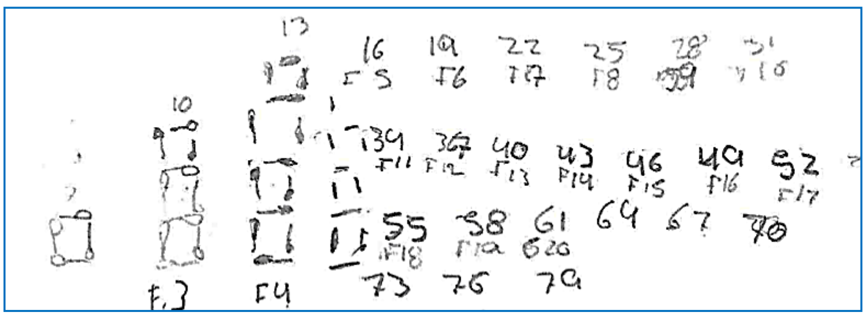
(b)

Sistema de representación verbal

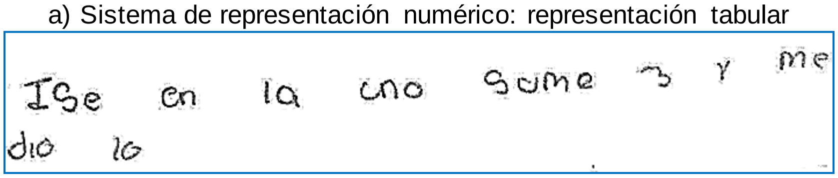
Figura 5. 1. Enfoque de recursividad en E5

CASO 3: MÉTODO NUMÉRICO

El método que sigue E26 se caracteriza en la investigación como **método numérico** (Rivera, 2013. p. 67). En un primer momento, representa numéricamente la cantidad de fósforos que conforman las figuras de las etapas dadas en la tarea. A partir de la etapa cinco, transforma numéricamente la figura y el número de fósforos correspondientes y los registra de forma bien estructurada, en una tabla. Desde ahí, se enfocó en una de las variables involucradas (número de fósforos), y con ello, reconoció que cada figura “aumenta” en tres fósforos (inciso a en la figura 5.2.). Mantuvo esta forma de razonamiento en las etapas 3, 10 y 20 planteadas en la tarea, lo justifica mediante frases: “sumé 3” (inciso b en la figura 5.2.). Esta forma de proceder, es la que caracteriza al **enfoque de recursividad.**



a) Sistema de representación numérico: representación tabular



b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 2. Enfoque de recursividad en E26

b) Enfoque de covariación

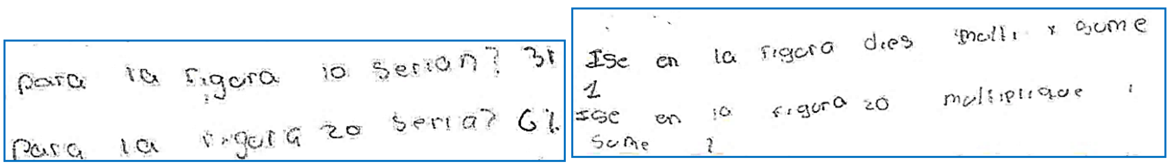
Ninguno de los participantes evidenció formas de razonamiento articulados a este enfoque.

c) Enfoque de correspondencia

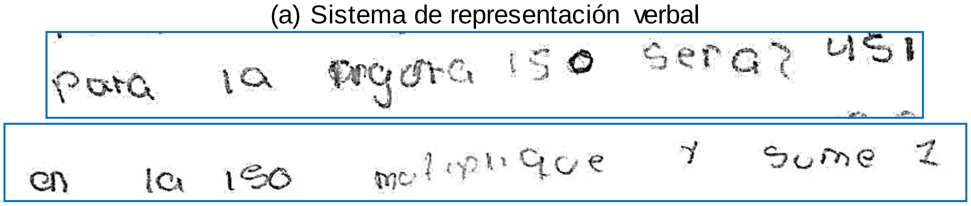
Este enfoque se reconoce en los dieciséis estudiantes (E1,…, E7, E9,…, E13, E26, E27, E29, E31) que establecieron una generalización. Se reconoció, al momento en que esta población, centraron su atención en la correlación entre los pares correspondientes de las variables involucradas. En términos de la tarea, significa que es cuando se enfocaron en reconocer qué cantidad de fósforos le corresponde a determinada figura. Es decir, explican el comportamiento general que sigue el patrón figural. Se identificaron cinco casos por la manera en que proceden.

CASO 1: MÉTODO NUMÉRICO

E26 se involucró en este caso. El procedimiento que sigue el estudiante, se conoce como **método numérico (Rivera, 2003. p. 67)**. Consistió en analizar los datos de la tabla construida previamente (figura 5.2), desde la que reconoció la correlación existente entre las dos variables. Para explicar esa correlación, generó una estructura aritmética basada en la multiplicación y la adición, a la que articula el número de etapa "por tres" y le "suma" uno. Así, para las etapas 10 y 20, multiplicó por 3 y le sumó 1, le resultó 31 y 61, respectivamente (inciso a en la figura 5.3.). En un primer momento, se asume como una conjetura, la cual probó para la figura 150 (caso lejano) y con ello, de algún modo la valida (inciso b en la figura 5.3.). El enfoque en que se involucra en este proceso es el de **correspondencia**. Además, esta es una evidencia de que el estudiante generaliza. Por la estructura que subyace en la expresión matemática que plantea, esta generalización es de la forma $f\,(n) = 3n + 1$.



(a) Sistema de representación verbal

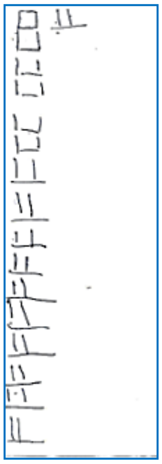


(b) Sistema de representación verbal

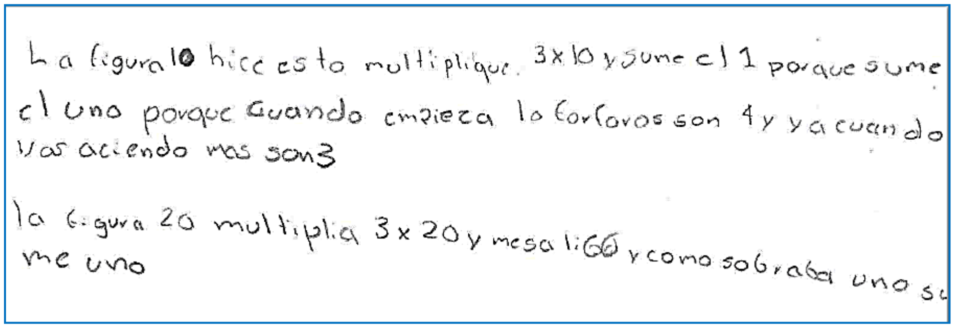
Figura 5. 3. Enfoque de correspondencia en E26.

CASO 2: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

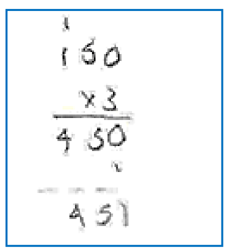
Por el razonamiento que E27 siguió, se le ubica en este caso. Primero ve el objeto figura o etapa del patrón, y percibe que tiene forma lineal, como una "torre". De ahí, ve cada etapa como consistente en la unión de dos configuraciones distinguibles y reconocen que en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas) cada figura "tiene una base de cuatro fósforos" y que "el resto de los fósforos es un múltiplo de tres, formando los pisos de la torre". Esto es, reconoce por el procedimiento que usa para determinar el número de fósforos de cada etapa 3 y 10: $f(n) = (4 + 3(n - 1))$ (inciso a en la figura 5.4.). Desde esa forma de proceder, el estudiante identifica que la base de la torre formada por cuatro fósforos, la puede descomponer $(4 = 3 + 1)$, considerando el 1 como el fosforo donde empieza la torre $(f(n) = ((1 + 3) + 3(n - 1)))$. De ahí, finalmente genera una estructura aritmética, basada en la multiplicación y la adición, a la que articula el número de etapa “por tres” y le “suma uno” (inciso b en la figura 5.4.). Estableciendo empíricamente una **generalización**, de la forma $f\ (n) =\ 3n + 1$, que aplica desde la etapa 10, 20 y 150 que demanda la tarea. El enfoque que se reconoce en este proceso es el de **correspondencia**. Respecto de su forma de proceder, Rivera (2003. p. 67) lo ha documentado como método basado en la figura.



(a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



(b) Representación múltiple: verbal-numérica simple



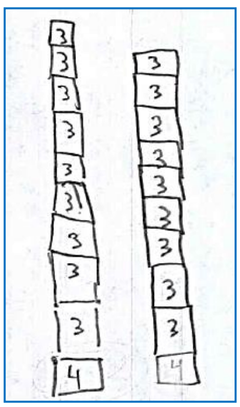
c) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 4. Enfoque de correspondencia en E27.

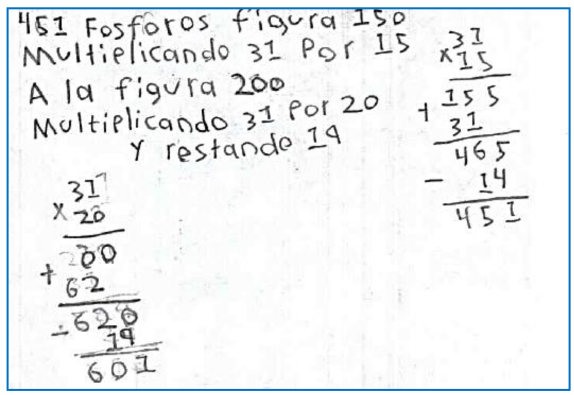
CASO 3: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

El razonamiento que siguió E5 alude a un método basado en la figura (Rivera, 2003. p. 67). Primero ve el objeto figura o etapa del patrón, y percibe que tiene forma lineal, como una “torre”. De ahí, ve cada etapa como consistente en la unión de dos configuraciones distinguibles y reconocen que en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas) cada figura “tiene una base de cuatro fósforos” y que “el resto de los fósforos es un múltiplo de tres, formando los pisos de la torre”. Esto es, reconoce de manera implícita una forma de contar que usa para determinar el número de fósforos de cada etapa 3, 10 y 20: $f(n) = (4 + 3(n - 1))$ (inciso a en la figura 5.5.).

Desde esa forma de proceder, E5 toma como referencia la etapa figural 10 y reconoce que la torre pudiera estar formada por múltiplos de 4 fósforos, pero cuando los bloques de las torres se combinan se le quitan 9 fósforos, es decir, para la figura 10 serían: $((10x4) - 9) = 31)$ $(f(n) = (4n - (n - 1))$. De ahí, para determinar el número de fósforos de la etapa 150 demandada por la tarea, justifica “451 fósforos la figura 150, multiplicando 31 por 15”, donde toma como referencia la cantidad de fósforos de la figura 10 que es 31 y lo multiplica por 15 (considerando estas cantidades como proporcionales: $10 \rightarrow 31 \leftrightarrow (10x15) \rightarrow (31x15)$), y resta 14 (que son los fósforos que se quitan en la etapa 15) (inciso b en la figura 5.5.). Estableciendo empíricamente una **generalización**, de la forma $f\,(n) = (\left(a_k.\frac{n}{k}\right) - \left(\frac{n}{k} - 1\right))$, que valida en la etapa 200 (inciso b en la figura 5.5). El enfoque que se reconoce en este proceso es el de **correspondencia**.



a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



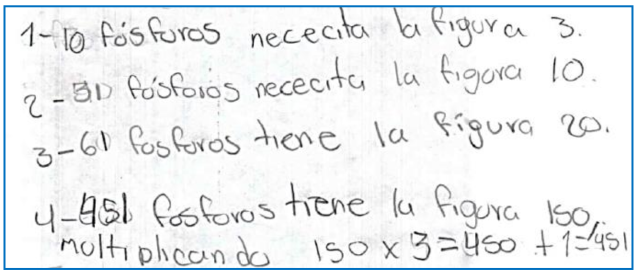
(b) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 5. Enfoque de correspondencia en E5.

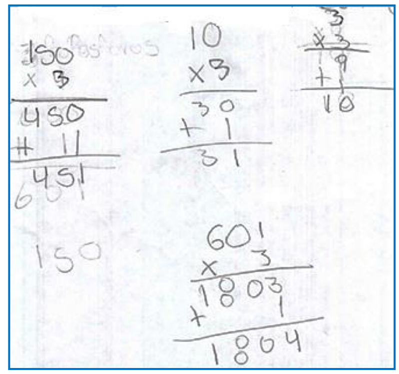
CASO 4: MÉTODO NUMÉRICO

El razonamiento que siguió E13, refiere al reconocimiento de un patrón figural creciente. Identifica cuántos fósforos aumenta cada figura, en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas). Para determinar el número de fósforos de las etapas 3, 10, 20 y 150 que le demandó la tarea, genera una estructura aritmética basada en la multiplicación y la adición, a la que articuló el número de etapa “por tres” y le “suma uno”. Así, para determinar la cantidad de fósforos que forman la figura 150 justifica: “multiplicando $150x3 = 450 + 1 = 450$”

(inciso a en la figura 5.6.). En primer momento, se asume como una conjetura, la cual probó para la figura 601 (etapa no demandada en la tarea) y con ello, de algún modo la valida (inciso b en la figura 5.6.). El enfoque en que se involucra en este proceso es el de **correspondencia**. Además, esta es una evidencia de que E13 generaliza. Por la estructura que subyace en su manera de proceder, esta **generalización** es de la forma $f\,(n) = \ 3n + 1$.



(a) Sistema de representación verbal y representación múltiple verbal-numérica simple



(b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

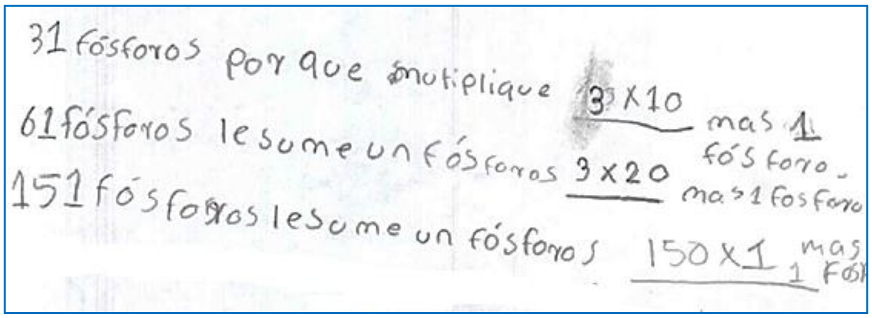
Figura 5. 6. Enfoque de correspondencia en E13.

CASO 5: MÉTODO NUMÉRICO

Trece estudiantes (E1,…, E4, E6, E7, E9,…, E12, E14, E29, E31) se involucraron en este caso. Recurre a un método numérico, donde una vez que reconocen el valor del patrón "va de tres en tres", buscan una estructura aritmética que les permita modelar tal comportamiento. Ahí, primero generaron una estructura aritmética, basada en la multiplicación, a la que sólo vincularon el número de etapa con el valor de patrón: “multiplico por tres”. Posteriormente, regresan a verificar su conjetura, y se dan cuenta que esta es incorrecta, por lo que generaron una estructura aritmética diferente, basada en la multiplicación y la adición, a la que articularon el número de etapa “por tres” y le “suma uno”. Estableciendo empíricamente una **generalización**, de la forma $f\,(n) = \ 3n + 1$. El enfoque en que involucra en este proceso es el de **correspondencia**.

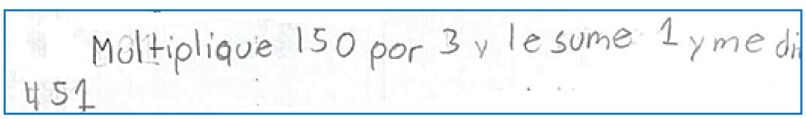
Lo que diferencia a estos estudiantes que se involucraron en este caso, es que algunos generan la estructura aritmética de la forma $f\,(n) = \ 3n + 1$, desde etapas cercanas y/o lejanas que les demanda la tarea (10, 20 y/o 150).

Por ejemplo, E4 genera la estructura aritmética de la forma $f\,(n) = 3n + 1$, para determinar la cantidad de fósforos desde la etapa cercana (10) y valida dicha estructura en etapas lejanas (20 y 150), apoyándose de los sistemas de representación verbal-numérica (véase figura 5.7.). Los doce estudiantes restantes (E1,.., E3, E6, E9,…, E12, E14, E29, E31), generan el mismo tipo de estructura aritmética que E4, aunque hasta la etapa 150 que le demanda la tarea, apoyándose de los sistemas de representación verbal, numérica y/o verbal-numérica (figura 5.8.).

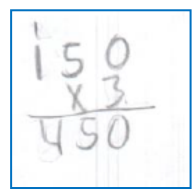


a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 7. Enfoque de correspondencia en E4.



a) Sistema de representación verbal



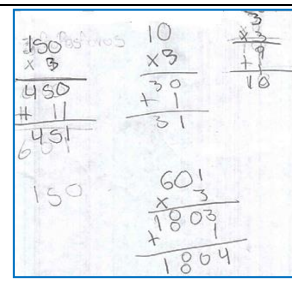
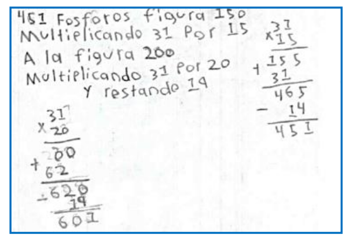
b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 8. Enfoque de correspondencia en E1.

Tipos de Generalización en la tarea 1

Los tipos de generalización se reconocen de acuerdo a la estructura matemática (constructiva o deconstructiva) y a la fórmula polinómica (aditiva o multiplicativa, estándar o no estándar) que los estudiantes generan en su generalización empírica. En esta tarea se manifestaron generalizaciones multiplicativas constructivas estándar y multiplicativas deconstructivas no estándar (tabla 5.2).

Tabla 5. 2. Tipos de generalización en la tarea 1.

Tipo de generalización	Estructura matemática	Evidencia
Multiplicativa constructiva estándar: Estructura matemática multiplicativa y aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural, considerando estas no superpuestas. Además, la expresión aritmética está en su forma simplificada.	$f(n) = 3n + 1$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ fósforos\ que\ forman\ la\ figura$	 Generalización de E13 (Sistema de representación numérico: representación numérica simple)
Multiplicativa deconstructiva no estándar: Estructura matemática multiplicativa y aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural, considerando estas superpuestas. La expresión aritmética no está en su forma simplificada.	$f\ (n) = ((\ a_k.\frac{n}{k}) - (\frac{n}{k} - 1))$ $a_k\ = término\ k - ésimo\ conocido$ $k = número\ \ de\ figura\ del\ término\ k - ésimo$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ fósforos\ que\ forman\ la\ figura$	 Generalización de E5 (Representación múltiple: verbal-numérica simple)

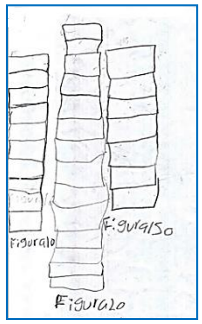
5.1.1.1. Estudiantes que no generalizan en la tarea 1

Se reconoce que 15 (48.3%) estudiantes del total de la población que participó en la exploración no logró construir una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que guarda el patrón figural involucrado en esta tarea. De ellos, 13 mantuvieron su análisis en el enfoque de recursividad, un estudiante en el de correspondencia, aunque de modo incorrecto para etapas lejanas y, un estudiante no evidenció ningún tipo de enfoque funcional.

a) Enfoque de recursividad

Trece estudiantes (E8, E14, E15,..., E18, E20, E21,…, E25, E28) mantuvieron su análisis en el enfoque de recursividad, se apoyaron del conteo de los fósforos que componen a cada figura de la etapa dada en el patrón. Desde ahí, se dieron cuenta que en etapas consecutivas y no consecutivas, sobre todo las cercanas, cada figura “aumenta” en tres fósforos. Por ello, para determinar el número de fósforos en etapas cercanas consecutivas (etapa 3) y no consecutivas (etapa 10) demandadas por la tarea, le suman tres al número de fósforos que forman la figura de una etapa previa a la que analizan.

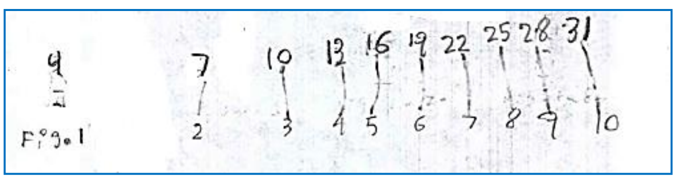
De la etapa 1 a la 10, siete estudiantes (E16, E17, E20, E22, E23, E24 y E25) se mantuvieron trabajando en el contexto del problema (en lo figural) para analizar los casos planteados en la tarea (véase figura 5.9.).



a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

Figura 5. 9. Enfoque de recursividad en E23.

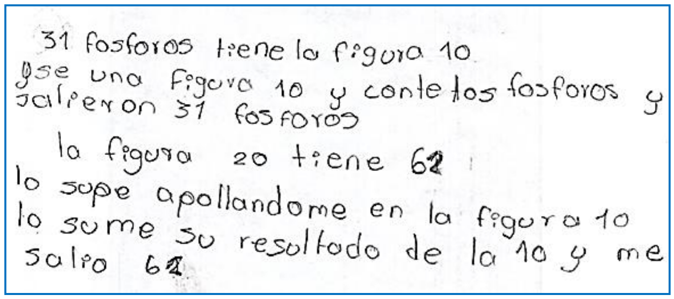
Otros, como E8 y E28 pasaron del patrón figural a lo tabular, para representar los casos analizados y el resultado correspondiente (figura 5.10.). Esto es, convirtieron un sistema de representación en otro.



a) Sistema de representación numérico: representación tabular

Figura 5. 10. Enfoque de recursividad en E8.

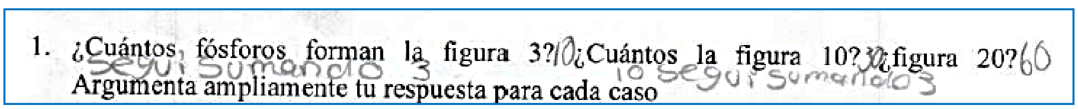
Por su parte, E15 y E16 utilizan la estrategia de objeto entero (Jurdak & El Mouhayar, 2014), es decir, toman como referencia la cantidad de fósforos que forman la etapa 10 que son 31 y para la etapa 20 duplican esta cantidad, por lo que afirman que la etapa 20 está formada por 62 fósforos (figura 5.11.).



a) Sistema de representación verbal

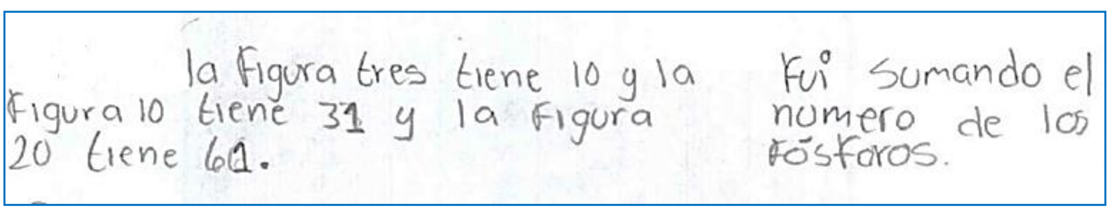
Figura 5. 11. Estrategia de objeto entero en E16.

E14 y E18, se apoyan en el conteo mental para determinar la cantidad de fósforos en las etapas 3, 10 y 20 demandadas por la tarea. Sin embargo, E18 se equivoca en el conteo en las etapas 10 y 20, respondiendo que estas etapas están formadas por 30 y 60 fósforos respectivamente (figura 5.12.). Caso contrario de E14, quien responde correctamente (figura 5.13.).



a) Sistema de representación verbal

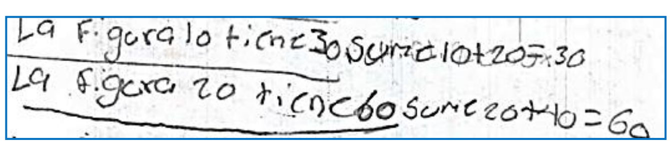
Figura 5. 12. Enfoque de recursividad en E18.



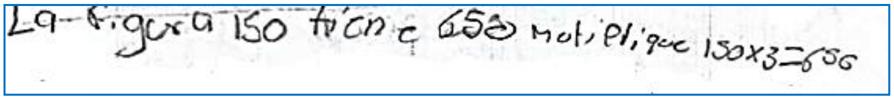
a) Sistema de representación verbal

Figura 5. 13. Enfoque de recursividad en E14.

Finalmente, el razonamiento de E21 se caracteriza por un conteo de la forma $f(n) = n + 2(n)$ para las etapas 10 y 20 (inciso a en la figura 5.14.), fue el único en dar una respuesta para determinar la cantidad de fósforos en la etapa 150, donde genera la estructura aritmética de la forma $f(n) = 3n$ (inciso b en la figura 5.14.).



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

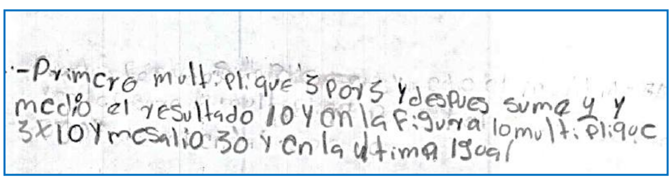

La-figura 150 tiene 656 multiplique 150x3=656

b) Representación múltiple: verbal-numérica simple

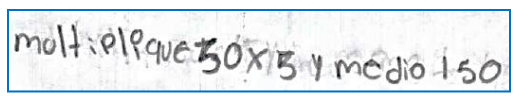
Figura 5. 14. Enfoque de recursividad en E21.

b) Enfoque de correspondencia

E19 mantuvo su análisis en el enfoque de correspondencia. Para determinar la cantidad de fósforos de la etapa cercana consecutiva 3, planteada en la tarea, articula una estructura aritmética de la forma $f(n) = 3n + 1$, justifica "multipliqué 3 por 3 y después sumé 1 y me dio el resultado 10". Sin embargo, para determinar la cantidad de fósforos de las etapas 10 y 20 se sustenta de una estructura aritmética diferente, de la forma $f(n) = 3n$. Lo justifica como sigue: "en la figura 10 multipliqué 10 x3 y me dio 30 y en la última igual" (inciso a en la figura 5.15.). Para la etapa 150, sólo busca números que multiplicados entre sí, le resulte 150, lo justifica como sigue: "multipliqué 30x5 y me dio 150" (inciso b en la figura 5.15.). Si bien, se reconoce el enfoque de correspondencia en E19, sus tres maneras de proceder son totalmente diferentes, impidiendo así la generalización.


-Primero multiplique 3 por 3 y despues sume 1 y me dio el resultado 10 y en la figura 10 multiplique 3x10 y me salio 30 y en la ultima igual

a) Sistema de representación verbal

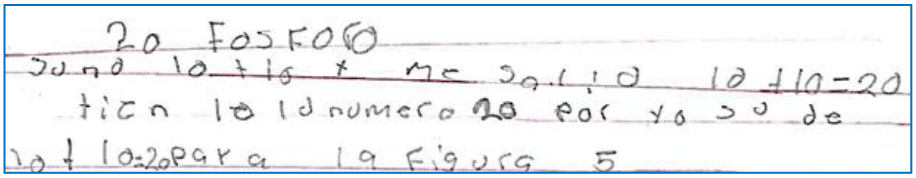

multiplique 30x5 y me dio 150

b) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 15. Enfoque de correspondencia en E19.

c) Sin enfoque funcional

E30 no evidenció forma de razonamiento articulada a los enfoques funcionales propuestos por Smith (2008). Sólo determinó el número de fósforos en la etapa cercana consecutiva (etapa 3) que le demandó la tarea. Si bien reconoce que cada figura "aumenta" en tres fósforos, abandona esta forma de proceder para determinar las cantidad de fósforos en etapas cercanas no consecutivas (etapa 10) y lejanas (etapa 20 y 150) plateadas por la tarea, donde evidencia respuestas sin sentido (véase figura 5.16.).



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 16. Forma de proceder de E30.

5.1.2. Enfoques funcionales y tipos de generalización en la tarea 2

La tarea ubicó a los estudiantes a trabajar con términos consecutivos y no consecutivos, de un patrón figural creciente bien estructurado. Las figuras de las etapas del patrón, consistieron de mesas en forma de octágonos de lados iguales, y unidas por uno de sus lados cuando el número es mayor a una. De la información que se dio al estudiante en la tarea, se consideró que en las mesas se coloca una silla por cada lado (véase Capítulo 4) y de modo implícito, que en las uniones ninguna. Los enfoques funcionales en que se involucraron los participantes del estudio en esta tarea, se resumen en la tabla No. 5.3.

Tabla 5. 3. Análisis de los datos para identificar enfoques funcionales de la tarea 2.

Estudiante	**Enfoque funcional**			**Generaliza**	
	Rec	Cov	Corr	Si	No
E1			X	X	
E2			X	X	
E3	X		X	X	
E4	NR	NR	NR		X
E5			X	X	
E6	X		X		X
E7			X	X	
E8					X
E9					X
E10					X
E11	NAC	NAC	NAC	NAC	NAC
E12					X
E13			X	X	
E14	X		X	X	
E15					X
E16					X
E17	X		X	X	
E18					X
E19	X				X
E20	X		X	X	
E21					X
E22					X
E23					X

E24					X
E25	NAC	NAC	NAC	NAC	NAC
E26	X		X	X	
E27	NAC	NAC	NAC	NAC	NAC
E28			X	X	
E29					X
E30					X
E31			X	X	
Total	7	0	13	12	16

Nota: Rec=Recursividad; Cov=Covariación; Corr=Correspondencia; NCA=No Asistió a Clase; NR=No respondió

De acuerdo con los resultados, de los 31 estudiantes, 12 construyeron y justificaron una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que siguen los patrones figurales involucrados en la tarea. La justificación se sustenta de que la verifican a través de otros casos y/o casos lejanos. Esta es la evidencia empírica de que generalizaron, consecuentemente, de que manifiestan un pensamiento funcional. En seguida se analizan los enfoques funcionales en que se involucraron.

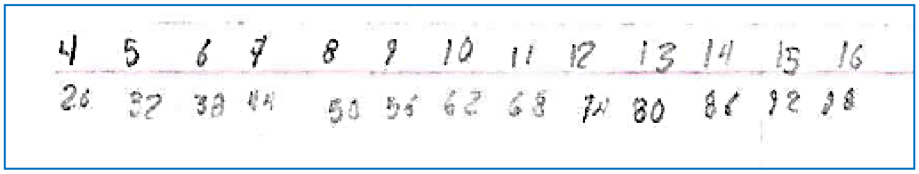
a) Enfoque de recursividad

Este enfoque se manifestó en cinco estudiantes (E3, E14, E17, E20 y E26) que generalizaron. La evidencia empírica de que se involucraron en este enfoque, se reconoció cuando centraron su atención en la variación o el valor del patrón en sólo una de las variables involucradas ("cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta" o "cuando el valor de la variable independiente aumenta").

CASO 1: MÉTODO NUMÉRICO

E17 se articuló en este caso. Su razonamiento alude a un **método numérico** (Rivera, 2013. p. 67). Primero, desde lo figural se enfocó en una de las variables involucradas (número de sillas), y con ello, reconoció que cada figura "aumenta" en seis sillas (inciso a en la figura 5.17.). De la etapa 4 a la 16 transforma numéricamente la tarea visual en forma de una tabla de estructuración (inciso b en la figura 5.17.). Esta forma de proceder le sirvió para determinar la cantidad de sillas de las 8 y 16 mesas que le demanda la tarea, evidencia empírica de que E17 se involucra en un **enfoque de recursividad**.

a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



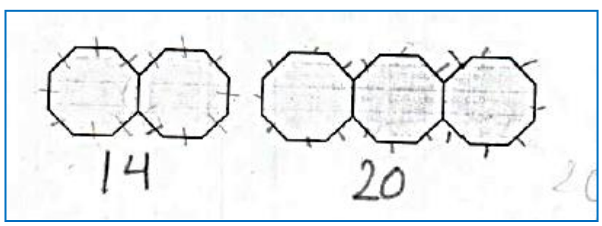
b) Sistema de representación numérico: representación tabular

Figura 5. 17. Enfoque de recursividad en E17.

CASO 2: CONTEO RECURSIVO

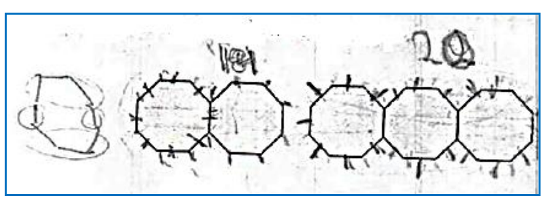
Cuatro estudiantes (E3, E14, E20 y E26) se involucraron en este caso. Recurrieron al conteo, en particular, de las sillas que caben alrededor de cada figura de la etapa dada en el patrón. De ahí, reconocen implícitamente, que el patrón figural es creciente, además, que aumenta seis sillas cada figura, en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas).

Si bien, estos estudiantes no explicitan este aumento, si exponen a los investigadores este aumento, señalando en el patrón figural dado (véase figura 5.18. y figura 5.19.).Con base en estas evidencias, se reconoce que los estudiantes perciben que el incremento es constante, enfocándose sólo en unas de las variables involucradas (en este caso, “cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta”). Siendo esto la evidencia empírica de un **enfoque de recursividad**.



a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

Figura 5. 18. Enfoque de recursividad en E14.

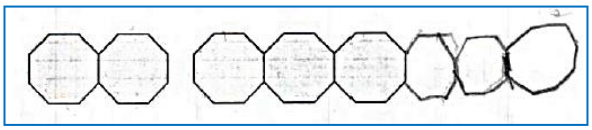


a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

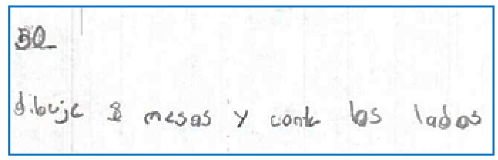
Figura 5. 19. Enfoque de recursividad en E26.

Estrategia: Contar a partir de un dibujo

Una estrategia que se reconoce en el proceder de los estudiantes es la estrategia de contar a partir de un dibujo (Jurdak & El Mouhayar, 2014). Se identifica cuando los estudiantes cuentan los elementos de un término figural particular en un patrón. E2 y E28 utilizan esta estrategia para determinar la cantidad de sillas para la etapa 8 que demanda la tarea. Ellos realizan la representación pictórica de las 8 mesas juntas y cuentan los lados para dar respuesta, obteniendo la cantidad de 50 sillas (figura 5.20. y figura 5.21.).

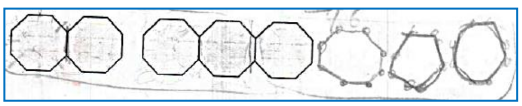


a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

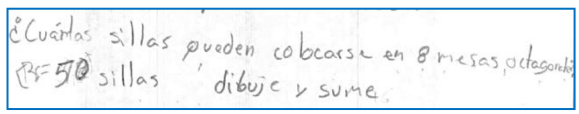


b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 20. Estrategia contar a partir de un dibujo en E2.



a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 21. Estrategia contar a partir de un dibujo en E28.

b) Enfoque de covariación

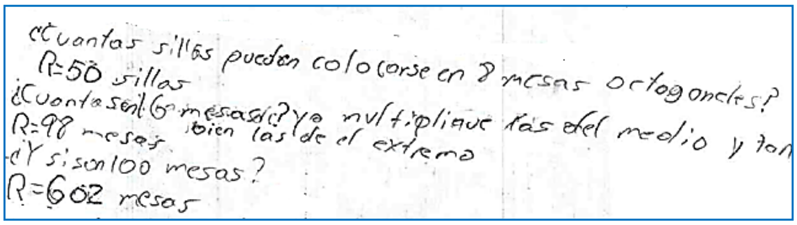
Ninguno de los participantes evidenció formas de razonamiento articulados a este enfoque.

c) Enfoque de correspondencia

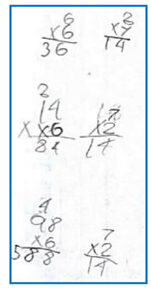
Este enfoque se reconoce en doce de los estudiantes (E1,…, E3, E5, E7, E13, E14, E17, E20, E26, E28 y E31) que establecieron una generalización, al momento en que centraron su atención en la correlación entre los pares correspondientes de las variables involucradas. En términos de la tarea, significa que es cuando se enfocaron en reconocer qué cantidad de sillas le corresponde a determinada figura. Es decir, explican el comportamiento general que sigue el patrón figural. Se identificaron al menos cuatro formas de proceder, se describen en seguida.

CASO 1: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

El razonamiento que siguió E31 refiere a un método basado en la figura (Rivera, 2003. p. 67). Se enfoca en la etapa 2 del patrón figural y percibe a la figura involucrada como dos configuraciones distinguibles “los dos extremos de las mesas unidas tienen 7 lados”. En la etapa 3 reconoce que este comportamiento se mantiene para las mesas que se ubican en los extremos y que la mesa de en medio sólo tiene 6 lados, es decir, caben 20 sillas. Ahí, establece una conjetura de que son “seis más dos por siete”, esto es, de la forma: $(6+2(7))$. A partir de esa forma de proceder, el estudiante determina la cantidad de sillas para las etapas 8, 16 y 100 demandadas por la tarea (inciso a y b en la figura 5.22.). Para estos casos, lo expresa de forma escrita, en términos de una estructura multiplicativa. Se reconoce aquí, una **generalización** empírica (Inciso b) de la figura 5.22) de la forma: $f(n) = (6(n-2) + 2(7))$.



(a) Sistema de representación verbal

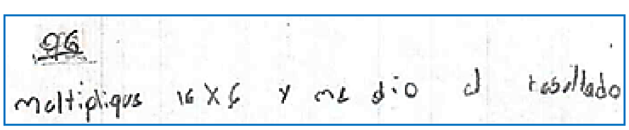


(b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

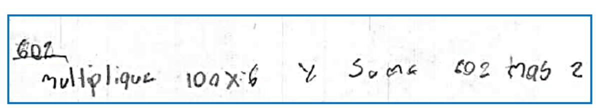
Figura 5. 22. Enfoque de correspondencia (a) y generalización (b) en E31.

CASO 2: MÉTODO NUMÉRICO

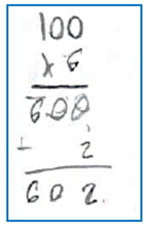
E2 se articuló en este caso. Su razonamiento refiere a un método numérico, dónde una vez que reconoce el valor del patrón "va de seis en seis", busca una estructura aritmética que le permita modelar tal comportamiento. Ahí, para determinar la cantidad de sillas de la etapa 16 que demanda la tarea, generó una estructura aritmética, basada en la multiplicación, a la que sólo vinculó el número de etapa y con el valor de patrón “multiplico por seis” (inciso a en la figura 5.23.). Posteriormente, regresó a verificar su conjetura, y se dio cuenta que es incorrecta, por lo que generó una estructura aritmética diferente, basada en la multiplicación y la adición, a la que articuló el número de etapa por el valor del patrón “seis” y le “sumo” dos. Tal estructura la utiliza para determinar la cantidad de sillas de la etapa 100 y de algún modo la valida (inciso b y c en la figura 5.23.). Donde se reconoce implícitamente una **generalización**, de la forma $f(n) = 6n+2$. El enfoque en que involucra en este proceso es el de **correspondencia**.



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple



b) Representación múltiple: verbal-numérica Simple



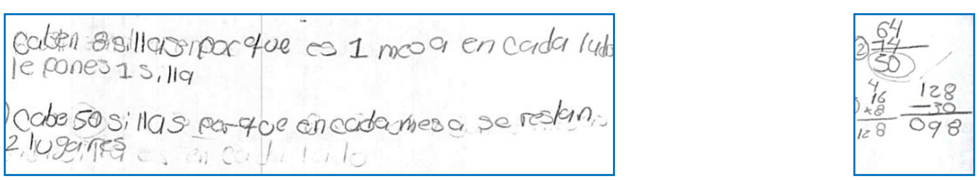
c) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 23. Enfoque de correspondencia en E2.

CASO 3: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

El razonamiento que siguió E7 refiere a un método basado en la figura (Rivera, 2003. p. 67). Primero se enfoca en la etapa 2 del patrón figural y a partir de las figuras involucradas, la percibe como dos configuraciones distinguibles "que cada mesa tiene 8 lados, donde se colocarían 16 sillas si estas estuvieran separadas, pero como están unidas, se le restan dos lados". Después, en la etapa 3 reconoce que permanece este comportamiento en el patrón, pero dado que las tres mesas están unidas, se le restan cuatro lados, es decir, caben 20 sillas: $(8x3) = 24; 24 - 4 = 20$. Desde esa forma de proceder, E7 determina la cantidad de sillas para las etapas 8 y 16 que forman parte de la tarea (inciso a y b en la figura 5.24). A través de sus representaciones, de tipo numérico, se reconoce de manera implícita una estructura multiplicativa, la que conlleva a la **conjetura** que establece sobre el comportamiento del patrón figural. Esta conjetura, es de la forma: $f(n) = (8n - 2(n-1)))$. Además, en este proceso se reconoce que el estudiante se involucra en el enfoque de **correspondencia**.

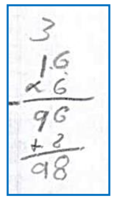
Desde la etapa 16 reconoce que existe otro método para determinar la cantidad de sillas más rápidamente, donde asocia el número de etapa por el valor del patrón "seis" y le "suma" dos (inciso c en la figura 5.25), lo que se constituye en una conjetura. En la etapa 100 aplica ese método, el cual asocia a una validación de su conjetura (inciso d y e en la figura 5.25), consecuentemente, se le reconoce como una regla o **generalización** empírica, de la forma $f\ (n) = \ 6n + 2$.



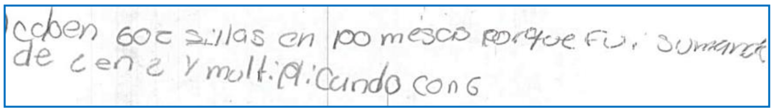
a) Sistema de representación verbal

b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

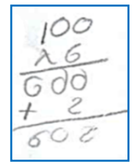
Figura 5. 24. Enfoque de correspondencia en E7.



c) Sistema de representación numérico: representación numérica simple



d) Sistema de representación verbal

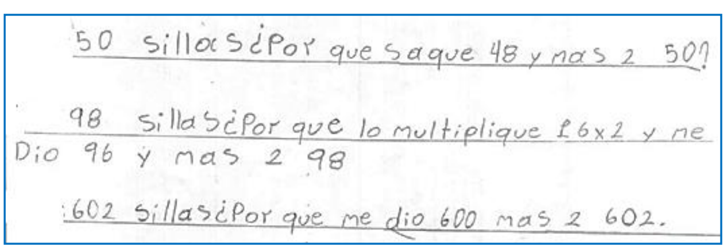


e) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

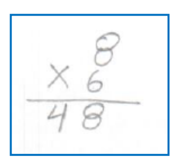
Figura 5. 25. Generalización en E7.

CASO 4: MÉTODO NUMÉRICO

Nueve estudiantes (E1, E3, E5, E13, E14, E17, E20, E26 y E28) se involucraron en este caso. Con base en su forma de proceder, se reconoce que su razonamiento refiere a un método numérico, que consisten en considerar la cantidad de sillas (6 sillas) que incrementan en cada etapa del patrón (recurrencia) con el número de etapa. Algunos las reconocen en etapas cercanas, como E3, E13, E14 (etapa 8, por ejemplo E3 figura 5.26), E20, E28 y E26 (etapa 16, véase E20 figura 5.27). Contrario a E1, E5 y E17 que lo hacen en las lejanas, en este caso a partir de la 100 (Por ejemplo, E3 figura 5.28). Es así que plantean una estructura matemática útil, para expresar el comportamiento que sigue el crecimiento del patrón figural. Lo expresan en términos de una estructura multiplicativa (Rivera, 2010; 2013) de la forma $f\ (n) = 6n + 2$, a la que articularon el número de etapa por el valor del patrón "seis" y le "suma" dos. Donde se reconoce implícitamente una **generalización**, de la forma $f\ (n) = 6n + 2$. El enfoque en que involucra en este proceso es el de **correspondencia**.

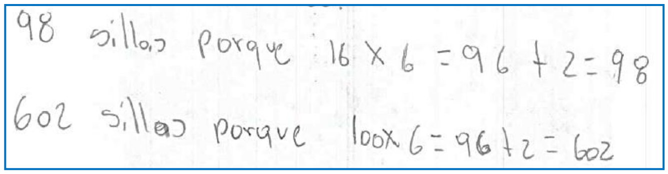


a) Representación múltiple: verbal-numérica simple



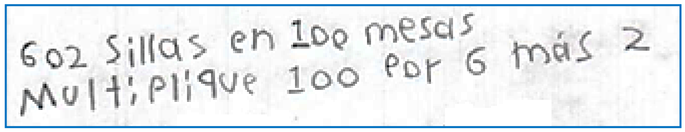
b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 26. Enfoque de correspondencia en E3.



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 27. Enfoque de correspondencia en E20.



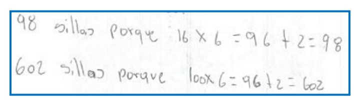
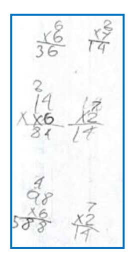
a) Sistema de representación verbal

Figura 5. 28. Enfoque de correspondencia en E5.

Tipos de Generalización en la tarea 2

Los tipos de generalización se reconocen de acuerdo a la estructura matemática (constructiva o deconstructiva) y a la fórmula polinómica (aditiva o multiplicativa, estándar o no estándar) que los estudiantes generan en su generalización empírica. En esta tarea se manifestaron generalizaciones multiplicativas constructivas estándar y deconstructivas no estándar (tabla 5.4).

Tabla 5. 4. Tipos de generalización en la tarea 2.

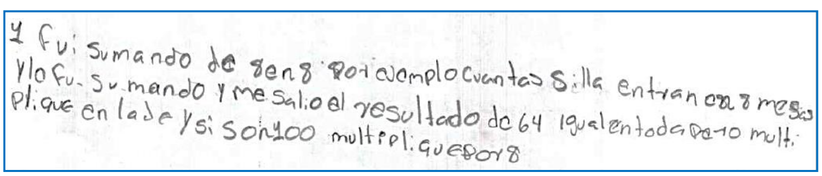
Tipo de generalización	Estructura matemática	Evidencia
Multiplicativa constructiva estándar: Estructura matemática multiplicativa y aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural, considerando estas no superpuestas. Además, la expresión aritmética está en su forma simplificada.	$f(n) = 6n + 2$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ sillas\ que\ se\ colocan\ alrededor\ de\ la\ figura$	 Generalización de E20 (Representación múltiple: verbal-numérica simple)
Multiplicativa deconstructiva no estándar: Estructura matemática multiplicativa y aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural, considerando estas superpuestas. La expresión aritmética no está en su forma simplificada.	$f(n) = (6(n-2) + 2(7))$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ sillas\ que\ se\ colocan\ alrededor\ de\ la\ figura$	 Generalización de E31 (Sistema de representación numérico: representación numérica simple)

5.1.2.1. Estudiantes que no generalizan en la tarea 2

Se reconoce que 16 (51.6%) estudiantes del total de la población que trabajó con esta tarea, no logró construir una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que guarda el patrón figural. De ellos, uno mantuvo su análisis en el enfoque de recursividad, otro, tanto en el de recursividad como en el de correspondencia, aunque de modo incorrecto. Un estudiante más, no respondió a las cuestiones plateadas y 13, no evidenciaron ningún tipo de enfoque funcional.

a) Enfoque de recursividad

E19 mantuvo su análisis en el enfoque de recursividad, apoyándose del conteo de sillas que se colocan alrededor de cada figura de la etapa dada en el patrón. En este conteo, considera a las mesas de forma separada, aun cuando la indicación le informa que están unidas. Por ello, en la etapa 8 demandada por la tarea, lo justifica como sigue: "fui sumando de 8 en 8…y me salió el resultado de 64" (figura 5.29). La estructura involucrada en esta forma de proceder, es aditiva, vista como una suma repetida (8 veces 8 es igual a 64). Esta es la evidencia empírica de que E19 se involucra en un **enfoque de recursividad**. Posteriormente, para la etapa lejana 100 cambia a una estructura multiplicativa de la forma: $8xn$ (figura 5.29), lo justifica del modo siguiente: "y si son 100 multipliqué por 8". Es así que determina que se colocan 800 sillas alrededor de 100 mesas octagonales unidas.

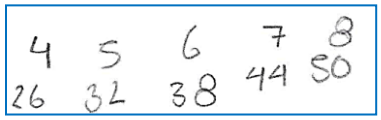


a) Sistema de representación verbal

Figura 5. 29. Enfoque de recursividad y correspondencia en E19.

b) Enfoque de recursividad y de correspondencia

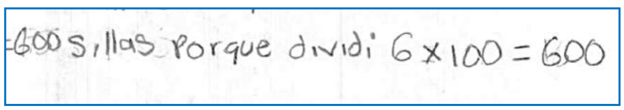
E6 mantuvo su análisis en el enfoque de recursividad, apoyándose del conteo de sillas que se colocan alrededor de cada figura de la etapa dada en el patrón. Ahí, reconoce que cada figura "aumenta" en seis sillas. Por ello, para determinar el número de sillas en la etapa cercana no consecutiva (etapa 8) demandada por la tarea, suma seis al número de sillas que forman la figura de una etapa previa a la que analiza, obteniendo 50 sillas. Siendo esto la evidencia empírica de un **enfoque de recursividad.** En esta forma de proceder, convierte un sistema de representación en otro, pasando de lo figural a lo tabular (figura 5.30).



a) Sistema de representación numérico: representación tabular

Figura 5. 30. Enfoque de correspondencia en E6.

Sin embargo, para determinar la cantidad de sillas de la etapa lejana 100, articula el número de etapa por el valor del patrón “seis”, al responder que se colocan 600 sillas alrededor de 100 mesas octagonales unidas (figura 5.31). Donde se reconoce implícitamente una conjetura que expresa en términos de una estructura multiplicativa, de la forma $f\,(n) = 6n$ y el enfoque que caracteriza el razonamiento que sigue en este proceso, es el de **correspondencia**.



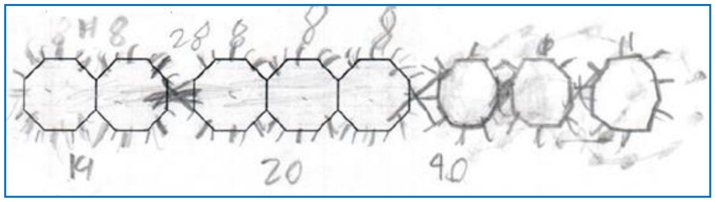
a) Representación múltiple: verbal- numérica simple

Figura 5. 31. Enfoque de correspondencia en E6.

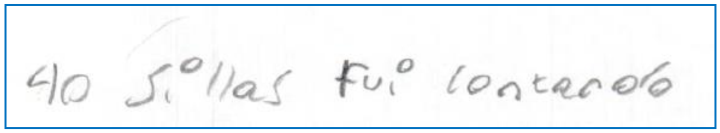
c) Sin enfoque funcional

Trece estudiantes (E8,…, E10, E12, E15, E16, E18, E21,…, E24, E29, E30) no evidenciaron formas de razonamiento articuladas a los enfoques funcionales propuestos por Smith (2008). Sin embargo, algunos coinciden en sus formas de proceder.

Por ejemplo, en E8, E10 y E15 se reconoce la estrategia de contar a partir de un dibujo (Jurdak & El Mouhayar, 2014). Dado que estos estudiantes cuentan los elementos de un término figural particular en un patrón. E8 y E15 utilizan esta estrategia para determinar la cantidad de sillas para la etapa 8 que demanda la tarea. Ellos hacen la representación pictórica de las 8 mesas juntas y cuentan los lados para dar respuesta, pero se equivocan en el conteo, obteniendo respuestas erróneas (figuras 5.32 y 5.33.). Por su parte, E10 utiliza esta estrategia para determinar la cantidad de sillas para la etapa 16 que demanda la tarea, pero de igual manera se equivoca en el conteo (figura 5.34).

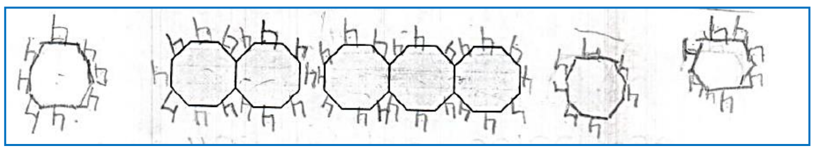


a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

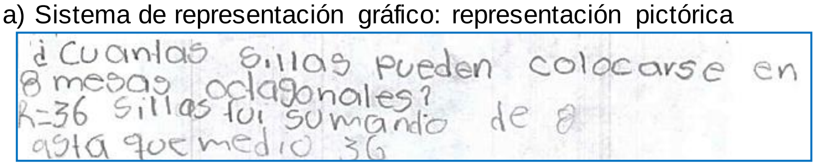


b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 32. Estrategia de contar a partir de un dibujo en E8.

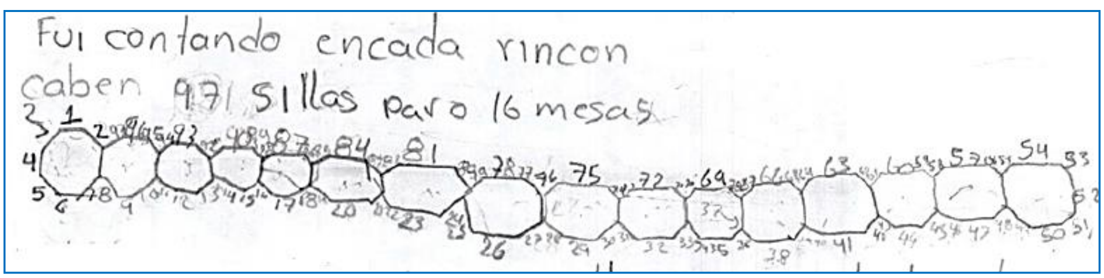


a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 33. Estrategia de contar a partir de un dibujo en E15.

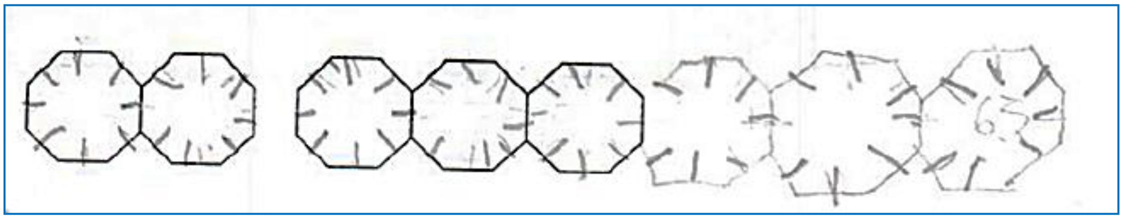


a) Sistema de representación verbal y sistema de representación gráfico: representación pictórica

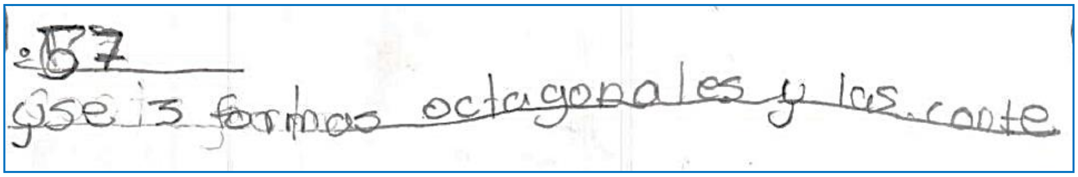
Figura 5. 34. Estrategia de contar a partir de un dibujo en E10.

Por su parte, en E16 primero se reconoce la estrategia de contar a partir de un dibujo (Jurdak & El Mouhayar, 2014). La usa para determinar la cantidad de sillas para la etapa 8 que plantea la tarea. En esta etapa, el estudiante sitúa su trabajo sobre las figuras 1 (dos mesas unidas) y 2 (tres mesas unidas) dadas, para completar las 8 correspondientes a la etapa que se le ubica a trabajar. Si bien las mesas de las figuras 1 y 2 están separadas, en su conteo las considera unidas. Es así que determina que cuenta los lados de las mesas (inciso a en la figura

5.35), aunque se equivoca en el conteo, por ello es que determina que son 57 sillas (inciso b en la figura 5.35), ya que si se sigue su razonamiento, debió obtener 56.



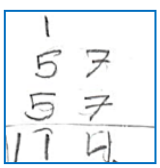
a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



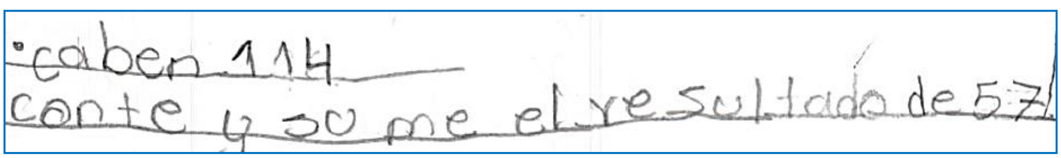
b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 35. Estrategia de contar a partir de un dibujo en E16.

Para determinar el número de mesas de la etapa 16, este estudiante toma como referencia el dato que obtuvo en la etapa 8, esto es, 57. Este número lo multiplica por 2 (al concebir que 16 es el doble de 8) (inciso a en la figura 5.36) y concluye que en esa etapa, se tienen 114 sillas (inciso b en la figura 5.36). Esta estrategia que siguió el estudiante, la investigación la reconoce como de objeto entero (Jurdak & El Mouhayar, 2014).



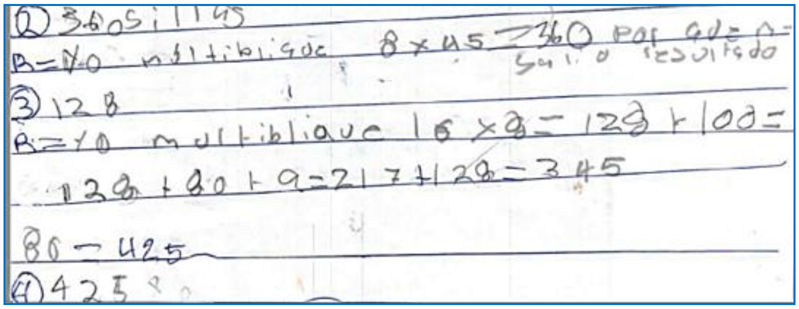
a) Sistema de representación numérico: representación numérica simple



b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 36. Estrategia de objeto entero en E16.

En contraste, los ocho estudiantes restantes (E12, E18, E21,…, E24, E29 y E30) presentan respuestas sin sentido a las cuestiones planteadas en la tarea (figura 5.37).



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 37. Respuestas sin sentido de E30.

5.1.3. Enfoques funcionales y tipos de generalización en la tarea 3

En esta tarea los estudiantes trabajaron con términos consecutivos y no consecutivos, de un patrón figural creciente bien estructurado. Los objetos figurales del patrón, consistieron de círculos del mismo tamaño (véase Capítulo 4). Los enfoques funcionales en que se involucraron los participantes del estudio en esta tarea, se organizan en la tabla No. 5.5.

Como puede verse en la tabla previa, 31 de los 8 estudiantes, construyeron y justificaron una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que siguen los patrones figurales involucrados en la tarea. Esta es la evidencia empírica de que generalizaron, consecuentemente, de que manifiestan un pensamiento funcional. Se describen los enfoques funcionales en que se involucran.

Tabla 5. 5. Análisis de los datos para identificar enfoques funcionales de la tarea 3.

Estudiante	Enfoque funcional			Generaliza	
	Rec	Cov	Corr	Si	No
E1	X		X	X	
E2	X				X
E3	X		X	X	
E4	X				X
E5	X				X
E6	X		X	X	
E7	X				X
E8	X				X
E9	X				X
E10		X			X
E11	X		X	X	
E12	X				X
E13	X		X	X	
E14	X				X
E15	X				X
E16	X				X

E17	X	X	X	X	
E18	X				X
E19	X				X
E20	X				X
E21	X				X
E22	X				X
E23	X				X
E24	X				X
E25	X				X
E26	X				X
E27	X		X	X	
E28	X				X
E29	X				X
E30	X				X
E31	X			X	
Total	30	2	7	8	23

Nota: Rec=Recursividad; Cov=Covariación; Corr=Correspondencia

a) Enfoque recursividad

Este enfoque se manifestó en los ocho estudiantes (E1, E3, E6, E11, E13, E17, E27 y E31) que construyeron una generalización. La evidencia empírica de que se involucraron en este enfoque, se reconoció cuando centraron su atención en la variación o el valor del patrón en sólo una de las variables involucradas ("cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta" o "cuando el valor de la variable independiente aumenta"). Se involucraron en este enfoque de forma diferenciada, lo que permitió presentarlos por casos.

CASO 1: CONTEO RECURSIVO

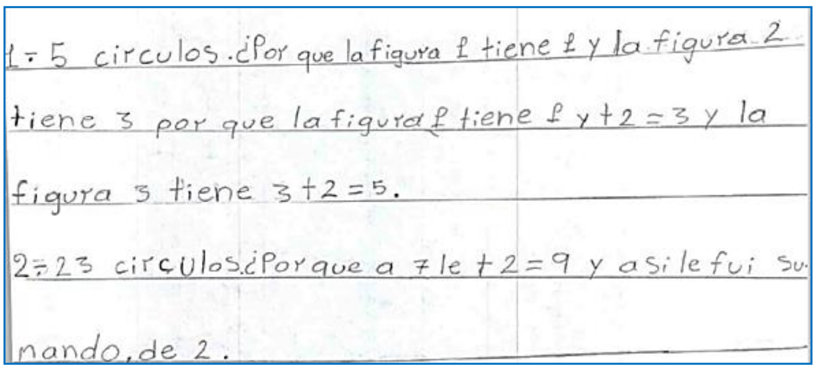
En este caso, se involucraron siete estudiantes (E3, E6, E11, E13, E17, E27 y E31). Con base en su forma de proceder, se reconoció el razonamiento que siguieron, este refiere al conteo de los círculos que componen cada figura de la etapa dada en el patrón. De ahí, reconocen implícitamente, que el patrón figural es creciente, además, cuántos círculos aumenta cada figura, en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas). Algunas manifestaciones de este incremento aparecen en términos verbales, como las siguientes:

E6: "sumando dos"

E13: "va de dos en dos"

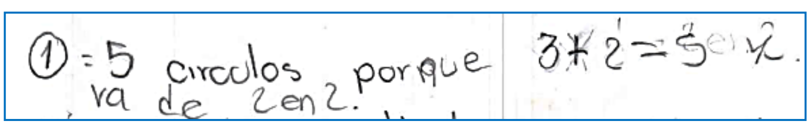
Con base en estas ideas matemáticas, los estudiantes perciben un incremento constante, enfocándose sólo en unas de las variables involucradas (en este caso, "cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta"). Evidencia empírica de un **enfoque de**

recursividad. Se reconoce también, que convierten un sistema de representación en otro. E3, E11, E13 y E27 por ejemplo, pasan del sistema de representación verbal al numérico (véase figura 5.38 y 5.39). E6 por su parte, se apoyó de los sistemas de representación pictórica, numérica y verbal (véase figura 5.40). El primero, para contar, siguiendo en el contexto figural hasta el número de figura 15. Posteriormente, hace una conversión del sistema de representación pictórica al numérico, siguiendo con una sucesión de números que corresponde al valor de patrón de la variable dependiente (número de círculos). Por último, realiza una conversión de los dos sistemas de representación anteriores al verbal, para representar el total de círculos que componen las figuras en las etapas que analizó (total de círculos para la figura 3 y la figura 12).

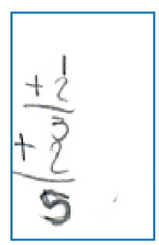

1 = 5 circulos. ¿Por que la figura 1 tiene 1 y la figura 2
tiene 3 por que la figura 1 tiene 1 y +2 = 3 y la
figura 3 tiene 3+2=5.
2 = 23 circulos ¿Porque a 7 le +2 = 9 y asi le fui su-
mando de 2.

a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 38. Enfoque de recursividad en E3.

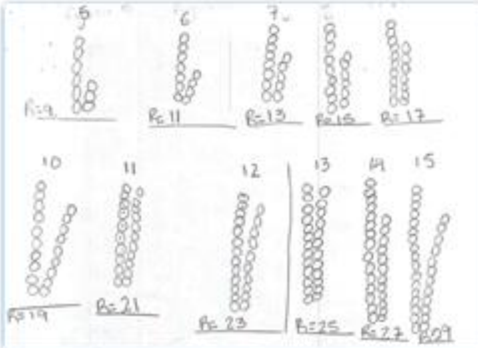

① = 5 circulos porque va de 2 en 2. 3*2=5

a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

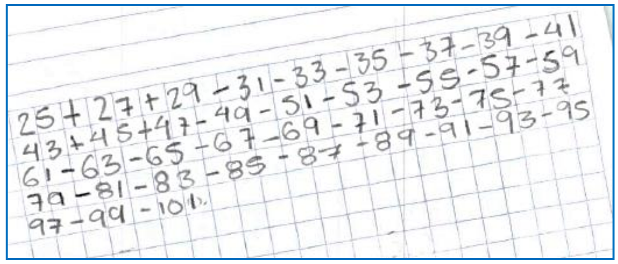

1
+2
3
+2
5

b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

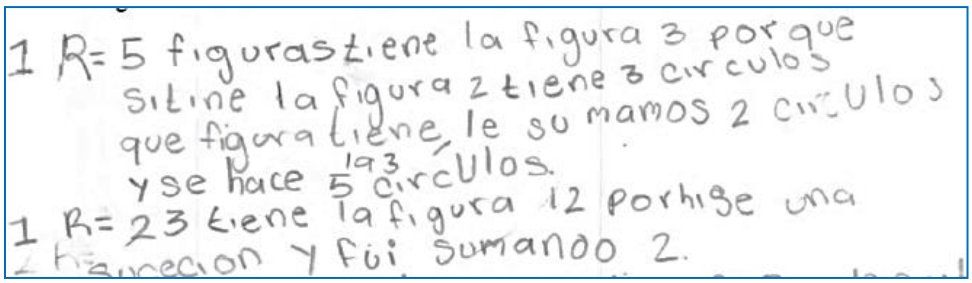
Figura 5. 39. Sistemas de representación de E13.



a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica



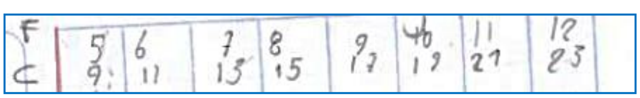
b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple



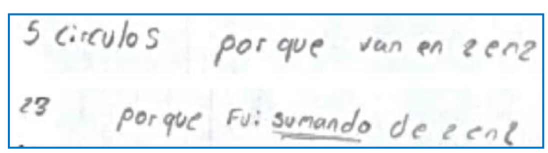
c) Sistema de representación verbal

Figura 5. 40. Sistemas de representación de E6.

E17 y E31 se apoyaron de los sistemas de representación tabular y verbal. Por ejemplo, E17 primero convirtió el sistema de representación pictórico al tabular, donde organizó y representó numéricamente las etapas que analizó del patrón figural (consecutivas y no consecutivas) (véase inciso a en la figura 5.41). Finalmente, convirtió el sistema de representación tabular al verbal, para representar el total de círculos que componen las figuras en las etapas que analizó (total de círculos para la figura 3 y la figura 12) (véase inciso b en la figura 5.41).



a) Sistema de representación numérico: representación tabular



b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 41. Enfoque de recursividad en E17.

CASO 2: MÉTODO BASADO EN LA FIGURA

E1 se involucró en este caso. Su razonamiento que siguió, refiere a un método basado en la figura (Rivera, 2003. p. 67). Primero ve el objeto figura o etapa del patrón, y percibe que tiene forma lineal, como una “ele” o una escuadra. De ahí, vio cada etapa como consistente en la unión de tres configuraciones distinguibles y reconoce que en etapas consecutivas y no consecutivas (sobre todo las cercanas) cada figura “tiene un circulo que se encuentra en el vértice de la “escuadra” y que “el resto de los círculos es un múltiplo de dos, ya que considera que la fila vertical y la horizontal tienen la misma cantidad de círculos” (sin contar el del vértice). Esto es, reconoce de manera implícita una forma de contar que usa para determinar el número de círculos de cada etapa:$(1 + 2(n-1))$.

E1 no explicita el incremento en cada etapa. Se apoyó de los sistemas de representación pictórico y numérico. El primero, para contar, apoyado de las configuraciones que percibió en la figura (figura 5.42), y el segundo, para representar el total de círculos que componen las figuras en las etapas que analizó.

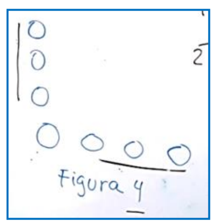


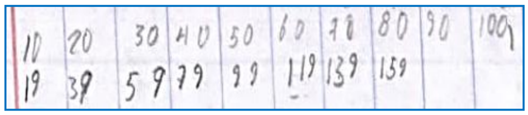
Figura 5. 42. Sistema de representación gráfico: representación pictórica de E1**.**

b) Enfoque de covariación

Este enfoque se manifestó sólo en un estudiante (E17) de los que construyeron una generalización. La evidencia empírica de que se involucraron en este enfoque, se reconoció cuando los estudiantes centraron la atención en la variación o el valor del patrón en las dos variables involucradas (“cuando el valor de patrón de la variable dependiente e independiente aumentan”).

CASO 1: MÉTODO NUMÉRICO

En este caso se sitúa a E17, quien convirtió numéricamente las etapas que analiza del patrón figural (consecutivas y no consecutivas), a una forma bien estructurada. Esto es, de lo figural pasa a una tabla. Desde la tabla, enfocó su análisis en las dos variables involucradas (número de figura y número de círculos). Con base en ello, reconoció cuánto varían de una etapa a la otra. Tomó como referencia el número de figura 10 formada por 19 círculos y a partir de eso realizó la representación tabular usando múltiplos de 10 para el número de figura y sumando 20 para el número de círculos: $10-19, 20-39, 30-49, \ldots, 70-139-80-159$ (figura 5.43.). Esto es, reconoce de manera implícita un incremento constante de las dos variables involucradas (cuando la figura “aumenta en diez” y el número de círculos “aumenta en veinte”), evidencia empírica de un **enfoque de covariación** en su modo de proceder. Por la forma en que trabaja en esta etapa, se reconoce que usa un **método numérico** (Rivera, 2013. p. 67).



a) Sistema de representación numérico: representación tabular

Figura 5. 43. Enfoque de covariación en E17.

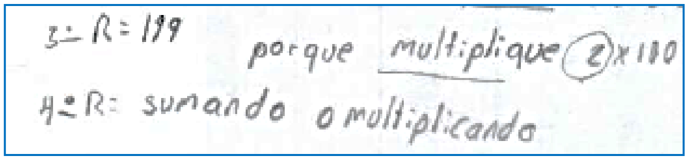
En esta etapa del proceso de solución a la tarea, este estudiante convierte un sistema de representación figural a uno tabular.

c) Enfoque de correspondencia

Este enfoque se reconoce en los ocho estudiantes (E1, E3, E6, E11, E13, E17, E27 y E31) que establecieron una generalización. La evidencia empírica de que se involucraron en él, se reconoció al momento en que esta población, centró su atención en la correlación entre los pares correspondientes de las variables involucradas. En términos de la tarea, significa que es cuando se enfocaron en reconocer qué cantidad de círculos le corresponde a determinada figura. Es decir, explican el comportamiento general que sigue el patrón figural. Se identificaron tres casos, que se describen en seguida.

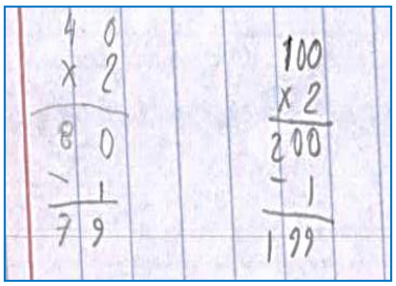
CASO 1: MÉTODO NUMÉRICO

Con base en su forma de proceder, se reconoce que E17 recurre a un **método numérico (Rivera, 2003. p. 67)**. Consistió en analizar los datos de la tabla construida previamente (figura 5.43), desde la que reconoció la correlación existente entre las dos variables. Para explicar esa correlación, generó una estructura aritmética basada en la multiplicación y la adición, a la que articula el número de etapa y le “resto” uno. Así, para la etapa 100, multiplicó por 2 y le restó 1, a partir de ello, le resultó 199 (figura 5.44). En primer momento, se asume como una conjetura, la cual probó de manera empírica con casos lejanos, por ejemplo para la figura 40, 150 y con ello, de algún modo la valida (figura 5.45). Esta es una evidencia de que E17 generaliza. Por la estructura que subyace en su manera de proceder, esta generalización es de la forma $f\ (n) = 2n - 1$. El enfoque en que se involucra en este proceso es el de correspondencia.

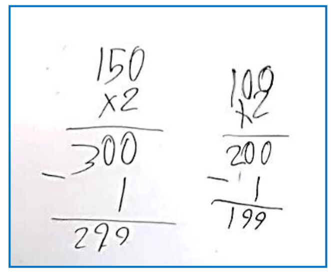


a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 44. Enfoque de correspondencia en E17.



(a) Sistema de representación numérico: representación numérica simple



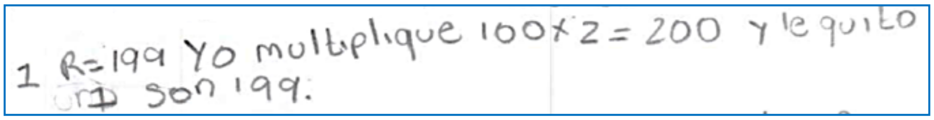
(b) Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 45. Generalización en E17.

CASO 2: MÉTODO NUMÉRICO

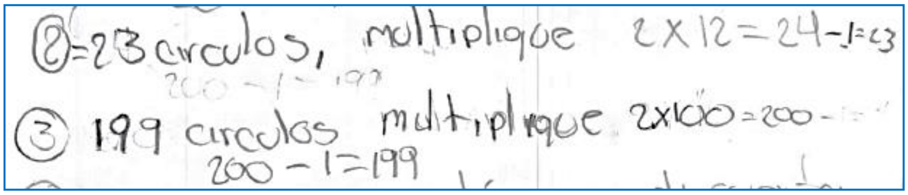
E3, E6, E11, E13, E27 y E31 se involucraron en este caso. Con base en su forma de proceder, se reconoce que recurren a un método numérico dónde una vez que identifican el valor del patrón "va de dos en dos", buscaron una estructura aritmética que les permitan modelar tal comportamiento. Ahí, primero generaron una estructura aritmética, basada en la multiplicación, a la que sólo vincularon el número de etapa y con el valor de patrón “multiplico por dos”. Posteriormente, regresan a verificar su conjetura, y se dan cuenta que esta es incorrecta, por lo que generaron una estructura aritmética diferente, basada en la multiplicación y la adición, a la que articularon el número de etapa y le “resta” uno. Estableciendo una **generalización**, de la forma $f\ (n) = 2n - 1$. El enfoque en que involucra en este proceso es el de **correspondencia**.

Asimismo, que convierten un sistema de representación en otro. E3, E6, E11, E13, E27 y E31 por ejemplo, pasan del sistema de representación verbal al numérico (véase figura 5.46 y 5.47).

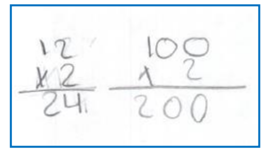


a) Representación múltiple: verbal-numérica simple

Figura 5. 46. Enfoque de correspondencia en E6.



a) Representación múltiple: verbal-numérica simple



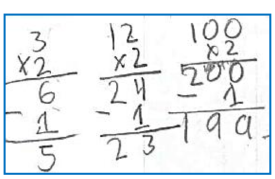
Sistema de representación numérico: representación numérica simple

Figura 5. 47. Enfoque de correspondencia en E13.

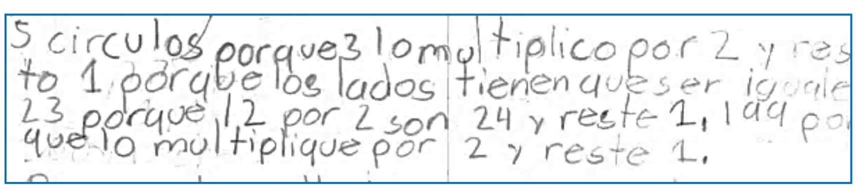
CASO 3: GENERALIZACIÓN DIRIGIDA POR AUXILIARES

E1 se involucró en este caso. Con base en su forma de proceder, se reconoce que plantea una **generalización dirigida por auxiliares** (Rivera, 2003. P.67 y 68). Es decir, consideró en las etapas la misma cantidad de círculos para la fila vertical y la horizontal ($2xn$), lo que también significó agregar 1 círculo para completar la escuadra. Sin embargo, el círculo que agrega no forma parte de las etapas originales del patrón. Ahí, genera una estructura aritmética diferente, basada en la multiplicación y la adición, a la que articula el número de etapa y le "resta" uno. Estableciendo una **generalización**, de la forma $f\ (n) =\ 2n - 1$. El enfoque en que involucra en este proceso es el de **correspondencia**.

E1 se apoyó de los sistemas de representación numérica y verbal. El primero, para verificar la estructura aritmética que construyó para representar el total de círculos que componen las figuras en las etapas cercanas y lejanas que demanda la tarea, esto es, la 3, 12 y 100. El segundo, para justificar verbalmente tal estructura (figura 5.48.).



a) Sistema de representación numérico: representación numérica simple



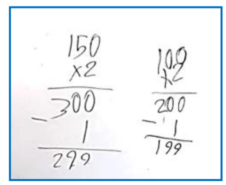
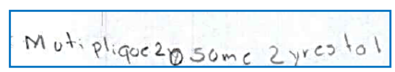
b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 48. Enfoque de correspondencia en E1.

Tipos de Generalización en la tarea 3

Los tipos de generalización se reconocen de acuerdo a la estructura matemática (constructiva o deconstructiva) y a la fórmula polinómica (aditiva o multiplicativa, estándar o no estándar) que los estudiantes generan en su generalización empírica. En esta tarea se manifestaron generalizaciones multiplicativas constructivas estándar y aditivas constructivas estándar (tabla 5.6).

Tabla 5. 6. Tipos de generalización en la tarea 3.

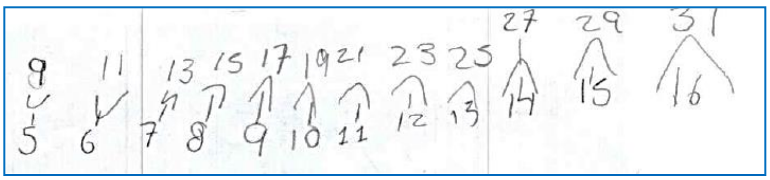
Tipo de generalización	Estructura matemática	Evidencia
Multiplicativa constructiva estándar: Estructura matemática multiplicativa y aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural considerando estas no superpuestas. Además, la expresión aritmética está en su forma simplificada.	$f(n) = 2n - 1$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ círculos\ que\ forman\ la\ figura$	 Generalización de E17 (Sistema de representación numérico: representación numérica simple Representación múltiple: verbal-numérica simple)
Aditiva constructiva estándar: Estructura matemática aditiva que se construye a partir de las etapas conocidas en un patrón figural considerando estas no superpuestas. La expresión aritmética está en su forma simplificada.	$f(n) = n + n - 1$ $n = número\ de\ figura$ $f(n) = número\ de\ círculos\ que\ forman\ la\ figura$	 Generalización de E27 (Sistema de representación verbal)

5.1.3.1. Estudiantes que no generalizan en la tarea 3

En el análisis de los enfoques funcionales, se reconoce que 23 (74.1%) estudiantes del total de la población que participó en la exploración no logró construir una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento que guarda el patrón figural involucrado en esta tarea. De ellos, 22 mantuvo su análisis en el enfoque de recursividad, el resto en el de covariación.

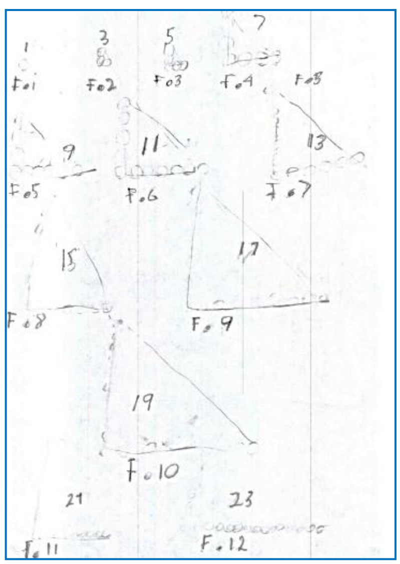
a) *Enfoque de recursividad*

De quienes mantuvieron su análisis en el enfoque de recursividad, se apoyaron del conteo de los círculos que componen a cada figura de la etapa dada en el patrón. Desde ahí, se dieron cuenta que en etapas consecutivas y no consecutivas, sobre todo las cercanas, cada figura "aumenta" en dos círculos. Por ello, para determinar el número de círculos en etapas cercanas consecutivas (etapa 3) y no consecutivas (etapa 12) demandadas por la tarea, le suman dos al número de círculos que forman la figura de una etapa previa a la que analizan. De la etapa 1 a la 12, algunos estudiantes pasaron del patrón figural a lo numérico para representar los casos analizados y el resultado correspondiente (figura 5.49), evidencia de que convirtieron un sistema de representación en otro. También se reconoce, que algunos se mantuvieron trabajando en el contexto del problema (en lo figural) para analizar los casos planteados en la tarea (figura 5.50).



a) Sistema de representación numérico: representación tabular

Figura 5. 49. Enfoque de recursividad en E18.

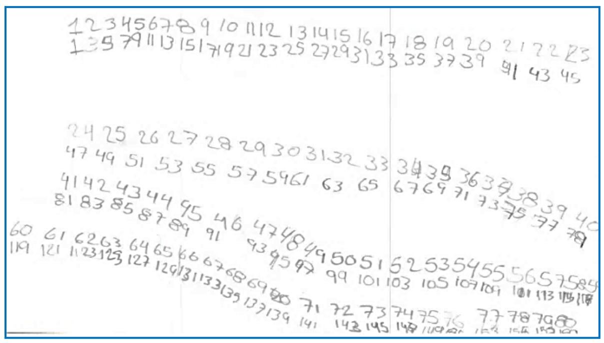


a) Sistema de representación gráfico: representación pictórica

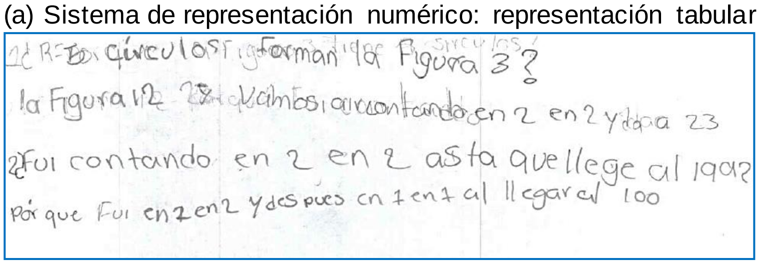
Figura 5.50. Enfoque de recursividad en E8.

a) *Enfoque covariacional*

E10 mantiene su análisis en este enfoque, centrando su atención en la variación o el valor del patrón de las dos variables involucradas. Se dio cuenta que en etapas consecutivas y no consecutivas, sobre todo las cercanas, cuando el número de figura “aumenta en uno” y el número de círculos “aumenta en dos”. De ahí, convirtió numéricamente las etapas que analiza del patrón figural a una tabla (inciso a en la figura 5.51). Por tanto, para determinar el número de círculos de las etapas 3, 12 y 100 que le demandó la tarea, justifica “fui en dos en dos y después en uno en uno” (inciso b en la figura 5.51). Evidencia empírica de un **enfoque de covariación** en su modo de proceder.



(a) Sistema de representación numérico: representación tabular



(b) Sistema de representación verbal

Figura 5. 50. Enfoque de covariación en E10.

5.2. Sistemas de representación

Los estudiantes recurrieron a tres tipos de sistemas de representación en el proceso de solución de las tareas: El verbal, el numérico y el gráfico, que usaron de manera diferenciada. Del gráfico, se apoyaron en la representación pictórica, del numérico, emplearon a la representación numérica simple y a la tabla. En ese proceso, algunos se apoyaron en más de una representación (representaciones múltiples), otros, se mantuvieron en un sistema.

5.2.1. Sistemas de representación en la tarea 1

En esta tarea, los estudiantes recurrieron a tres sistemas de representación: El verbal, el numérico y el gráfico (tabla 5.7). Se describen a continuación:

a) **Sistema de representación verbal**. En esta tarea fue el sistema de representación que todos los estudiantes utilizaron. Este hecho se justifica, porque una de las cuestiones de la tarea, les demandó describir cómo determinar rápidamente la cantidad de fósforos que conforman la figura 150. Otra justificación, es debido a que en cada pregunta, se les pidió argumentar su respuesta.

b) **Sistema de representación numérico.** Este sistema de representación en su representación numérica simple y tabular fue el segundo más empleado. La **representación numérica simple** la usaron diecinueve estudiantes. En un primer momento, para representar la cantidad de fósforos que componen a cada figura, o bien para registrar cuánto incrementa en cada etapa, el número de fósforos. También para expresar la estructura matemática asociada a la generalización, que plantearon, en términos de una estructura aritmética, vía la multiplicación y la adición. La **representación tabular** por su parte, fue usada por tres estudiantes, para organizar y representar numéricamente las etapas que analizan del patrón figural (consecutivas y no consecutivas). Es decir, convirtieron la representación pictórica del sistema de representación gráfico a la representación tabular del sistema de representación numérico.

c) **Sistema de representación gráfico.** Trece estudiantes usaron la **representación pictórica** asociada a este sistema, en etapas cercanas consecutivas y no consecutivas. Ello, a fin de continuar trabajando en el contexto del problema, para reconocer cuántos palillos incrementan las figuras en cada etapa. El uso de este sistema de representación se articula al enfoque de recursividad en el que se involucraron los estudiantes.

d) **Representación múltiple:** También usaron la **representación múltiple verbal-numérica**, para describir el procedimiento que siguieren para determinar la cantidad de palillos en las etapas demandadas (3, 10, 20 y/o 150). Se apoyaron del lenguaje común y la estructura aritmética de manera simultánea. En esta tarea la emplearon trece estudiantes.

5.2.2. Sistemas de representación en la tarea 2

Al igual que en la tarea 1, en esta tarea se apoyaron de tres sistemas de representación: El numérico, verbal y gráfico (tabla 5.8). De ellos, los más utilizados fueron el numérico y el verbal. Los usaron en diferentes momentos:

a) **Sistema de representación verbal**. Este sistema de representación fue el más empleado en esta tarea. Veinte estudiantes recurrieron a él para justificar o describir sus procedimientos. En ese proceso, hicieron uso del uso del lenguaje común. La mayoría de ellos, describieron cómo determinar rápidamente la cantidad de sillas que se colocarían alrededor de 100 mesas octagonales, una de las cuestiones demandadas por la tarea.

b) **Sistema de representación numérico**. Este sistema de representación es utilizada en dos de sus representaciones, la numérica simple y la tabular. La **representación numérica simple** fue utilizada por diecisiete estudiantes, para registrar el aumento de sillas en cada etapa o bien, para expresar estructuras aditivas y multiplicativas, asociadas a la generalización empírica. Mientras que la **representación tabular** la emplearon tres estudiantes para organizar y representar numéricamente las etapas que analizan del patrón figural (consecutivas y no consecutivas). He aquí donde existe una conversión entre representaciones, pasando de lo pictórico a lo tabular.

c) **Sistema de representación gráfico**. Utilizaron la **representación pictórica** asociada a este sistema, en etapas cercanas consecutivas y no consecutivas. Ello, a fin de reconocer cuánto incrementan las figuras en cada etapa. El uso de este sistema de representación se articula al enfoque de recursividad en el que se involucraron los estudiantes. En esta tarea la emplearon siete estudiantes.

d) **Representaciones múltiples:** En esta tarea dieciséis estudiantes se apoyaron de la **representación múltiple verbal-numérica**. La mayoría recurrió a ella para describir cómo obtuvieron la cantidad de sillas en las etapas demandadas (1, 8, 16 y 100), haciendo uso de la combinación del lenguaje común y operaciones aritméticas.

5.2.3. Sistemas de representación en la tarea 3

En esta tarea los estudiantes también recurrieron a los sistemas de representación numérica, el gráfico y el verbal (tabla 5.9). Son los siguientes:

a) **Sistema de representación numérico**. Usan los dos tipos de representación asociadas a este sistema, la numérica simple y la tabular.

a.1) *Representación numérica simple.* La utilizaron doce estudiantes. En un primer momento, para representar la cantidad de círculos que componen a cada figura, o bien para registrar cuánto incrementa en cada etapa. Asimismo, para expresar la estructura matemática asociada a la generalización, la cual plantearon en términos de una estructura aritmética, vía la multiplicación y la adición.

a.2) *Representación tabular.* Cuatro estudiantes usaron esta representación para organizar y representar numéricamente las etapas que analizan del patrón figural (consecutivas y no consecutivas). Es decir, convierten la representación pictórica del sistema de representación gráfico a la representación tabular del sistema de representación numérico.

b) **Sistema de representación gráfico**. Emplean a la **representación pictórica** asociada a este sistema, en etapas cercanas consecutivas y no consecutivas. Ello, a fin de reconocer cuánto incrementan las figuras en cada etapa. El uso de este sistema de representación se articula al enfoque de recursividad en el que se involucraron los estudiantes. . En esta tarea la emplearon dos estudiantes.

c) **Sistema de representación verbal**. Este sistema de representación se basa del uso del lenguaje común. Veinticinco estudiantes recurrieron a él, en distintos momentos de su trabajo con la tarea. Principalmente, cuando se les pidió describir cómo determinar rápidamente la cantidad de círculos que conforman la figura 150. La respuesta a esta cuestión, algunos estudiantes articularon además, la representación numérica simple.

d) **Representaciones múltiples:** Doce estudiantes usaron la **representación múltiple verbal-numérica** para describir el procedimiento que siguieren para determinar la cantidad de palillos en las etapas demandadas (3, 10, 20 y/o 150). En esta forma de proceder se apoyaron del lenguaje común y la estructura aritmética de manera simultánea.

Tabla 5. 7 . Sistemas de representación identificados en la tarea 1.

Estudiante	**Sistemas de Representación**				**Representaciones múltiples**
	Numérico		Gráfico	Verbal	Verbal-Numérica Simple
	Numérica simple	Tabla de valores	Pictórico		
E1	X		X	X	
E2	X			X	
E3	X		X	X	
E4				X	X
E5	X		X	X	
E6	X		X	X	X
E7	X			X	X
E8	X	X		X	
E9				X	
E10	X			X	X
E11			X	X	X
E12				X	X
E13	X			X	X
E14	X			X	
E15				X	
E16	X		X	X	
E17			X	X	
E18	X			X	X
E19				X	X
E20				X	X
E21	X			X	
E22			X	X	
E23			X	X	
E24			X	X	
E25	X		X	X	
E26	X	X		X	
E27	X		X	X	X
E28	X			X	
E29	X	X		X	X
E30			X	X	X
E31	X			X	
Total	19	3	13	31	13

Tabla 5. 8. Sistemas de representación identificados en la tarea 2.

Estudiante	**Sistemas de Representación**				**Representaciones múltiples**
	Numérico		Gráfico	Verbal	Verbal-Numérica Simple
	Numérica simple	Tabla de valores	Pictórico		
E1	X		X	X	
E2			X	X	X
E3	X			X	X
E4					
E5	X			X	X
E6	X	X		X	X
E7	X			X	
E8			X	X	
E9					X
E10			X	X	
E11					
E12	X			X	X
E13	X			X	X
E14					X
E15	X		X		X
E16	X		X	X	X
E17	X	X		X	
E18	X				X
E19				X	
E20				X	X
E21					X
E22					X
E23	X				
E24				X	
E25					
E26	X			X	
E27					
E28	X	X	X	X	X
E29	X			X	
E30	X			X	X
E31	X			X	
Total	17	3	7	20	16

Tabla 5. 9. Sistemas de representación identificados en la tarea 3.

Estudiante	**Sistemas de Representación**				**Representaciones múltiples**
	Numérico		Gráfico	Verbal	Verbal-Numérica Simple
	Numérica simple	Tabla de valores	Pictórico		
E1	X			X	
E2	X			X	X
E3				X	X
E4				X	
E5	X			X	
E6	X		X	X	X
E7	X			X	
E8			X	X	
E9				X	
E10		X		X	
E11					X
E12				X	
E13	X				X
E14				X	
E15				X	
E16		X		X	
E17	X	X			X
E18				X	
E19				X	
E20				X	
E21	X				X
E22					X
E23				X	
E24				X	
E25				X	
E26	X			X	
E27					X
E28				X	X
E29	X			X	
E30	X			X	X
E31	X	X		X	X
Total	12	4	2	25	12

Capítulo 6

Conclusiones

Esta investigación analizó el pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de una escuela primaria en México. El análisis consideró los enfoques funcionales (recursividad, covariación y correspondencia), los sistemas de representación (numérico, gráfico, algebraico, verbal o representaciones múltiples) y los tipos de generalización (constructiva o deconstructiva). Se exploró con base en tres tareas, asociadas a sucesiones de figuras con progresión aritmética de orden uno.

6.1. Enfoques funcionales

La investigación muestra que: (1) quienes evidenciaron un pensamiento funcional, no necesariamente transitaron por los tres enfoques funcionales (ver tabla 6.1) propuestos por Pinto & Cañadas, 2018; Pinto 2016; Tanışlı, 2011; adaptado de Smith, 2008, (2) los aspectos visuales, fueron fundamentales para que los estudiantes establecieran inferencias de su interpretación a los objetos figurales de las etapas dadas del patrón involucrado, como configuraciones estructuradas de cierta manera, asimismo, reconocieran determinadas propiedades (por ejemplo: incremento, cuánto incrementa, etc.), (3) recurrieron a más de un sistema de representación en sus interpretaciones, y (4) que la mayoría de los estudiantes que establecen una generalización, se involucran en los enfoques de recursividad y de correspondencia.

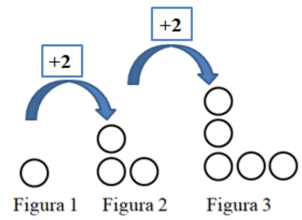
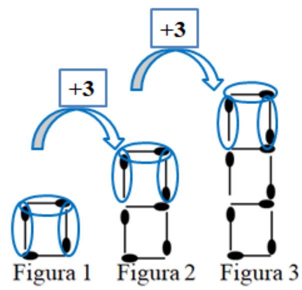
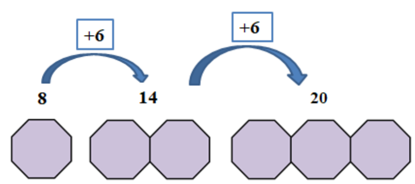
Tabla 6. 1. Enfoques funcionales que se reconocen en las tres tareas.

Tarea	Enfoques funcionales		
	Recursividad	Covariación	Correspondencia
T1	16	0	16
T2	5	0	12
T3	8	1	8

a) Enfoque de recursividad

Una mayoría de los estudiantes que generalizaron se involucraron en este enfoque. Este hecho se justifica desde las cuestiones demandadas por la tarea, que implicaron al estudiante en la determinación de etapas cercanas y lejanas del patrón figural. Se involucraron de manera diferenciada, en la que se evidencian tres casos de recursividad:

Tabla 6. 2. Casos del enfoque de recursividad en los que se involucraron los estudiantes.

Casos de recursividad	Descripción	Tarea	Ejemplo
Conteo recursivo	Recurren al conteo de las unidades que componen los objetos figurales de cada patrón y reconocen el incremento constante, enfocándose sólo en unas de las variables involucradas (en este caso, “cuando el valor de patrón de la variable dependiente aumenta cierta cantidad”).	T1, T2 y T3	T3 
Método basado en la figura	Recurren al objeto figura o etapa del patrón y la descomponen en configuraciones distinguibles, esto les permiten reconocer el “incremento constante” de cada figura, en etapas cercanas y lejanas.	T1, T2 y T3	T1 
Método numérico	Representan numéricamente la cantidad de unidades que forman las figuras de las etapas dadas en la tarea. Desde ahí, se enfocan en una de las variables involucradas (número de unidades que forman cada figura) y reconocen el incremento constante de cada figura, en etapas cercanas y lejanas.	T1, T2 y T3	T2 

b) Enfoque de covariación

Sólo un estudiante se involucró en este enfoque (E17 en la tarea 3).

Tabla 6. 3. Caso del enfoque de covariación en el que se involucró E17.

<table>
<tr><th>Caso de covariación</th><th>Descripción</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Método numérico</td><td>1. Convirtió numéricamente las etapas que analiza del patrón figural (consecutivas y no consecutivas), a una forma bien estructurada. Esto es, de lo figural pasa a una tabla.</td><td><table><tr><td>F</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>…</td></tr><tr><td>C</td><td>19</td><td>39</td><td>59</td><td>79</td><td>…</td></tr></table></td></tr>
</table>

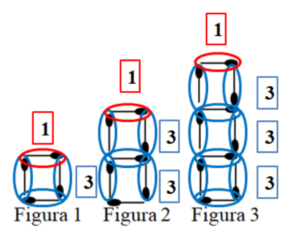
2. Enfocó su análisis en las dos variables involucradas (número de figura y número de círculos). Con base en ello, reconoció cuánto varían de una etapa a la otra	+10 +10 +10 F: 10, 20, 30, 40, … C: 19, 39, 59, 79, … +20 +20 +20

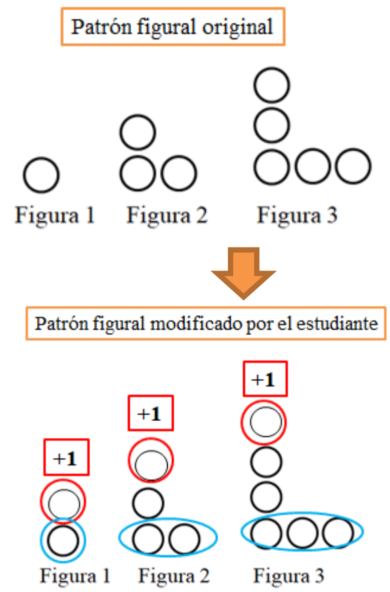
F	10	20	30	40	…
C	19	39	59	79	…

c) Enfoque de correspondencia

Los estudiantes que generalizaron se involucraron en este enfoque. Se reconoció, al momento en que esta población, cambian su forma de proceder cuando se les determinan etapas lejanas del patrón figural. Ahí, una mayoría abandonan el enfoque recursivo y centran su atención en la correlación entre los pares correspondientes de las variables involucradas (se enfocan en reconocer qué cantidad de unidades le corresponde a determinada figura), es decir, explican el comportamiento general que sigue el patrón figural. Los estudiantes se involucraron de manera diferenciada, en la que se evidencian tres casos de correspondencia:

Tabla 6. 4. Casos del enfoque de correspondencia en los que se involucraron los estudiantes.

Casos de correspondencia	Descripción	Tarea	Ejemplo
Método numérico	A través de estructuras matemáticas, representan numéricamente la correlación existente entre las dos variables. Es decir, pueden determinar cuántas unidades forman cualquier figura (Por ejemplo, si el número de figura es x, la cantidad de unidades que la forman es y).	T1, T2 y T3	**T2** *“En 8 mesas octagonales unidas se colocan 50 sillas a su alrededor, porque multipliqué* $(8x6)+2$*”* *“En 16 mesas octagonales unidas se colocan 98 sillas a su alrededor, porque multipliqué* $(16x6)+2$*”* *En 100 mesas octagonales unidas se colocan 602 sillas a su alrededor, porque multipliqué* $(100x6)+2$*”*
Método basado en la figura	Recurren al objeto figura o etapa del patrón y la descomponen en configuraciones distinguibles, esto les permiten reconocer relaciones entre el número de figura y el número de unidades que forman cada figura.	T1, T2 y T3	**T1** 
Generalización dirigida por auxiliares	Modifican el objeto figura o etapa del patrón, agregando o quitando unidades para buscar relaciones entre el número de figura y el número de unidades que forman cada figura. Desde esa forma de proceder, determinan la cantidad de unidades que forman a cierta figura.	T3	**T3**



6.2. Generalización y tipos

La generalización es una característica importante del pensamiento funcional (Blanton et al., 2015) y es la máxima demanda cognitiva planteada a los estudiantes a partir de las tareas, por encima de lo que establece el currículum de educación primaria en México. Lograron construirla mayoritariamente en las tareas 1 y 2. Además se reconoce que quienes generalizaron, se involucraron en el enfoque de correspondencia (Tabla 6.5).

Tabla 6. 5. Estudiantes que generalizan en las tres tareas.

Tarea	Enfoques funcionales			Generalizan	
	Recursividad	Covariación	Correspondencia	Si	No
T1	28	0	18	16	15
T2	7	0	13	12	19
T3	30	2	8	8	23
Total	65	2	39	38	57

Esta etapa se reconoce cuando el estudiante valida una conjetura, la cual establece para determinar una etapa lejana y/o cercana del patrón figural. En este proceso, coordinan sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas (Rivera, 2010) apoyándose de las representaciones para manifestar formas de razonamiento. Expresan estas generalizaciones mediante estructuras matemáticas (simbólica), con las que explican y justifican el comportamiento de los objetos de un patrón figural. Se articulan a una estructura matemática (constructiva o deconstructiva) y a la fórmula polinómica (aditiva o multiplicativa, estándar o no estándar) que los estudiantes generan en su generalización empírica. Se reconocieron tres tipos: a) Aditiva constructiva no estándar, b) Multiplicativa constructiva estándar y c) Multiplicativa deconstructiva no estándar (tabla 6.6).

Tabla 6. 6. Tipos de generalización que se establecen en las tres tareas.

Tipos de generalización	Características figurales	Expresión matemática	Tarea	Ejemplos
Aditiva constructiva no estándar	Ve patrones figurales como compuestos de partes no superpuestas	Los términos en la expresión matemática están en forma expandida, no simplificada	T3 (un estudiante)	Generalización inferida en E27: $f(n) = n + n - 1$
Multiplicativa constructiva estándar	Ve patrones figurales como compuestos de partes no superpuestas	Los términos en la fórmula están de forma simplificada	T1 (15 estudiantes)	Generalización inferida de E13 en T1: $f(n) = 3n + 1$
			T2 (11 estudiantes)	Generalización inferida de E20 en T2: $f(n) = 6n + 2$
			T3 (7 estudiantes)	Generalización inferida de E13 en T3: $f(n) = 2n - 1$
Multiplicativa deconstructiva no estándar	Ve patrones figurales como compuestos de partes superpuestas	Los términos en la fórmula están en forma expandida, no simplificada	T1 (un estudiante)	Generalización inferida en E5: $f\ (n) = ((a_k.\frac{n}{k}) - (\frac{n}{k} - 1)$
			T2 (un estudiante)	Generalización inferida en E31: $f(n) = (6(n-2) + 2(7))$

6.3. Sistemas de representación

Los sistemas de representación también son una pieza clave en el estudio del pensamiento funcional, ya que a través de ellos se pueden representar y justificar relaciones entre cantidades variantes (Blanton et al., 2015). Los sistemas de representación que utilizan los estudiantes que evidencian pensamiento funcional, en consecuencia los que generalizan son:

el verbal, el numérico y el gráfico. Aunque también emplearon la representación múltiple: verbal-numérico simple (tabla 6.7).

Tabla 6. 7. Sistemas de representación identificados en las tres tareas.

Tarea	Sistemas de representación				Representación múltiple
	Verbal	Numérico		Grafico	Verbal-Numérica Simple
		Numérica simple	Tabular		
T1	16	12	2	6	9
T2	12	9	2	2	7
T2	4	5	2	1	7
Total	32	26	6	9	23

a) Sistema de representación verbal

Este sistema de representación lo utilizan casi todos los estudiantes que evidencian pensamiento funcional (32 de 36 estudiantes) en las tres tareas. La emplean para describir y justificar verbalmente sus procedimientos. Particularmente, describen como determinar rápidamente etapas lejanas del patrón figural.

b) Sistema de representación numérico

Este sistema de representación es uno de los más utilizados por los estudiantes, recurren a la representación numérica simple y tabular. La representación numérica simple es usadas por casi todos los estudiantes en las tareas, siendo la tabular una de las menos empleadas.

La representación numérica simple, es usada para representar y expresar las generalizaciones en su estructura matemática (aditiva y/o multiplicativa). También la utilizan para representar numéricamente las etapas del patrón figural y darle continuidad a dicho patrón para determinar etapas cercanas demandadas por la tarea. Mientras que la representación tabular se emplea para representar la correlación existente entre las dos variables, y que ayuda en la mayoría de los casos al reconocimiento del enfoque de correspondencia.

c) Sistema de representación gráfico

El sistema de representación gráfico es al que menos recurren los estudiantes, utilizando sólo la representación pictórica. Esta representación, se emplea por algunos estudiantes cuando siguen el patrón figural y determinan etapas cercanas (consecutivas y no consecutivas). Otros por su parte, la usan para representar alguna etapa en particular, sin la necesidad de representar todas las etapas anteriores. Sin embargo, estas formas de proceder son abandonadas cuando se les demandan etapas lejanas, favoreciendo en algunos casos el reconocimiento del valor de patrón y cómo este se relaciona con el número de etapa, involucrando al estudiante en el enfoque de correspondencia y la generalización.

d) Representación múltiple: Verbal- Numérica Simple

Se reconoció el empleo de una representación múltiple resultado de las combinación de la representación verbal y la representación numérica simple. Esta representación es utilizada por los estudiantes cuando justificaban verbalmente sus respuestas y representaban numéricamente las operaciones a los recurrieron para encontrar sus resultados.

e) Conversiones entre sistemas de representación

Se presentó sólo una conversión entre sistemas de representación: del gráfico al numérico. Esta conversión se manifestó cuando los estudiantes transformaron numéricamente la figura y el número de unidades que forma cada figura correspondiente, y los registraron de forma bien estructurada, en una tabla. Es decir, convertían la representación pictórica del sistema de representación gráfico a la representación tabular del sistema de representación numérico.

6.4. Reflexiones finales

Los aportes de esta investigación van dirigidos a toda la comunidad de Matemática Educativa, particularmente a aquellas que se enfocan en el estudio del pensamiento funcional y el pensamiento algebraico temprano en el marco de la generalización de patrones figurales.

Los resultados evidencian que los estudiantes primaria, son capaces de reconocer patrones (de recurrencia y de correspondencia), y establecer generalizaciones apoyados de las estructuras aditivas y multiplicativas. Así también, que las tareas de patrones figurales jugaron un papel importante en el análisis del pensamiento funcional, destacando los aspectos visuales como principales generadores de la generalización. Éstos, favorecieron a los estudiantes organizaran los casos, trabajaran con casos particulares, lo que derivó en el reconocimiento del patrón (de recurrencia y/o de correspondencia), y el establecimiento de relaciones entre las dos variables involucradas, ayudando esta última a deducir perceptualmente y simbólicamente una estructura algebraicamente útil (generalización implícita). Además, que desde la investigación se enfatiza el trabajo de tareas de patrones figurales como un método efectivo en la introducción al álgebra (Rivera, 2010; 2013).

La descripción de los tipos de enfoques funcionales y generalizaciones que reconocieron y establecieron los estudiantes, permitió identificar a aquellos estudiantes que manifestaban pensamiento funcional, es decir, que generalizaron. Posteriormente, se profundizó en estos estudiantes, y a través de sus razonamientos se reconocieron distintas formas de proceder.

Por ejemplo, la T1 fue en la que más estudiantes generalizaron, caso contrario con T2 y T3. T1 tiene la estructura de las tareas que proponen los libros de texto de matemáticas, ya que es una sucesión de figuras con progresión aritmética de orden uno con término general de la forma: $f(n) = ax + b, a \ y \ b > 0$, también son explicitas las dos variables involucradas (número de figura y número de unidades que forman la figura). Si bien, T2 tiene termino general de la misma forma que T1, el contexto figural es diferente, pues las variables están implícitas. Por su parte, T3 fue la tarea donde menos estudiantes generalizaron (aunque las variables están explicitas), este hecho se justifica por la forma del término general: $f(n) = ax + b, a > 0 \ y \ b < 0$, ya que las tareas de los libros de texto poco se trabaja con este tipo de progresiones aritméticas de orden uno.

El estudio de los sistemas de representación evidencia que cuando el estudiante cambia su forma de proceder también cambia las representaciones que usa, por lo que estos dos elementos están fuertemente conectados. Otro aspecto importante a resaltar, es la cantidad de representaciones y conversiones que el estudiante utiliza en la resolución de la tarea, ya que a mayor uso de representaciones y conversiones, mayor es la posibilidad de que el estudiante logre establecer relaciones importantes entre las dos variables involucradas, ayudando así a la generalización.

También, se reconocen estrategias en el modo de proceder de los estudiantes, tales como la de objeto entero y la de contar a partir de un dibujo (Jurdak & El Mouhayar, 2014). Siendo un aporte importante para esta investigación.

Si bien el análisis de los datos y los resultados presentados son factibles y confiables para cumplir con los objetivos propuestos. Se reconoce una limitación en los instrumentos utilizados en la recogida de la información, ya que en ocasiones no permiten describir a profundidad los conceptos y/o procedimientos que subyacen en el razonamiento de los estudiantes. Por lo que se sugiere realizar entrevistas semi-estructuradas a cada uno de los participantes.

Finalmente, se vislumbran futuras investigaciones en diferentes marcos. Por ejemplo, en el de las representaciones se propone explorar este tipo de pensamiento en otras representaciones, como la numérica, la verbal y la tabular. En el marco de las progresiones aritméticas y la generalización, sería interesante analizar el pensamiento funcional en niños de primaria con progresiones aritméticas de orden dos. Y una línea que todavía sigue abierta en el estudio del pensamiento funcional, es generar este tipo de pensamiento, ya que una mayoria de las investigaciones son meramente exploratorias.

Referencias bibliográficas

Abarca, A., Alpízar, F., Sibaja, G. y Rojas, C. (2012). *Técnicas Cualitativas de Investigación*. San José: Costa Rica.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación (*Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Aké, L. (2017). Una intrerpretación del razonamiento algebraico en la Educación Primaria desde el modelo de niveles de algebrización. En L. Aké (Ed) en *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*.

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(2), 107-126.

Blanton, M. L. (2008*). Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 34–42.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai, E. Knuth (eds.), Early Algebraization, Advances in *Mathematics Education (5-23)*. Berlin Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_2.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Brizuela, B. & Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología-Segunda Época (UNLP)*, 14, 37-57.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., & Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En L. Aké (Ed) en *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Cañadas, M., Castro, E. & Castro, E. (2011). *Graphical representation and generalization in sequences problems*. Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Cañadas, M. & Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje*, *34*(4).

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M., Brizuela, B. & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 669–705). Greenwich, United Kingdom: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/ Taylor & Francis Group; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales: estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada, España: Comares.

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study* (P. Moxhay., Trans.). New York, NY: Nova Science Publishers.

Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.

García, F. (2005). Matemática discreta. Madrid: Thompson.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92.

Kaput, J. (1998). Teaching and Learning a New Algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York; NY: Routledge.

López-Mojica, J. M., Cárdenas, C., Sánchez. Y., y Aceves, L. (2017). Pensamiento algebraico de jóvenes con síndrome de Down: la noción de patrón geométrico. En L. Aké (Ed) en *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*.

López-Mojica, J. M., y Martínez, C. (2017). Una caracterización del pensamiento algebraico en los libros de texto de educación primaria En L. Aké (Ed) en *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el professor de secundaria* (pp. 119-137). Madrid, España: Pirámide.

Mason, J., Sthepens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B., Gómez, P. (2016). *Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales.* En Macías, Juan Antonio; Jiménez, Antonio; González, José Luis; Sánchez, María Teresa; Hernández, Pedro; Fernández, Catalina; Ruiz , Francisco José; Fernández , Teresa; Berciano, Ainhoa (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *12*(3), 173-184.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Springer, Cham.

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. PNA, *4*(1), 1-14.

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática.* (pp.1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., y Moreno, A. (Coords) (2016). Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria. Madrid, España: Pirámide.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In J. Cai & E.Knut (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (advances in Mathematics education)* (Vol. 2, pp. 323-366). New York, Springer.

Rivera, F. D. (2013). Teaching and Learning Patterns in School Mathematics. N. York, USA: Springer.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: LEA.

Salazar, V. (2017). *Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de matemáticas de primaria* (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero: Facultad de Matemáticas.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

SEP (2011a). *Plan de estudios 2011*, México, Distrito Federal.

SEP (2011b). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, primer grado. México.

SEP (2011c). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, segundo grado. México.

SEP (2011d). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, tercer grado. México.

SEP (2011e). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, cuarto grado. México.

SEP (2011f). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, quinto grado. México.

SEP (2011g). *Programa de estudios 2011*. Guía para el maestro, sexto grado. México.

SEP (2014a). *Desafíos Matemáticos*. Primer grado. México: SEP.

SEP (2014b). *Desafíos Matemáticos*. Segundo grado. México: SEP.

SEP (2014c). *Desafíos Matemáticos*. Tercer grado. México: SEP.

SEP (2014d). *Desafíos Matemáticos*. Cuarto grado. México: SEP.

SEP (2014e). *Desafíos Matemáticos*. Quinto grado. México: SEP.

SEP (2014f). *Desafíos Matemáticos*. Sexto grado. México: SEP.

SEP (2014g). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Primer grado. México: SEP.

SEP (2014h). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Segundo grado. México: SEP.

SEP (2014i). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Tercer grado. México: SEP.

SEP (2014j). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Cuarto grado. México: SEP.

SEP (2014k). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Quinto grado. México: SEP.

SEP (2014l). *Desafíos Matemáticos*. Libro para el Maestro. Sexto grado. México: SEP.

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223.

Van Someren, M. W., Reimann, P., Boshuizen, H. P. A., & de Jong, T. (1998). *Learning with multiple representations*. Oxford: Elsevier.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis inédita de doctorado). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150–162.

Anexos

Instrumento de exploración

Tarea 1 (T1)

Nombre del estudiante: ____Edad:____

Nombre de la escuela: _______________________________________Grado: __ Grupo: __

Analiza la siguiente sucesión de figuras, formada por fósforos de igual tamaño.

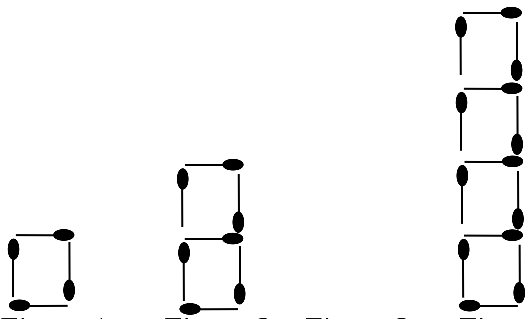


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

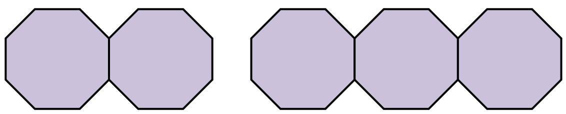
1. ¿Cuántos fósforos forman la figura 3? ¿Cuántos la figura 10? ¿figura 20? Argumenta ampliamente tu respuesta para cada caso
2. Explica cómo determinar rápidamente el número de fósforos que forman la figura 150.
3. Si tienes 601 fósforos ¿A qué número de figura corresponde? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Tarea 2 (T2)

Nombre del estudiante: ____Edad:____

Considera mesas que tienen forma octagonal unidas por uno de sus lados (observa la figura de abajo), y se coloca una silla por cada lado. ¿Cuántas sillas pueden colocarse en una mesa octagonal? ¿Cuántas sillas pueden colocarse en 8 mesas octagonales? ¿Cuántas en 16 mesas? ¿Y si son 100 mesas?

Si tienes 452 sillas ¿Cuántas mesas octagonales necesitarás para colocarlas a todas alrededor? Argumenta tus respuestas.



Tarea 3 (T3)

Nombre del estudiante: ____Edad:____

Analiza la siguiente sucesión de figuras, formada por círculos de igual tamaño.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

1. ¿Cuántos círculos forman la figura 3? ¿Cuántos círculos forman la figura 12? ¿Cuántos la figura 100? Argumenta ampliamente tu respuesta para cada caso.
2. Describe cómo se procede para determinar rápidamente el número de círculos que forma cualquier figura de la sucesión.
3. Si tienes 299 círculos ¿A qué número de figura corresponde? Argumenta ampliamente tu respuesta.
4. Ahora, describe cómo se procede para determinar rápidamente el número de la figura cuando te dan el número de círculos que la forma.