UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Argumentos que Construyen Estudiantes de Primaria en el Contexto de la Refutación

TESIS DOCTORAL

Que para obtener el grado de Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Jonathan Alberto Cervantes Barraza

Directora de tesis

Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Chilpancingo, Guerrero,
México
Noviembre 2020

Argumentos que Construyen Estudiantes de Primaria en el Contexto de la Refutación

Tesis Doctoral

M.C. Jonathan Alberto Cervantes Barraza

Directora de tesis

Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Comité evaluador:

Dra. Lidia Hernández Rebollar. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Dra. Catalina Navarro Sandoval. Universidad Autónoma de Guerrero.
Dr. Armando Morales Carballo. Universidad Autónoma de Guerrero.
Dr. Hermes Nolasco. Universidad Autónoma de Guerrero.

2020

Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Posgrado en Matemática Educativa
Chilpancingo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México)

Becario No. 699673

Contenido

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Esta investigación se ubica en el marco de la educación básica primaria, toma como centro de estudio el contenido y la estructura de la argumentación colectiva suscitada entre estudiantes de quinto grado mientras refutan. La problemática refiere a la necesidad de incluir la refutación como una forma de gestionar la construcción de argumentos de los estudiantes, además, se requiere profundizar en los tipos de argumentos y las estructuras emergentes en la argumentación colectiva al refutar los datos, garantías o conclusiones. Para ello, se trazaron los objetivos: 1) Caracterizar los argumentos construidos por los estudiantes al refutar conclusiones, garantías o datos en la argumentación colectiva y 2) Analizar las estructuras de la argumentación colectiva suscitada en clase de matemáticas en el contexto de la refutación. Para el logro de los objetivos, se conformó un marco conceptual con los conceptos: argumentación, argumento, argumentación colectiva, argumentación compleja, refutación y una tipología de argumentos que favorece la caracterización de los argumentos y la reconstrucción de la estructura de la argumentación colectiva. Metodológicamente se diseñó un experimento de enseñanza con el propósito de fomentar la argumentación colectiva en un grupo de estudiantes de quinto de primaria a través de tareas que fomentan la refutación y construcción de argumentos. El análisis de los datos tomó la adaptación de la propuesta metodológica de Macagno et al. (2015) que permitió caracterizar los argumentos construidos por los estudiantes y la propuesta de Knipping y Reid (2015, 2019) para analizar las estructuras argumentativas emergentes en la interacción.

Los resultados de la investigación indican que los estudiantes de quinto grado de primaria construyen diversos tipos de argumentos en el contexto de la solución de tareas matemáticas y su contenido refiere a: propiedades, características invariantes, comparaciones, consecuencias, aspectos visuales y conceptuales de los objetos matemáticos en estudio. Con respecto a las estructuras de la argumentación colectiva, emergió la estructura de *fuente* en las tareas del experimento de enseñanza conformada por argumentos paralelos y cadenas de razonamientos que implican datos, garantías y conclusiones. Como resultado emergente se identificó el argumento de refutación y preguntas del profesor que permitieron establecer la conclusión o consenso en la clase.

Palabras clave: Argumentación, Refutación, Matemáticas, Contenido, Estructura.

ABSTRACT

This research is located within the framework of primary basic education, takes as its center of study the content and structure of the collective argumentation raised among fifth graders while they refute. The problem addresses the need to include refutation as a way to manage the construction of students' arguments, in addition, it is required to delve into the types of arguments and structures of collective argumentation when refuting data, warrants or conclusions. To do this, the objectives were outlined: 1) Characterize the arguments built by the students when refuting conclusions, warrants or data in the collective argumentation and 2) Analyze the structures of the collective argumentation raised in mathematics class in the context of the refutation. To achieve the objectives, a conceptual framework was formed with the concepts: argumentation, argument, collective argumentation, complex argumentation, refutation and a typology of arguments that favors the characterization of the content of the arguments and the reconstruction of the structure of collective argumentation. Methodologically, a teaching experiment was designed with the purpose of promoting collective argumentation in a group of fifth grade students through tasks that promote the refutation and construction of arguments. The data analysis took the adaptation of the methodological proposal of Macagno et al. (2015) that allowed to characterize the arguments constructed by the students and the proposal of Knipping and Reid (2015, 2019) to analyze the argumentative structures emerging in the interaction.

Findings indicate that fifth-grade students construct various types of arguments in the context of solving mathematical tasks and their content refers to: properties, invariant characteristics, comparisons, consequences, visual and conceptual aspects of objects mathematicians under study. Regarding the structures of collective argumentation, the source structure was identified in the tasks of the teaching experiment, made up of parallel arguments and chains of reasoning that imply data, warrants and conclusions. As an emergent result, the refutation argument and teacher questions identified to allow the conclusion or consensus of the class to be established.

Keywords: Argumentation, Refutation, Mathematics, Content, Structure.

Capítulo 1

El punto de partida

Es ampliamente aceptada la importancia y la necesidad de fomentar la argumentación en clase de matemáticas desde los primeros años de la escolaridad, en razón de que favorece el aprendizaje de la matemática en la interacción con pares, involucra a los estudiantes en la construcción de argumentos, presentar razones, conclusiones y refutarlas con el propósito de convencer a los demás sobre su validez. En el marco de la educación básica primaria en el que se ubica esta investigación, los argumentos y las estructuras argumentativas emergentes son el centro de interés. Particularmente, centramos la atención en el contenido y la estructura de los argumentos que construyen estudiantes de quinto grado al refutar conclusiones, datos o garantías.

1.1. Argumentación en Educación Matemática

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, la argumentación es una habilidad básica que se desarrolla a lo largo de la educación obligatoria (Goizueta y Planas, 2013), conforma una dimensión importante en las actividades de la vida cotidiana y en las profesionales (Muller Mirza y Perret-Clermont, 2009). Promueve el desarrollo de la comprensión conceptual (Rumsey, Guarino, Gildea, Cho y Lockhart, 2019), contribuye a que los estudiantes aprendan y participen explorando, conjeturando y justificando sus ideas (*e.g.*, Rumsey y Langrall, 2016; Krummheuer, 1995, 2015). Además, es un medio que favorece el aprendizaje de la matemática (Krummheuer, 2015; Rumsey et al., 2019), el desarrollo de habilidades argumentativas (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019; Rigotti y Greco Morasso, 2009) y mejora la comunicación de ideas matemáticas en los estudiantes (Lin, 2018).

La importancia de la argumentación en el salón de clases de matemáticas recae en que el aprendizaje ocurre en la interacción con pares (Krummheuer, 2015; Rumsey y Langrall, 2016), ya que la argumentación es un medio por el cual se inicia el proceso de prueba (Hoffman, Breyfogle y Dressler, 2009) y permite que el profesor identifique el razonamiento y el nivel de comprensión de los estudiantes (Erkek y Bostan, 2018; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Mercado-Porras, 2020). En línea con lo anterior, la participación de los estudiantes en la argumentación contribuye tanto al aprendizaje y al desarrollo del derecho a participar en los procesos discursivos (Cramer y Knipping, 2019). Los estudiantes establecen aserciones, conclusiones y ofrecen evidencia para soportarlas (Tekin-Dede, 2018), cuentan con oportunidades para conectar conceptos nuevos con conocimiento previo (Wagner, Smith, Conner, Singletary y Francisco, 2014), comparten sus respuestas y las justifican para contraponerlas con la de los demás (Whitenack y Yackel, 2002) con el propósito de desarrollar una comprensión conceptual de la materia de enseñanza (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014a). En suma, la argumentación en el salón de clases implica a los estudiantes ganar experiencia en el trabajo autónomo, colaborativo, la discusión, la reflexión y la argumentación colectiva, con el fin de propiciar oportunidades para validar los argumentos y otras formas de pensamiento.

Diversos planes y programas de estudios de matemáticas en Educación Básica (*e.g.*, Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011, 2017; Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) señalan la pertinencia de la argumentación como objeto de aprendizaje y como proceso crítico para el desarrollo del pensamiento matemático (Muller y Buty, 2015). Enfatizan en la necesidad de promover la construcción de argumentos por parte de los estudiantes desde los primeros años de la escolaridad, dado que contribuye a que ganen la confianza suficiente para justificar conclusiones y procedimientos con argumentos orientados hacia el razonamiento deductivo-inductivo y la demostración (SEP, 2011, 2017; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010). En el ámbito de las evaluaciones internacionales como el programa PISA, la argumentación es un aspecto fundamental en los niveles de desempeño de los estudiantes. Y solicita en uno de los niveles de la competencia matemática, trabajar con situaciones complejas que impliquen habilidades como: razonar, comprender y construir argumentos (Organización para la cooperación y el desarrollo económico [OCDE], 2007).

En el plano social de las propuestas curriculares en matemáticas (*e.g.*, SEP, 2011, 2017; NCTM, 2000; MEN, 2006), señalan que los estudiantes deben reconocer la diversificación de los tipos de pensamiento lógico-matemático a través de justificaciones razonables y refutaciones con el fin de practicar la ciudadanía crítica en el salón de clases. En el mismo sentido, el Plan y Programa de Estudio de Educación Básica Primaria propuesto por la SEP (2011, 2017) indica que los estudiantes experimenten situaciones que propicien el trabajo autónomo, grupal y colaborativo mediante la argumentación y la reflexión. Con ello, se busca fortalecer el respeto a la participación, la opinión y reconocer la validez de los argumentos presentados por otros.

Investigaciones destacan la importancia del rol del profesor en los procesos argumentativos en el salón de clases de matemáticas (*e.g.*, Singletary y Conner, 2015; Graham y Lesseig, 2018). Agente educativo encargado de la planeación didáctica, ejecución y evaluación de secuencias de aprendizaje con el propósito de fomentar en los estudiantes la construcción de conocimientos, significados, desarrollo de habilidades, valores, actitudes como escuchar a los demás y respetar las ideas presentadas en el contexto de la solución de problemas (SEP, 2011). Al diseñar secuencias de aprendizaje el profesor es el encargado de: generar condiciones idóneas para que los estudiantes argumenten en los momentos colectivos de la clase (Solar, 2018; Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza, 2019), soporta la argumentación colectiva al contribuir partes de la argumentación como los datos y garantías (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014b), refuta conclusiones de los estudiantes en la resolución de problemas, con base en preguntas y contraejemplos (Potari, Zachariades y Zaslavsky, 2010), fomenta la participación de los estudiantes y el grado de responsabilidad-autenticidad que tienen los aprendices en relación con el contenido matemático (Krummheuer, 2015), promueve la discusión con el objetivo de que los estudiantes validen garantías y/o conclusiones (Roig, Llinares y Penalva, 2011) e involucra a los estudiantes construyan argumentos, confrontarlos con los demás, responder a críticas o bien refutarlos (Cervantes-Barraza, 2017).

En el salón de clases la argumentación matemática es una actividad compleja que requiere de la coordinación de habilidades cognitivas, racionales y sensibles a los contextos en los que se desarrolla (Muller Mirzay Perret-Clermont, 2009; Knipping y Reid, 2015; Cramer y Knipping, 2019; Muller y Buty, 2015). Investigaciones consideran a la refutación como una de ellas (Cervantes-Barraza, 2017; Lin, 2018; Cervantes-Barraza et al., 2019) e implicándola en los procesos de argumentación y prueba matemática como parte de las discusiones de la clase de matemáticas (*e.g.*, Giannakoulias, Mastorides, Potari y Zachariades, 2010; Komatsu, 2017; Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza, 2019). Con ello, los estudiantes desarrollan habilidades argumentativas, evidencian la lógica de las prácticas de la clase de matemáticas (Reid, Knipping y Crosby, 2011), evolucionan los contenidos matemáticos, las ideas toman forma y los valores epistémicos[1] de los argumentos cambian (Pedemonte y Balacheff, 2016). En línea con las ideas planteadas, la refutación es un elemento importante en la argumentación colectiva suscitada en el salón de clases de matemática, ya que promueve la construcción de argumentos y evidencia diversos puntos de vista de los estudiantes ante un contenido matemático en estudio.

1.2. La refutación

En el marco de la prueba y la argumentación matemática, la refutación se ha estudiado desde dos posturas o epistemologías. La primera tiene que ver con la epistemología propuesta por Lakatos (1976) en su obra "Pruebas y Refutaciones" y la segunda en un contexto de los usos de los argumentos en la vida cotidiana (Toulmin, 2003).

1.2.1. La lógica de las pruebas y refutaciones

Imre Lakatos en su obra se interesó en los procesos de descubrimiento de la matemática, reconoció que la concepción clásica se caracteriza en probar teoremas y verdades establecidas de forma contundente y argumenta que estos procesos no reflejan la lógica del descubrimiento matemático. Proporcionó una nueva lógica sobre el proceso del descubrimiento matemático, denominado pruebas y refutaciones, que consta de procesos de refinamiento de conjeturas con base en críticas (*i.e.*, refutaciones) que permiten probar la conjetura principal (Lakatos, 1976).

En la epistemología de las pruebas y refutaciones, Lakatos refiere al término "probar" como "un experimento mental que implica descomponer la conjetura original en sub-conjeturas o lemas incorporado a un cuerpo de conocimiento matemático" (Lakatos, 1976, p. 47). Sin embargo, descomponer la conjetura original, da lugar a la construcción de contraejemplos, críticas o refutaciones en contra de la veracidad de cada una de las sub-conjeturas. Las críticas en términos de contraejemplos tienen lugar a nivel local o global frente una prueba, las del primer nivel refieren a contraejemplos que refutan las sub-conjeturas o lemas sin necesidad de refutar la conjetura original (Lakatos, 1976). Estas críticas o refutaciones no tienen como propósito destruir las conjeturas, sino mejorarlas y ser reemplazadas por unas que no admitan refutaciones.

[1] Los autores entienden por valor epistémico *al "grado de certeza, creencia adjunta a una proposición*" (Duval, 1991, p.224).

Los contraejemplos a nivel global refutan la conjetura principal u original del problema matemático, aceptar un contraejemplo sobre la conjetura principal y su respectiva prueba, implica que el argumentador se someta al *método de la rendición total* (Lakatos, 1976). En este contexto, la existencia de contraejemplos que no critican la conjetura principal ni las sub-conjeturas, sino, casos patológicos conformados por críticas falsas sobre las conjeturas, se consideran “monstruos”. Ante esta patología, Lakatos propuso el *método de exclusión de monstruos*, que consiste en eliminar cualquier contraejemplo en contra de la conjetura original a través de la redefinición de las conjeturas refutadas y modificando términos definidos.

1.2.2. La refutación desde la lógica de los usos de los argumentos

En relación con la segunda postura, la argumentación se reconoce desde el lenguaje cotidiano, como el proceso de establecer conclusiones con base en información previa (*i.e*., datos) y justificar con reglas, regularidades matemáticas o principios (*i.e*., garantía) que brindan una conexión entre la evidencia y la conclusión (Toulmin, 1958/2003). Sobre la argumentación matemática en el salón de clases, Reid, Knipping y Crosby (2011) afirman que los argumentos de los estudiantes recaen en la transición de la lógica cotidiana que éstos traen y la propuesta por el profesor.

Toulmin (2003) en su obra utiliza el término “rebuttal” (en inglés) que también traduce “reserva” para referirse a la refutación, su función es presentar las excepciones de las conclusiones establecidas por un argumentador con el objetivo de mostrar los casos que no conectan la evidencia con la conclusión. Se considera la refutación como la unidad básica necesaria para promover la argumentación y propiciar un ambiente de contraposición de argumentos que evidencie el nivel de comprensión que tienen los estudiantes con respecto al objeto matemático en estudio (Solar y Deulofeu, 2016). Con la particularidad de que no cambia el razonamiento empleado por el estudiante, sino el sentido de la cadena de razonamiento (Conner et al., 2014b).

En la argumentación suscitada en clase de matemáticas, Reid, Knipping y Crosby (2011) distinguen un “rebuttal” de una “refutation” y señalan que una refutación (refutation, en inglés) niega por completo alguna parte del argumento (*e.g*., los datos, la garantía o la conclusión). Al refutar la conclusión se cuestiona la validez de la garantía, así también, refutar la garantía implica colocar en duda la validez de la conclusión y refutar los datos permite analizar su relevancia. En el mismo sentido, Knipping y Reid (2015) afirman que el dato y la garantía de un argumento pueden ser cuestionados, implicando que, si un dato requiere apoyo, se desarrolle una conclusión como parte de un nuevo argumento. En el caso que una garantía es cuestionada, se ofrece un respaldo para apoyarla (Reid y Knipping, 2010, p. 180). En el contexto de la evaluación de la calidad de los argumentos de los estudiantes de primaria, Lin (2018) identificó que los estudiantes pueden refutar una *refutación inválida*. Este tipo de refutación se constituye en un argumento con el nivel más alto de calidad, porque involucra no solo la identificación de la refutación inválida, sino la invalidez del contenido de las garantías que la fundamenta.

Estudios sobre la argumentación en el salón de clases a nivel primaria han documentado varios aspectos de la refutación, Cervantes-Barraza (2017) caracterizó los argumentos que construyen estudiantes al refutar conclusiones y reconoció que el contenido de la garantía se cuestiona generando oportunidad para que presenten un argumento de garantía mejorado con base en propiedades, reglas matemáticas y características invariantes. Lin (2018) reportó criterios para evaluar la calidad de los argumentos de los estudiantes, haciendo énfasis en los elementos presentados. En particular, resalta que los argumentos de refutación son catalogados como los de más alto nivel, dado que estos permiten a los estudiantes desarrollar habilidades argumentativas complejas. Respecto a la refutación de los datos, Solar y Azcarate (2011) aseguran que los estudiantes de secundaria interpretan los datos de gráficas como parte de sus argumentos, dado que a través de la refutación de los datos se propicia un ambiente para que evalúen errores en el contenido de la garantía. Esto es, refutar los datos en tareas sobre interpretación de gráficas, implica oportunidades para revisar el contenido matemático de la garantía del argumento refutado.

1.2.3. Investigaciones que adoptan la lógica de las pruebas y refutaciones

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, la refutación y los contraejemplos desempeñan un papel importante (Komatsu, 2010). Partiendo de la intención de lograr experiencias matemáticas valiosas de aprendizaje en diversos niveles educativos, los autores Morales-Carballo, Locia-Espinoza, Ramírez-Barragán, Sigarreta y Medreros (2018) enfatizan en la importancia de inducir un pensamiento lógico mediante el uso de contraejemplos como un proceso de maduración del pensamiento matemático desde las concepciones de los profesores de secundaria, bachillerato, nivel universitario y en formación inicial. Komatsu (2010) destaca la conveniencia de analizar cómo los estudiantes refutan las conjeturas de los contraejemplos, en función de que éstos se consideran los puntos de partida para valorar errores en las respuestas de los mismos. En el contexto del razonamiento matemático, la refutación de conclusiones es un elemento esencial en el desarrollo del pensamiento deductivo, al involucrar a los estudiantes en la construcción de ejemplos que soportan la refutación, las pruebas matemáticas y con esto validar las aserciones presentadas (Patkin, 2012).

Son pocas las investigaciones a nivel primaria que abordan la lógica de Lakatos, Atkins (1977) por su parte, reportó episodios de una clase sobre el proceso de conjeturar y presentar refutaciones en contra de estas. Bajo esta postura, la autora documentó que involucrar a los estudiantes en la construcción de argumentos matemáticos permite evaluar la viabilidad de los mismos en el contexto social. Reid (2002) evidenció el proceso por el cual los estudiantes de primaria se involucran en la refutación y construcción de contraejemplos. Por su parte, Komatsu (2016) integró un marco teórico con base en reglas heurísticas establecidas en la epistemología de Lakatos para explicar el proceso de prueba y refutación de conjeturas que ocurren bajo razonamientos abductivos.

Basados en la epistemología de las pruebas y refutaciones, la función del descubrimiento de la prueba consiste en la actividad de involucrar a los estudiantes en procesos de validación tomando como punto de partida la construcción de contraejemplos sobre las conjeturas primitivas (Kotaro, Tsujiyamab y Sakamakic, 2014). Convirtiéndose en una oportunidad para que los estudiantes critiquen los argumentos matemáticos y reemplacen las conjeturas refutadas en función de nuevos resultados alcanzados por ellos mismos. Se ha reportado también, sobre la validación de la prueba matemática en clase de geometría a nivel secundaria y la noción de contraejemplos locales que refutan pasos específicos, implicando que mejoren el proceso de aprendizaje sobre la prueba matemática (Komatsu, Jones, Ikeda y Narazaki, 2017). Bajo la misma postura, Sriraman (2003) evidencia cómo los estudiantes en una clase de álgebra a nivel secundaria con problemas clásicos de ecuaciones Diophánticas se comunican constantemente con el profesor en el intento de construir conjeturas que son probadas o refutadas.

1.2.4. La refutación desde la postura de Toulmin y Lakatos

En la obra de Toulmin (1958/2003) la refutación o reserva (rebuttal, en inglés) tiene lugar en diversos campos de la ciencia tales como: leyes, medicina, física, matemáticas, entre otras. En cambio, en la obra de Lakatos (1976) se enfoca en una nueva propuesta sobre la epistemología del conocimiento matemático, basado en procesos continuos de presentar contraejemplos que critiquen las conjeturas de lo que se quiere probar. Bajo lo propuesto en Toulmin (2003) y en investigaciones sobre argumentación en diversos niveles escolares se identifica que los argumentos de los estudiantes en clase de matemáticas se basan en la transición de la lógica de la vida cotidiana y la lógica matemática propuesta por el profesor (Reid, Knipping y Crosby, 2011). En este proceso, se pueden refutar los datos, la garantía o la conclusión, evidenciando la epistemología de la matemática que aborda el profesor y los estudiantes.

En contraste con la propuesta de Lakatos (1976) respecto a los contraejemplos a nivel global-local y la postura de Toulmin sobre refutación, Reid, Knipping y Crosby (2011) sostienen que los contraejemplos a nivel global se corresponden con la refutación de la conclusión y los contraejemplos locales tienen que ver con la refutación de los datos y/o la garantía de un argumento. Esto asumiendo que los datos y la garantía de un argumento son las sub-conjeturas y la conclusión del argumento equivale a la conjetura principal de lo que se quiere probar. En este sentido, la refutación de los datos o la garantía implica analizar la pertinencia y la suficiencia de los mismos. En cambio, la refutación de la conclusión implica dejar en duda los datos o la garantía (Reid, Knipping y Crosby, 2011). Contrastando con la propuesta de Lakatos, la refutación de las sub-conjeturas permite redefinir o cambiar la conjetura principal y si la conjetura principal es refutada, entonces las sub-conjeturas son inválidas.

En esta investigación se considera el concepto de refutación y las tres formas de refutar un argumento en el contexto de la argumentación matemática en el salón de clases, dado que, cada forma de refutar un argumento implica el análisis de su contenido. Para ello, se reconstruye la argumentación y se toma como referencia el contenido de la garantía, elemento que conecta los datos con la conclusión.

1.3. La importancia del contenido y la estructura de la argumentación

Se ha aceptado ampliamente que la argumentación en clase de matemáticas es un motor central en los planes y programas de estudios de matemáticas (Edwards, Meagher y Özgün-Koca, 2017). Se enfatiza la necesidad de promoverla desde los primeros años de la escolaridad, porque: 1) Es vital para la comprensión matemática, ayuda a organizar los pensamientos de los estudiantes y hacer conexiones entre conceptos matemáticos (Becker, 2019), 2) favorece el aprendizaje y la gestión de debates entre los estudiantes en situaciones problema (Muller Mirza y Perret-Clermont, 2009), 3) implica el razonamiento conceptual y procedimental para justificar una conclusión (Lepak, 2014) y 4) involucra la justificación y la generalización como piezas fundamentales para comprometer a los estudiantes con el aprendizaje de las matemáticas (Melhuish, Thanheiser y Fagan, 2019).

Investigaciones sobre argumentación en el salón de clases enfatizan en la reconstrucción y análisis de la argumentación colectiva (*e.g.*, Krummheuer, 2015; Rumsey y Langral, 2016; Solar y Delofeou, 2016; Rumsey et al., 2019; Cervantes-Barraza et al., 2019; Knipping y Reid, 2019). Apoyados en la obra de Toulmin (2003), la argumentación se analiza con base en la estructura y su contenido. La estructura refiere a los elementos que conforman un argumento y el contenido, implica el material semántico de cada elemento que compone un argumento. La argumentación matemática en el salón de clases, se cataloga como una actividad compleja, ya que el profesor proporciona datos o justificaciones, los estudiantes construyen conclusiones, presentan razones y contraponen argumentos con el fin de generar un consenso matemático (Knipping y Reid, 2015, 2019; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019).

Se destaca la necesidad de realizar estudios sobre las estructuras de la argumentación colectiva de estudiantes en diferentes niveles educativos (Erkek y Bostan, 2018; Knipping y Reid, 2015). En razón de que: 1) Proporcionan información sobre la situación general que ocurre en el salón de clases de matemáticas (Knipping, 2008; Knipping y Reid, 2015; 2019), 2) permiten identificar la naturaleza y el flujo de la argumentación en clase de matemáticas (Knipping, 2008; Knipping y Reid, 2019), 3) revelan el significado de las declaraciones matemáticas establecidas en la interacción (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019) y 4) permiten comprender la lógica y las limitaciones contextuales que dan forma a los argumentos que ayudan a los maestros a mejorar sus esfuerzos en la enseñanza (Knipping, 2008).

Acerca del contenido de los argumentos, la garantía es un elemento importante, ya que constituye una ley de paso que valida la relación entre los datos y la conclusión (Toulmin, 2003). Permite clasificar los argumentos con base en el razonamiento matemático empleado por los estudiantes (Schnell, 2014) y evidencia el progreso de los estudiantes respecto de las características y propiedades matemáticas (Cervantes-Barraza, 2017).

En esta investigación centramos la atención en el estudio del contenido y la estructura de la argumentación colectiva suscitada en el salón de clases. Se enfatiza en la importancia de realizar estudios que aborden los tipos de argumentos (*i.e.*, contenido) y la estructura de la argumentación colectiva (*i.e.*, estructura). Esto implica un acercamiento del panorama general sobre la naturaleza de la argumentación matemática en clase de matemáticas y brinda información sobre la interacción entre los estudiantes, la participación del profesor y las intervenciones que hace con el objetivo de construir un consenso matemático.

1.4. Estructuras argumentativas

Toulmin (1958/2003) en su obra “Los usos de los argumentos” propuso una forma diferente de reconstruir y analizar los argumentos con base en los elementos constitutivos: datos, conclusión, garantía, respaldo, calificador modal y refutación. Investigaciones referentes a la argumentación en el salón de clases de matemáticas sostienen que la estructura básica de un argumento se constituye de la tríada: dato, garantía y conclusión, la unión de estos elementos conforman el “núcleo” del argumento (Krummheuer, 1995, 2000, 2015). Caracterizadas por cadenas de razonamientos con conclusiones construidas en lo colectivo que sirven como datos para establecer nuevos argumentos (Krummheuer, 1995, 2000, 2007, 2015). Estudios posteriores a los de Krummheuer (1995), optaron por reconstruir la argumentación con base en el núcleo y las cadenas de razonamientos como estructuras argumentativas emergentes en clases de matemáticas a nivel primaria, secundaria y universitario (*e.g.*, Yackel, 2000; Knippin y Reid, 2015; Conner, 2008; Inglis y Mejía-Ramos, 2005).

En este contexto, el rol del profesor no se consideró como parte de la estructura hasta las investigaciones de Conner (2008, 2014, 2017), quien integró las ideas de Krummheuer sobre el núcleo de la argumentación para incluir la intervención del profesor en la estructura junto con las acciones que realiza para fomentarla (Singletary y Conner, 2015; Conner et al., 2014b). Por su parte, Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2020) señalan que los tipos de preguntas que implementa el profesor de matemáticas promueve la construcción de argumentos en lo colectivo, la validación de los argumentos y la construcción de respaldos con base en representaciones gráficas.

La argumentación colectiva en el salón de clases se caracteriza por demandar a los estudiantes el uso del lenguaje matemático, la capacidad de reconocer diversos puntos de vista y negociar significados (Muller Mirza y Perret-Clermont, 2009; Knipping y Reid, 2015). Investigaciones sobre las estructuras de la argumentación de los estudiantes a nivel primaria documentan que la estructura de la argumentación global captura cómo los argumentos se vuelven sofisticados desde el principio hasta el final de la clase. Además, se identifican los flujos de la argumentación en clase de matemáticas y cómo las conclusiones, datos y garantías presentadas en un momento inicial de forma implícita se hacen explícitas en el transcurso de la clase (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019). A nivel secundaria, Knipping y Reid (2015, 2019) analizaron las estructuras argumentativas complejas que emergen en la reconstrucción del significado de las discusiones matemáticas en términos de datos, garantías o conclusiones en el intento de construir una prueba. Y en el nivel universitario, Papadaki, Reid y Knipping (2019) compararon el papel de la abducción presente en la estructura argumentativa de la clase de matemáticas en un experimento de enseñanza que aborda conceptos de la geometría.

Estudios relacionados con la formación del profesor de matemáticas, Potari y Psycharis (2018) analizan las situaciones argumentativas y centran la atención en la estructura, la calidad de los argumentos matemáticos y los tipos de garantías, respaldos y refutaciones empleadas por los estudiantes. Reconocen además que las estructuras de fuente y la estructura de espiral documentadas en Knipping y Reid (2015) son un modelo de la argumentación suscitada en las clases de matemáticas. En la misma línea, Erkek y Bostan (2018) documentaron dos nuevas estructuras argumentativas globales emergentes en un estudio con profesores en formación, la estructura de línea y la estructura de un argumento independiente. Los resultados indican que los profesores recurrieron a varias estructuras de argumentación global en un entorno mediado por la tecnología y mostraron el potencial de mejorar las estructuras de argumentación global y la de sus estudiantes. Por su parte, Metaxas, Potari y Zachariades (2016) analizaron la coherencia interna de los argumentos de los profesores de un curso de maestría y Nardi, Biza y Zachariades (2012) y reportan diferentes tipos de garantías en los argumentos de futuros profesores, caracterizadas por aspectos curriculares, profesionales, personales y pedagógicos.

Una síntesis de los resultados de investigación sobre la estructura de la argumentación compleja implica que: 1) Evidencia la función de cada declaración matemática establecida por los estudiantes y la estructura emergente que la modela (Knipping, 2008), 2) Proporciona una imagen global de las interacciones entre estudiantes y el profesor en clase de matemáticas, 3) Amplía la comprensión de los tipos de discurso, argumentación y estructuras de participación que los estudiantes establecen durante la clase de matemáticas para que los profesores puedan apoyar la argumentación (Rumsey et al., 2019) y 4) Cuando una conclusión intermedia se produzca en una clase podría tomarse posteriormente y cuando encaje como parte de la garantía o respaldo del otro argumento. Lo que implica al profesor tenerla en cuenta en el diseño de tareas y reflexionar sobre sus instrucciones desde una perspectiva a largo plazo (Shinno, 2017).

1.5. Tipos de argumentos en clase de matemática

En la obra de Toulmin (1958/2003) se documentan dos tipos de argumentos, los analíticos y los tautológicos. Los *analíticos* se caracterizan por deducciones lógicas formales y de carácter tautológico. Los *sustanciales*, no se basan en tautologías para fundamentar la relación entre los datos y la conclusión, sino de un conjunto de razones que proporcionan una conexión entre la evidencia y la conclusión (*i.e.*, garantía). Este último tipo de argumento se identificó en el contexto de la resolución de problemas bajo un enfoque empírico, en particular, en la fase de la formulación de conjeturas.

Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015) en su estudio analizaron el contenido de los argumentos de estudiantes de secundaria al resolver problemas éticos con base en categorías de contenido que refieren a seis tipos de argumentos: de consecuencia, de tipo práctico, de valor, basado en reglas, de la mejor explicación y de clasificación. Investigaciones en Matemática Educativa, documentan argumentos que construyen los estudiantes en diferentes niveles escolares. En los primeros años de la escolaridad (1st and 2nd grade), Krummheuer (2013) documentó que los estudiantes establecen argumentos narrativos y diagramáticos. Por su parte, Zacharos, Pournantzi, Moutsios-Rentzos y Shiakalli (2016) señalan que los estudiantes de preescolar son capaces de estructurar argumentos en términos del razonamiento inductivo con base en el estudio de casos particulares. Al comparar fracciones, Van Ness y Maher (2018) resaltan que los argumentos de los estudiantes carecen de garantías o soporte alguno, lo que origina contra argumentos y su contenido progresa a lo largo de las sesiones. Sobre el desarrollo y evolución de la argumentación matemática en estudiantes de tercero y quinto de primaria, Lin (2018) identificó características en los argumentos, como conclusiones justificadas con ejemplos, propiedades y relaciones matemáticas. Así también, el autor resalta que la calidad de los argumentos depende de la validez y la completitud de sus componentes y de las formas de refutar las garantías, conclusiones o refutaciones falsas. Por su parte, Cervantes-Barraza (2017) caracterizó los argumentos construidos por estudiantes de primaria cuando refutan conclusiones a nivel colectivo y destacó que los argumento construidos por los estudiantes se fundamentan en: características invariantes y propiedades de los objetos matemáticos en estudio.

A nivel secundaria, Lavy (2006) identificó cuatro tipos de argumentos emergentes en la interacción entre estudiantes en ambientes computarizados, que pueden servir como conocimiento base para establecer pruebas matemáticas, básicos, compuestos, elaborados y los generales presentados como específicos. Knipping y Reid (2015), distinguen dos tipos de argumentos en una clase de matemáticas, los argumentos locales y globales. Los locales refieren a pasos específicos de una argumentación, en cambio, los globales sintetizan la estructura completa de los argumentos construidos en el proceso de prueba. Como resultado del proceso argumentativo, Zacharos et al. (2016) consideran que los tipos de argumentos brindan una idea del razonamiento adoptado por los estudiantes en la transición de formas informales del conocimiento y el uso del lenguaje matemático. Para descubrir la relación entre diferentes tipos de argumentos, es fructífero tomar en cuenta elementos de la argumentación como el respaldo para la garantía y refutaciones (Schnell, 2014, p. 518). La garantía se considera un elemento esencial del modelo de Toulmin, en razón de que evidencia el razonamiento matemático de los estudiantes (Singletary y Conner, 2015) y permite reconocer las propiedades, patrones y generalidades matemáticas inmersas en su contenido (Knipping, 2008).

1.6. La frontera de la investigación

La revisión de la literatura permitió identificar que diversas investigaciones sobre argumentación en el salón de clases de matemáticas demarcan una ruta que aborda estudios realizados con matemáticos, profesores y estudiantes de diversos niveles escolares. Una síntesis de las investigaciones sobre argumentación colectiva en clase de matemáticas a nivel primaria, junto con los planes y programas de estudios de matemáticas de diferentes países coinciden en la necesidad de fomentar la construcción de argumentos en los estudiantes desde los primeros grados escolares. Los estudiantes necesitan aprender a justificar conclusiones, refutar y defender las ideas matemáticas en la interacción con el fin de familiarizarse con el razonamiento deductivo-inductivo y los procesos de prueba que serán materia de estudio en grados avanzados.

Promover la argumentación en el salón de clases contribuye a: gestionar oportunidades para que los estudiantes conecten los conocimientos previos con los nuevos, desarrollar habilidades discursivas como construir argumentos en contra de otros ya presentados, favorecer el aprendizaje desde las interacciones con pares, promover el desarrollo conceptual de los objetos en estudio y se considere como un medio para iniciar el proceso de prueba matemática (*e.g*., Wagner et al., 2014; Muller y Buty, 2015; Krummheuer, 2015; Rumsey et al., 2019; Komatsu, 2017).

Se concluye que la argumentación colectiva en el salón de clases es una actividad compleja que involucra la interacción entre estudiantes y el profesor en el intento de construir un consenso sobre un contenido matemático. La necesidad de abordar el estudio del proceso de argumentación colectiva y hacer énfasis en el contenido y la estructura de la argumentación suscitada en espacios de interacción permite identificar los razonamientos inmersos y las estructuras proporcionan una imagen global de las interacciones entre el profesor y los estudiantes. El profesor en este espacio de interacción puede comprender los tipos de argumentos que construyen sus estudiantes, identificar las preguntas detonadoras y refutaciones que promueven la construcción de conclusiones matemáticas.

Estudios que abordan la refutación en el contexto de la matemática demarcan dos epistemologías, una que tiene que ver con el proceso del descubrimiento matemático, denominado pruebas y refutaciones, que consta de procesos de refinamiento de conjeturas con base en críticas que permiten probar la conjetura principal (Lakatos, 1976) y por otra parte, en un contexto del lenguaje cotidiano, la refutación o reserva (rebuttal, en inglés) tiene la función de presentar las excepciones de las conclusiones establecidas por un argumentador con el objetivo de mostrar casos que no conecten la evidencia con la conclusión (Toulmin, 2003). Ante estas dos posturas, los argumentos de los estudiantes recaen en la transición de la lógica cotidiana que éstos traen y la propuesta por el profesor, razón que permite optar por la postura de Toulmin y profundizar en el estudio de la refutación en clases de matemáticas. Además, la refutación es un mecanismo que fomenta la construcción de argumentos entre los estudiantes, dado que ante una refutación de un argumento es necesario que se presenten razones para validar la conclusión presentada, propiciando el aprendizaje basado en la interacción y la negociación del significado en clases de matemáticas (Krummheuer, 2015).

En línea con el planteamiento anterior, la revisión de documentos oficiales (*e.g.*, planes y programas de estudios de matemáticas a nivel primaria) y el análisis de la literatura especializada respecto a la argumentación en el salón de clases, se delimitaron algunos puntos a destacar:

1) Diversos planes de estudios de matemáticas y propuestas curriculares enfatizan en la importancia de fomentar la argumentación en el salón de clases a nivel primaria (*e.g.*, SEP, 2011, 2017; MEN, 2006; NCTM, 2000; CCSSI, 2010).

2) Las experiencias positivas de los estudiantes en la participación en la argumentación matemática contribuyen al aprendizaje de las matemáticas y al desarrollo de un sentido de derecho a participar en procesos discursivos (Cramer y Knipping, 2019).

3) La refutación de conclusiones permite a los estudiantes construir argumentos con base en características y propiedades matemáticas con el fin de soportar las conclusiones (Cervantes-Barraza, 2017).

4) Los planes de estudios de matemáticas promueven la argumentación desde las tareas de los libros de texto sin incluir a la refutación como una forma de gestionarla en el salón de clases de matemáticas a nivel primaria.

5) Se han documentado numerosas investigaciones sobre la refutación en contextos de la prueba matemática en el sentido de Lakatos a nivel secundaria y universitario.

6) Se desconocen las implicaciones de refutar los datos y la garantía en el contexto de la argumentación colectiva en clase de matemáticas a nivel primaria.

7) La garantía se considera un elemento importante en la argumentación matemática, ya que evidencia el razonamiento de los estudiantes.

8) Para descubrir la relación entre diferentes tipos de argumentos es fructífero tomar en cuenta elementos de la argumentación como el respaldo para la garantía y las refutaciones (Schnell, 2014, p. 518).

9) Se requieren estudios que profundicen en los tipos de argumentos y las estructuras de la argumentación colectiva emergentes en el marco de la refutación de conclusiones, garantías y datos.

10) Analizar las estructuras de la participación en clase de matemáticas contribuye a que los profesores apoyen la argumentación de los estudiantes (Rumsey et al., 2019).

Si bien, se reconoce la importancia dada a la argumentación y al desarrollo de habilidades argumentativas pocas investigaciones han estudiado a la *refutación* a nivel primaria implicándola en la relación dato-garantía-conclusión, desde la lógica sobre la cual los argumentos se basan (Reid, Knipping y Crosby, 2011; Knipping y Reid, 2015, 2019). Razón por la cual, en esta investigación se destaca la necesidad de fomentar la argumentación a nivel primaria desde la refutación de datos, garantías y conclusiones a partir del estudio de los argumentos y sus estructuras argumentativas que emergen en una clase de matemáticas en lo colectivo.

1.7. Preguntas y objetivos de la investigación

El problema de investigación tiene que ver con la necesidad de incluir la refutación como una forma de fomentar la construcción de argumentos de los estudiantes, en este contexto, se requieren estudios que profundicen en los tipos de argumentos y las estructuras de la argumentación colectiva al refutar conclusiones, garantías y datos. De manera concreta, se analizan los tipos de argumentos y las estructuras argumentativas que emergen a partir de la refutación en lo colectivo. Una síntesis de los puntos clave señalados permiten la formulación de las siguientes preguntas y objetivos:

P1*: ¿Qué argumentos construyen estudiantes de primaria al refutar la conclusión, la garantía o el dato en el contexto de la argumentación colectiva?*

P2*: ¿Qué estructuras argumentativas emergen en una clase de matemáticas de primaria cuando se refuta la conclusión, la garantía o el dato?*

Para dar respuesta a las preguntas de investigación se trazaron los siguientes objetivos generales y particulares:

O.G1: Caracterizar los argumentos que construyen estudiantes de primaria al refutar conclusiones, garantías o datos en la argumentación colectiva.

O.p1: Analizar el contenido de las garantías que construyen estudiantes de primaria para refutar conclusiones, garantías o datos en la argumentación colectiva.

O.G2: Analizar las estructuras argumentativas emergentes al refutar conclusiones, garantías o datos.

O.p2: Reconstruir y examinar las estructuras de la argumentación colectiva emergente en la refutación de conclusiones, garantías o datos en clase de matemáticas a nivel primaria.

Para lograr los objetivos de investigación, se implementó la propuesta metodológica de Knipping y Reid (2015) con el propósito de reconstruir las estructuras de la argumentación colectiva y se analizaron los argumentos de los estudiantes con base en la adaptación de las categorías de codificación de contenidos de los argumentos (Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015).

1.8. Pertinencia de la investigación

Se reconoce que el estudio de la refutación en los procesos argumentativos a nivel primaria es pertinente en el aprendizaje de las matemáticas (Komatsu, 2010). Investigaciones sobre argumentación matemática la consideran como una habilidad argumentativa compleja (*e.g.*, Knipping y Reid, 2015; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019; Lin, 2018), se constituye como la unidad básica para fomentar la argumentación, propiciar oportunidades para que los estudiantes recurran a características y propiedades matemáticas como parte de las garantías de los argumentos (Cervantes-Barraza, 2017), evidenciar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes con respecto al contenido matemático (Solar y Deulofeu, 2016) y desempeña un papel importante como criterio de evaluación en los argumentos, puesto que no solo involucra a los estudiantes entiendan el pensamiento de los otros, sino que establezcan opiniones diferentes y refuten el pensamiento de otros (Lin, 2018).

Esta investigación toma como centro de estudio los argumentos que construyen estudiantes de quinto grado de primaria y las estructuras emergentes en el contexto de la argumentación colectiva. El análisis del contenido y las estructuras de la argumentación permiten al profesor y/o investigador comprender la naturaleza de los argumentos de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (Knipping, 2008). Además, reconstruir y analizar las estructuras de la argumentación colectiva en clase de matemáticas permite identificar la estructura y los flujos de los argumentos desde una perspectiva global (Knipping y Reid, 2019).

Capítulo 2

Los conceptos base

El centro de atención en esta investigación es el contenido y la estructura de la argumentación colectiva suscitada en el salón de clases de matemáticas. En particular, se caracterizan los argumentos que construyen estudiantes de primaria y se analizan las estructuras argumentativas emergentes al refutar conclusiones, garantías o datos. Para el logro de los objetivos trazados, se conformó el marco conceptual de la investigación con los conceptos: argumentación, argumento, argumentación colectiva, argumentación compleja, refutación y una tipología de argumentos que permite caracterizar los tipos de argumentos con base en el contenido.

2.1. Argumentación en Educación Matemática

En el plano de la investigación en Educación Matemática, la argumentación se considera importante en el aprendizaje y en la enseñanza de la prueba (Reid y Knipping, 2010; Shinno, 2017). Se caracteriza por ser una actividad de carácter social y racional que cualquier persona puede hacer (Corcoran, 1999; Mercer, 2009). En ella se destaca el lenguaje común, puesto que se argumenta con el lenguaje propio de cada persona (Jiménez y Pineda, 2013), para convencer a una audiencia con razones conectadas lógicamente (Goizueta y Planas, 2013; Toulmin, 1958/2003). Existen diferentes posturas teóricas respecto el concepto de "argumentación" y diversos significados asociados a contextos académicos (*i.e.*, derecho, ciencias sociales, filosofía, matemáticas, entre otros). En esta investigación referirnos a la argumentación desde la postura de Toulmin (1958/2003), quien la define como la actividad central de presentar aserciones, razones, recibir críticas que cuestionen la validez de las aserciones-conclusiones y presentar razones en función de las críticas. Toulmin en su obra, distingue al razonamiento y la argumentación, porque el razonamiento engloba la acción de presentar razones con el fin de soportar una conclusión, en cambio, la argumentación es la actividad que involucra la construcción de argumentos conformados por secuencias de conclusiones y razones que presenta un argumentador.

Los argumentos desde la postura de Toulmin (1958/2003) tienen una *estructura* y un *contenido* semántico. La estructura entrelaza los elementos que conforman un argumento (*i.e.*, datos, garantía, conclusión, refutación, respaldo, calificador modal). En cambio, el contenido aborda los procesos de significación del lenguaje en uso. En este sentido, Toulmin (1958/2003) se interesó por el análisis de la estructura y el contenido de un argumento más que por su validez lógica (Inglis y Mejía-Ramos, 2005).

El autor destaca seis elementos en un argumento (ver Figura 1): *datos* (data), refieren al conjunto de evidencias, hechos aceptados o información que permite soportar la tesis del argumentador, es decir, *la aserción* (claim). *La garantía* (warrant) proporciona una conexión lógica entre los datos y la aserción, con base en propiedades, reglas, o generalidades. Con el propósito de apoyar a la garantía, *el respaldo* (backing) presenta un sustento amplio referente a definiciones, teoremas y axiomas matemáticos. *La refutación* o reserva (rebuttal), señala las excepciones de la aserción o los casos que no soporta la garantía. El *calificador modal* (modal qualifier) expresa la fuerza de la aserción en frases como: certeramente, siempre, para todo “x”, por mencionar algunas.

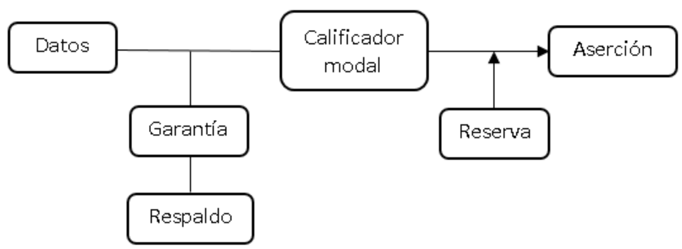


Figura 1. Estructura de un argumento. Fuente: (Inglis y Mejía-Ramos, 2005).

En esta investigación se consideran dos elementos introducidos en Knipping y Reid (2015) como parte de la estructura de un argumento: la refutación (Refutation, en inglés) en lugar de la reserva (rebuttal, en inglés) y la aserción (claim, en inglés) por la conclusión (conclusion, en inglés). Y los autores los distinguen como sigue:

> Una refutación difiere de una reserva en que una reserva es local a una etapa en un argumento y especifica excepciones de la conclusión. Una refutación niega por completo alguna parte del argumento. En una argumentación terminada, las conclusiones refutadas no tendrían lugar, pero como nos preocupamos por representar toda la argumentación que ocurrió, es importante para nosotros incluir las refutaciones y los argumentos que refutan, como parte del contexto del resto de los argumentos y otras partes de la argumentación (p. 82).

Referimos a la refutación como la expresión que niega una parte del argumento (*i.e.*, datos, conclusión o garantía), en razón de que la reserva (rebuttal, en inglés) contiene las excepciones o los casos que no apoyan la garantía del argumento (Toulmin, 1958/2003). Y consideramos al término conclusión cuando se han establecido evidencias y garantías que soporten la conclusión, en cambio, la aserción solo es una afirmación emitida sin evidencia alguna.

Investigaciones han implementado el modelo de Toulmin para reconstruir y analizar argumentos en lo individual (Inglis y Mejía-Ramos, 2005), en cambio, en el contexto del salón de clases de matemáticas, Krummheuer (1995) reconstruye los argumentos desde las interacciones entre estudiantes y el profesor con el propósito de dilucidar el razonamiento matemático en la solución de tareas. En este sentido, la argumentación consta de un proceso de discurso social y dinámico para descubrir nuevas ideas matemáticas, convencer a otros que una conclusión es válida (Rumsey y Langrall, 2016), además, desde la lógica de la vida diaria que traen los estudiantes a la clase de matemáticas y la propuesta por el profesor para llegar a un consenso matemático (Reid, Knipping y Crosby, 2011).

De los referentes conceptuales presentados, se asume el concepto de argumentación como la actividad discursiva de carácter social y racional que involucra la construcción de conclusiones con base en razones y evidencia que las soporten con el fin de convencer a una audiencia sobre la validez del contenido de los argumentos presentados. Esta actividad tiene lugar en el salón de clases cuando varios estudiantes y el profesor construyen conclusiones relacionadas con el objeto matemático en estudio para convencer a un grupo con razones válidas.

2.2. Argumentación colectiva

La argumentación matemática en el salón de clases no ocurre de manera individual, los estudiantes interactúan con el profesor para construir y validar conclusiones, razones con el propósito de establecer un consenso matemático (Krummheuer, 1995, 2015). A las interacciones entre los estudiantes y el profesor en el intento de convencer al grupo sobre la validez de sus argumentos, se le considera argumentación colectiva (Krummheuer, 1995, 2015). Este concepto es útil para analizar la actividad matemática, además, se caracteriza por representar la solución de tareas matemáticas de forma colaborativa y se cataloga como la participación de un grupo de personas en los debates de la clase de matemáticas (Yackel, 2002; Wagner et al., 2014).

Investigaciones sobre argumentación colectiva documentan que la estructura argumentativa “núcleo” se conforma por: datos, conclusión y garantía (Krummheuer, 1995, 2008, 2015). Resultado de las investigaciones realizadas por Krummheuer, quien documentó que la argumentación colectiva suscitada entre estudiantes de primaria y secundaria se compone de cadenas de razonamientos, implicando que la conclusión cumpla la función de dato (C/D) para construir un nuevo argumento (ver Figura 2). El profesor desempeña un papel fundamental en el proceso de construir argumentos, en razón de que orienta a los estudiantes con preguntas, acciones pedagógicas y proporciona elementos de la argumentación como son los datos o garantías con el fin de construir una conclusión o generar un consenso matemático (Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2020).

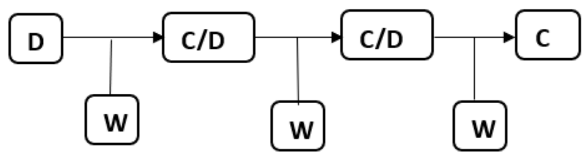


Figura 2. Cadena de razonamiento conformado por núcleos y conclusiones que sirven como datos (C/D). Fuente: (Krummheuer, 2015).

Referimos a la argumentación colectiva en clase de matemáticas al conjunto de interacciones suscitadas entre varios estudiantes y el profesor con el propósito de construir un consenso sobre el objeto matemático en estudio y convencer al grupo de estudiantes sobre la veracidad de los argumentos presentados. La argumentación colectiva implica la participación de los estudiantes y el profesor, involucra distintos puntos de vista, preguntas y respuestas en momentos de una clase de matemáticas que tienen funciones argumentativas que varían. Las conclusiones presentadas pueden ser usadas como datos para que los estudiantes fundamenten nuevas conclusiones y los datos pueden tomarse para fundamentar más de una conclusión. En este contexto, se necesita profundizar sobre aspectos estructurales que implican un significado matemático en la actividad de argumentar en lo colectivo.

2.3. Argumentación compleja

La estructura de la argumentación colectiva en el salón de clases de matemáticas de nivel primaria y secundaria se caracterizan por cadenas de argumentos (Krummheuer, 1995, 2000, 2015). Por su parte, Knipping (2008), Knipping y Reid (2015, 2019), Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid (2019) concluyen que la estructura de la argumentación colectiva es compleja y no ocurre secuencialmente. En este proceso discursivo, el profesor proporciona conclusiones, datos, garantías (Conner, 2017), refuta las conclusiones de los estudiantes (Potari, Zachariades y Zaslavsky, 2010), con esto las funciones de los elementos de los argumentos cambian (Knipping y Reid, 2015, 2019) y el contenido matemático evoluciona (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019) con el fin de construir un consenso matemático. Es por esto que el concepto de argumentación compleja se considera como un constructo teórico y metodológico que permite analizar: a) Las estructuras argumentativas producto de la argumentación colectiva, b) el significado de las declaraciones matemáticas de los estudiantes junto con el profesor y c) la imagen global de la argumentación colectiva (Knipping, 2003, 2008; Knipping y Reid, 2015, 2019).

Para reconstruir las estructuras de la argumentación compleja, Knipping y Reid (2015) adaptaron el modelo de Toulmin (1958/2003) y los elementos de un argumento: datos, conclusión, garantía, respaldo y refutación con el objetivo de proponer una forma de evidenciar la argumentación suscitada en el salón de clases (argumentación global). Estos investigadores reportan resultados empíricos sobre cuatro estructuras argumentativas identificadas en clase de matemáticas de secundaria: Fuente, espiral, reserva y de unificación. Las estructuras de *fuente* constituyen un conjunto de argumentos paralelos (*e.g.*, AS-1 con AS-2 en la figura 3), son secuencias de argumentación en un proceso de prueba en el que se pueden encontrar diferentes argumentos que respaldan la misma conclusión (*e.g.*, AS-4 en la figura 3). En este tipo de estructura, las conclusiones se fundamentan en más de un dato y se identifica la refutación (ver Figura 3). Por cuanto a las estructuras en *espiral* (ver Figura 4), incluyen argumentos paralelos (*e.g.*, AS-A paralelo a AS-B y AS-D en la figura 4) que prueban una conclusión de diferentes formas y se identifican refutaciones (Knipping y Reid, 2015).

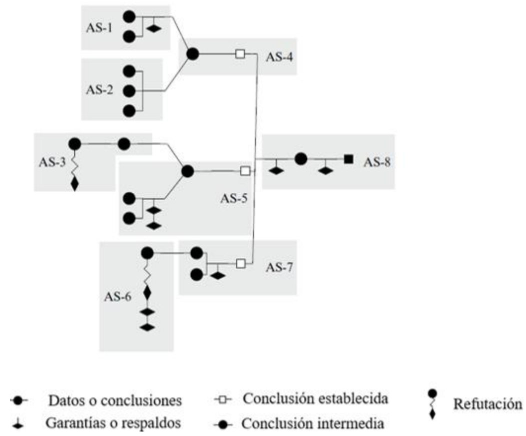


Figura 3. Estructura de fuente, tomado de Knipping y Reid (2015).

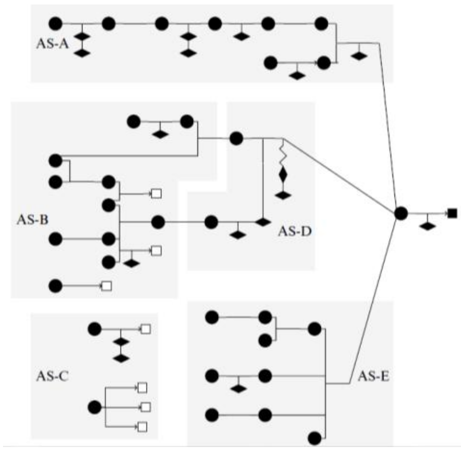


Figura 4. Estructura en espiral, tomado de Knipping y Reid (2015).

La estructura argumentativa de *reserva* contiene argumentos que fluyen a una conclusión intermedia (*i.e*., rectángulos de color negro en la figura 5) y divide la estructura de la argumentación en partes diferentes y autónomas (Knipping, 2008) (véase Figura 5). Esta estructura se caracteriza por tener una conclusión que marca la transición de la primera parte de la clase y la segunda, esto con el objetivo de purificarla. En cuanto a la estructura de *unificación* (Figura 6), reúne cantidad significativa de datos producto del análisis de tareas matemáticas propuestas en software dinámicos que permiten a los estudiantes reconocer información que soporta sus conjeturas o en algunos casos conclusiones (Reid y Knipping, 2010). Esta estructura se define por no tener argumentos paralelos y los estudiantes pueden adicionar datos nuevos que soporten nuevas conclusiones.

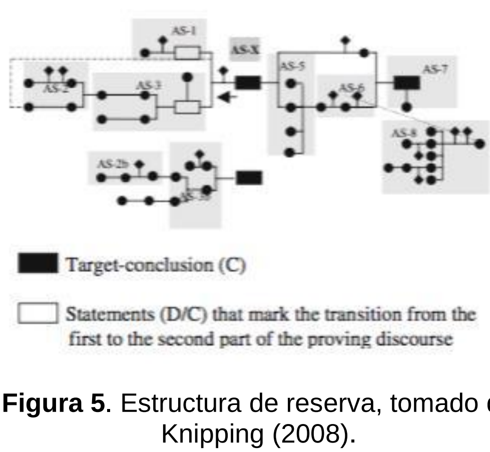


Figura 5. Estructura de reserva, tomado de Knipping (2008).

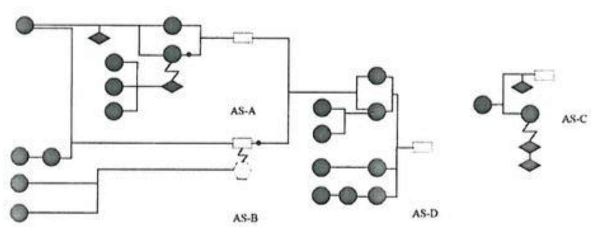


Figura 6. Estructura de unificación, tomado de Knipping (2008).

En general, analizar la producción de los argumentos en clase de matemáticas ha sido reconocido en la Educación Matemática. En razón de que los significados matemáticos emergen a través de la interacción y la reconstrucción de significados implica necesariamente una reconstrucción del proceso por el cual emergen (Knipping y Reid, 2019). Esto no solo con el objetivo de analizar las estructuras de la argumentación colectiva, sino también, para comprender la naturaleza de la argumentación y mejorar los procesos de construcción de argumentos en clase de matemáticas (Knipping y Reid, 2019).

2.4. La Refutación

Con base en la obra de Toulmin (2003), la refutación (rebuttal, en inglés) presenta las excepciones de la conclusión y los casos donde la garantía no conecta de manera lógica los datos con la conclusión. Según Knipping y Reid (2015), la refutación (refutation, en inglés) en un proceso argumentativo cumple la función de negar totalmente una parte del argumento. En el mismo sentido, Cramer (2018) observa que las refutaciones son discernibles en la mayoría de las estructuras de argumentación. Lo que implica la existencia de cierta confusión acerca de los conocimientos que los estudiantes tienen en común. Se ha documentado, además, que la refutación evidencia si un argumento es cuestionable o insostenible (Walton, 2009) y podría provenir del solucionador del problema, él o ella misma, pero "en general es la huella de la naturaleza dialógica de la argumentación y funciona como un motor de la discusión matemática que puede depender de uno o más conceptos" (Pedemonte y Balacheff, 2016, p. 107).

En el marco de la argumentación y la prueba matemática, Reid, Knipping y Crosby (2011) reconocen tres formas en que un argumento puede implicar una refutación: 1) Los datos del argumento pueden ser refutados, dejando la conclusión en duda, 2) la garantía del argumento puede ser refutada, dejando otra vez la conclusión en duda o 3) la conclusión misma puede ser refutada, lo que implica que los datos o la garantía sean inválidos, pero sin indicar cuál. En esta investigación una refutación refiere a la expresión que niega una parte del argumento con el propósito de evidenciar que el contenido de los datos, garantía o conclusión no justifica el argumento presentado.

2.5. Tipos de argumentos

La argumentación en el salón de clases se puede analizar a nivel local o global (Knipping, 2008). A nivel local, se analiza el contenido de la garantía en la relación dato, conclusión y garantía y la argumentación global proporciona una estructura completa de la clase de matemáticas, resultante de la unión de todas las argumentaciones locales (Knipping y Reid, 2015). En este apartado centramos la atención sobre la argumentación local y el contenido de las garantías en función de caracterizar los argumentos.

En la estructura de un argumento, la garantía se considera un elemento importante, Singletary y Conner (2015) sostienen que es un mecanismo mediante el cual se comparte el razonamiento matemático de los estudiantes y conecta lógicamente los datos con la conclusión, como una ley de paso (Toulmin et al., 1984). Se considera, además, como el medio por el cual se clasifican argumentos en contextos diversos (*e.g.*, Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015; Toulmin et al., 1984; Walton, Reed y Macagno, 2008). Con el propósito de examinar el contenido de las garantías que construyen estudiantes de primaria al refutar garantías y/o datos no válidos, se adaptaron las categorías de codificación de contenido propuesta por Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015) junto con la clasificación de los argumentos propuestos por Knipping (2008).

El contenido de las garantías construidas por los estudiantes se examina a partir de la relación datos-garantía-conclusión al implicar la refutación y la adaptación de la propuesta de Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015). Estos autores clasificaron seis tipos de argumentos en el marco de la educación basados en algunos esquemas de argumentación[2]: argumento de clasificación, basado en reglas, razonamiento práctico, de la mejor explicación, de consecuencias y de valor (ver Tabla 1). El argumento de consecuencias y el razonamiento práctico se utilizan para apoyar una decisión, el argumento de valores y el argumento basado en reglas justifican un punto de vista ético o normativo, el argumento de la mejor explicación rastrea un comportamiento o evento hasta la causa más razonable y el argumento de clasificación apoya la categorización de un evento de comportamiento, o estado de cosas de cierta manera (Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015).

Tabla 1

Caracterización de argumentos propuestos en (Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015, p. 527).

Categoría	Descripción

[2] *Los esquemas de argumentación son patrones estereotípicos de razonamiento que representan diferentes tipos de argumentos plausibles utilizados en el discurso cotidiano en contextos especiales como el de la argumentación científica (Godden y Walton, 2007).*

Argumento de clasificación	Un estado de cosas se clasifica de cierta manera según un criterio definitorio o clasificatorio.
Argumento basado en reglas	Se toma una decisión basada en una regla que se aplica a un caso.
Razonamiento práctico	Se comparan las posibles formas de generar un estado de cosas y se seleccionan los mejores medios.
Argumento de la mejor explicación	La causa más razonable de un evento o estado de cosas se reconoce al comparar posibles explicaciones alternativas.
Argumento de consecuencia	Se apoya una decisión mostrando su buena o mala consecuencia.
Argumento de valores	Se elige una acción porque se clasifica como buena o mala basado en un valor positivo o negativo.

En razón de que la categoría de argumentos no aborda el contenido matemático, adaptamos la propuesta de Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015). La adaptación (ver Tabla 2) consideró cinco argumentos de los seis propuestos: de clasificación, de propiedades matemáticas, práctico, de la mejor explicación y de consecuencias. El argumento de valores no se consideró en la adaptación porque desde el diseño de las tareas matemáticas no se incluyeron valores morales ni situaciones donde los estudiantes debían apoyar una decisión. La descripción de cada argumento implicó el contenido matemático en términos de propiedades generales (P) y características invariantes (Ci) que definen los objetos matemáticos.

Tabla 2.

Adaptación de las categorías de argumentos propuesta en Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015).

Argumento	Ejemplo
De clasificación. Los objetos matemáticos se clasifican con base en características invariantes y propiedades matemáticas.	[T2] Profesor (D1): De acuerdo a la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número uno? Daniela (C1): El estudiante número uno… Daniela (W1): Porque se sabe que **el cuadrado es un cuadrilátero**… no solamente el cuadrado es el único cuadrilátero… **puede tener otras medidas** [Se refiere a la medida de los lados]. (Ci y P-cuadriláteros) [Extractos del capítulo 4, sección 4.1.1]
Basado en propiedades matemáticas. Una conclusión se sustenta del uso de propiedades	[T1] Profesor: ¿Por qué te dio diez la figura dos? Estudiantes (R3): ¡Está mal! Juan de Dios (WR3): Se tiene que **sumar un cuadro a cada lado de la figura**…o **dos por cuatro**… me da ocho…**y el del medio**… nueve. (P-Regla directa)

matemáticas que satisfacen los objetos geométricos.	[Extractos del capítulo 4, sección 4.1.2]
Práctico Se comparan las formas en que se justifica una conclusión con base en propiedades y/o características invariantes de los objetos matemáticos.	[T2] Gael, Daniel (C4): Estamos de acuerdo con la respuesta de Saraí… Profesor: ¿Por qué Daniel?, explícanos… Daniel (W3): Porque Saraí reúne el estudiante 2 y el estudiante 3... Profesor: ¿Y qué pasa si reúne las respuestas de estos dos estudiantes? Gael (C5): Se sacaría una conclusión…que los dos están por un lado bien… Gael (W4): **Porque el estudiante dos dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales**… y **el estudiante tres porque dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales**… que también está bien. Entonces si no tuviera lados iguales… no tuviera ángulos iguales…en cambio también está que si son cuatro ángulos iguales deben ser cuatro lados iguales… [Extractos del capítulo 4, sección 4.1.3]
Basado en la mejor explicación La conclusión más razonable en un argumento se reconoce cuando en su justificación se consideran todos los casos posibles. ***Caso 1:*** Los objetos matemáticos que satisfacen las propiedades y características invariantes ***Caso 2:*** Los objetos matemáticos que no satisfacen las propiedades y características invariantes.	[T1] Profesor: Escuchemos la respuesta de Juan de Dios… ¿qué concluyes? Juan de Dios _(C3): **¡Si y no!..**. Juan de Dios (W3): Si porque son veinte por cinco y suman cien… y son cuatro lados… entonces se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… más el del medio ochenta y uno. **(Caso 1)** Juan de Dios (W3): No porque aquí dice que son veinte por cinco… pero no son cinco lados…son cuatro lados… y se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… y se suma el del medio… da ochenta… y si se multiplica por cinco da cien más uno ciento uno… **(Caso 2)** [Extractos del capítulo 4, sección 4.1.4]
De consecuencias. Una decisión es justificada o refutada por mostrar una consecuencia positiva o negativa.	[T4] Profesor: ¿Qué hicieron para que la división tuviera residuo tres? Michel (WR1): Tomas el resultado de 14 por 243 y le sumas el tres… Profesor: ¿Están de acuerdo con lo que dice Michel…? ¿por qué hay q sumarlo?

	Gael (WR1): Porque **si no lo sumamos no nos va dar** residuo tres. (consecuencia negativa) [Extractos del capítulo 4, sección 4.1.5]

Se hace referencia a las "características invariantes" (Ci) de un objeto matemático (OM) porque en la escuela primaria se estudian en un nivel introductorio basado en las características esenciales que satisfacen los objetos geométricos. Así también, las propiedades matemáticas (P) que satisfacen los objetos matemáticos en estudio (Ver Tabla 3).

Tabla 3

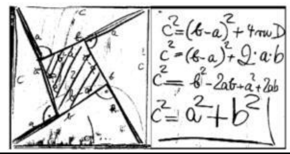
Características invariantes (Ci) y propiedades (P) de los objetos matemáticos presentes en el contenido de las garantías.

Contenido matemático en las garantías (W)		Tarea
Características invariantes (*Ci*)	La cantidad de cuadros negros aumenta de 4 en 4	T1
	Los cuadrados tienen cuatro lados y cuatro ángulos iguales	T2
	El cuadrilátero también puede tener lados iguales…	T2
	Las caras del cubo con cuadrados y tienen dos diagonales iguales…	T3
	Una división puede tener residuo cero	T4
	Las gráficas de barras representan la cantidad de camisas vendidas	T5
Propiedad matemática (*P*)	P1: Las caras opuestas en un cubo suman 7	Ti
	P2: Generalización del patrón de figuras (4n+1)	T1
	P3: Dividendo=[(Cociente)x(divisor)] + residuo	T4

El análisis del contenido de las garantías y respaldos en los argumentos de los estudiantes permite clasificar su campo de justificación en el salón de clases (Knipping, 2008). El autor identificó dos tipos de argumentos emergentes en una clase de matemáticas, el argumento conceptual y el visual (Tabla 4). El primero hace referencia a los conocimientos matemáticos, abstractos y teóricos empleados en un sentido deductivo. Mientras que, el argumento de tipo visual alude a todas las formas de representar un cuerpo en un espacio. Estos argumentos se pueden clasificar en dos niveles, empírico o conceptual. En el argumento visual-empírico, una conclusión se fundamenta desde un diagrama o representación en particular de un pizarrón, mientras que el visual-conceptual incluye una representación mental de una idea o de un concepto matemático.

Tabla 4.

Argumentos propuestos por Knipping (2008).

Argumento	Descripción	Ejemplo
Conceptual	Pertenecen al campo de justificación lógico conceptual, donde una conclusión se deduce usando conceptos matemáticos.	La suma de los ángulos de un triángulo es 180°
Visual	Refiere a la representación visual de un objeto que hace parte de una argumentación.	
Visual-empírico	Fundamenta una conclusión con una representación gráfica o parte de ella tomada de una pizarra.	El lado del cuadrado es b-a y se concluye porque es la diferencia de segmentos a y b.
Visual-conceptual	Refiere a una representación mental de una idea o concepto matemático	La representación gráfica se toma como un reflejo de la idea matemática.

La adaptación de las categorías de argumentos propuesta por Macagno et al. (2015) y los argumentos propuestos por Knipping (2008), conforman siete tipos de argumentos que permiten analizar los argumentos y con esto, caracterizar los argumentos de los estudiantes en la solución de tareas matemáticas.

Capítulo 3

El cómo se hizo

En el marco de la metodología de la investigación se realizó un experimento de enseñanza con el propósito de fomentar la construcción de argumentos en lo colectivo con un grupo de estudiantes de quinto de primaria mientras refutan. Los argumentos emergentes en el desarrollo del experimento se caracterizaron con base en una adaptación propia de la propuesta metodológica de Macagno et al. (2015). Para analizar las estructuras argumentativas emergentes en lo colectivo, se empleó la propuesta de Knipping y Reid (2015). De forma detallada este capítulo presenta aspectos metodológicos como: los participantes, organización de las sesiones, diseño de las tareas matemáticas, el método para reconstruir la argumentación y una descripción del análisis de los datos.

3.1. Los experimentos de enseñanza

Es una metodología que se basa en la experimentación y generación de ambientes de aprendizaje (Kelly y Lesh, 2000; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Nace de la influencia de las investigaciones socioculturales en las ciencias experimentales, especialmente de la entrevista clínica de Piaget (Steffe y Thompson, 2000; Kelly y Lesh, 2000). La metodología del experimento de enseñanza no surgió de manera estandarizada ni se ha estandarizado, esta se caracteriza como una herramienta conceptual que los profesores-investigadores utilizan para explorar el aprendizaje y el razonamiento matemático de los estudiantes durante periodos prolongados de intervención en el salón de clases.

El objetivo de esta metodología es recopilar y documentar el desarrollo y progreso que tienen los estudiantes en contextos conceptuales en una clase de matemáticas (Kelly y Lesh, 2000). Es decir, profundizar en los estados sucesivos de conocimiento con el fin de generar un modelo de aprendizaje que sintetice cómo aprenden los estudiantes y cuáles son sus razonamientos (Steffe y Thompson, 2000). Un experimento de enseñanza implica una secuencia de episodios de enseñanza, en el que participan: un agente profesor-investigador, uno o más estudiantes, un testigo de los episodios y un método para registrar lo que ocurre. Generalmente se emplean videograbadoras con el propósito de captar todo lo sucedido en las sesiones del experimento (Steffe y Thompson, 2000).

Esta metodología rompe la habitual distinción entre el rol que cumplen los investigadores, profesores y estudiantes. Los investigadores se alejan de los ambientes de laboratorios y se convierten en parte del salón de clases, capturando las interacciones entre estudiantes con el propósito de modelar el aprendizaje (Molina et al., 2011). Otra característica del experimento de enseñanza, tiene que ver con el periodo de tiempo que demanda, este es variado y depende del objetivo del experimento, puede ser un año escolar, unas semanas del año o incluso días.

3.1.1. Fases de los experimentos de enseñanza

El experimento de enseñanza comprende tres fases (F): 1) Preparación del experimento, 2) experimentación en el salón de clases y 3) análisis retrospectivo de los datos (Steffe y Thompson, 2000; Molina et al., 2011).

Fase 1: *Preparación del experimento*. El punto de partida es el planteamiento del objetivo de aprendizaje (Kelly, Baek, Lesh y Bannan-Ritland, 2008). Este objetivo se clarifica con base en la problemática relacionada a un contenido matemático y la identificación del conjunto de ideas centrales que la conforman (Cobb y Gravemeijer, 2008), es decir, una lista de temas tales como: división de dos cifras, análisis de gráficas estadísticas, figuras geométricas planas, entre otros.

Del planteamiento del objetivo de aprendizaje, los profesores-investigadores formulan hipótesis para anticipar el resultado esperado sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000; Kelly, Baek, Lesh y Bannan-Ritland, 2008). En concreto, al conjunto de predicciones realizadas por el profesor investigador sobre el camino, secuencia de ideas, estrategias y formas de pensar por el cual un estudiante aprende, se le denomina trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995, p.135). Se consideran trayectorias hipotéticas porque no se conoce la verdadera trayectoria que implica el aprendizaje y el profesor propone una trayectoria que se acerque a la real. Según Simon (1995), una trayectoria hipotética de aprendizaje involucra tres componentes: el objetivo de aprendizaje, el conjunto de tareas matemáticas y predicciones sobre el proceso de evolución de la comprensión y entendimiento de los estudiantes.

El planteamiento de una trayectoria hipotética de aprendizaje provee al profesor la elección de un diseño de tarea adecuado con base en el objetivo de aprendizaje y de la investigación. Por lo tanto, el diseño de las tareas consiste en elaborar una serie de actividades matemáticas con un contenido matemático específico y principios de diseño que aseguren el cumplimiento del objetivo planteado (Molina et al., 2011). Además, los profesores investigadores consideran el tiempo que demanda el desarrollo de cada tarea, la planificación y la organización en la fase experimental.

Fase 2: *Experimentación en el salón de clases.* Consta de intervenciones del profesor-investigador con un grupo de estudiantes (sesiones de clase), se toma nota de todo lo que pasa durante el desarrollo de las tareas, olvida las hipótesis planteadas para centrar su atención en explorar cómo los estudiantes desde sus acciones y lenguaje expresan significados del contenido matemático (Steffe y Thompson, 2000). Posterior a la experimentación, inicia el proceso de revisar y reformular las hipótesis planteadas sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Este proceso depende de los datos recolectados, las evidencias, producciones escritas, cintas de video y las notas de campo de los demás investigadores.

Fase 3: *Análisis retrospectivo* de los datos recolectados. En esta fase según Steffe y Thompson (2000), los profesores investigadores analizan cuidadosamente las cintas de video con la intención de activar los registros de sus experiencias y llevarlos a lo sucedido en la interacción. La recolección y sistematización de lo sucedido en la experimentación, permite a los investigadores analizar y generar elementos del modelo o trayectoria de aprendizaje (Simon, 1995); esta describe el aprendizaje de los estudiantes en términos de cambios o evolución respecto al contenido matemático en estudio (Steffe y Thompson, 2000).

En el experimento de enseñanza, al proceso cíclico de establecer hipótesis, experimentar en el salón de clases y reformulación de hipótesis se le conoce como el *refinamiento progresivo* (Steffe y Thompson, 2000). Este proceso cíclico conduce a los investigadores mejorar las tareas y robustecer la construcción de un modelo o trayectoria de aprendizaje de los estudiantes. Una manera de esquematizar las etapas del experimento de enseñanza y el ciclo del refinamiento progresivo se muestra en la figura 7.

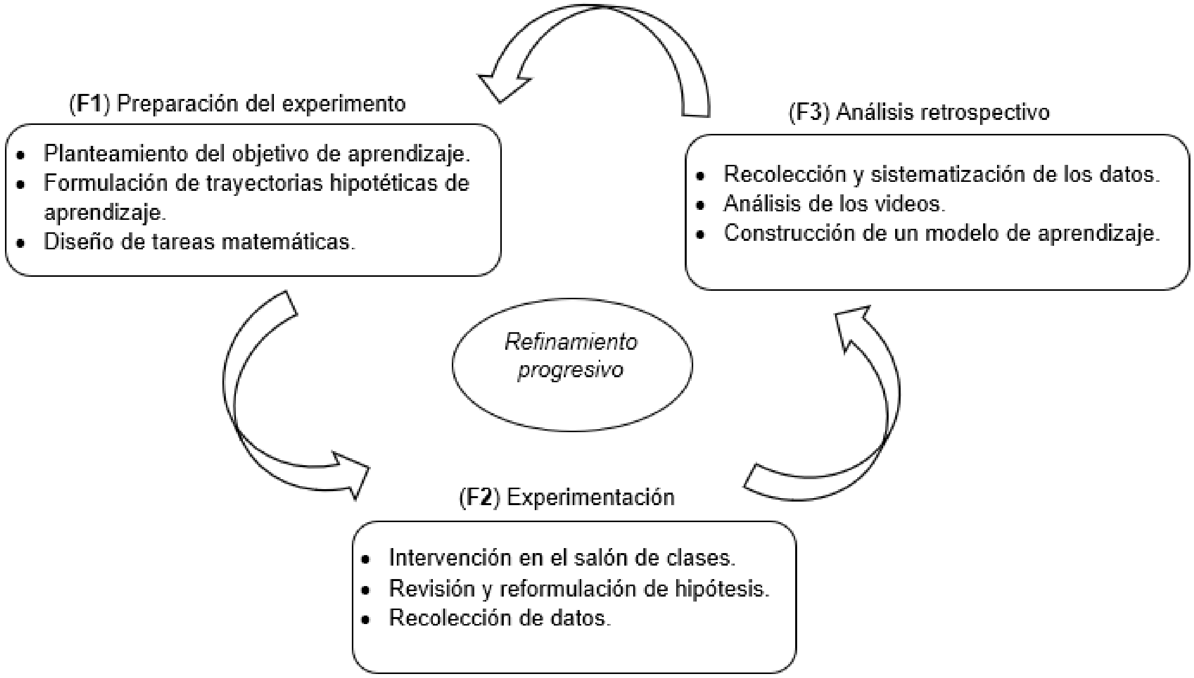


Figura 7. Fases del experimento de enseñanza. Fuente: elaboración propia.

3.1.2. Pertinencia del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza como metodología en el desarrollo de esta investigación permite a los profesores-investigadores conocer, profundizar y estudiar de manera sistemática el razonamiento matemático de los estudiantes en la resolución de tareas y la argumentación colectiva suscitada en una clase de matemáticas de primaria. Esta metodología permite la generación de hipótesis sobre cómo los estudiantes aprenden matemáticas en el contexto de la argumentación colectiva, lo anterior con base en un ambiente natural como lo es el salón de clases para estudiantes y profesor-investigador con la intención de experimentar un ambiente neutro para ambos.

El análisis retrospectivo de los datos empíricos facilita comprender desde un panorama general lo sucedido en el salón de clases, esto desde la aplicación del método para reconstruir la argumentación colectiva. En relación con los objetivos de investigación, la metodología del experimento de enseñanza permite estudiar los argumentos construidos por los estudiantes desde la interacción con pares y posibilita el análisis del aprendizaje y el razonamiento matemático en la solución de tareas matemáticas.

3.2. Participantes

Participaron en el experimento de enseñanza 31 estudiantes (18 niños y 13 niñas) con edades entre los 10-12 años de edad matriculados oficialmente en quinto grado de una escuela primaria de Zumpango, Guerrero, México. En las intervenciones que comprenden el desarrollo del experimento, los estudiantes participaron de manera voluntaria. Participaron cuatro investigadores, dos en el rol de profesor (uno de ellos el autor de este trabajo) y dos a cargo de la grabación en video y audio de las sesiones. La participación de los investigadores en el rol de profesor se justifica desde una de las características del experimento de enseñanza, en el que se diferencia el papel del profesor y el investigador con el propósito de que los investigadores experimenten de primera mano el razonamiento matemático de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000).

Los investigadores a cargo de la grabación en video y audio de las sesiones cumplieron a la vez, el rol de participante como observador, “este se concibe en el sentido de los casos en los que el investigador se vincula con la situación que observa en un papel naturalista; incluso puede adquirir responsabilidades en las actividades del grupo que observa” (Junker, 1960, citado por Álvarez-Gauoy, 2003, p.105). Respecto al profesor titular del grupo de estudiantes de quinto grado, participó en el rol de observador, se ubicó en la parte de atrás del salón de clases para contribuir con la organización y la disciplina de algunos estudiantes. Al término de cada sesión, los investigadores encargados reflexionaban con el profesor encargado sobre aspectos pedagógicos y didácticos producto de la experimentación, así como algunas implicaciones de promover la argumentación colectiva en el salón de clases.

3.3. El experimento de enseñanza: “*Refutemos argumentos en lo colectivo*”

El experimento de enseñanza está conformado por seis tareas matemáticas diseñadas con el objetivo de fomentar la argumentación desde la refutación de conclusiones, datos y garantías por parte de los estudiantes de grado quinto de primaria. Las tareas vinculan la promoción de la argumentación en el salón de clases con base en los contenidos matemáticos de los ejes del libro de quinto primaria: sentido numérico-pensamiento algebraico, forma espacio-medida y manejo de la información (SEP, 2011). Se presentan además las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de cada tarea, aspectos metodológicos sobre el diseño de las tareas matemáticas y la organización-temporalización de la experimentación.

3.3.1. Preparación del experimento

Con base en la problemática identificada y los objetivos de la investigación (Capítulo 1, secciones 1.6 y 1.7), se delimitaron los objetivos de aprendizaje referente a las tareas matemáticas. Estos objetivos orientaron el planteamiento de hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, es decir, permitieron delimitar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. En la tabla 5 se presenta una descripción de los focos de atención de cada tarea, el objetivo de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el contexto de la argumentación colectiva.

Tabla 5.

Descripción de los componentes de una trayectoria de aprendizaje en el experimento de enseñanza.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje			
Tarea	**Foco de la tarea**	**Objetivo de aprendizaje**	**Hipótesis (H) sobre el proceso de aprendizaje**
Tarea inicial	Introducir a los estudiantes en la lógica bajo la cual se desarrollarán las demás sesiones.	Identificar la propiedad que cumplen las caras opuestas de los dados convencionales.	H1) Los estudiantes analizarán la situación planteada en la tarea de manera individual H2) Los estudiantes identifican que la suma de las caras opuestas siempre es siente. H3) Los estudiantes determinarán las los valores de las caras internas. H4) El profesor gestionará un espacio para compartir las respuestas de los estudiantes. H4) Los estudiantes refutarán y validarán las conclusiones presentadas por los estudiantes. H5) Se concluirá sobre la cuestión de la tarea
Tarea 1	Analizar la relación entre argumentación y la refutación de conclusiones o garantías en el estudio de los patrones figurales.	Generalizar la regla de construcción del patrón de figuras.	H1) Los estudiantes identificarán la cantidad de cuadros negros de las figuras dadas (Fig. 1, Fig. 3, Fig. 4) a través del conteo. H2) Los estudiantes determinarán la cantidad de cuadros negros que aumenta cada figura(etapa) del patrón con base en la diferencia de dos cantidades. H3) Los estudiantes determinarán la cantidad de cuadros de la figura 2 al

			adicionarle a la figura 1 la cantidad de cuadros que aumenta cada etapa. H4) Los estudiantes determinarán la cantidad de cuadros de la figura 20 siguiendo el procedimiento anterior. H5) Los estudiantes establecerán una relación matemática entre la cantidad de cuadros negros y su respectiva etapa del patrón. H6) Con base en la cantidad de cuadros de la figura dos y veinte, los estudiantes refutarán la conclusión y la justificación que presentó el estudiante que está de acuerdo con Mario (estudiante hipotético).
Tarea 2	Analizar la relación entre argumentación y la refutación de garantías en el estudio del concepto de cuadrado.	Identificar las características invariantes que definen al concepto de cuadrado.	H1) Los estudiantes seleccionarán una de las tres respuestas falsas proporcionadas por estudiantes hipotéticos en el enunciado de la tarea. H2) Presentarán un conjunto de razones sobre la elección de la respuesta. H3) Otro estudiante que identifique que las definiciones están incompletas, refutará las respuestas del estudiante hipotético. H4) Los estudiantes junto con el profesor concluirán sobre las características del cuadrado.
Tarea 3	Analizar la relación argumentación refutación de garantía en el contexto de figuras y cuerpos geométricos.	Identificar figuras geométricas a partir del modelo para armar un cubo.	H1) Los estudiantes armarán el modelo del cubo basado en la visualización. H2) Los estudiantes que se les dificulte armar el modelo del cubo desde la visualización, buscarán la forma de recrear el modelo con material tangible. H3) Los estudiantes ubicarán los segmentos punteados sobre las caras del cubo. H4) Determinarán si la figura que se forma con la unión de los segmentos punteados es un triángulo, un cuadrado o un trapecio.
Tarea 4	Analizar la argumentación y refutación de garantías en el la relación entre el dividendo,	Analizar la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo en divisiones de dos cifras.	H1) Los estudiantes identificarán las partes de la división que brinda la tarea. H2) Multiplicarán el divisor por el cociente y verificarán que la respuesta de la amiga de Mario es correcta.

	divisor, cociente y residuo.		H3) Los estudiantes que multipliquen el divisor por el cociente e identifiquen que hay una cantidad sobrante (residuo), determinarán el dividendo correcto. H4) Los estudiantes que identificaron el dividendo correcto refutarán a los estudiantes que están de acuerdo con la respuesta de la amiga de Mario. H5) Se concluirá sobre la relación entre las partes de la división **D= (C*d) + r**.
Tarea 5	Analizar la relación entre argumentación y refutación de datos en el manejo de la información con gráficas de barras.	Identificar gráficas de barras con base en un conjunto de información inicial.	H1) Los estudiantes identificarán los datos suministrados por la tarea en términos de la cantidad de camisas vendidas y sus respectivos precios. H2) Los estudiantes compararán los datos suministrados con lo que presenta cada gráfica de barras. H3) Algunos estudiantes considerarán la segunda gráfica por representar todas las ventas de las camisas, sin percatarse que la cantidad de camisas de 120 pesos no se corresponde con la inicial. H4) Algunos estudiantes identificarán que ninguna de las gráficas representa los datos suministrados por el problema. H5) Los estudiantes que identificaron que ninguna de las gráficas representa las ventas, refutarán los datos de los estudiantes que seleccionaron alguna gráfica. H6) Concluirán qué ninguna gráfica de barras representa las ventas de las camisas.

3.3.2. Diseño de las tareas matemáticas

Como parte de la primera fase del experimento de enseñanza se diseñaron seis tareas matemáticas que implicaron los objetivos de la investigación y los objetivos de aprendizaje. El diseño implicó el contenido de las consignas y tareas matemáticas propuestas en los libros de texto de matemáticas de quinto grado de primaria (SEP, 2011, 2017). Se reconoce que desde el diseño de tareas se puede potenciar niveles altos de pensamiento en los estudiantes, esto considerando su edad, los conceptos matemáticos y los conocimientos previos a fin de que desarrollen niveles profundos de comprensión (Smith y Stein, 1998). En este contexto y bajo los objetivos de la investigación, se implementaron los principios de diseño propuestos por Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza (2019) con el propósito de formular tareas que promuevan la refutación en el contexto de la interacción.

Los principios que orientan el diseño de tareas que promueven la argumentación desde la refutación son: a) Nivel de demanda cognitiva, b) Formulación de la tarea y c) Gestión de posturas. La integración de estos aspectos además de fomentar la argumentación en el salón de clases propicia la construcción de conocimiento matemático.

a) Nivel de demanda cognitiva

Este principio hace referencia al grado de actividad cognitiva que requiere un estudiante para resolver una tarea matemática específica (Smith y Stein, 1998). El diseño de tareas matemáticas implica establecer a priori, el nivel de demanda cognitiva que afrontará el estudiante al resolverla. Smith y Stein (1998) distinguen dos niveles: alto y bajo. Las del primer tipo demandan un pensamiento complejo y no algorítmico, que demandan al estudiante explorar y comprender la naturaleza de las relaciones matemáticas, el trabajo con múltiples representaciones, símbolos, gráficas o diagramas de situaciones problema y que establezcan conexión entre conceptos o significados asociados al objeto en estudio. En cambio, las de nivel bajo, reproducen aprendizajes previos sobre hechos, reglas y fórmulas, con escasa o nula conexión con los conceptos o significados, poca ambigüedad y se enfatiza en procedimientos algorítmicos.

b) Formulación de la tarea

El principio de formulación de la tarea implica la manera en que le será presentada al estudiante y lo que se espera realicen en ambientes de lápiz-papel, tecnológico con uso de softwares educativo y/o actividades al aire libre. Su formulación involucra un contexto, información inicial y demanda al estudiante una conclusión como solución (Gómez y Romero, 2015). Se formulan a través de narrativas, un enunciado, con preguntas cuyas respuestas pueden ser abiertas o cerradas, es decir, las de tipo abierta requieren de una expansión en su contenido y las cerradas contienen posibles respuestas “si” o “no”, o de selección múltiple.

c) Gestión de posturas

A través de la argumentación colectiva se generan espacios propicios de reflexión y discusión en el aula de matemáticas. Favorece a que los estudiantes presenten posturas diferentes en una misma tarea y las contrapongan al refutarlas (Cervantes-Barraza et al., 2019). La gestión de posturas se promueve en tareas: 1) De tipo abierta, en las que no necesariamente hay un único resultado correcto o que su desarrollo requiere de un acercamiento con estrategias informales de resolución y promueven distintos puntos de vista (Solar y Deulofeu, 2016, p. 1109); 2) Declaradas en términos de preguntas, con respuestas cerradas (del tipo "sí" o "no") y 3) Que involucran conclusiones falsas (Rumsey y Langrall, 2016).

3.3.3. Tareas matemáticas y su gestión en el aula

Con base en los principios señalados se diseñaron 6 tareas que abordan contenidos relacionados con el libro de texto de quinto grado de la educación básica primaria, en particular, de los ejes: sentido numérico-pensamiento algebraico, forma-espacio-medida y manejo de la información (SEP, 2011, 2017). El contexto de las tareas son situaciones hipotéticas cercanas al contexto mexicano, el contenido matemático refiere a características invariantes y algunas propiedades matemáticas de los cuadrados, cubos y triángulos.

La planificación de la clase consideró momentos diferenciados de la intervención del profesor-investigador y los estudiantes durante el desarrollo de las tareas (Tabla 6). El profesor promueve la argumentación al motivar la participación y el estudiante construye, valida y contrapone argumentos.

Tabla 6.

Conducción de las tareas matemáticas en el salón de clases. Fuente:(Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza, 2019, p.10).

<table>
<tr><th colspan="2">Momentos de gestión de las tareas</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea matemática
Se formula por medio de preguntas, que deriva en conclusiones verdaderas y/o falsas, del tipo si/no.</td></tr>
<tr><td>Estudiante:
- Trabaja con las tareas en dos momentos: individual y colectivo
- Construye argumentos para validar sus conclusiones o</td><td>Profesor:
- Describe las etapas de trabajo sobre las tareas en el aula: individual y colectivo.
- Promueve la argumentación a través de la participación y la confrontación de posturas,</td></tr>
</table>

contraponer (refutar) las de otros. - Reflexiona con sus compañeros sobre las características y propiedades matemáticas que cumplen los objetos matemáticos en estudio.	respetando ideas y enfocando en todo momento a los estudiantes. - Favorece la evolución de argumentos a través de la reflexión sobre las características invariantes y propiedades matemáticas que satisfacen los objetos matemáticos.
Participación	
El profesor promueve la participación de los estudiantes en la argumentación colectiva con preguntas: - ¿Quién lo hizo de manera diferente? - ¿Qué más pueden decir?	
Gestión de la confrontación de posturas	
Para gestionar la confrontación de posturas y con ello la refutación de conclusiones, el profesor pregunta: - ¿Qué pueden decir de la conclusión de su compañero? Argumente su respuesta. - ¿Estás de acuerdo con la respuesta de tu compañero? ¿Por qué? - ¿Quién escribió que si/no?, ¿Quién dijo sí?	

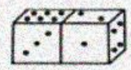
3.3.3.1. Tarea introductoria (Ti)

La primera tarea matemática del experimento de enseñanza se diseñó con el objetivo de introducir la lógica bajo la cual se desarrollarían las demás sesiones. Esta consistió en que los estudiantes resolvieran las tareas de manera individual en un primer momento, para luego, pasar a un momento colectivo y compartir sus respuestas en términos de datos, garantías y conclusiones. El diseño de la tarea inicial (ver Figura 8) se articula a los contenidos del eje Manejo de la Información (SEP, 2011) y demanda a los estudiantes un nivel cognitivo bajo, esto con el fin de que se familiarizaran con el tipo de tarea y la forma de organización de la actividad en el salón de clases prevista en el experimento de enseñanza. Esta tarea se adaptó de Annales Kangourou des Mathématique (1999).

Tarea i

Nombre:____**Edad:**______

En todos los dados se cumple que: Las caras opuestas siempre suman siete. En la figura, dos dados están unidos por una de sus caras.



Determinar la suma de los puntos en las caras que están unidas. Explica ampliamente ¿cómo lo hiciste? y argumenta.

Figura 8. Tarea introductoria. Adaptada de Annales Kangourou des Mathématique (1999).

La tarea inicial se caracteriza por ser de tipo abierta, no se indican datos explícitos como parte del enunciado para que los estudiantes construyan sus conclusiones. Además, la información que comprende su enunciado no señala el procedimiento a realizar o índica una posible respuesta. Desde el tipo de pregunta se promueve la confrontación de posturas en razón de que existen dos respuestas posibles que conducen a los estudiantes a cuestionar o refutar los argumentos presentados. Las posibles respuestas incluyen que las caras que están juntas tengan valores de 3 y 2 o de 3 y 5, en razón de que no se sabe en cuál de las caras se corresponde el 5 y el 2 en el dado de la izquierda.

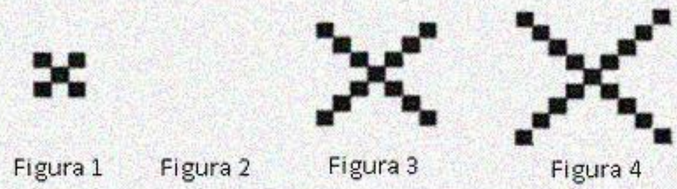
3.3.3.2. Tarea 1

El diseño de la tarea 1 incorpora contenido matemático del eje sentido numérico y pensamiento algebraico (ver Figura 9), en particular, implica al pensamiento funcional mediante el reconocimiento de patrones de figuras en el contexto del álgebra temprana (Becker y Rivera, 2005). Se diseñó con base en el patrón figural propuesto en Becker y Rivera (2005) constituido por cuadrados rellenos de color negro. La tarea demanda un nivel cognitivo alto, en razón de que no incita a los estudiantes resolverla por un procedimiento algorítmico y requiere a la vez, que los estudiantes fundamenten sus argumentos en representaciones gráficas del patrón.

Tarea 1

Nombre:____**Edad:**___

En una clase de matemáticas el profesor pide a sus estudiantes determinar la cantidad de cuadrados negros que componen la figura 2 y la figura 20 pertenecientes a la sucesión siguiente.



Mario resuelve la tarea y escribió como respuesta:

a) *En la figura 2 hay 10 cuadrados negros, porque se duplica la cantidad de cuadrados de la primera figura*
b) *En la figura 20 hay veinte veces la cantidad de cuadrados de la figura uno, es decir 20* x *5=100.*

Analiza cada una de las respuestas que dio Mario.

1. ¿Estás de acuerdo con la respuesta a) y su justificación? Argumenta tu respuesta.
2. ¿Estás de acuerdo con la respuesta b) y su justificación? Argumenta tu respuesta.

Figura 9. Tarea 1, patrón figural tomado de Becker y Rivera (2005).

La tarea se caracteriza por ser de tipo abierta, los datos están implícitos en el enunciado, en las figuras o etapas del patrón y el enunciado contiene información en términos de conclusiones establecidas por un estudiante hipotético. Con el propósito de promover la gestión de posturas, las cuestiones de la tarea no centran la atención en la cantidad de cuadros de las figuras, sino en el procedimiento y en el razonamiento inmerso en el contenido de los argumentos del estudiante hipotético. De forma intencional, las preguntas permiten que cada estudiante presente una postura con respecto a la situación presentada en la tarea, lo que incluye conclusiones falsas que promuevan la refutación de garantías y datos.

3.3.3.3. Tarea 2

Esta tarea involucra contenidos correspondientes al eje espacio, forma y medida, en particular, al concepto matemático cuadrado (Figura 10). El diseño se adaptó de Godino, Batanero, Cid, Font, Ruiz y Roa (2004), el enunciado y la cuestión de la tarea se plantearon con el propósito de fomentar la argumentación colectiva. La tarea demanda un nivel cognitivo alto, ubica a los estudiantes en una situación donde deben reflexionar sobre las características de un cuadrado, además, deben analizar y comparar las respuestas proporcionadas por estudiantes hipotéticos (Estudiante 1, 2 y 3).

Tarea 2

Nombre:____ **Edad:**______

Analiza las respuestas que dieron tres estudiantes de grado quinto cuando el profesor les preguntó ¿qué es un cuadrado?

Estudiante 1: un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados.
Estudiante 2: un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales.
Estudiante 3: un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales.

¿Qué estudiante dio una respuesta correcta? Argumenta tu respuesta.

Figura 10. Tarea 2, adaptada de Godino, Batanero, Cid, Font, Ruiz y Roa (2004).

La tarea es de tipo cerrada porque requiere que los estudiantes indiquen una de las tres respuestas posibles y con esto generar conflicto cognitivo lo cual implicó que la tarea no contara con una respuesta correcta. Las características mencionadas, conducen a la confrontación de posturas entre los estudiantes y con esto se generan espacios para que refuten las garantías en función de las características invariantes del cuadrado.

3.3.3.4. Tarea 3

La tarea 3 refiere a contenidos del eje espacio forma y medida. Su solución, implica la construcción de un cuerpo regular geométrico (i.e., cubo) desde una representación de un modelo (ver Figura 11). La tarea es de tipo cerrada, en razón de que cuestiona sobre un cuerpo geométrico y proporciona información precisa sobre qué hacer para determinar la respuesta.

Tarea 3

Nombre:____ **Edad:**______

Se muestra el modelo de un cubo sin armar y al doblar las caras se forma una figura plana con los segmentos punteados. ¿Qué figura plana se forma? Argumenta tu respuesta.

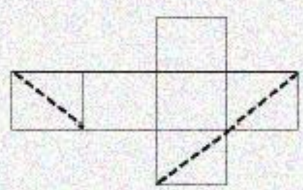
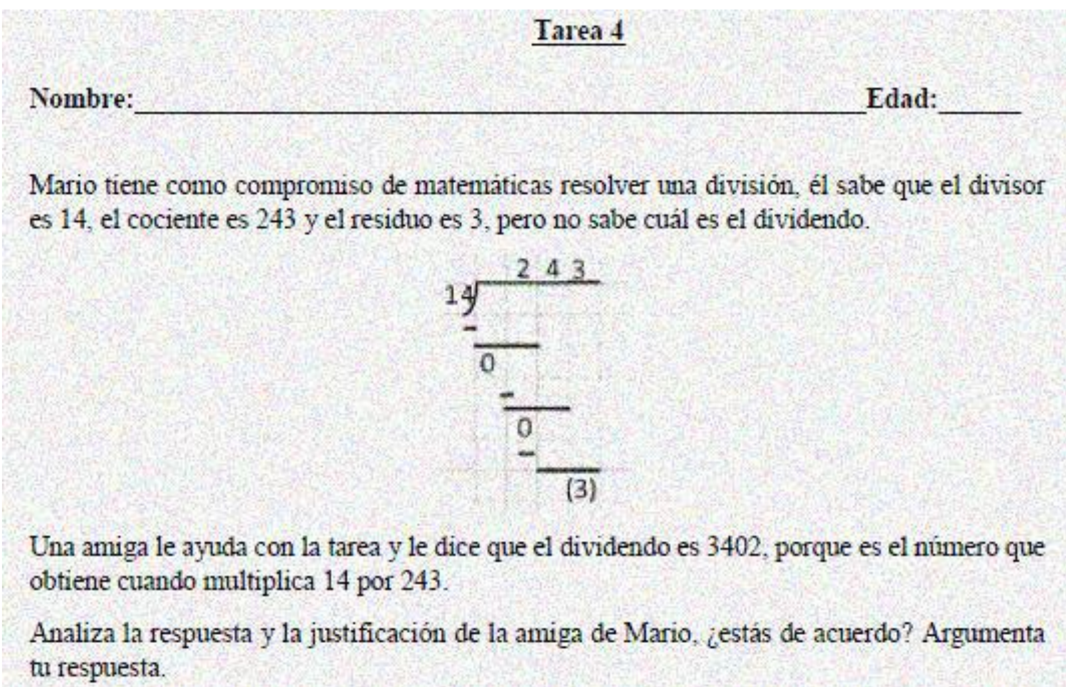


Figura 11. Tarea 3, adaptada de Annales Kangourou des Mathématique (1999).

El nivel cognitivo que demanda esta tarea es alto, en razón de que ubica al estudiante armar un modelo de un cubo usando la visualización y características invariantes de este cuerpo geométrico. La gestión de la confrontación de posturas no incluye conclusiones falsas, pero si permite que los estudiantes puedan responder una variedad de figuras geométricas en función de la ubicación de los segmentos punteados sobre las caras del cubo.

3.3.3.5. Tarea 4

Esta tarea refiere al eje sentido numérico y pensamiento algebraico, aborda el concepto de división, en particular, la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo (ver Figura 12). El enunciado y las preguntas se adaptaron del libro de matemáticas (5°) para el estudiante (SEP, 2011), la estructura de la tarea es de tipo cerrada ya que presenta datos necesarios para resolver la división planteada. El nivel cognitivo que demanda esta tarea es alto, puesto que los estudiantes tienen una situación hipotética del salón de clases de matemáticas donde deben contrastar sus procedimientos y respuestas con las propuestas posibles que proporciona el enunciado de la tarea. En lo colectivo, los estudiantes comparten sus respuestas, espacio propicio para gestionar la confrontación de posturas y en particular la refutación de las garantías.


Tarea 4

Nombre:______________________________ **Edad:**______

Mario tiene como compromiso de matemáticas resolver una división, él sabe que el divisor es 14, el cociente es 243 y el residuo es 3, pero no sabe cuál es el dividendo.

Una amiga le ayuda con la tarea y le dice que el dividendo es 3402, porque es el número que obtiene cuando multiplica 14 por 243.

Analiza la respuesta y la justificación de la amiga de Mario, ¿estás de acuerdo? Argumenta tu respuesta.

Figura 12. Tarea 4, adaptada del libro de matemáticas (5°) para el estudiante (SEP, 2011).

3.3.3.6. Tarea 5

La última tarea del experimento de enseñanza, corresponde al eje manejo de la información. Presenta una situación hipotética sobre información de las ventas de un sastre en un mes del año. Para el diseño de la tarea se tomó como base las gráficas presentadas en una tarea del libro de texto de matemáticas (SEP, 2011) y se caracteriza por demandar a los estudiantes un nivel cognitivo alto, en función de analizar e identificar la relación entre los datos representados en las gráficas de barras y la cantidad de camisas vendidas (ver Figura 13). La tarea es de tipo cerrada, esta contiene información inicial explícita que orienta a los estudiantes a resolver algunas cuestiones y gestionar la confrontación de posturas desde las preguntas, al solicitar una postura sobre la situación hipotética planteada y con ello generar la refutación de los datos, garantías o conclusiones.

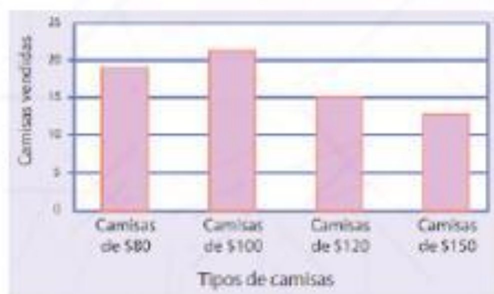
Tarea 5

Nombre:____ **Edad:**_____

Un sastre confecciona camisas de hombre y las vende a diferentes tiendas. Un análisis de las ventas del mes de Abril, indica que vendió 18 camisas de 80 pesos, 22 camisas de 100 pesos, 10 camisas de 120 pesos y 13 camisas de 150 pesos.

Analiza las siguientes gráficas de barras y responde:

Gráfica 1



Gráfica 2

1) ¿Qué gráfica de barras representa las ventas del mes de Abril? Argumenta tu respuesta.

2) Una persona afirma que la camisa que más se vendió en el mes de Abril fue la de 80 pesos, porque es la más económica y de buena calidad. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Argumenta tu respuesta.

3) El sastre hace cuentas para saber cuánto gastó en la tela y los hilos que compró para confeccionar las camisas. Gastó 3790 entre todos sus materiales. Ayúdalo a determinar la cantidad de dinero que ganó en el mes de Abril.

Figura 13. Tarea 5, adaptada del libro de matemáticas (5°) para el estudiante (SEP, 2011).

3.3.4. Organización y temporalización

El experimento de enseñanza se desarrolló durante seis sesiones en el penúltimo mes del ciclo escolar 2017-2018 (ver Tabla 7). Las dos primeras, se realizaron dejando un día de receso para luego desarrollar las demás sesiones de manera consecutiva. Las sesiones tuvieron una duración de una hora reloj cada una, 20 minutos para la etapa individual y 40 minutos para lo colectivo. En el rol del profesor, el autor de esta investigación tuvo a su cargo el desarrollo de las sesiones.

Tabla 7

Temporalización de las tareas y su descripción. Fuente: Autores.

Fecha	Sesión	Tipo de tarea	Descripción	Intervención	Tiempo empleado
18/06/2018	1	Asegurar condiciones previas.	**Tarea i:** Propiedad que cumplen las caras opuestas de los dados.	Individual Colectivo	20 min 40 min
	2	Refutación de W, D.	**Tarea 1:** Pensamiento funcional, sucesión de patrones figurales.	Individual Colectivo	20 min 40 min
20/06/2018	3	Refutación de W.	**Tarea 2:** Estudio del concepto de cuadrado según sus características invariantes.	Individual Colectivo	20 min 40 min
	4	Refutación de W.	**Tarea 3:** Estudio de las figuras geométricas en las caras de un cubo.	Individual Colectivo	20 min 40 min
21/06/2018	5	Refutación de W.	**Tarea 4:** estudio de la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo.	Individual Colectivo	20 min 40 min
	6	Refutación de D.	**Tarea 5:** Análisis y lectura de gráficas de barras.	Individual Colectivo	20 min 40 min
				Total	**6 hrs**

Con respecto a la organización del salón de clases, los estudiantes trabajaron en sus lugares habituales, los profesores investigadores ayudaron en la organizar del salón de clases de tal forma que estuvieran en filas ordenadas y no permitieran que los estudiantes se fijaran de las respuestas de otros. Luego de organizar a los estudiantes en sus lugares de trabajo, los profesores investigadores repartieron las tareas y les señalaron los tiempos de duración del momento individual para luego pasar a lo colectivo.

El profesor encargado de desarrollar el experimento de enseñanza, leía junto con los estudiantes el enunciado de la tarea. Con el fin de asegurarse que los estudiantes comprendieran lo necesario y pudieran responder las preguntas, cuestionaba: ¿qué se pregunta?, ¿qué información brinda la tarea?, entre otras. Para la tarea introductoria, el profesor investigador autor de este trabajo, llevó unos dados hechos con papel, para representar la situación que abordaba la tarea inicial. La pizarra del salón de clases también fue una herramienta de apoyo para compartir las respuestas en lo colectivo.

3.4. Recolección y análisis de los datos

La recolección de los datos empíricos se sustenta desde las producciones escritas (hojas de trabajo de los estudiantes), las respuestas en la fase individual y la argumentación colectiva. Las sesiones del experimento de enseñanza se grabaron en audio y video para luego ser transcritas. El análisis cualitativo de los datos se realizó sobre las transcripciones de los audios y los videos de manera retrospectiva, incluyendo las notas de campo de los profesores-investigadores con la intención de señalar experiencias, diálogos de los estudiantes y profesores en torno a las discusiones matemáticas (Álvarez-Gayou, 2003).

El análisis cualitativo de los datos toma como base la reconstrucción de la argumentación colectiva desde las transcripciones de las sesiones, se implementó la propuesta metodológica de Knipping y Reid (2015) y de forma paralela se clasificaron los argumentos de los estudiantes según el contenido de la garantía (Macagno et al., 2015). Para clasificar los argumentos construidos por los estudiantes, el análisis se enfocó en las conversaciones de la clase, de manera particular sobre el contenido de las garantías y las conclusiones que construyeron los estudiantes.

3.5. Método para reconstruir y analizar la argumentación

Los objetivos de la investigación implicaron: caracterizar los argumentos que construyen estudiantes de primaria al refutar conclusiones, garantías o datos en la argumentación colectiva (OG1) y analizar las estructuras argumentativas emergentes al refutar conclusiones, garantías o datos (OG2). Para reconstruir la argumentación colectiva en el salón de clases de matemáticas se implementó la propuesta metodológica de Knipping y Reid (2015). Y se adaptó la propuesta sobre las categorías de codificación de contenido de Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015) junto con los argumentos propuestos por Knipping (2008) para categorizar los argumentos construidos por los estudiantes.

3.5.1. Categorías de codificación de contenido

Las categorías de codificación de contenido son una herramienta metodológica propuesta por Macagno et al. (2015) implementadas en esta investigación con el propósito de analizar la naturaleza de los tipos de argumentos desde su contenido. Las categorías se constituyen de patrones estereotípicos de razonamiento que representan diferentes tipos de argumentos plausibles utilizados en el discurso cotidiano o en contextos de la argumentación científica (Godden y Walton, 2007).

Centramos la atención en los tipos de argumentos propuestos por los investigadores y la forma de caracterizarlos. Para cada categoría adaptamos la descripción de los tipos de argumentos en términos de la matemática, incluyendo propiedades y características invariantes de los objetos matemáticos (O.M.) en estudio. Asociado con las categorías y su respectiva clasificación, planteamos preguntas críticas que permitan identificar el tipo de argumento con base en el contenido de la garantía y el respaldo (ver Tabla 8). Las respuestas de las preguntas críticas se identifican en el contenido de la garantía y en algunas ocasiones en el respaldo del argumento.

Tabla 8

Adaptación de las categorías de codificación de contenido (Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015; Knipping, 2008).

Adaptación de las categorías	Preguntas críticas
De clasificación. Los objetos matemáticos se clasifican con base en características invariantes y propiedades matemáticas.	¿Se clasifican objetos matemáticos O.M.? ¿Qué criterios permiten clasificar los O. M.? ¿Recurren a características y/o propiedades matemáticas?
Basado en propiedades matemáticas. Una conclusión se sustenta del uso de propiedades matemáticas que satisfacen los objetos geométricos.	¿La conclusión satisface una propiedad? ¿Qué propiedad fundamenta la conclusión?
Práctico Se comparan las formas en que se justifica una conclusión con base en propiedades y/o características invariantes de los objetos matemáticos**.**	¿Qué formas de justificar una conclusión se comparan? ¿Qué propiedad y/o características invariantes del objeto matemático refieren?
Basado en la mejor explicación. La conclusión más razonable en un argumento se reconoce cuando en su justificación se consideran todos los casos posibles. *Caso 1:* Los objetos matemáticos que	¿Qué casos posibles se explican? ¿Se establece una conclusión? ¿La garantía contiene casos posibles?

satisfacen las propiedades y características invariantes *<u>Caso 2:</u>* Los objetos matemáticos que no satisfacen las propiedades y características invariantes.	¿Incluyen las características o reglas del objeto matemático?
De consecuencias. Una decisión es justificada o refutada por mostrar una consecuencia positiva o negativa.	¿Se justifica una conclusión-decisión? ¿Al justificar o refutar conclusión se evidencias consecuencias? ¿Qué consecuencias implica la conclusión?
Argumento visual Fundamenta una conclusión con una representación gráfica o parte de ella tomada de una pizarra.	¿Se fundamenta una conclusión con base en una representación gráfica? ¿Se retoma alguna parte de una representación gráfica de la pizarra sin alguna relación conceptual?
Argumento Conceptual Refiere a una representación mental de una idea o concepto matemático.	¿La garantía refiere a una representación mental de un objeto matemático? ¿Se presenta una representación de idea o concepto matemático con el fin de fundamentar una conclusión?

Con el propósito de ejemplificar cómo se caracterizaron los argumentos que construyeron estudiantes de primaria para refutar datos o garantías, se presenta un extracto de la tarea 4 del experimento de enseñanza y su respectivo análisis del contenido de los argumentos en particular, de la garantía que fundamenta cada conclusión. De las transcripciones de los episodios, se le asignó a cada línea una función argumentativa (F.A.): pregunta (¿?), conclusión (C), datos (D), garantía (W), respaldo (B), refutación (R). Y se identificó cada participante, profesor o estudiante con su respectivo diálogo (ver Tabla 9).

Tabla 9

Transcripción de un episodio de la tarea 4.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Cómo saben que tiene que dar residuo tres?
C1	Gael, Saraí	Porque la tarea dice que debe ser tres…
¿?	Profesor	¿Qué hicieron para que la división tuviera un residuo tres?
WR1	Michel	**Tomas el resultado de 14 por 243 y le sumas el tres**…
¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Michel…? ¿Por qué hay que sumarlo?
WR1	Gael	Porque **si no lo sumamos no nos va dar residuo tres**…
WR1	Gerardo	Yo dividí varias veces… y encontré que el **dividendo 3405 entre 14 daba residuo 3**
¿?	Profesor	¿Qué podemos concluir?

C3	Gael, Valentín, Juan de Dios, Alejandro…	¡Que la amiga de Mario estaba equivocada!
¿?	Profesor	Y… ¿Cómo encontramos un dividendo…?
W6	Michel	**Multiplicando el cociente por el divisor y le sumamos el residuo…**

De las intervenciones entre los estudiantes y el profesor en la tarea 4 del experimento de enseñanza se reconocieron cuatro garantías (WR1-Michel, WR1-Gael, WR1-Gerardo y W6-Michel), la primera garantía presentada por Michel y por Gerardo refieren de manera implícita a la propiedad que cumplen las partes de la división. En cambio, la garantía (W6) de Michel de forma explícita enuncia la propiedad que cumplen las partes de la división; el dividendo (D) es igual al producto del divisor (d) por el consiente (Q) más el residuo (r). Estos argumentos cuentan con conclusiones construidas con base en la propiedad matemática $D= (d.Q)+r$, por tanto, son caracterizados como argumentos basados en propiedades matemáticas. Respecto al argumento de Gael, se identifica una consecuencia negativa de “no sumar tres”, al producto del divisor por el cociente y se clasifica su argumento como uno de consecuencias. En el extracto de la transcripción que se presentó, las garantías de los argumentos de los estudiantes contienen frases en negrita que indican una característica invariante, propiedad matemática, una consecuencia y demás indicadores que ayudan a caracterizar los argumentos.

3.5.2. Reconstrucción de la estructura de la argumentación colectiva

El modelo de Toulmin (2003) permite reconstruir la argumentación a nivel local, es decir, la reconstrucción del núcleo, constituido por el dato, conclusión y garantía. Para la reconstrucción de la argumentación colectiva, este modelo no permite reconstruir la estructura global desarrollada en las conversaciones en el salón de clases (Knipping, 2008; Knipping y Reid, 2015). En este sentido, Knipping y Reid (2015) implementaron el modelo de Toulmin para reconstruir estructuras complejas con base en adaptaciones propuestas por los mismos. Bajo esta propuesta metodológica, el proceso de reconstrucción de la argumentación consta de tres etapas: 1) Reconstruir la secuencia de la argumentación junto con el significado de la conversación en el aula; 2) Analizar los argumentos y las estructuras de la argumentación y 3) Comparar las estructuras de argumentación.

La primera etapa implica dividir cada sesión en episodios, estos contienen extractos de la transcripción de la actividad matemática que tuvo lugar en las sesiones del experimento de enseñanza (ver Tabla 10). El propósito de esta etapa es identificar argumentos para el análisis y reconstrucción de la estructura de la argumentación en función de los: datos, conclusiones, garantías, respaldo y refutaciones (Knipping, 2008). Las declaraciones que funcionan como datos (D) en la argumentación podrían ser, por ejemplo, la información inicial proporcionada por el profesor, que podría transmitirse a través de dibujos, declaraciones explícitas, ecuaciones o preguntas. La garantía (W) se puede identificar como características invariantes de los objetos matemáticos, propiedades o regularidades que los estudiantes refieren para fundamentar la conclusión. La conclusión (C) es la respuesta final del estudiante en una tarea matemática. La refutación (R) ocurre en casos donde los estudiantes niegan una parte de la argumentación ya sea una refutación de los datos, la garantía o la conclusión, o el argumento como un todo.

Tabla 10

Reconstrucción de la función argumentativa, ejemplo de un episodio argumentativo tarea 2.

#	F. A	Participante	Diálogo
1.	**D1**	Profesor	De acuerdo con la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número 1?... Daniela…
	C1	Daniela	El estudiante número 1
	W1	Daniela	Porque se sabe que el cuadrado es un cuadrilátero… no solamente el cuadrado es el único cuadrilátero… puede tener otras medidas…
	¿?	Profesor	Dibujaste otros cuadriláteros… ¿Puedes pasar al frente y dibujarlos?
	B1	Daniela	[Pasa a la pizarra y dibuja un rectángulo y un cuadrado]…el rectángulo también puede ser un cuadrilátero porque tiene cuatro lados…
	¿?	Profesor	Y ¿Qué características tiene el rectángulo comparado con el cuadrado?
	B1	Daniela	Tienen cuatro lados a pesar de que son diferentes…
	¿?	Profesor	¿Qué más?
	B1	Daniela	Que los dos son cuadriláteros…
	¿?	Profesor	¿Entonces tu respuesta es?
	C2	Daniela	El estudiante 1

El análisis a nivel local de la argumentación refiere a los elementos que componen un argumento, esto permite analizar el contenido de las garantías o respaldos (ver Figura 14). En el contexto de la fase colectiva, el profesor investigador propició con la lectura de la tarea, los datos de la argumentación (D1). De forma voluntaria, Daniela concluye (C1) que el estudiante 1 tiene la definición correcta de cuadrado, lo que motivó al profesor a indagar ¿cuál era la garantía de la estudiante para esa conclusión? En el contenido de la garantía (W1), se reconoce que soporta su conclusión desde la definición de cuadrado en el contexto de la clasificación de cuadriláteros. En particular, la estudiante fundamenta su conclusión con base en la medida de los lados de un cuadrado en términos de respaldo (B1) y alude a una representación sobre la pizarra. En términos del modelo de Toulmin, la Figura 14 representa un argumento local y la información proporcionada por el docente constituye los datos (D1).

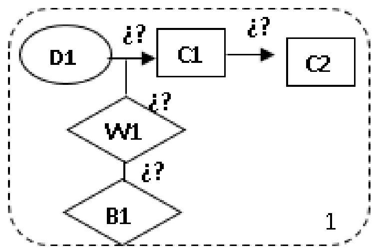


Figura 14. Estructura de la argumentación local episodio <1> en la tarea 2.

Por otro lado, el análisis a **nivel global** representa la estructura compleja de la argumentación constituida por cadenas de argumentos locales (Knipping y Reid, 2015). En esta investigación, la conclusión se representa por cuadrados, garantías y respaldos con rombos sin relleno, los datos con círculos, la refutación con rombos rellenos con color negro, las refutaciones que se convierten en conclusiones con un rombo inscrito en un cuadrado y la intervención del profesor con dos signos de interrogación (¿?) (ver Figura 15).

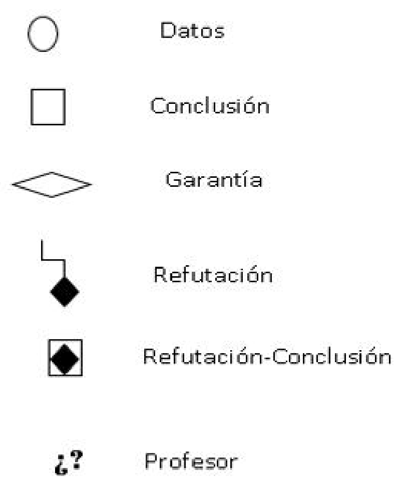


Figura 15. Representación de los elementos en la estructura argumentativa compleja. Fuente: Elaboración propia.

Las últimas dos convenciones sobre las estructuras de la argumentación compleja son propuestas en esta investigación como un resultado emergente de investigaciones previas relacionadas con la argumentación matemática (Cervantes-Barraza, 2017; Cervantes-Barraza et al., 2019). Al reunir todos los argumentos locales de la tarea 4, se conforma la estructura de la argumentación colectiva (Figura 16). Los episodios argumentativos están encerrados por los rectángulos con líneas punteadas que se conectan en orden cronológico dirigidos por las flechas hasta arribar a la conclusión final.

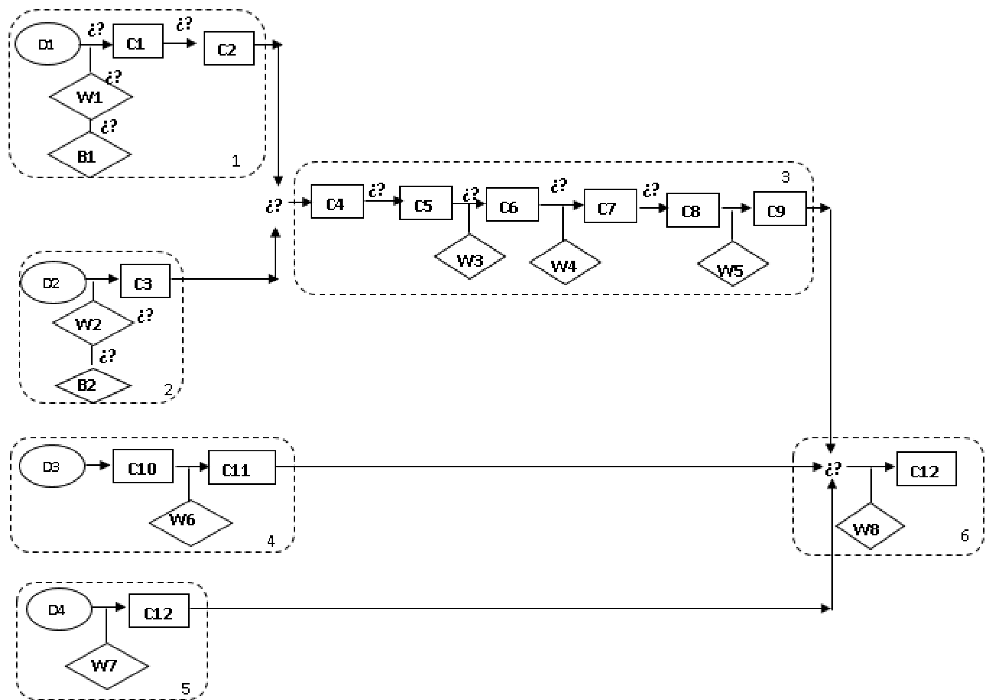


Figura 16. Argumentación compleja de la tarea dos.

Como fase final se comparan los argumentos a nivel local y global, es decir, las estructuras argumentativas emergentes con aquellas reportadas en la literatura con el fin de consolidarlas como contribuciones en el contexto de la investigación sobre la argumentación matemática en el salón de clases.

Capítulo 4

Resultados de la investigación

Producto del experimento de enseñanza "Refutemos argumentos en lo colectivo" se presentan los resultados del estudio a la luz de los objetivos generales de la investigación: 1) Caracterizar los argumentos que construyen estudiantes de primaria al refutar conclusiones, garantías o datos en la argumentación colectiva y 2) Analizar las estructuras argumentativas emergentes al refutar conclusiones, garantías o datos. Para el logro del primer objetivo se analizó el contenido de las garantías con base en la adaptación de las categorías de codificación de contenidos de argumentos (Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn, 2015) junto con los tipos de argumentos identificados por Knipping (2008). Respecto al segundo objetivo, se reconstruyeron las funciones argumentativas de las declaraciones matemáticas en términos de datos, conclusiones, garantías, respaldos, refutaciones y las estructuras de la argumentación correspondientes a la argumentación colectiva suscitada en cada tarea (Knipping y Reid, 2015).

4.1. Caracterización de los argumentos en el contexto de la refutación

A lo largo del experimento de enseñanza los estudiantes construyeron conclusiones con evidencias y razones que soportan las respuestas de los estudiantes ante la cuestión planteada en las tareas matemáticas. Refutaron conclusiones cuando las garantías no conectaron de manera lógica los datos con una conclusión, refutaron garantías cuando el contenido matemático de la misma (*i.e.*, propiedad, regularidad matemática, característica invariante) era insuficiente para soportar la conclusión y refutaron los datos cuando los estudiantes implementaron información de forma incorrecta para establecer sus conclusiones. En este contexto, los argumentos construidos por los estudiantes se caracterizaron con base en la adaptación de los tipos de argumentos propuestos por Macagno et al. (2015) desde el análisis del contenido de las garantías empleadas para fundamentar sus conclusiones. Se identificaron siete tipos de argumentos y su contenido matemático refiere a propiedades y características invariantes que definen los conceptos: cuadrado, triángulo, rectángulo, cubo y división de números naturales. En este orden de ideas, se presenta una caracterización de los argumentos construidos por los estudiantes considerando el contenido de las garantías.

4.1.1. Argumento de clasificación

Los argumentos de clasificación implicaron características invariantes (*Ci*) y/o propiedades (*P*) implementadas por los estudiantes como criterios de clasificación de los objetos matemáticos en estudio. Este tipo de argumento emergió en las tareas del experimento (*e.g.*, tareas 2, 3 y 4) e involucró a los estudiantes en el análisis las características invariantes del cuadrado, rectángulo y del concepto de división.

Se exponen algunos episodios que incluyen los argumentos de clasificación construidos por los estudiantes en las tareas 2, 3 y 4 del experimento de enseñanza. En la tarea 2 el diseño de la misma demandó a los estudiantes analizar y configurar las características invariantes del concepto cuadrado. Su formulación y enunciado incluye definiciones en términos de conclusiones falsas proporcionadas por estudiantes hipotéticos sobre el concepto de cuadrado. En esta tarea el contenido de las garantías de los argumentos de los estudiantes refiere a características invariantes del cuadrado y del rectángulo (*i.e.*, parte de la transcripción en negrita) con el fin de clasificar los objetos matemáticos en estudio. Ante la cuestión de la tarea, el profesor proporcionó en términos de datos (D1), la información para que la estudiante Daniela seleccionara como respuesta la definición presentada por el estudiante hipotético uno (C1).

F. A.	Participante	Transcripción
D1	Profesor	De acuerdo a la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número uno?...
C1	Daniela	¡El estudiante número uno!
W1	Daniela	Porque se sabe que **el cuadrado es un cuadrilátero**… no solamente el cuadrado es el único cuadrilátero… **puede tener otras medidas**…
¿?	Profesor	Dibujaste otros cuadriláteros… ¿Puedes pasar a la pizarra y dibujarlos?

La estudiante fundamentó su conclusión (C1) en las características invariantes que definen al cuadrado y al rectángulo. En particular, consideró las medidas de los lados (W1) como criterio de clasificación e implícitamente comparó las características del cuadrado y del rectángulo. La conclusión de la estudiante evidenció estar de acuerdo con la definición del estudiante 1 presentada como parte del enunciado de la tarea, “un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales”. Si bien, la estudiante presentó un argumento que refiere a uno de clasificación, pero la garantía proporcionada no alude a la medida de los ángulos internos del cuadrado, característica invariante necesaria para definir el objeto matemático en estudio.

En otro episodio de la tarea 2, se identificaron argumentos de clasificación construidos por los estudiantes Gael y Alejando. Las garantías presentadas refirieron a las características invariantes del cuadrado, en particular, las medidas de los lados y los ángulos del cuadrado con el fin de fundamentar su conclusión (C7, C8). En un primer momento, Gael resaltó que las medidas de los ángulos de un cuadrado son iguales (W6), y Alejandro en su argumento implementó todas las características invariantes del cuadrado (W7), tanto las medidas de los ángulos y lados como fundamento a su conclusión (C8).

F. A.	Participante	Transcripción
D1	Profesor	De acuerdo a la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número uno?
¿?	Profesor	Juan de Dios ¿Cuál fue tu respuesta…?
C7	Juan de Dios	El estudiante dos…
¿?	Profesor	¿El estudiante dos tiene la respuesta correcta?
C7	Estudiantes	¡Si!
¿?	Profesor	¿Y el estudiante tres…?
C7	Estudiantes	También…
W6	Gael	Porque **son cuatro ángulos iguales …**
¿?	Profesor	¿Qué puedes decir? ...Alejandro
C8	Alejandro	Junté lo que dice el estudiante 2 y el 3…
¿?	Profesor	¿Por qué los juntaste?
W7	Alejandro	Porque tenía que decir que **un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales…**

De la argumentación colectiva suscitada en la tarea 3, los argumentos de clasificación emergieron como parte del análisis de modelos de cuerpos geométricos y figuras planas. La tarea solicitó a los estudiantes identificar la figura plana que se forma con los segmentos punteados sobre el modelo de un cubo. Ante la cuestión de la tarea, Abril y algunos compañeros reconocieron que las caras del cubo tienen diagonales iguales (WR1), garantías que incluyen las características invariantes del cubo. Con las características invariantes, los estudiantes identificaron que la figura plana que se formó sobre las caras del modelo del cubo era un triángulo equilátero (C1) y con esto fundamentaran sus conclusiones sobre la cuestión de la tarea (W3) (ver Figura 18).

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Cómo te diste cuenta que es un triángulo equilátero?
WR1	Abril	Porque **las caras del cubo se parten en diagonales iguales**…
¿?	Profesor	¿Qué pasa si las diagonales son iguales…?
C1	Abril	Se forma **un triángulo equilátero**
D2	Profesor	¿Y por qué no se puede formar un cuadrado…?
C2	Estudiantes	Porque faltaría un lado…o una cara…
¿?	Profesor	¿Y un triángulo tiene…?
W3	Estudiantes	**Tres lados… tres ángulos**…

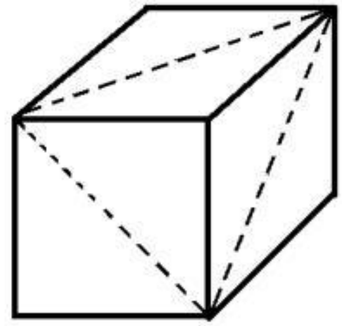


Figura 17. Modelo del cubo recreado en papel por la estudiante Abril y una reconstrucción del cubo con los segmentos punteados que demandó construir la tarea 3.

Los argumentos de clasificación en las tareas del experimento de enseñanza implicaron características invariantes de objetos matemáticos (*e.g*., cuadrado, cubo) y a la vez cumplieron la función de criterios para clasificarlos, fundamentaron las conclusiones sobre las cuestiones de las tareas y a la vez permitió que los estudiantes analizaran: cuadrados, rectángulos, triángulos y cuerpos geométricos como cubos y pirámides. Este tipo de argumento es plausible encontrarlo en estudiantes de primaria, ya que en este nivel educativo se estudian los conceptos matemáticos a partir de las características esenciales sin hacer énfasis en una definición formal. Es por esto que el análisis del contenido de las garantías y respaldos en los argumentos de los estudiantes permitió clasificar su campo de justificación (*i.e*., características invariantes) y con esto identificar el contenido matemático que los estudiantes implementan para fundamentar sus conclusiones (Knipping, 2008).

4.1.3 Argumento basado en propiedades matemáticas

Los argumentos basados en propiedades matemáticas se caracterizan por incluir regularidades matemáticas, expresiones matemáticas que generalizan el comportamiento de sucesiones de patrones de figuras y/o reglas generales de la matemática en términos de propiedades (P) que satisfacen los objetos matemáticos. Este tipo de argumento emergió en las tareas 1 y 4 del experimento, se promovió desde su diseño para que los estudiantes identificaran regularidades matemáticas y con esto fundamentaran sus conclusiones.

La tarea 1 solicitó a los estudiantes de forma implícita generalizar el comportamiento de un patrón de figuras, con ello determinar una expresión matemática y en el momento individual construyeron sus argumentos para responder a las preguntas de la tarea para compartirlas en la etapa colectiva. Producto del análisis de las etapas dadas del patrón, los estudiantes identificaron una regularidad matemática que les permitió determinar la cantidad de cuadros de las etapas cercanas, “aumenta de dos en dos”. Esta regularidad la reconocieron al proceder de forma inductiva, es decir, analizaron las etapas dadas del patrón para construir una regla con base en lo recursivo (*i.e*., conteo).

La refutación (R3) de Juan de Dios y de otros estudiantes negaron el contenido de la garantía de Yarami (W4), ya que la regularidad “multiplicar por dos” no verifica todas las etapas del patrón de figuras. Con el propósito de soportar su refutación, Juan de Dios presentó la regularidad matemática o regla de construcción que verifica todas las etapas del patrón: “Se tiene que sumar un cuadro a cada lado de la figura…o dos por cuatro… me da ocho…y el del medio… nueve” (WR3). Los argumentos presentados implicaron garantías con regularidades matemáticas que de forma implícita atienen a la regla del patrón y a una expresión matemática (*4n+1*) que describe el comportamiento del patrón de figuras (ver Figura 18).

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Por qué te dio diez la figura dos?
W4	Yarami	Porque multipliqué por dos…
¿?	Profesor	¿Qué dicen los compañeros?
R3	Estudiantes	¡Está equivocado!
¿?	Profesor	Explícanos Juan de Dios…
WR3	Juan de Dios	Se tiene que **sumar un cuadro a cada lado de la figura**…o **dos por cuatro**… me da ocho…**y el del medio**… nueve …

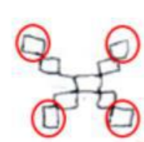


Figura 18. Regularidad identificada por el estudiante Juan de Dios, una reconstrucción de la cantidad de cuadros negros que se deben adicionar a la figura uno para determinar la figura dos.

En la argumentación colectiva suscitada a partir de la pregunta 2 en la tarea 1, un estudiante Gael, refutó la conclusión del estudiante hipotético, en lo que señaló la regularidad que le permitió determinar la cantidad de cuadros negros de la figura 20 del patrón. La refutación se fundamentó en la garantía (WR1), su contenido implicó la regularidad matemática “se multiplica veinte cuadros por cuatro esquinas que da ochenta y se le suma el del medio… y da ochenta y uno”, y evidenció la regla de correspondencia entre la cantidad de cuadros negros y cada etapa del patrón de figuras. En efecto, presentar refutaciones ante las conclusiones de los compañeros permitió reconocer el contenido de argumentos válidos y propició la interacción entre los estudiantes, esto determinó la veracidad de los argumentos puestos en tela de juicio, así también evidenció el nivel de comprensión que tienen los estudiantes con respecto al contenido matemático (Solar y Deulofeu, 2016).

F. A.	Participante	Transcripción
R1	Estudiantes	¡Está equivocado!
¿?	Profesor	A ver Gael… ¿Por qué está equivocada la respuesta de Ángel?
WR1	Gael	Porque no se multiplica por cinco… **son veinte cuadros en cada esquina**…entonces **se multiplica veinte cuadros por cuatro esquinas** que da ochenta **y se le suma el del medio**… y da ochenta y uno.

Los argumentos construidos por los estudiantes en el desarrollo de la tarea 1 refieren a regularidades que describen el comportamiento del patrón, en un momento inicial lo expresaron en términos de estructuras aditivas, multiplicativas y combinadas (*e.g.*, “va aumentando de dos en dos” o “se multiplica veinte cuadros por cuatro esquinas que da ochenta y se le suma el del medio… y el resultado es ochenta y uno”). En este contexto los estudiantes emplearon el lenguaje escrito o verbal para referirse a la regla de construcción o la regularidad matemática identificada sin presentar expresiones matemáticas con variables. Jiménez y Pineda (2013) desatacaron que en la argumentación se implementa el lenguaje común de cada estudiante y se argumenta con el lenguaje propio, una de las razones por la cual los estudiantes recurren a expresiones coloquiales del lenguaje en sus argumentos.

Con respecto a los argumentos de la tarea 4, los estudiantes analizaron una situación hipotética que les demandó determinar el dividendo de una división de dos cifras una vez proporcionadas las demás partes (divisor, cociente, residuo). En la interacción, los argumentos de Michel y Gael atienden a la cuestión del profesor ¿Cómo determinar el residuo? (W6) y Michel fundamentó su conclusión (C3) con base en la relación entre las partes de la división (WR1). En particular, reconoció como propiedad matemática que el producto del divisor y el cociente más el residuo equivale al dividendo solicitado (W6).

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Cómo saben que tiene que dar residuo tres?
C2	Gael, Saraí	Porque la tarea dice que debe ser tres…
¿?	Profesor	¿Qué hicieron para que la división tuviera un residuo tres?
WR1	Michel	**Tomas el resultado de doscientos cuarenta y tres por catorce y le sumas el tres**…
¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Michel…? ¿Por qué hay que sumarlo?
WR1	Gael	Porque **si no lo sumamos no nos va dar residuo tres**…
WR1	Gerardo	Yo dividí varias veces… y encontré que el **dividendo tres mil cuatrocientos cinco entre catorce daba residuo tres**
¿?	Profesor	¿Qué podemos concluir?
C3	Gael, Valentín, Juan de Dios, Alejandro…	¡Que la amiga de Mario estaba equivocada!
¿?	Profesor	Y… ¿Cómo encontramos un dividendo…?
W6	Michel	**Multiplicando el cociente por el divisor y le sumamos el residuo…**

En el contenido de la garantía del argumento de Michel se identificó la propiedad matemática que satisface las partes de la división. En apoyo al argumento de Michel, se reconocieron dos argumentos, el de Gael implicó la condición necesaria para determinar el dividendo (*i.e.*, el producto del divisor y el cociente más el residuo permite determinar el dividendo). Y el argumento de Gerardo soportó lo establecido por Michel con base en los resultados de dividir iteradamente y obtener el mismo residuo.

De los argumentos construidos por los estudiantes en las tareas del experimento de enseñanza, los basados en propiedades matemáticas implicaron procesos de análisis sobre casos particulares, la construcción de conjeturas iniciales que son validadas o refutadas con la intención de establecer una generalización y/o reconocer una propiedad matemática. Los estudiantes en el desarrollo de la tarea 1 identificaron e implementaron la regla de construcción desde el análisis de las etapas dadas del patrón de figuras y en la tarea 4 optaron por fundamentar sus conclusiones con la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo.

4.1.3. Argumento práctico

Este tipo de argumento se identificó cuando los estudiantes comparaban distintas formas de fundamentar sus conclusiones al implicar propiedades (P), regularidades-generalidades matemática y/o características invariantes (Ci) de los objetos matemáticos con el fin de seleccionar una de las formas según lo solicitado en la tarea matemática. Los argumentos de tipo práctico se reconocieron en todas las tareas del experimento de enseñanza.

En la tarea 1 los estudiantes construyeron argumentos de tipo práctico para responder a las cuestiones requeridas. El estudiante Juan de Dios refutó la garantía presentada por Yarami "multiplicar por dos" y comparó la cantidad de cuadros negros de las figuras dadas. El contenido de la garantía de la refutación de Juan de Dios (WR3) implicó una regularidad matemática identificada al analizar casos particulares y comparar la característica invariante del patrón: "*se tiene que sumar un cuadro a cada lado*" (forma 1) y de la relación de correspondencia entre la cantidad de cuadros y su respectiva etapa "*o dos por cuatro… me da ocho…y el del medio… nueve"* (forma 2) con el propósito de determinar la cantidad de cuadros de la etapa solicitada.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Por qué te dio diez la figura dos?
W4	Yarami	Porque multipliqué por dos…
¿?	Profesor	¿Qué dicen los compañeros?
R3	Estudiantes	¡Está equivocado!
¿?	Profesor	Explícanos Juan de Dios…
WR3	Juan de Dios	Se tiene que **sumar un cuadro a cada lado de la figura**…o **dos por cuatro**… **me da ocho**…y **el del medio**… nueve …

En la tarea 2 los estudiantes concluyeron las características invariantes del cuadrado presentadas en términos de enunciados (respuestas hipotéticas). Se reconocieron argumentos de tipo práctico como respuesta a la cuestión planteada y los estudiantes fundamentaron sus argumentos al comparar las posibles formas de sustentar la conclusión, en particular, recurren a las características enlistadas por los estudiantes hipotéticos 2 y 3. Para responder a la cuestión planteada, Daniel y Gael identificaron que las características invariantes que presentan los estudiantes hipotéticos eran insuficientes para definir el cuadrado, razón por la cual, combinaron las características presentadas por los estudiantes 2 y 3 y fundamentar sus conclusiones ante la tarea matemática (W3). Por tanto, la conclusión (C4 y C5) de los estudiantes señalan que el cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados y cuatro ángulos iguales (W4).

F. A.	Participante	Transcripción
C4	Gael, Valentín, Juan de Dios, Daniel…	Estamos de acuerdo con la respuesta de Saraí…
¿?	Profesor	Daniel… ¿Por qué?... explícanos
W3	Daniel	Porque **Daniela reúne el estudiante 2 y el estudiante 3...**
¿?	Profesor	¿Qué pasa Gael si reúnen las respuestas de estos dos estudiantes…?
C5	Gael	Se sacaría una conclusión…que los dos están por un lado bien…
W4	Gael	Porque **el estudiante dos dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales**… y **el estudiante tres porque dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales**… que también está bien. Entonces si no tuviera lados iguales… no tuviera ángulos iguales…en cambio también está que si son cuatro ángulos iguales deben ser cuatro lados iguales…

El diseño de la tarea 5 y su formulación ubicó a los estudiantes en el análisis de la información presentada en las gráficas de barras que refieren a un conjunto de datos sobre la cantidad de camisas que vende un sastre en un mes del año. La tarea solicitó a los estudiantes identificar la gráfica que representa las ventas del mes de Abril, esto implicó que los estudiantes compararan características de las gráficas para concluir la gráfica que representa las ventas. De la argumentación suscitada, los argumentos de Saraí y Gael se caracterizan por comparar las características de las gráficas, además, los estudiantes identificaron que ninguna representa las ventas por que la gráfica dos tiene cinco unidades más en comparación con la gráfica 3 (W2).

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de lo que dijo Alejandra?
R1	Estudiantes	¡Está equivocada!
W1	Alejandra	Porque este está más alto que este [señala las barras de las ventas de las camisas de cien pesos en ambas gráficas e indica que se pasa la de la gráfica dos]
R2	Saraí	**Pero la de ciento veinte pesos** [se refiere a la barra de las camisas de ciento veinte] **se pasa por cinco**
¿?	Profesor	Entonces ¿Qué gráfica representa las ventas?
C2	Gael, Juan Carlos, Michel, Juan de Dios…	¡Ninguna!
¿?	Profesor	La mitad de salón de clases dice que ninguna y la otra mitad que la gráfica dos…
C4	Gael	¡Ninguna!
W2	Gael	Pero el único hecho es que **la gráfica dos sólo se pasa por cinco**, pero en **la otra gráfica se pasa por más**…

Se infiere que los argumentos de tipo práctico identificados en el contexto del experimento de enseñanza se caracterizan en el análisis de casos particulares (*e.g.*, tarea

1), implican a la vez comparar distintas formas de fundamentar sus conclusiones desde las características y propiedades matemáticas. Este tipo de argumento favoreció que los estudiantes reflexionaran sobre las características y propiedades de los objetos matemáticos y las posibles formas de justificar una conclusión. En cuanto al contenido de las garantías, los argumentos de los estudiantes incluyeron características invariantes del cuadrado, rectángulo, cubo, fundamentales para validar las conclusiones presentadas en lo colectivo.

4.1.4. Argumento basado en la mejor explicación

Los argumentos basados en la mejor explicación refirieron a explicaciones que presentaron los estudiantes para fundamentar las conclusiones. Su contenido implicó propiedades y características invariantes del objeto matemático sin seleccionar alguna, se caracterizan, además, por presentar dos conclusiones que aluden casos (*e.g.*, “si” y “no”), o dos posibles respuestas a la cuestión de la tarea que incluyen sus respectivas justificaciones.

Como respuesta a la segunda pregunta de la tarea 1, determinar la cantidad de cuadros del patrón de figuras de la etapa 20. El estudiante Juan de Dios presentó su argumento basado en explicaciones y abordó a modo de conclusión (C3) dos casos, un “si” y un “no”. En el contenido de la garantía contrastó la respuesta hipotética del estudiante Mario y la respuesta que incluye la regla de construcción de la figura 20, basado en la regularidad que identificó el estudiante en las etapas del patrón. Se infiere que el argumento de Juan de Dios se caracteriza por comparar dos conclusiones y sus respectivas justificaciones implicó que se reconocieran las características de cada caso y los que no tienen lugar ante la cuestión de la tarea.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	Vamos a escuchar la respuesta de Juan de Dios… ¿Qué concluyes?
C3	Juan de Dios	**¡Si y no!...**
W3	Juan de Dios	**Si… porque son veinte por cinco y suman cien**… y son cuatro lados… entonces se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… más el del medio ochenta y uno…
W3	Juan de Dios	**No… porque aquí dice que son veinte por cinco**… pero no son cinco lados…son cuatro lados… y se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… y se suma el del medio… da ochenta… y si se multiplica por cinco da cien más uno ciento uno…

De los argumentos construidos por los estudiantes en la tarea 2 del experimento, el diseño de la tarea involucró a los estudiantes a configurar el concepto de cuadrado desde sus características invariantes. Esta tarea implicó tres conclusiones falsas (respuestas de los estudiantes hipotéticos) que se plantearon en términos de las posibles respuestas (principio de incluir conclusiones falsas). Este principio de diseño fomentó la construcción de argumentos por parte de los estudiantes basados en explicaciones con el objetivo de fundamentar las conclusiones.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿El estudiante dos tiene la respuesta correcta?
C7	Estudiantes	¡Si!
¿?	Profesor	¿Y el estudiante tres…?
C7	Estudiantes	También…
W6	Gael	Porque son cuatro ángulos iguales …
¿?	Profesor	Alejandro… ¿Qué puedes decir?
W6	Alejandro	**Junté lo que dice el estudiante 2 y el 3**…
¿?	Profesor	¿Por qué juntaste las respuestas?
W6	Alejandro	Porque tenía que decir que **un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales**…
D3	Profesor	¿Qué pasa si tomabas sólo la respuesta del estudiante 2?
C8	Alejandro	No iba a serlo [se refiere a un cuadrado]…
W7	Alejandro	Porque nadie tiene la respuesta correcta …**los estudiantes 2 y 3 dicen que tienen cuatro lados iguales** y en **la tres me dicen que tiene cuatro ángulos iguales** y ninguna respuesta tiene cuatro ángulos y lados iguales…
¿?	Profesor	En conclusión, ¿Qué podemos decir…?
C9	Gael	Sería estudiante dos y estudiante tres…
W8	Gael	Porque **si el estudiante dos hubiera dicho que el cuadrado tiene cuatro lados y ángulos iguales entonces ya tendríamos una correcta**… pero en cambio, el estudiante dijo que son cuatro lados iguales…Nadie estaría bien, las respuestas del estudiante dos y tres deben estar juntas …

Las preguntas del profesor orientaron a los estudiantes para que concluyeran, en este sentido, Alejandro presentó su conclusión con base en las características que propusieron los estudiantes 2 y 3 (C7). Señaló que ninguno de los estudiantes tiene la respuesta correcta y comparó las características del cuadrado para concluir que deben tener ángulos y lados iguales (W7). Bajo la misma lógica, Gael en su argumento contrastó las conclusiones de los estudiantes 2 y 3 (C9) para explicar que cada estudiante le falta una característica invariante del cuadrado y concluir la unión de las respuestas de los dos estudiantes (W8).

De los argumentos de la mejor explicación construidos por los estudiantes en las tareas del experimento de enseñanza, se caracterizaron por presentar explicaciones para fundamentar las conclusiones, explicar casos posibles y contrastar características invariantes de los objetos matemáticos en estudio con el fin de concluir sobre la cuestión de la tarea. Observamos además que este tipo de argumento se considera necesario en los procesos argumentativos, al conducir a los estudiantes en la construcción de diversas conclusiones. Cabe resaltar que estos argumentos se diferencian de los prácticos por las explicaciones que presentan los estudiantes ante las conclusiones.

4.1.5. Argumento de consecuencia

En el marco del experimento de enseñanza el contenido de este tipo de argumento proporcionó una buena o mala consecuencia de involucrar características invariantes de los objetos matemáticos y propiedades que justifican las conclusiones y/o refutaciones. Los estudiantes construyeron argumentos en las tareas 1, 2, 4 y 5 del experimento, en este sentido, se presentan algunos extractos de episodios.

De los argumentos construidos por los estudiantes en la tarea 1, Juan de Dios concluyó (C3) con respecto a la cuestión de la tarea y como parte de su garantía indicó la consecuencia negativa de estar de acuerdo con la respuesta del estudiante hipotético, y la consecuencia de multiplicar cinco por veinte y adicionarle uno, esto implica obtener la conclusión falsa.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	Vamos a escuchar la respuesta de Juan de Dios…. ¿Qué concluyes?
C3	Juan de Dios	¡Si y no!
W3	Juan de Dios	Si porque son veinte por cinco y suman cien… y son cuatro lados… entonces se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… más el del medio… ochenta y uno.
W3	Juan de Dios	No porque aquí dice que son veinte por cinco… pero no son cinco lados…son cuatro lados… y se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… y se suma el del medio… da ochenta y uno… **y si se multiplica por cinco da cien… más uno … ciento uno…**

En la tarea 2, los argumentos de consecuencias de los estudiantes señalaban las consecuencias de tomar sólo una respuesta de un estudiante hipotético. Es el caso de Gael, quien concluyó que la respuesta correcta debe incluir las características del cuadrado propuestas por los estudiantes 2 y 3, y señaló como consecuencia negativa, “si no tenían lados iguales, entonces, no tendrían ángulos iguales”, condición necesaria para clasificar un cuadrado con base en sus características invariantes.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Y qué pasa si se reúnen las respuestas de estos dos estudiantes…?
C5	Gael	Se sacaría una conclusión…que los dos están por un lado bien…
W4	Gael	Porque el estudiante dos dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales… y el estudiante tres dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales… que también está bien. **Entonces… si no tuviera lados iguales… no tuviera ángulos iguales**…en cambio también está que si son cuatro ángulos iguales deben ser cuatro lados iguales…

En la tarea 4 emergió un argumento de consecuencia que a la vez es uno de refutación (WR1). Su contenido aborda la consecuencia de no adicionar el "residuo" al producto del "divisor y el cociente", lo que implicó obtener un dividendo equivocado, en razón de que el estudiante reconoce la relación existente entre las partes de una división.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Qué hicieron para que la división tuviera un residuo tres?
WR1	Michel	Tomas el resultado de catorce por doscientos cuarenta y tres y le sumas el tres…
¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Michel…? ¿Por qué hay que sumarlo?
WR1	Gael	Porque **si no lo sumamos no nos va dar residuo tres**…

De las respuestas de los estudiantes en la tarea 5, el argumento de Saraí se categorizó como uno de consecuencias, porque comparó las características de las gráficas 1 y 2 presentadas en el enunciado de la tarea con el propósito de mostrar la consecuencia negativa de incluir como respuesta la gráfica 2. En cuanto al contenido de su refutación (R1), implicó las características de la gráfica 2 (*i.e.*, cantidad de camisas vendidas) en contraste con la gráfica 1.

F. A.	Participante	Transcripción
¿?	Profesor	¿Por qué Alejandra dices que es el número uno?
W1	Alejandra	Porque la gráfica uno tiene treinta en el eje horizontal y en la gráfica dos no tiene, llega hasta veinte y cinco…
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de lo que dice Alejandra?
R1	Estudiantes	¡Está mal!
W1	Alejandra	Porque este está más alto que este [señala las barras de las ventas de las camisas de 100 pesos en ambas gráficas e indica que se pasa la de la gráfica dos]
R2	Saraí	**Pero la de ciento veinte pesos** [se refiere a la barra de las camisas de **ciento veinte**] **se pasa por cinco.**

Los argumentos de consecuencias presentados en las tareas del experimento son evidencia de las implicaciones positivas o negativas que reconocieron los estudiantes en los argumentos de los compañeros con respecto a las características y/o propiedades matemáticas necesarias para fundamentar sus conclusiones. En el contexto de la refutación de conclusiones, garantías y datos, este tipo de argumento involucró a los estudiantes a reflexionar, presentar las implicaciones de recurrir a algunas características y/o propiedades matemáticas con el propósito de validar los argumentos en lo colectivo.

4.1.6. Argumento visual

El argumento visual implicó en su contenido representaciones gráficas, dibujos, diagramas tomados de la pizarra, datos presentados en tablas, gráficas de barras entre otros para fundamentar sus conclusiones. Lo visual también incluye las representaciones de los objetos matemáticos realizadas por el profesor o por el estudiante en las hojas de trabajo, pizarra o cualquier otro medio sin implicar aspectos conceptuales, tales como, definiciones, características o propiedad matemáticas. Estos argumentos emergieron en las tareas 1, 3 y 5 del experimento de enseñanza, en razón de que incluían representaciones gráficas de la situación planteada a los estudiantes y facilitó que incluyeran partes gráficas como parte de su argumentación.

En la tarea 1 los estudiantes debían determinar la cantidad de cuadros negros de la etapa 2 y 20 de un patrón de figuras teniendo en cuenta la representación gráfica de las etapas dadas 1, 3 y 4 del patrón. El profesor con el objetivo de fomentar la argumentación en el salón de clases, preguntó a uno de los estudiantes sobre la cantidad de cuadros negros de la etapa 2 para invitarlos a contrastar con la respuesta hipotética de Mario.

F. A.	Participante	Transcripción
D1	Profesor	La pregunta de la tarea es… ¿Estás de acuerdo con la respuesta a) de Mario y su justificación?
C1	Yarami	¡Si estoy de acuerdo!…
W1	Yarami	Porque **si multiplicas la primera figura por dos**… te da diez …

Yarami en su argumento concluye estar de acuerdo con la respuesta del estudiante hipotético (C1), el contenido de la garantía (W1) refiere a la cantidad de cuadrados negros de la figura 1 (los cuales toma de la figura 1 que proporciona el enunciado de la tarea) y considera adecuada la respuesta del estudiante hipotético Mario, quien propone duplicar la cantidad inicial de cuadros negros (i.e., conclusión falsa). La estudiante validó la respuesta del estudiante hipotético porque contó los cuadros de la figura dos, de tal forma que, contó dos veces el cuadro ubicado en el centro y resultó un total de 10 cuadros (ver figura 19). La garantía que soporta su conclusión alude a características del patrón de figuras, es decir, la información proporcionada en el enunciado de la tarea. En este contexto, la estudiante no identificó una regla, regularidad que le permitiera explicar el comportamiento del patrón.

Figura 19. Cantidad de cuadrados negros de la figura 1 y representación de la respuesta del estudiante hipotético Mario (conclusión falsa).

En el desarrollo de la tarea 3, el profesor cuestionó a los estudiantes respecto la figura geométrica que se forma al unir el modelo de un cubo desarmado. Karla, ante la cuestión presentó un argumento de tipo visual y recurrió a una representación gráfica del modelo del cubo en una hoja de papel para recortar el modelo e identificar la figura que se formaba (W1). La estudiante no presentó un fundamento para la conclusión en términos de característica o propiedad matemática.

F. A.	Participante	Transcripción
D1	Profesor	La pregunta de la tarea era: ¿Qué figura se formaba al armar el modelo? … ¿Qué puedes decir Karla?
C1	Karla	Un triángulo…
	Profesor	¿Qué hiciste para saber que figura era?
W1	Karla	Primero **dibujé el modelo en una hoja**, lo recorté y lo armé…

En la tarea 5 emergieron dos argumentos de tipo visual, estos refieren a características de las gráficas de barras presentadas como parte de la tarea. Alejandra señaló la cantidad de ventas máxima en la gráfica uno (W1) y luego comparó estas características con las ventas representadas de la gráfica 2. En este tipo de argumento, los estudiantes concluyeron con base en las características presentadas como parte del enunciado.

F. A.	Participante	Transcripción
D1	Profesor	¿Qué gráfica de barras representa las ventas del mes de Abril? ...Levanten la mano quién dice que es la gráfica 1…
C1	Alejandra	Alejandra Levantó la mano
D2	Profesor	Levanten la mano quién dice que es la gráfica 2…
C2	Estudiantes	Alejandro, Gael, Jun de Dios, Saraí, Manuel, Daniel, Jesús, José Guadalupe, Jorge
¿?	Profesor	Alejandra… ¿Por qué dices que es el número uno?
W1	Alejandra	**Porque la gráfica uno tiene treinta en el eje horizontal** y en la gráfica dos no tiene, llega hasta veinte y cinco…
¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de lo que dijo Alejandra?
R1	Estudiantes	¡Está equivocada!
W1	Alejandra	**Porque este está más alto que este** [señala las barras de las camisas de cien pesos en ambas gráficas e indica que se pasa la de la gráfica dos]

En suma, los argumentos de tipo visual no involucran aspectos conceptuales del objeto, su contenido incluye aspectos o características gráfica-icónico que recurre el estudiante para fundamentar su conclusión. Este tipo de argumento emergió en algunas tareas del experimento, evidenció cómo los estudiantes fundamentaron sus conclusiones con base en representaciones gráficas de los objetos matemáticos. Y en contraste con propuestas curriculares y planes de estudios de matemáticas (e.g., CCSSI, 2010; SEP, 2017; MEN, 2006), este tipo de argumento no se considera inválido, en razón de que los estudiantes en los primeros grados de la educación pueden fundamentar sus argumentos con dibujos, representaciones y demás.

4.1.7. Argumento conceptual

El contenido de los argumentos conceptuales implicó las características invariantes que definen los conceptos matemáticos empleados por los estudiantes para fundamentar sus conclusiones. En el experimento de enseñanza algunas tareas no centraron la atención sobre un concepto matemático en específico. Es el caso de la tarea 2 y 4, estas demandaron a los estudiantes analizar las características invariantes y propiedades que satisfacen los conceptos: cuadrado, cubo, división.

En la tarea 2, Daniela presentó su conclusión (C1) con base en las características presentadas por el estudiante hipotético 1, en lo que reconoció que un cuadrado es un cuadrilátero, es decir, implicó al concepto de cuadrilátero y cuadrado desde las características invariantes (W1) que definen al concepto.

F. A.	Participante	Transcripción

D1	Profesor	De acuerdo a la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número uno?
C1	Daniela	El estudiante número uno
W1	Daniela	Porque **se sabe que el cuadrado es un cuadrilátero**… **no solamente el cuadrado es el único cuadrilátero**… puede tener otras medidas…

De los argumentos presentados en el experimento, se infiere que el argumento conceptual emerge en tareas que involucran de forma explícita definiciones del concepto matemático y demandan procesos de análisis-abstracción (*e.g.*, tarea 2). En cambio, las tareas 1, 3, 4 y 5 implicaron a las características invariantes de los objetos matemáticos sin hacer alusión a la definición formal del concepto matemático. Identificar de este tipo de argumento en el desarrollo del experimento tiene que ver también con el nivel educativo, en educación primaria los estudiantes reconocen las características invariantes de los objetos matemáticos sin hacer énfasis en definiciones formales como se abordan en secundaria y en bachillerato.

4.1.8. Un resumen de los tipos de argumentos de los estudiantes

En línea con el primer objetivo general de la investigación, los resultados expuestos en la tabla 11 proporcionan una caracterización de los argumentos construidos por los estudiantes en el contexto de la argumentación colectiva. Los siete tipos de argumentos propuestos como categoría de análisis emergieron en el desarrollo de las tareas, en particular, el argumento de tipo práctico emergió en todas las tareas del experimento y los argumentos de clasificación se identificaron en todas excepto en la tarea 1.

Los tipos de argumentos construidos por los estudiantes en el experimento de enseñanza evidenciaron el trabajo individual de cada estudiante y cómo validaron sus argumentos en la interacción con pares. Los estudiantes construyeron argumentos prácticos en todas las tareas del experimento, producto del diseño de cada una de las tareas que demandaba el análisis de las características del objeto matemático en estudio, así también, fomentar en los estudiantes optar por posibles formas de justificar una conclusión con base en las características identificadas. Por lo tanto, la caracterización de los tipos de argumentos en el marco de la argumentación matemática es una oportunidad para conocer el contenido y el razonamiento matemático de los estudiantes de primaria cuando resuelven tareas en lo colectivo (Singletary y Conner, 2015).

Tabla 11

Resumen de los tipos de argumentos según el contenido de la garantía.

Tipo de argumento	Contenido de la garantía (W)	Tareas	Frecuencia
Clasificación	*Ci-cuadrado, cuadrilátero, cubo*		
	Los cuadrados tienen cuatro lados	T2	2
	Un cuadrado tiene lados y ángulos iguales	T2	2
	El cuadrilátero también puede tener lados iguales…	T2	4
	Las caras del cubo tienen dos diagonales iguales…	T3	2
	Las caras de un cubo son cuadrados	T3	1
	Ci-división		
	Una división puede tener residuo cero	T4	1
	Ci-gráfica de barras		
	La gráfica uno tiene 30 en el eje horizontal	T5	2
Propiedad matemática	*P-generalización*		
	Generalización del patrón de figuras (4n+1)	T1	4
	P-división		
	(Cociente)x(divisor) + residuo= Dividendo	T4	6
Práctico	A la etapa anterior del patrón más la cantidad que aumenta	T1	2
	La base de una pirámide cuadrada tiene cuatro aristas	T3	1
	El cuadrado y el rectángulo tiene cuatro lados	T2	5
	Comparación de características del cuadrado	T2	3
	Yo dividí varias veces… y encontré que el residuo es tres	T4	1
	La gráfica 2 sólo se pasa por 5, pero la otra se pasa por más…	T5	2
Basado en explicaciones	Explican y comparan dos casos, “sí” y “no”.	T1	3
	Respuestas de estudiante 1 y 2.	T2	2
	Respuestas de estudiante 2 y 3.	T2	2
	6790 es lo que vendió …pero gastó 3790 … ganó lo que sobró…	T5	2
De consecuencia	Si se multiplica por 5 da 100 más uno 101… y es 81	T1	1
	Si no tuviera lados iguales… entonces no tuviera ángulos iguales	T2	2
	Porque si no lo sumamos no nos va dar residuo tres…	T4	1
	Pero la camisa de 120 pesos se pasa por 5	T5	1
Visual	Si multiplicas la primera figura por dos… te da diez	T1	2
	Si multiplicas 20 por 5 da 100… y en la figura 1 hay 5…	T1	2
	Dibujé el modelo en una hoja, lo recorté y lo armé…	T3	1
	Si hacemos una línea imaginaria … sería una pirámide…	T3	1
	Porque la gráfica uno tiene 30 en el eje horizontal	T5	1
	De acuerdo con que la de 80 se vendió más…	T5	2
	Porque camisas de 100 son más alto que este…	T5	1
Conceptual	Porque se sabe que el cuadrado es un cuadrilátero	T2	1
	El rectángulo también puede ser un cuadrilátero	T2	1

En la tabla 12 y en la figura 20 se presenta los argumentos construidos por los estudiantes en cada tarea matemática del experimento de enseñanza, en las tareas 2, 3, 4 y 5 los estudiantes construyeron argumentos de clasificación, esto por incluir en el diseño de las tareas contenidos matemáticos u objetos geométricos que requieran características del cuadrado, cubo y triángulo para fundamentar las conclusiones. En cambio, en las tareas 1 y 4 favorecieron a que los estudiantes implementaran propiedades matemáticas, generalizaran patrones figurales y reconocieran la relación de las partes de la división como una propiedad matemática. Las propiedades matemáticas inmersas en las respuestas de los estudiantes refieren al argumento basado en propiedades, este tipo de argumento no se identificó en todas las tareas, dado que los estudiantes recurrieron a las características invariantes de los objetos en estudio, compararon las características sin referir a las propiedades implícitas y centraron la atención en describir o clasificarlos.

Tabla 12

Argumentos construidos por los estudiantes en las tareas del experimento de enseñanza.

Tareas	Tipo de argumento en el experimento de enseñanza						
	De clasificación	Basado en propiedades	La mejor explicación	Práctico	Consecuencia	Visual	Conceptual
Tarea 1		4	3	2	1	4	
Tarea 2	8		4	8	2		2
Tarea 3	3			1		2	
Tarea 4	1	6		1	1		
Tarea 5	2		2	2	1	4	

El argumento basado en explicaciones emergió en las tareas 1, 2 y 5 del experimento, el diseño de las tareas promovió la construcción de este tipo de argumento, en razón de que solicitó implícitamente a los estudiantes adoptar una postura ante conclusiones tres falsas presentes en el enunciado de la tarea. Por su parte, el argumento visual emergió en las tareas que incluían una representación gráfica, es decir, en la tarea 1, 3 y 5. Esto en función de que los estudiantes incluyeran partes de estas para fundamentar sus conclusiones.

El argumento conceptual y su contenido implicó al concepto de cuadrado y las características invariantes que definen al concepto. Reconocemos que el argumento conceptual no emergió con frecuencia en el experimento de enseñanza y una de las razones refiere al enfoque implícito de enseñanza de la matemática a nivel primaria, este no demanda el uso de definiciones matemáticas, sino analizar las características esenciales que lo definen los conceptos matemáticos.

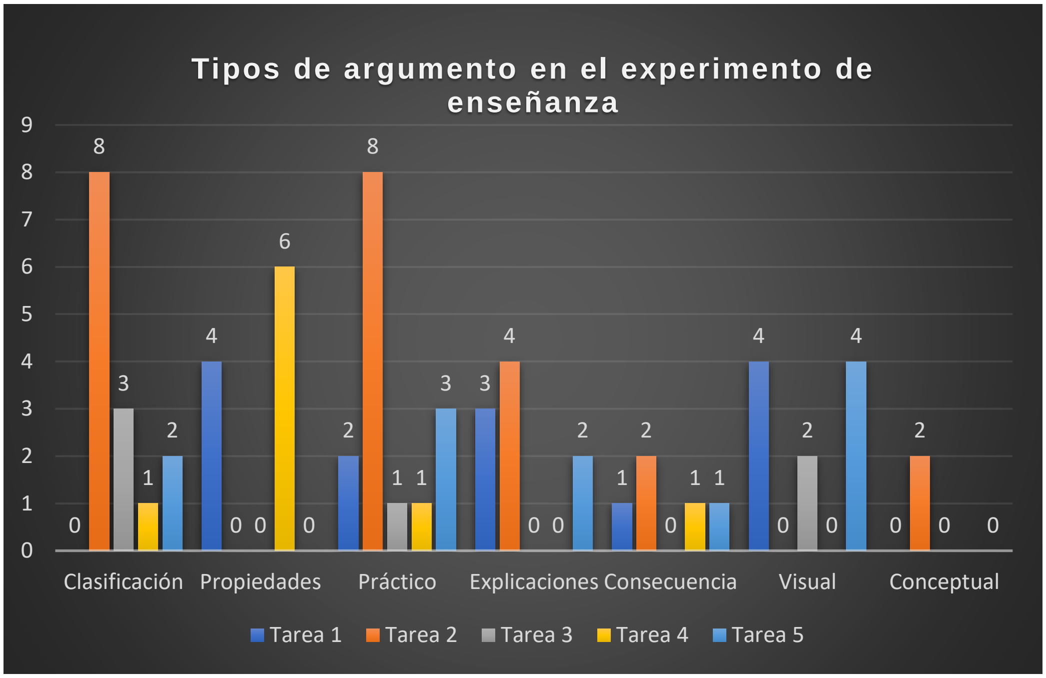


Figura 20. Frecuencia de los argumentos construidos por los estudiantes en las tareas del experimento.

4.2. Estructuras de la argumentación colectiva

La argumentación colectiva suscitada en el salón de clases tuvo lugar en el intercambio de respuestas, conclusiones, garantías y refutaciones con el propósito de generar un consenso en la clase de matemáticas. En este estudio reconstruir la argumentación colectiva permitió analizar las funciones de cada declaración matemática de los estudiantes y la estructura de la argumentación en cada tarea matemática propuesta en el experimento. Consecuentemente, se presentan episodios representativos del desarrollo de las tareas y las estructuras argumentativas de la argumentación colectiva.

4.2.1. Estructura argumentativa de la tarea 1

El contenido matemático de la tarea 1 implicó analizar una sucesión de patrones figurales en el contexto del álgebra temprana. En particular, la tarea solicitó a los estudiantes generalizar el comportamiento de una sucesión de patrones figurales de orden uno (de manera implícita) a partir de analizar las respuestas que da un sujeto (estudiante hipotético) a la misma tarea. Con base en la generalización, analizaron y confrontaron las respuestas hipotéticas del enunciado de la tarea y argumentaron su postura desde lo realizado en el momento individual.

La primera pregunta de la tarea 1 cuestionó a los estudiantes su postura frente la respuesta del estudiante hipotético Mario que incluía el enunciado de la tarea. En este contexto, emergieron 4 argumentos locales: <1>, <2>, <3> y <4> (ver Tabla 13, 14, 15, 16) que tuvieron lugar en la argumentación colectiva y permitieron que los estudiantes compartieran sus respuestas y justificaciones que convencieran a los demás sobre su validez. El profesor-investigador proporcionó parte de los datos (D1) de la argumentación con la lectura del enunciado y la pregunta de la tarea matemática (ver Tabla 13).

La estudiante Yarami presentó su conclusión (C1) al estar de acuerdo con la respuesta hipotética de la tarea, e implicó la cantidad de cuadros negros de la primera figura del patrón multiplicada por dos como la garantía (W1). Ante el argumento de Yarami, el profesor preguntó (¿?) para apoyar la construcción de argumentos por parte de los demás estudiantes, con esto favoreció que identificara la relación entre la cantidad de cuadros negros del patrón (C2, C3) con respecto a cada etapa (W2) y dar lugar a refutaciones de conclusiones, garantías o datos.

Tabla 13

Transcripción del episodio <1> de la tarea 1, pregunta 1.

<#>	F. A	Participante	Transcripción
1.	**D1/C**	Profesor	Yarami… La pregunta de la tarea es… ¿Estás de acuerdo con la respuesta a) de Mario y su justificación?
	C1	Yarami	¡Si estoy de acuerdo!…
	W1	Yarami	Porque si multiplicas la primera figura por dos… te da diez
	¿?	Profesor	¿Qué vas a multiplicar de esa figura…?
	C2	Yarami	¡Cinco por dos!
	¿?	Profesor	¿Qué representa cinco?
	W2	Yarami	Los cuadros...
	¿?	Profesor	¿Por qué los multiplicas por dos?
	W2	Yarami	Para que den diez …
	C3	Profesor	La tercera figura suma catorce [conclusión de Yarami] ¿Qué pueden decir los demás…?
	R1	Dulce, Gael y otros…	¡Está equivocada!
	¿?	Profesor	¿Por qué dicen que está equivocada?... Dulce cuéntanos…
	C4	Dulce	Son trece…
	¿?	Profesor	Y en la figura dos… ¿Cuántos cuadros son?

	C5	Yarami	¡Son diez!
	R2	Estudiantes	¡Son nueve!
	¿?	Profesor	Yarami… ¿Por qué dices que son diez?
	W3	Yarami	Ah… porque se me olvidó contar el del medio… [se refiere al cuadrado ubicado en el medio de la figura]
	¿?	Profesor	¿Por qué te dio diez la figura dos?
	W4	Yarami	Porque multipliqué por dos…

En este episodio algunos estudiantes refutaron (R1) la conclusión (C3) de la estudiante Yarami con la expresión “está equivocada” (ver Figura 21). Dulce y Gael refutaron la conclusión de Yarami, e indicaron que la cantidad de cuadros que tiene el patrón de figuras en la etapa tres (C4) no es 14, esto provocó que Yarami fundamentara su conclusión con las garantías (W3 y W4) y reconociera un error en su argumento “Ah… porque se me olvidó contar el cuadro del medio” (W3). La refutación de conclusiones además de invalidar el contenido de la garantía como se reportó por Reid, Knipping y Crosby (2011), en este episodio permitió detectar el error de la estudiante en el contenido de la garantía.

La argumentación colectiva suscitada en este episodio evidenció que la refutación de conclusiones propició la oportunidad de aprendizaje basada en la gestión del error, el profesor no evaluó las conclusiones de los estudiantes, sino que generó oportunidades para que los compañeros participaran, refutaran y validaran los argumentos presentados (Solar y Deulofeu, 2016). En suma, la argumentación colectiva suscitada se caracterizó por construir un consenso entre los estudiantes y convencer a un grupo sobre la validez del contenido matemático de los argumentos.

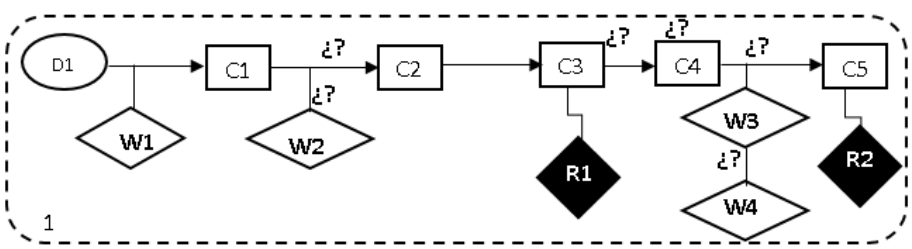


Figura 21. Estructura de la argumentación compleja del episodio <1> en la tarea 1, pregunta 1.

Las conclusiones en la estructura de la argumentación <1> cumplieron la función de datos para establecer nuevas conclusiones. Esta secuencia de conclusiones y garantías conforman una cadena de razonamiento que caracteriza la argumentación colectiva en el salón de clases de matemáticas, así como lo documentó Krummheuer (2015). Además, en la estructura argumentativa del episodio <1> emergieron dos refutaciones de conclusiones (R1, R2) con la función de negar la conclusión presentada por el argumentador y evidenciar un error en la garantía de la estudiante.

En el episodio <2> de la tarea el profesor expuso la justificación de Yarami (W4) con la intención de fomentar la participación de los demás compañeros (ver tabla 13). Esto propició la refutación (R3) de varios estudiantes (*e.g.*, Gael, Juan de Dios, Dulce) que negaron el contenido de la garantía (W4). La refutación presentada, además, se constituye en un argumento, ya que los estudiantes identificaron la regla de construcción del patrón de figuras (WR3) como la garantía del argumento (ver tabla 14).

Tabla 14

Transcripción del episodio <2> de la tarea 1, pregunta 1.

<#>	F. A	Participante	Transcripción
2.	**¿?**	Profesor	¿Qué dicen los compañeros?
	R3	Estudiantes	¡No!... ¡Está equivocada!
	¿?	Profesor	Explícanos Juan de Dios…
	WR3	Juan de Dios	Se tiene que sumar un cuadro a cada lado de la figura…o dos por cuatro… y me da ocho…y el del medio… nueve …

La refutación (R3), además de negar, cumple la función de conclusión soportada con una garantía (WR3). La unión de estos elementos conforma un *argumento de refutación o argumento perpendicular* <2> a la cadena de razonamiento <1> (ver figura 22). Este tipo de argumento emergente tiene como función evidenciar el proceso de validación de conclusiones y/o garantías en el contexto de la argumentación colectiva.

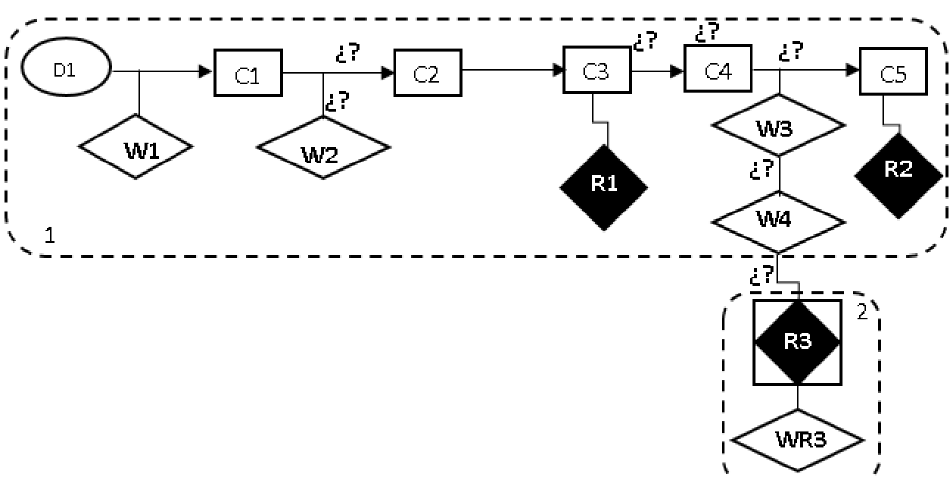


Figura 22. Estructura de la argumentación compleja del episodio <2> en la tarea 1, pregunta 1.

El profesor en la argumentación suscitada en el episodio <3> (ver Tabla 15), proporcionó información sobre algunos casos particulares (D2) con el objetivo de promover la participación de los estudiantes y construir conclusiones (C6, C7) fundamentadas en garantías vinculadas con características o propiedades matemáticas (W5). El rol del profesor en la argumentación colectiva es fundamental, Conner et al. (2014a) y Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2020) resaltan que apoya el proceso de construcción de argumentos, en razón de que orienta a los estudiantes con preguntas y proporciona elementos de la argumentación (*i.e.*, datos o garantías) con el fin de propiciar la construcción de una conclusión o generar un consenso matemático.

Tabla 15

Transcripción del episodio <3> de la tarea 1, pregunta 1.

<#>	F. A	Participante	Transcripción
3.	**D2**	Profesor	Y… ¿Si fuera la figura cinco?
	C6	Juan de Dios	Le sumaría a las esquinas …
	¿?	Profesor	¿A qué figura le sumarías?
	W5	Juan de Dios	A la cinco …
	R4	Valentín	¡Pero sería fácil agarrar la figura cuatro!… y le sumas los cuatro cuadros a los lados…
	¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Valentín?...
	C7	Estudiantes	¡Si!

La refutación (R4) cumplió la función de negar un caso particular que no soporta la garantía (W5) y evidenció la cantidad de cuadros negros de la etapa del patrón requerida (ver Figura 23). Con base en las conclusiones presentadas, el profesor intervino (¿?) para orientar a los estudiantes en la respuesta de la primera pregunta de la tarea y construir la conclusión final (C8).

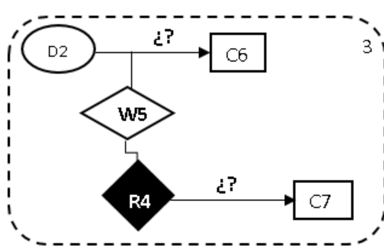


Figura 23. Estructura de la argumentación compleja del episodio <3> en la tarea 1, pregunta 1.

Con la intención de construir un consenso sobre la cantidad de cuadros negros de la etapa 1 del patrón de figuras, el profesor cuestionó a los estudiantes si estaban de acuerdo con las respuestas del estudiante hipotético. Lo que permitió identificar que los estudiantes no estaban de acuerdo con la respuesta (C8) y la justificación presentada por el estudiante hipotético en el enunciado de la tarea 1. En razón de que analizaron las primeras figuras del patrón e identificaron que la cantidad de cuadros de la figura dos son nueve cuadros (W6) y no diez como lo indica el enunciado de la tarea.

Tabla 16

Transcripción del episodio <4> de la tarea 1, pregunta 1.

<#>	F. A	Participante	Transcripción
4.	**¿?**	Profesor	Vamos a concluir sobre la primera pregunta… ¿Están de acuerdo con la respuesta de Mario?
	C8	Estudiantes	¡No estamos de acuerdo!
	W6	Estudiantes	Porque son nueve cuadros…

En suma, la estructura argumentativa de la tarea 1 (Figura 24) evidenció los argumentos y las refutaciones construidas por los estudiantes como respuesta a la pregunta 1 de la tarea, emergieron argumentos paralelos <1> y <3> que fundamentan la conclusión final de la clase <4>. Las características de la estructura argumentativa de la tarea 1 se asemejan con la estructura argumentativa de *fuente*, conformada por dos argumentos paralelos y refutaciones que fundamentan una misma conclusión (Knipping y Reid, 2015). Este tipo de estructura evidencia el flujo de la argumentación colectiva, la participación del profesor y la construcción de conclusiones-refutaciones a lo largo del desarrollo de la tarea.

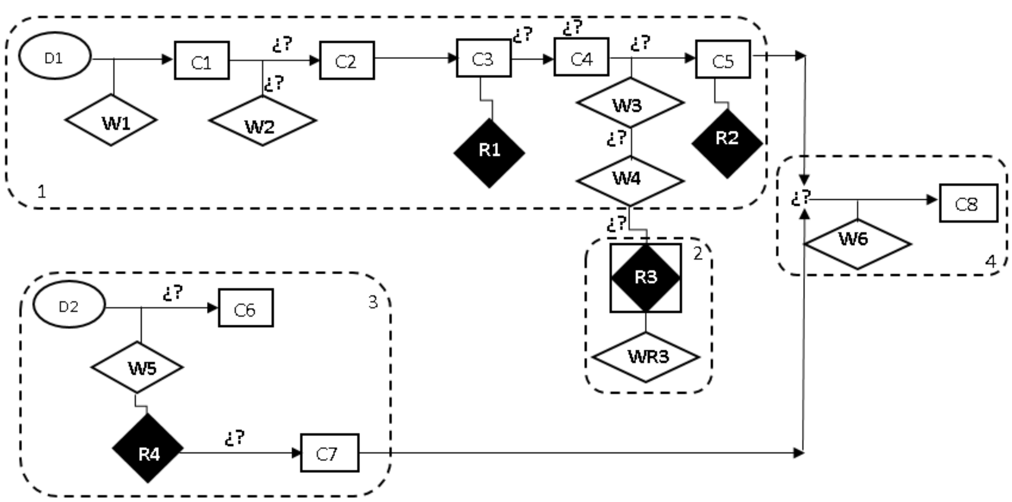


Figura 24. Estructura de la argumentación compleja en la tarea 1, pregunta 1.

La función del argumento perpendicular o de refutación <2> en el primer episodio <1> es fomentar la emergencia de nuevos datos que soportaran la conclusión final de la argumentación. Las estructuras <3> y <4>, contienen evidencias que corresponden a núcleos de argumentos, que según Krummheuer (2015) y los investigadores Knipping y Reid (2015) denominan pasos de la argumentación (Argumentation stream, en inglés). En particular, el episodio <4> contiene la conclusión final de la primera pregunta de la tarea 1 desencadenada por una pregunta del profesor.

En cuanto a la segunda pregunta de la tarea 1 emergieron cuatro episodios argumentativos (ver Tabla 17), se preguntó a los estudiantes su punto de vista con respecto a la respuesta hipotética que presenta la tarea ante la cantidad de cuadros negros de la figura 20 del patrón. La argumentación suscitada en la segunda pregunta de la tarea 1 se constituye de cuatro episodios argumentativos (ver Tabla 17).

Tabla 17

Transcripción del episodio <1, 2> de la tarea 1, pregunta 2.

<>	F. A	Participante	Transcripción
1.	**D1**	Profesor	Vamos para el segundo punto, pregunto ¿Quién está de acuerdo con la respuesta de Mario y su justificación?
	C1	Ángel	¡Yo!
		Profesor	Pasa Ángel…
	C1	Ángel	¡Estoy de acuerdo!
	W1	Ángel	Porque si multiplicas veinte por cinco da cien… y en la figura 1 hay cinco… y él (se refiere a Mario) multiplicó veinte por cinco.
	¿?	Profesor	¿Qué representa veinte y el cinco?
	D1	Ángel	Veinte es la figura veinte … y cinco son los cuadros …
	¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de la respuesta de Ángel?
2.	**R1**	Estudiantes	¡Que está mal!
	¿?	Profesor	Gael…. ¿Por qué está mal la respuesta de Ángel?
	WR1	Gael	Porque no se multiplica por cinco … son veinte cuadros en cada esquina…entonces se multiplica veinte cuadros por cuatro esquinas que da ochenta… y se le suma el del medio… y da ochenta y uno.

En el episodio <1> de la segunda pregunta de la tarea, el profesor proporcionó información inicial (i.e., datos) en términos de pregunta (Figura 25) con el objetivo de fomentar la participación de los estudiantes. En este sentido, Ángel presentó su conclusión (C1) y expresó estar de acuerdo con la respuesta y la justificación del estudiante hipotético (W1). Como parte del episodio <2>, la intervención del profesor con su pregunta provocó la refutación (R1) por parte del estudiante Gael, quien invalidó la garantía presentada por Ángel y dio lugar para que los demás compañeros presentaran sus conclusiones (C2, C3, C4) en el contexto de la argumentación colectiva. La refutación de la garantía además de invalidar el contenido de la conclusión como se reportó en Reid, Knipping y Crosby (2011), permitió que los demás compañeros presentaran sus conclusiones, esto implicó que la refutación fomentara la participación de los demás en el intento de validar el contenido del argumento.

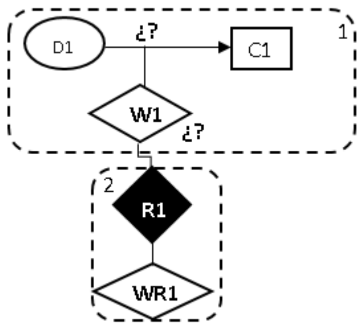


Figura 25. Estructura de la argumentación compleja episodio <1 y 2> en la tarea 1, pregunta 2.

El episodio <3> se caracteriza por contener las conclusiones (C2, C3) de varios estudiantes producto de la refutación de Gael en <2> (Tabla 18). Las conclusiones refieren a la cantidad de cuadros negros de la figura 20 del patrón, que determinaron con base en la regla de construcción identificada en la primera pregunta de la tarea (W3 y W4). Para cerrar con la segunda pregunta de la tarea, en el cuarto episodio <4> el profesor intervino cuestionando a los estudiantes sobre su postura ante la pregunta de la tarea y así, concluyeran (C4) que no estaban de acuerdo con la cantidad de cuadros presentados por el estudiante hipotético Mario.

Tabla 18

Transcripción del episodio <3 y 4> de la tarea 1, pregunta 2.

<>	F. A	Participante	Transcripción
3.	**¿?**	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Gael?
	C2	Estudiantes	¡Si!
	¿?	Profesor	Vamos a escuchar la respuesta de Juan de Dios… ¿Qué concluyes?
	C3	Juan de Dios	¡Si y no!...
	W3	Juan de Dios	Si porque son veinte por cinco y suman cien… y son cuatro lados… entonces se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… más el del medio ochenta y uno.

	W4	Juan de Dios	No porque aquí dice que son veinte por cinco… pero no son cinco lados…son cuatro lados… y se multiplica veinte por cuatro… da ochenta… y se suma el del medio… da … ochenta y uno…. y si se multiplica por cinco da cien más uno ciento uno…
4.	**¿?**	Profesor	¿Qué podemos concluir?... ¿Están de acuerdo con la respuesta de Mario … ¿son cien?
	C4	Estudiantes	¡No!
	W5	Estudiantes	¡Veinte por cuatro!

La estructura de la argumentación y los cuatro episodios que la conforman (ver Figura 26), se identificó que el primer argumento local está compuesto por el núcleo y es paralelo al episodio 2, en función de apoyar la conclusión final <4>. El episodio <2> en cambio, se caracterizó por un argumento de refutación que negó el contenido de la garantía del estudiante Ángel y dio lugar para que los demás estudiantes presenten sus conclusiones sobre la cuestión de la tarea <3> y <4>. La refutación de la garantía desempeñó la función de promover una cadena de razonamiento conformado por los episodios 3 y 4, esta función de la refutación no se ha destacado en la literatura, razón por la cual se hace necesario incluirla como una de las implicaciones de refutar en lo colectivo.

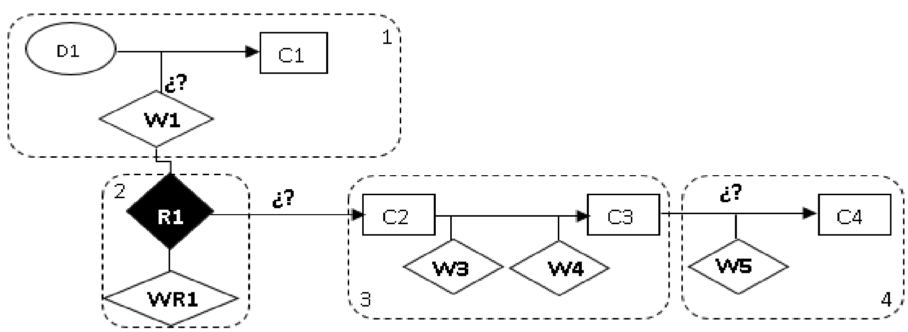


Figure 26. Estructura de la argumentación compleja en la tarea 1, pregunta 2.

De las estructuras argumentativas identificadas en la literatura, la argumentación de la segunda pregunta de la tarea 1 se constituye en una cadena de argumentos <3> y <4> generadas a partir de un argumento de refutación <2> sobre la garantía del primer argumento <1>. Si bien, la estructura argumentativa guarda similitud con la estructura de *fuente* e incluye una variedad de argumentos paralelos con conclusiones intermedias que fundamentan la argumentación colectiva. Cabe resaltar que, en la estructura de la argumentación de esta tarea sólo se identificó un argumento paralelo que apoyó y permitió desencadenar la conclusión final.

4.2.2. Estructura argumentativa de la tarea 2

La tarea 2 del experimento de enseñanza involucró a los estudiantes en el estudio del concepto de cuadrado desde sus características invariantes. El enunciado abordó una situación hipotética donde un profesor de primaria preguntó a sus estudiantes ¿qué es un cuadrado? además, se incluyeron tres posibles respuestas (*i.e*., conclusiones falsas establecidas por estudiantes hipotéticos 1, 2 y 3) que aluden a la definición del concepto de cuadrado. En este sentido, la tarea solicitó a los estudiantes adoptar una postura respecto a las conclusiones falsas presentadas y argumentaran sobre la conclusión seleccionada. Las tablas 19, 20, 21, 22 y 23 presentan la transcripción de la argumentación suscitada en la tarea 2.

Tabla 19

Transcripción del episodio <1> de la tarea 2.

#	F.A	Participante	Transcripción
2.	**D1**	Profesor	De acuerdo con la tarea… ¿Qué estudiante dio una respuesta correcta?... ¿Quién dice que el estudiante número 1, levante la mano?... Daniela…
	C1	Daniela	El estudiante número 1
	W1	Daniela	Porque se sabe que el cuadrado es un cuadrilátero… no solamente el cuadrado es el único cuadrilátero… puede tener otras medidas…
	¿?	Profesor	Dibujaste otros cuadriláteros… puedes pasar al frente y dibujarlos…
	B1	Daniela	[Pasa a la pizarra y dibuja un rectángulo y un cuadrado]…el rectángulo también puede ser un cuadrilátero porque tiene cuatro lados…
	¿?	Profesor	Y ¿Qué características tiene el rectángulo comparado con el cuadrado?
	B1	Daniela	Tienen cuatro lados a pesar de que son diferentes…
	¿?	Profesor	¿Qué más?
	B1	Daniela	Que los dos son cuadriláteros…
	¿?	Profesor	Entonces tu respuesta es…
	C2	Daniela	El estudiante 1

En lo colectivo, el profesor investigador con la lectura de la tarea proporcionó los datos de la argumentación (D1) e involucró a los estudiantes para que compartieran sus respuestas. De forma voluntaria, Daniela presentó su conclusión (C1) “el estudiante 1 tiene la definición correcta de cuadrado”, lo que implicó al profesor indagar sobre la base de qué fundamentaba su conclusión. La garantía (W1) que presentó la estudiante soportó su conclusión desde la definición de cuadrado en el contexto de la clasificación de cuadriláteros (ver Figura 27). En particular, la estudiante implementó la medida de los lados de un cuadrado en términos del respaldo (B1) y una representación gráfica del cuadrado sobre la pizarra.

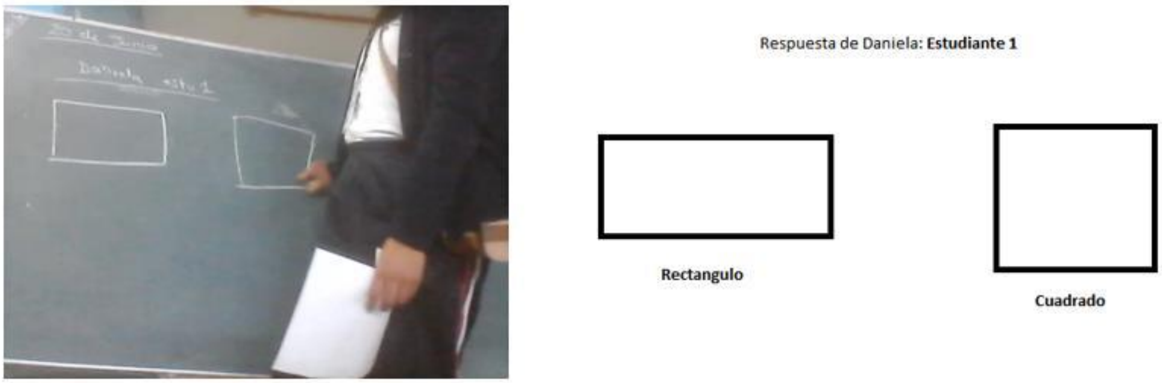


Figure 27. Representación gráfica del rectángulo y el cuadrado realizado por la estudiante Daniela.

La estructura de la argumentación de este primer episodio contiene los datos de la tarea que desencadenaron dos conclusiones (C1 y C2) y una garantía con su respectivo soporte en respuesta a lo solicitado en la tarea (Ver Figura 28).

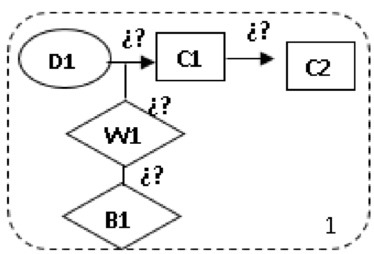


Figura 28. Estructura de la argumentación compleja episodio <1> en la tarea 2.

El profesor fomentó la participación de los demás estudiantes, implicando un segundo argumento <2> construido por Saraí, al concluir (C3) que el estudiante 2 tiene la respuesta correcta. De igual forma, la estudiante fundamentó su conclusión sobre una de las características invariantes del cuadrado, en este caso mencionó que las medidas de los lados del cuadrado son iguales (W2) sin considerar la medida de los ángulos internos. Por tanto, recurrió a la definición de cuadrado en términos del respaldo (B2) y representó gráficamente sobre la pizarra algunos ejemplos de cuadrados con lados iguales. La interacción entre el profesor y la estudiante implicó presentar y validar conclusiones con base en datos y garantías que, además, tienen la función de justificar la relación entre los datos y la conclusión en lo colectivo.

Tabla 20

Transcripción del episodio <2> de la tarea 2.

#	F.A	Participante	Transcripción
2	**D2**	Profesor	¿Quién dice que es el estudiante número 2? ¿Es la respuesta correcta?… [varios levantan la mano]… (Oger, Jorge, Manuel, Saraí…pasa Saraí… ¿Por qué el estudiante dos tiene la respuesta correcta?
	C3	Saraí	El estudiante dos
	W2	Saraí	El cuadrilátero también puede tener lados iguales… [pasa a la pizarra y dibuja un cuadrado]
	¿?	Profesor	Ella dibujó un cuadrado… ¿Cómo son los lados…?
	W2	Saraí	Iguales…a cinco centímetros
	¿?	Profesor	¿Dices que la respuesta correcta es…?
	B2	Saraí	El estudiante dos, un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales

La estructura de estos argumentos <1> y <2> (ver Figura 29), se constituyen de núcleos argumentativos, conformados por los elementos básicos de un argumento (D, C, W). Además, se identificó la participación del profesor con preguntas, esa tuvo la función de generar la confrontación de argumentos y propiciar la construcción de la conclusión final de la clase.

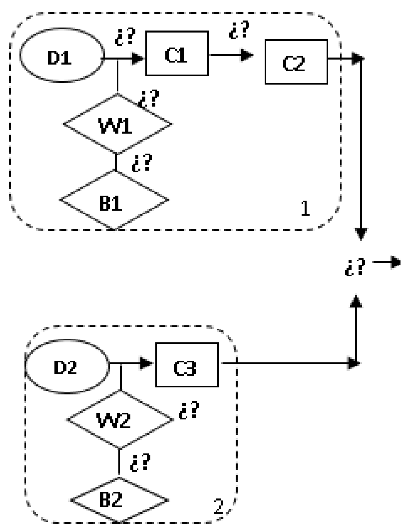


Figura 29. Estructura de la argumentación compleja episodio <2> en la tarea 2.

Basado en las conclusiones presentadas en los episodios <1> y <2>, el profesor generó la participación de los estudiantes que conformó una cadena de argumentos <3> (ver Tabla 21) y por conclusiones (C4, C5, C6, C7, C8, C9) que reunieron las respuestas de los estudiantes hipotéticos 2 y 3 presentados en el enunciado de la tarea. Los estudiantes justificaron sus conclusiones al unir las características invariantes del cuadrado, en particular, sobre la medida de los ángulos y los lados, es decir, las garantías (W3, W4, W5) que justificaron cada argumento.

Tabla 21

Transcripción del episodio <3> de la tarea 2.

#	F.A	Participante	Transcripción
3.	**¿?**	Profesor	¿Qué información te sirvió para que concluyeras…?
	C4	Saraí	La información del estudiante 2 y el 3… pero concluyo con el estudiante 2…
	¿?	Profesor	¿Qué información te sirvió Daniela para que concluyeras…?
	C5	Daniela	La información del estudiante 1 y el 2…comparé sus respuestas… pero tomé la del estudiante 1.
	¿?	Profesor	¿Qué pueden decir ustedes de la respuesta de Daniela o de la respuesta de Saraí? ¿Están de acuerdo con las respuestas…?
	C6	Gael, Valentín, Juan de Dios, Alejandro, Daniel…	Estamos de acuerdo con la respuesta de Saraí…
	¿?	Profesor	Daniela … ¿Por qué?
	W3	Daniel	Porque Daniela reúne el estudiante 2 y el estudiante 3...
	¿?	Profesor	¿Y qué pasa Gael, si reúne las respuestas de estos dos estudiantes…?
	C7	Gael	Se sacaría una conclusión…que los dos están por un lado bien…
	W4	Gael	Porque el estudiante dos dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados iguales… y el estudiante tres porque dice que un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos iguales… que también está bien. Entonces si no tuviera lados iguales… no tuviera ángulos iguales…en cambio también está que si son cuatro ángulos iguales deben ser cuatro lados iguales…
	¿?	Profesor	Entonces el cuadrado debe ser…
	C8	Alejandro	Cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales …
	¿?	Profesor	¿Qué puedes decir Valentín de lo que dice Gael?
	C9	Gael	¡Que está bien!…
	W5	Gael	Porque para que sea un cuadrado se necesita que tengan sus ángulos iguales… que están adentro por tener los cuatro lados iguales…entonces se junta la respuesta del estudiante 2 y 3.

Las conclusiones generadas en el episodio <3>, conducen a los demás estudiantes en la construcción del consenso matemático sobre la cuestión de la tarea, en razón de que presentan nuevas evidencias como las conclusiones que apoyan un cuarto episodio argumentativo (ver Figura 30).

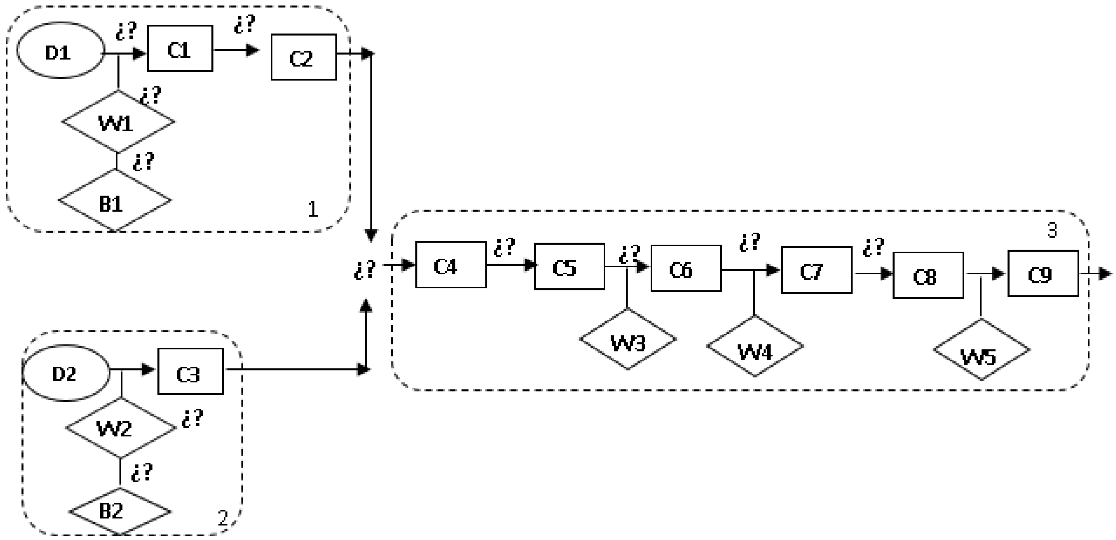


Figura 30. Estructura de la argumentación compleja episodio <3> en la tarea 2.

En función de que argumentaran los demás estudiantes, el profesor le preguntó a Juan de Dios, Gael y Alejandro su punto de vista con respecto a las características que tiene un cuadrado. Lo que implicó un cuarto argumento <4> (Tabla 22), constituido por conclusiones (C10 y C11) justificadas desde las definiciones del cuadrado junto con la medida de sus lados y ángulos (W6).

Tabla 22

Transcripción del episodio <4> de la tarea 2.

#	F. A	Participante	Transcripción
	D3	Profesor	Juan de Dios ¿Cuál fue tu respuesta…?
	C10	Juan de Dios	El estudiante dos…
	¿?	Profesor	Pregunto… ¿El estudiante dos tiene la respuesta correcta?
	C11	Estudiantes	¡Si!
4.	**¿?**	Profesor	¿Y el estudiante tres…?
	C11	Estudiantes	También…
	W6	Gael	Porque son cuatro ángulos iguales …
	¿?	Profesor	¿Qué puedes decir Alejandro?
	W6	Alejandro	Junté lo que dice el estudiante 2 y el 3…
	¿?	Profesor	¿Por qué los juntaste?
	W6	Alejandro	Porque tenía que decir que un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales…

La estructura de la argumentación del episodio <4> (ver Figura 31) se caracterizó por un núcleo argumentativo, que incluyó una conclusión intermedia de la argumentación de la tarea 2. En este contexto, las conclusiones (C10 y C11) se apoyaron en las conclusiones establecidas en el episodio <3> y permitieron la construcción de nuevas evidencias que soporten la argumentación colectiva.

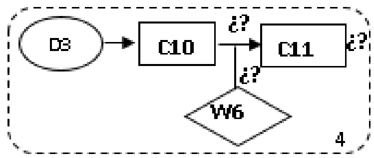


Figura 31. Estructura de la argumentación compleja episodio <4> en la tarea 2.

En el episodio <5>, el profesor presentó el caso particular de un estudiante hipotético (D4) con el propósito de confirmar la validez de las conclusiones presentadas anteriormente, descartando que ninguna respuesta presentada como parte del enunciado de la tarea incluye todas las características invariantes del cuadrado. El profesor gestionó mediante una pregunta el consenso matemático entre los estudiantes y propició a la vez el argumento final <6> que contiene la conclusión (C13) de la tarea soportada desde la garantía (W8).

Tabla 23

Transcripción del episodio <5, 6> de la tarea 2.

#	F.A	Participante	Transcripción
5.	**D4**	Profesor	¿Qué pasa si tomabas sólo la respuesta del estudiante 2?
	C12	Alejandro	No iba a serlo [se refiere a un cuadrado]…
	W7	Alejandro	Porque nadie tiene la respuesta correcta porque los estudiantes 2 y 3 me dicen que tiene cuatro lados iguales y en la tres me dicen que tiene cuatro ángulos iguales y ninguna respuesta tiene cuatro ángulos y lados iguales…
6.	**¿?**	Profesor	En conclusión … ¿Qué podemos decir…?
	C13	Gael	Sería el estudiante dos y el estudiante tres…
	W8	Gael	Porque si el estudiante dos hubiera dicho que el cuadrado tiene cuatro lados y ángulos iguales entonces ya tendríamos una correcta… pero en cambio nada más dijo que son cuatro lados iguales…Nadie estaría bien, deben estar juntos las respuestas del estudiante dos y tres…

A modo de cierre, la estructura de la argumentación compleja de la tarea 2 se conformó de cinco argumentos paralelos (<1>, <2>, <3>, <4> y <5>) que evidenciaron la construcción de un consenso matemático (C2) en torno a la cuestión de la tarea 2 (ver Figura 32). Cabe resalar que no emergieron refutaciones en el desarrollo de esta tarea, ya que los estudiantes presentaron sus conclusiones sin contraponerlas. Se reconoce, además, que la estructura argumentativa de la tarea 2 guarda similitud con las características de la estructura de *fuente*, una conclusión <6> se fundamenta con base en evidencias y argumentos paralelos. Este tipo de estructura argumentativa evidenció el flujo de la argumentación colectiva, los argumentos locales que emergieron en la interacción y fundamentaron la conclusión final establecida en la clase con base en las intervenciones de los estudiantes y del profesor.

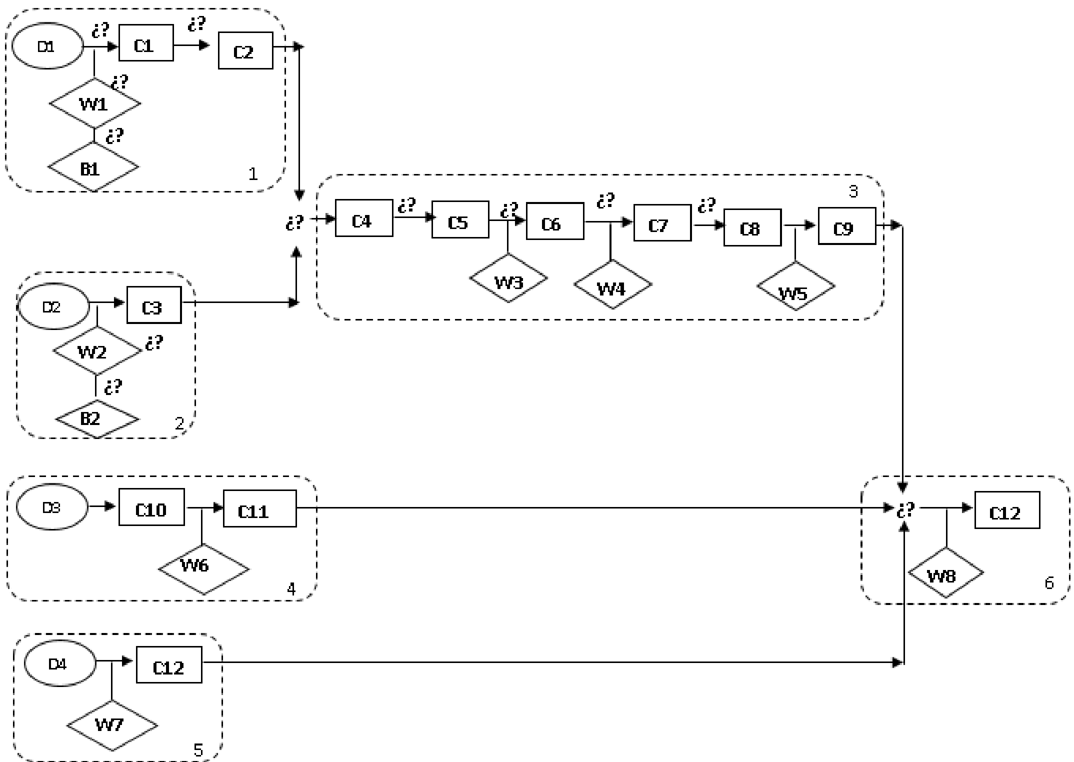


Figure 32. Argumentación compleja de la tarea 2.

Se identificaron cuatro argumentos que proporcionan datos o evidencia con el propósito de fundamentar la conclusión final. Refutaciones que validaron las conclusiones presentadas en lo colectivo y preguntas del profesor que orientaron la participación de los estudiantes. Estos elementos descritos conforman la estructura argumentativa que describe la interacción de los estudiantes junto con el profesor en el intento de construir la conclusión.

4.2.3. Estructura argumentativa de la tarea 3

La tarea tres del experimento de enseñanza demandó a los estudiantes analizar el modelo para construir un cuerpo regular geométrico, en particular, la representación de un modelo de un cubo abierto. En el cual los estudiantes tenían que identificar la figura geométrica formada con tres segmentos punteados sobre el modelo y argumentar su respuesta.

La estructura de la argumentación colectiva de la tarea está compuesta por cinco episodios argumentativos (ver Tabla 24, 25, 26, 27, 28). En un primer momento, el profesor preguntó a los estudiantes sobre la figura que se formaba al armar el modelo del cubo (D1). Lo que propició la participación por parte de los estudiantes y presentaran conclusiones referentes a la cuestión de la tarea (Tabla 24).

Tabla 24

Transcripción del episodio <1> de la tarea 3.

<#>	F.A	Participante	Transcripción
1	**D1**	Profesor	La pregunta de la tarea es: ¿Qué figura se formaba al armar el modelo? … ¿Qué pueden decir?
	C1	Karla	Un triángulo…
	¿?	Profesor	¿Qué hiciste para saber qué figura era?
	W1	Karla	Primero dibujé el modelo en una hoja, lo recorté y lo armé…

En el episodio <1> Karla argumentó que la figura que se forma es un triángulo (C1) y fundamentó su conclusión (W1) (Figura 33) con base en una representación del modelo recortado que realizó con la intención de soportar su conclusión.

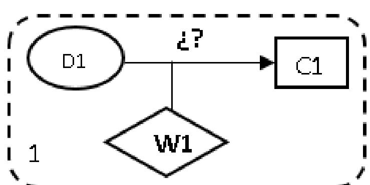


Figura 33. Estructura de la argumentación compleja episodio <1> en la tarea 3.

Para fomentar la argumentación colectiva y el intercambio de conclusiones, el profesor preguntó a toda la clase si estaban de acuerdo con la conclusión de Karla. Lo que provocó la participación de la estudiante Abril con la conclusión (C2): “es un triángulo equilátero”, quien soportó su conclusión desde una de las características del cubo, este cuerpo geométrico tiene caras cuadradas que contiene diagonales iguales (W2 y W3) en el argumento <2> (ver Figura 34).

Tabla 25

Transcripción del episodio <2> de la tarea 3.

<#>	F.A	Participante	Transcripción
2	**¿?**	Profesor	¿Qué pueden decir de la respuesta de Karla…?
	C2	Abril	Es un triángulo equilátero…
	¿?	Profesor	¿Cómo te diste cuenta que es un triángulo equilátero?
	W2	Abril	Porque las caras del cubo se parten en diagonales iguales…
	¿?	Profesor	¿Qué pasa si las diagonales son iguales…?
	W3	Abril	Se forma un triángulo equilátero

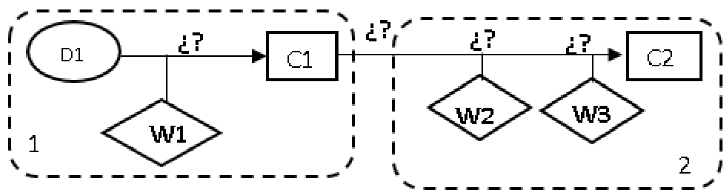


Figura 34. Estructura de la argumentación compleja episodio <2> en la tarea 3.

Con el propósito de validar la conclusión establecida en el episodio <2>, el profesor cuestionó a todos los estudiantes la posibilidad de formar otra figura geométrica diferente. Generando una nueva conclusión (C3) establecida por varios estudiantes que reconocieron que el cuadrado no puede formarse, en razón de que tiene cuatro lados y el modelo contiene sólo tres segmentos (W4).

Tabla 26

Transcripción del episodio <3> de la tarea 3.

<#>	F.A	Participante	Transcripción
3	**D2**	Profesor	¿Y por qué no se puede formar un cuadrado…?
	C3	Estudiantes	Porque faltaría un lado…o una cara…
	¿?	Profesor	Y un triángulo tiene…
	W4	Estudiantes	Tres lados… tres ángulos…

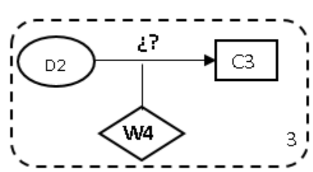


Figura 35. Estructura de la argumentación compleja episodio <3> en la tarea 3.

El profesor cuestionó a los estudiantes sobre otras figuras o cuerpos geométricos y proporcionó a modo de datos (D3), un caso particular a la respuesta de una estudiante (C4), con esto se generó un cuarto argumento <4> (Tabla 27) que conllevó a los estudiantes a reflexionar si se formaba una pirámide (C4) y un quinto argumento <5> que refutó la conclusión presentada por Yarami con base en la cantidad de lados que tiene una pirámide en contraste con cantidad de lados presentados sobre el modelo del cubo (W5R1) (Ver Figura 36).

Tabla 27

Transcripción del episodio <4, 5> de la tarea 3.

<#>	F.A	Participante	Transcripción
4	**D3**	Profesor	Hay otra respuesta diferente…
	C4	Yarami	Se forma una pirámide…
	¿?	Profesor	¿Puede ser una pirámide?
5	**R1/c**	Estudiantes	¡No!
	W5R1	Yarami	Porque la base tiene que ser de 4 lados…y no de tres
	¿?	Profesor	¿Por qué?
	W5R1	Yarami	Porque tiene tres lados y si hacemos una línea imaginaria en la parte de atrás…no sería una pirámide…

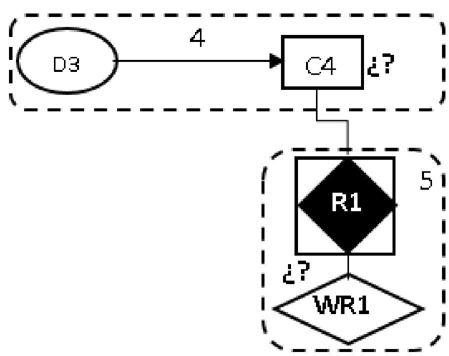


Figura 36. Estructura de la argumentación compleja episodio <4, 5> en la tarea 3.

La estructura de la argumentación de la tarea 3 (ver Figura 37), se conformó por cinco episodios argumentativos y una refutación sobre la conclusión presentada en el cuarto episodio. La estructura argumentativa emergente en la tarea no soporta una conclusión final, en este sentido, las intervenciones del profesor orientaron a los estudiantes en la construcción de argumentos y permitió el análisis de las posibles respuestas a la tarea matemática sin arribar a un consenso matemático. En contraste con las estructuras reportadas en la literatura, la reconstrucción de la argumentación presenta similitudes con la estructura de *unificación*. Esta estructura se constituye de diversos argumentos locales que no son paralelos ni perpendiculares en función de apoyar una conclusión (Knipping y Reid, 2015).

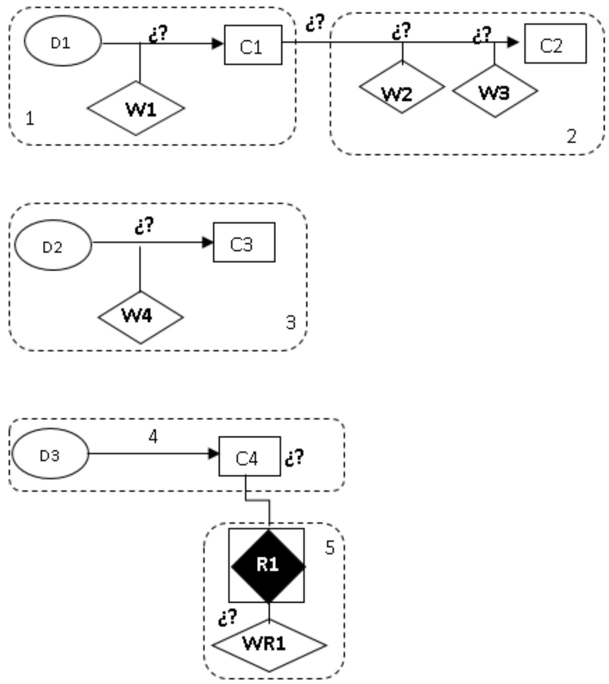


Figure 37. Estructura de la argumentación colectiva de la tarea 3.

El profesor en el intento de construir una conclusión ante la cuestión de la tarea realizó varias preguntas, pero los estudiantes no construyeron un consenso matemático, sino que presentaron sus respuestas particulares y las respectivas justificaciones. Además, este tipo de estructura se identifica en ambientes de geometría dinámica, como lo indican Knipping y Reid (2015) y en el contexto del experimento de enseñanza emergió en una tarea que se desarrolló en un ambiente de lápiz y papel. Esta una oportunidad para indicar que las estructuras argumentativas de unificación emergen en contextos diferentes al indicado en la literatura.

4.2.4. Estructura argumentativa de la tarea 4

La tarea 4 del experimento de enseñanza refiere al eje sentido numérico y pensamiento algebraico, en particular, al concepto de división y la relación entre el dividendo, divisor, cociente y residuo. La tarea involucró a los estudiantes en una situación hipotética del salón de clases en la que debían determinar el dividendo de una división conociendo el divisor, cociente y residuo. El enunciado de la tarea incluye una respuesta falsa que propone una solución a la cuestión de la tarea, esto con el propósito de generar la confrontación de posturas.

En lo colectivo, el profesor fomentó la participación de los estudiantes con la lectura de la pregunta de la tarea, proporcionó la información inicial (D1) y con esto los estudiantes intervinieron con sus conclusiones <1> (Figura 38). En este contexto, Daniela concluyó (C1) estar de acuerdo con la respuesta falsa de la tarea y soportó su conclusión con base en el resultado del producto entre el divisor y el cociente (W1).

Tabla 28

Transcripción del episodio <1> de la tarea 4.

#	F.A	Participante	Transcripción
1	**D1**	Profesor	En la tarea no se sabe cuál es el dividendo…Daniela ¿Qué puedes decir? ¿Cuál es el dividendo?
	C1	Daniela	Es el número que dice la amiga de Mario…
	¿?	Profesor	¿Cuál es ese número?
	C1	Daniela	Es tres mil cuatrocientos dos …
	¿?	Profesor	¿Cómo supiste que ese es el dividendo?
	W1	Daniela	Multipliqué doscientos cuarenta y tres por catorce

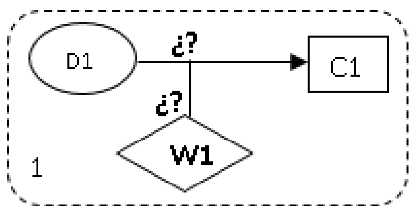


Figura 38. Estructura de la argumentación colectiva en el episodio <1> en la tarea 4.

De la participación de Daniela en <2>, el profesor preguntó a la clase en función de brindar apoyo (D2) a la conclusión (C1) presentada por la estudiante. Participaron varios estudiantes con sus conclusiones (C2) que explican el cómo hicieron para determinar el dividendo sin multiplicar el divisor por el cociente (W2, W3). Lo anterior, dio lugar a un argumento de refutación (R1/C) en el episodio <3>, negar una de las garantías presentadas en <2>, e indicar que el residuo de la división debía ser tres y no cero (WR1) (Ver Figura 39).

Tabla 29

Transcripción del episodio <2, 3> de la tarea 4.

#	F.A	Participante	Transcripción
2	**D2**	Profesor	¿Quién multiplicó como Daniela?

	C2	Estudiantes	Levantaron la mano: Ivan, Karla, Saraí, Dulce, Itandewi y otros… ¿Alguien hizo algo diferente a una multiplicación…?
	C2	Iván	¡Yo hice una división!
	W2	Iván	[El estudiante pasa al tablero y resuelve la división de tres mil cuatrocientos dos entre catorce]
	¿?	Profesor	¿Cuánto les dio el residuo?
	W3	Estudiantes	Residuo cero…
	¿?	Profesor	¿Todos los que les dio residuo cero están de acuerdo con la respuesta de la amiga de Mario?
3	**R1/C**	Gael, Jorge, Juan de Dios, Manuel, Jesús, …	¡No!
	WR1	Juan de Dios	Porque tiene que dar residuo tres…
	¿?	Profesor	¿Cómo saben que tiene que dar residuo tres?
	WR1	Gael, Saraí	Porque la tarea dice que debe ser tres…

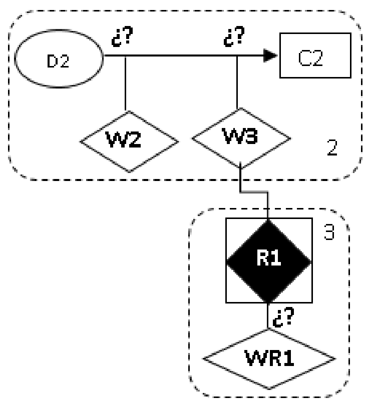


Figura 39. Estructura de la argumentación colectiva del episodio <2, 3> en la tarea 4.

El profesor en el argumento <4> cuestionó a los estudiantes sobre el procedimiento que hicieron para determinar que el residuo es 3. Lo que implicó identificar como conclusión (C3) la relación entre las partes de la división, es decir, que el producto del divisor por el cociente más el residuo equivale al dividendo. Lo anterior lo fundamentaron los estudiantes con divisiones de casos particulares (W4, W5) e implicaron un argumento final <5> donde el profesor preguntó sobre la respuesta falsa presentada en la tarea y generó la oportunidad para que los estudiantes concluyeran (C4) respecto la relación entre las partes de la división (W6).

Tabla 30

Transcripción del episodio <4,5> de la tarea 4.

#	F.A	Participante	Transcripción
4	**D3**	Profesor	¿Qué hicieron para que la división tuviera un residuo tres?
	C3	Michel	Tomas el resultado de doscientos cuarenta y tres por catorce y le sumas el tres…
	¿?	Profesor	¿Están de acuerdo con lo que dice Michel…? ¿Por qué hay que sumarlo?
	W4	Gael	Porque si no lo sumamos no nos va dar residuo tres…
	W5	Gerardo	Yo dividí varias veces… y encontré que el dividendo doscientos cuarenta y tres entre catorce daba residuo 3
5	**¿?**	Profesor	¿Qué podemos concluir?
	C4	Gael, Valentín, Juan de Dios, Alejandro…	¡Que la amiga de Mario estaba mal!
	¿?	Profesor	Y… ¿Cómo encontramos un dividendo…?
	W6	Michel	Multiplicando el cociente por el divisor y le sumamos el residuo…

La estructura de la argumentación de la tarea 4 (Figura 40) se conformó de tres argumentos paralelos <1>, <2> y <4> y un argumento perpendicular <3> sobre el argumento <2>, cuya función fue apoyar los argumentos de la conclusión final (C4) de la tarea. En contraste con las estructuras argumentativas reportadas en la literatura, la estructura de la tarea 4 se caracterizó como una *estructura de fuente*, esta incluye argumentos paralelos que apoyan una conclusión sobre la tarea. En este sentido, se identificó que la refutación y los argumentos paralelos 4 y 1 que incluyó el profesor en su última pregunta para generar la conclusión final de la tarea.

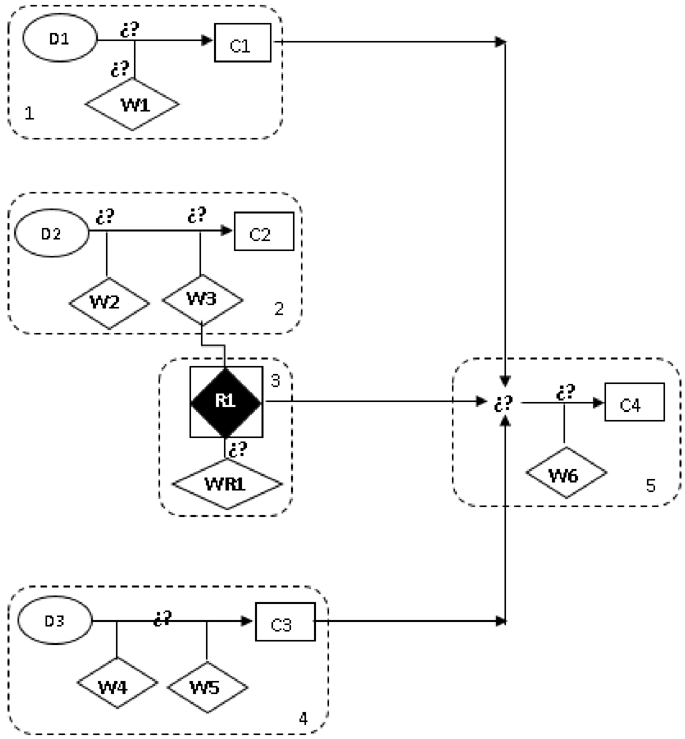


Figure 40. Estructura de la argumentación colectiva de la tarea 4.

4.2.5. Estructura argumentativa de la tarea 5

El enunciado de la tarea 5 proporcionó a los estudiantes información acerca de las ventas de un sastre que confecciona y vende camisas, de manera implícita los estudiantes analizaron la información de las gráficas de barras presentadas como parte del enunciado. La tarea demandó a los estudiantes determinar la gráfica de barras que representa las ventas del mes de abril, las ganancias, la calidad de las camisas vendidas y la construcción de argumentos en lo individual-colectivo.

La estructura de la argumentación colectiva de la primera pregunta incluye cuatro episodios argumentativos (ver Tabla 31, 32, 33). En la fase colectiva el profesor preguntó a los estudiantes si estaban de acuerdo con la información suministrada por la gráfica número 1 de la tarea, ya que esta información corresponde a los datos de la argumentación (D1). Alejandra concluyó estar de acuerdo con los datos de la gráfica uno (C1), pasó al frente de la clase y presentó su justificación (W1) basada en la comparación de las ventas en las gráficas de barras.

Tabla 31

Transcripción de los episodios <1 y 2> de la tarea 5.

<#>	F. A.	Participante	Transcripción
1	**D1**	Profesor	¿Qué gráfica de barras representa las ventas del mes de Abril?... Levanten la mano quien dice que es la gráfica uno…
	C1	Alejandra	Yo…
	D2	Profesor	Levanten la mano quien dice que es la gráfica dos…
	C2	Estudiantes	Alejandro, Gael, Jun de Dios, Saraí, Manuel, Daniel, Jesús, José Guadalupe, Jorge…
	¿?	Profesor	¿Por qué Alejandra dices que es el número uno?
	W1	Alejandra	Porque la gráfica uno tiene treinta en el eje vertical y en la gráfica dos no tiene, llega hasta veinticinco…
	¿?	Profesor	¿Qué pueden decir de lo que dice Alejandra?
	R1	Estudiantes	¡Está equivocada!
	W1	Alejandra	Porque este está más alto que este [señala las barras de las ventas de las camisas de cien pesos en ambas gráficas e indica que se pasa la de la gráfica dos]
	R2	Saraí	Pero la de ciento veinte pesos [se refiere a la barra de las camisas de ciento veinte] se pasa por cinco…
2	**¿?**	Profesor	Entonces ¿Qué gráfica representa las ventas?
	R3/C	Gael, Juan Carlos, Michel, Juan de Dios…	¡Ninguna!
	W2R3	Gael	Pero el único hecho es que la gráfica dos sólo se pasa por cinco, pero en la otra gráfica se pasa por más…

Las intervenciones del profesor con preguntas (¿?) fomentaron que los estudiantes participaran y refutaran el argumento de Alejandra. Los estudiantes Gael y Juan de Dios refutaron (R1, R2) los datos presentados. En el caso de la primera refutación (R1), niega los datos que presenta la estudiante con la expresión “está equivocada”. No obstante, otra refutación (R2) directa a los datos evidenció una inconsistencia en la justificación de Alejandra (Figura 41). En términos de otra respuesta, la refutación (R3) tuvo la función de negar una parte de la argumentación y servir como conclusión del estudiante. Este tipo de argumento emergente en el desarrollo del experimento de enseñanza se categorizó como un *argumento de refutación* (R3/C2), su función es negar la conclusión de un estudiante (*e.g.*, conclusión de Alejandra, C1) y presentar la conclusión del refutador (C2) fundamentada con base en una garantía (W2R3).

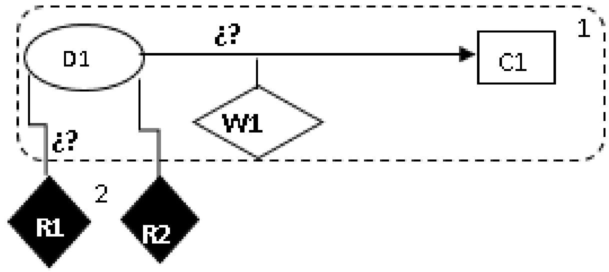


Figura 41. Estructura de la argumentación colectiva del episodio <1,2> en la tarea 5.

Las intervenciones del profesor (¿?) implicaron la participación de los estudiantes en la construcción de argumentos y la refutación de los mismos. El profesor orientó la argumentación colectiva hacia el consenso matemático, basado en la refutación de conclusiones, garantías y datos con el fin de validar los argumentos presentados. La estructura que representa la argumentación suscitada en la tarea 5 (ver Figura 42), tiene cuatro argumentos <1>, <2>, <3>, <4>. El primero <1>, refiere a una estructura constituida por el núcleo (*i.e.*, datos, conclusión y garantía). Con base en este argumento, se generó una serie de refutaciones y un argumento de refutación <2> conformado por una refutación (R3), una conclusión (R3/C2) y una garantía (WR3) como soporte.

Tabla 32

Transcripción del episodio <3,4> de la tarea 5.

<#>	**F. A.**	**Participante**	**Transcripción**
3	**D2**	Profesor	La mitad de salón dice que ninguna y la otra mitad dice que la gráfica dos…
	C2	Gael	¡Ninguna!
4	**¿?**	Profesor	En conclusión… ¿Qué gráfica es…?
	C3	Gael, Juan Carlos, Michel, Juan de Dios…	¡Ninguna!

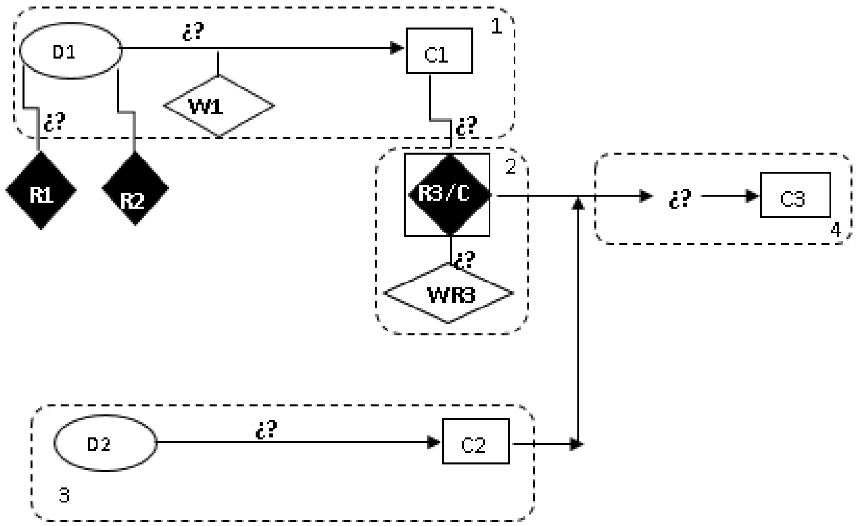


Figura 42. Estructura de la argumentación colectiva de la tarea 5.

La argumentación <3> se conformó por un dato y una conclusión que a la vez conformaron un argumento paralelo que en secuencia con los argumentos <1> y <2> fundamentan la conclusión final de la clase <4> (Knipping, 2008). En este sentido, la estructura de la argumentación colectiva suscitada en el salón de clases cumple con las características de la estructura de *fuente* (*source*, en inglés) reportada por Knipping y Reid (2015, 2019). Este tipo de estructura justificó que la argumentación en clase de matemáticas se puede fomentar con el objetivo de llegar al consenso matemático luego de un proceso de validación de conclusiones, garantías y/o datos, en este contexto, la refutación en la argumentación colectiva facilitó que los estudiantes identificaran si sus argumentos tenían un error o no, así como soportar la conclusión y validar el conocimiento matemático implícito en los argumentos (i.e., características y propiedades matemáticas).

4.2.6. Un resumen de las estructuras de la argumentación colectiva

Las estructuras argumentativas emergentes en el contexto de las tareas del experimento de enseñanza emergentes al refutar conclusiones, garantías o datos corresponden con el segundo objetivo general de la investigación, en la Tabla 33 se resume la cantidad de argumentos paralelos, perpendiculares, refutaciones y las estructuras emergentes.

Tabla 33

Descripción de las estructuras argumentativas complejas del experimento de enseñanza.

Características de la estructura de la argumentación compleja				
Tarea	Argumentos paralelos	Argumentos perpendiculares	Refutaciones	Tipo de estructura
Tarea 1	*3*	*1*	*5*	*Fuente*
Tarea 2	*5*	*0*	*0*	*Fuente*
Tarea 3	*0*	*1*	*1*	*Unificación*
Tarea 4	*3*	*1*	*1*	*Fuente*
Tarea 5	*2*	*1*	*3*	*Fuente*

Emergieron dos tipos de estructuras argumentativas en el marco del experimento de enseñanza, la estructura de *fuente* y de *unificación*, la primera estructura caracterizó todas las tareas del experimento (excepto la tarea 3). Este tipo de estructura argumentativa se constituye de argumentos paralelos que fundamentan la conclusión final de la clase con base en datos y garantías que soportan conclusiones intermedias y la conclusión final. Las refutaciones identificadas (f=*10*) en la interacción entre estudiantes propició la construcción de argumentos de refutación (f=*4*), estos se definen como una refutación que tiene la función de conclusión del refutador y cuenta con una garantía.

La estructura de *unificación* emergente en el experimento se conformó de núcleos argumentativos y argumentos de refutación. Se caracterizó, además, por incluir argumentos construidos por los estudiantes ante la cuestión de las tareas sin fundamentar o arribar a una conclusión final en el desarrollo de una tarea en ambiente de lápiz y papel. Los argumentos locales unificados no conforman una estructura en particular, sino un conjunto de conclusiones establecidas en datos y/o garantías. En suma, las estructuras argumentativas emergentes en el desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza evidencian las interacciones entre los estudiantes y el profesor en el salón de clases. Así también, reflejan el camino o la ruta por el cual los estudiantes construyen sus argumentos y cómo construyen el consenso matemático en el contexto de la refutación.

Capítulo 5

Reflexiones finales

Esta investigación reporta resultados empíricos de los argumentos que construyen estudiantes de primaria en el marco de la resolución de tareas matemáticas desde lo colectivo. En línea con los objetivos de la investigación, se caracterizaron los argumentos de los estudiantes al refutar datos, garantías y conclusiones y se analizaron las estructuras de la argumentación colectiva que describen los flujos de los argumentos construidos por los estudiantes. En este capítulo se exponen reflexiones de los resultados de la investigación y sus implicaciones sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática.

5.1. Argumentos que construyen estudiantes al refutar datos, garantías y/o conclusiones

La primera pregunta de investigación que se plantea en este estudio refiere: *¿Qué argumentos construyen estudiantes de primaria al refutar la conclusión, la garantía o el dato en el contexto de la argumentación colectiva?* A la luz *de* los resultados presentados se caracterizaron los argumentos de los estudiantes y se identificó que los estudiantes de quinto grado de primaria construyen diversos tipos de argumentos en el contexto de tareas matemáticas. Su contenido refiere a propiedades, características invariantes, comparaciones, consecuencias, aspectos visuales y conceptuales del objeto matemático en estudio.

Los argumentos presentados en la tabla 11 y 12 del capítulo anterior evidencian que los argumentos de clasificación y prácticos emergieron en el desarrollo de todas las tareas del experimento de enseñanza (*f=14*). En contraste con la investigación de Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza (2019), quienes afirman que los principios de diseño de las tareas fomentan la construcción de los argumentos de los estudiantes, así como las intervenciones del profesor orientadas en la construcción de un consenso con base en características y propiedades matemáticas de los objetos matemáticos en estudio.

Los argumentos de clasificación implicaron a los estudiantes en el análisis y configuración de las características invariantes que definen los objetos matemáticos, además, recurrieron a las características como criterios para clasificar los objetos (e.g., polígonos, figuras geométricas y cuerpos geométricos). Este tipo de argumento emergió en las tareas 2, 3, 4 y 5 debido al contenido matemático y el diseño la tarea, se identificaron características de objetos matemáticos como: cuadrado, rectángulo y cubo, asociadas a la congruencia de las medidas de los lados y ángulos. Proporcionan una idea de cómo los estudiantes fundamentaron sus conclusiones con base en características invariantes de los objetos matemáticos y evidencian lo plausible de encontrar este tipo de argumento en grados de la educación primaria, en razón de que los conceptos matemáticos en este nivel educativo se definen desde las características esenciales sin hacer énfasis en una definición formal del concepto (CCSSI, 2010).

El argumento de tipo práctico implicó que los estudiantes compararan distintas formas de fundamentar sus conclusiones al implicar propiedades (P), regularidades-generalidades matemática y/o características invariantes (Ci) de objetos matemáticos con el fin de seleccionar una de las formas. Este tipo de argumento favoreció que los estudiantes validaran sus conclusiones en lo colectivo y evidenciaran el nivel de comprensión que tenían con respecto al contenido matemático en estudio. En correspondencia con uno de los principios para gestionar la argumentación colectiva “la objetividad”, Brown (2017) indica que la validación de los argumentos son producto de comparar las similitudes y diferencias de las ideas o justificaciones matemáticas presentadas por los estudiantes, esta una característica inmersa en el contenido de los argumentos prácticos. Este tipo de argumento fomentó la interacción entre los estudiantes con el propósito de proveer espacios para analizar las características-propiedades matemáticas y propiciar que los contenidos de los argumentos evolucionen al considerar características invariantes del cuadrado, rectángulo, cubo, que al inicio no tuvieron en cuenta.

Los estudiantes en el marco del experimento de enseñanza evidenciaron la diversidad de argumentos y cómo fundamentaron sus conclusiones con base en propiedades matemáticas, explicaciones de casos, consecuencias y aspectos visuales. Los argumentos identificados en la solución de las tareas matemáticas evidenciaron implicaciones en el contexto de la argumentación colectiva, los argumentos basados en propiedades matemáticas, implicaron propiedades matemáticas: para la tarea 1 identificaron la generalización del patrón (4n +1), en la tarea 2 recurrieron a las propiedades de los cuadriláteros y en la tarea 4 implementaron la relación entre las partes de la división concluyendo que *(Cociente x divisor)* + *residuo= Dividendo*. Este tipo de argumento evidenció los procesos de análisis realizados por los estudiantes sobre casos particulares, construcción de conjeturas que son validadas o refutadas con la intención de establecer una generalización de una propiedad matemática para fundamentar las conclusiones presentadas en lo colectivo. En línea con estos resultados, Zacharos, Pournantzi, Moutsios-Rentzos y Shiakalli (2016) afirmaron que el razonamiento matemático inmerso en este tipo de argumentos se caracteriza por el razonamiento inductivo con base en el estudio de casos particulares presentados por estudiantes de primaria. Así también, Van Ness y Maher (2019) sugieren prestar atención al razonamiento inmerso en los argumentos de los estudiantes y permitir que lo compartan con la clase, esto ayudará a los estudiantes en aprender a identificar conclusiones invalidas de sus compañeros con base en su fundamentación matemática, tales como propiedades.

El contenido de los argumentos basados en explicaciones se caracteriza por presentar respuestas alternas a las presentadas por los demás compañeros de clase, este tipo de argumento se caracterizó por recurrir a casos posibles para contrastar características invariantes de los objetos matemáticos en estudio con el fin de concluir sobre la cuestión de la tarea. Según Brown (2017) la argumentación colectiva que emerge de las explicaciones y justificaciones de los estudiantes pueden ser usadas por los profesores con el objetivo de promover la participación de los estudiantes que no participaron. Es por esto que este tipo de argumento es necesario en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, involucra a los estudiantes en el análisis de posibles explicaciones y casos que fundamentan conclusiones matemáticas.

Los argumentos de consecuencias construidos por los estudiantes muestran las implicaciones positivas o negativas que identificaron los estudiantes con respecto a las características y/o propiedades matemáticas involucradas en la solución de las tareas del experimento. Proporcionan elementos conceptuales que los estudiantes aprendieron en clases previas y los implementan con el objetivo de validar o refutar argumentos. En el contexto de la refutación de conclusiones, garantías y datos, este tipo de argumento se considera necesario como parte de la argumentación colectiva, ya que conlleva a los estudiantes presentar contradicciones de usar características y/o propiedades matemáticas en las conclusiones.

Los argumentos de tipo visual en el experimento de enseñanza refirieron a representaciones gráficas o dibujos que soportaron las conclusiones presentadas por los estudiantes sin implicar aspectos conceptuales de la matemática. Cabe destacar que resultados de investigaciones sobre argumentación colectiva con estudiantes de primaria señalan que estos no usan el lenguaje matemático adecuado y el razonamiento inmerso en sus argumentos no guarda relación con los argumentos válidos de la matemática (Van Ness y Maher, 2019). De los argumentos visuales emergentes en las tareas 1, 3 y 5, se identificó que los estudiantes que construyeron este tipo de argumento recibieron refutaciones en lo colectivo al evidenciar una inconsistencia o falta de una justificación que soporte la conclusión presentada. En el contexto de la investigación que se desarrolló con estudiantes de quinto de primaria no consideramos inválido el argumento visual, en razón de que diversas propuestas curriculares de matemáticas a nivel primaria, señalan que los estudiantes de los primeros grados de educación pueden fundamentar sus argumentos con base en dibujos, representaciones y objetos concretos (CCSSI, 2010; SEP, 2011, 2017).

Los argumentos conceptuales presentados por los estudiantes implicaron características invariantes y/o propiedades del objeto en estudio como parte de las garantías y no implementaron el lenguaje matemático empelado en una definición del concepto. En contraste con resultados de los investigadores, Nordin y Björklund (2018) refieren a un argumento matemático cuando su contenido no implica la coherencia lógica sino a su fijación en datos, propiedades matemáticas relevantes de los componentes, tales como objetos, transformaciones y conceptos. En el mismo sentido, Lin (2018) documentó que los estudiantes de cuarto de primaria no implementan adecuadamente el lenguaje matemático a la hora de presentar sus argumentos, presentan una combinación del lenguaje cotidiano con términos matemáticos.

De los argumentos construidos por los estudiantes en el desarrollo del experimento de enseñanza, el argumento conceptual no se identificó en las tareas y una de las razones recae al enfoque implícito en la enseñanza de la matemática a nivel primaria, el cual no demanda el uso de definiciones matemáticas sino abordar los conceptos matemáticos desde las características esenciales que lo definen.

5.2. Estructuras de la argumentación colectiva

De los resultados reportados en esta investigación y en contraste con el segundo objetivo general del estudio que implicó responder la pregunta de investigación: *¿Qué estructuras* *argumentativas emergen en una clase de matemáticas de primaria cuando se refuta la conclusión, la garantía o el dato?* Para ello, se reconstruyeron y analizaron las estructuras de la argumentación colectiva suscitadas en el desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza.

Al reconstruir la argumentación colectiva suscitada en el desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza, se identificó que la estructura básica (*i.e.,* núcleo) de un argumento permeó en las estructuras argumentativas y conformó *las cadenas de razonamientos* tal como lo reportó Krummheuer (1995, 2015) o flujos de la argumentación como lo indican Knipping y Reid (2015, 2019). Este tipo de estructura marcó el flujo de la argumentación colectiva suscitada por el profesor a través de preguntas con el propósito de construir un consenso matemático y constituye los argumentos paralelos de la estructura argumentativa global.

Con respecto a las estructuras de la argumentación colectiva en las tareas del experimento de enseñanza, la estructura de *fuente* se identificó en todas las tareas excepto en la tarea 3, estas estructuras se componen de argumentos paralelos con refutaciones y preguntas del profesor que concurren en la conclusión o consenso de la clase, además, emergieron ocho refutaciones de conclusiones, cuatro refutaciones de garantías y una refutación de los datos. Investigaciones implicaron que el flujo de la argumentación se presenta sin las intervenciones del profesor (Knipping, 2003; Knipping y Reid, 2015, 2019; Ecker, 2018) sin embargo, en las estructuras argumentativas identificadas en el experimento de enseñanza se incluye la participación del profesor con signos de interrogación, dado que estas evidencian el acompañamiento que realiza el profesor al conducir los estudiantes en la construcción de una conclusión. Por su parte, Van Ness y Maher (2019) documentaron que a lo largo de las sesiones experimentales con los estudiantes de primaria los argumentos de los estudiantes se volvían complejos y se requiere de un acompañamiento por parte del profesor, este resultado se identificó en las estructuras de la argumentación reportada en este estudio, así también en la reportadas Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid (2019) y Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Mercado-Porras (2020).

Un resultado emergente de esta investigación, es el tipo de estructura argumentativa conformada por una refutación que cumple la función de conclusión y se fundamenta en una garantía. Referimos a este tipo de estructura como *argumentos de refutación o* *argumentos perpendiculares*, caracterizados por detonar el intercambio de puntos de vista entre estudiantes y validar el contenido matemático de los argumentos presentados. En contraste con la literatura se han identificado formas de refutar un argumento (Kinpping, Reid y Crosby, 2011), la posibilidad de refutar una refutación invalida (Lin, 2018), algunas implicaciones de refutar conclusiones en el contexto de la argumentación colectiva (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Reid, 2019) y no se han reportado estructuras de argumentos de refutación ni la función que cumple en el contexto de la argumentación colectiva.

En cuanto al desarrollo de las tareas del experimento, el profesor orientó la argumentación colectiva con preguntas que promovieron el proceso de validación de conclusiones y desencadenaron la refutación de conclusiones-garantías-datos. En particular, emergieron preguntas en todas las tareas del experimento de enseñanza que unificaban los argumentos paralelos y condujeron a los estudiantes en la construcción del consenso matemático o conclusión de la clase. A la luz de los resultados, se considera que la participación del profesor en la estructura de la argumentación colectiva como un aporte a la investigación sobre la argumentación matemática en el salón de clases, en razón de que proporciona una idea de los momentos que la fomenta la participación de los estudiantes con preguntas y partes de la argumentación. Es por esto que el profesor de matemáticas debe proveer oportunidades para involucrar a los estudiantes con el fin de generar la cultura de construir argumentos en la clase de matemáticas (Jen, 2018).

5.3. Implicaciones de refutar los datos, garantía y/o conclusión.

La refutación en esta investigación se caracterizó por ser una oportunidad para que los estudiantes de primaria aprendan a argumentar y validar sus conclusiones. En el desarrollo de las tareas, los estudiantes refutaron las conclusiones de los compañeros, así como las garantías y los datos. Emergieron dos tipos de refutaciones con respecto a su contenido, la primera refiere a una expresión que niega lo presentado por otro compañero (*e.g.*, ¡no!, ¡Ninguna!), es decir, si un estudiante presentó su conclusión de la tarea "si estoy de acuerdo", otro estudiante lo refuta con la expresión ¡está equivocado!, indicándole que su conclusión debe revisarse. Este tipo de refutaciones además de negar la conclusión u otra parte del argumento, contiene un conjunto de razones que el refutador presenta para convencer al otro estudiante. El segundo tipo de refutación que se identificó, aborda expresiones que excluyen o presentan excepciones de la conclusión presentada por otro estudiante, por ejemplo: ¡Pero sería fácil agarrar la figura cuatro!, este tipo de refutaciones también cuentan con un conjunto de razones que soportan la refutación y buscan convencer a los demás. En esta investigación, la refutación de argumentos permitió que los estudiantes validaran sus conclusiones o garantías en la interacción con pares y reflexionaran sobre las características o propiedades del objeto matemático en estudio.

Respecto a la refutación de la garantía se identificó que además de invalidar la conclusión del argumentador, desempeñó la función de desencadenar cadenas de razonamientos conformadas por razones que los estudiantes ofrecen luego de recibir una refutación. Esta función de la refutación no se ha destacado en la literatura, razón por la cual se hace necesario incluirla como una de las implicaciones de refutar en lo colectivo. En cambio, la refutación de los datos propicia un ambiente para que los estudiantes evalúen errores en el contenido de la garantía y de la conclusión. Esto es, refutar los datos en tareas matemáticas genera oportunidades para que se revise el contenido matemático de la garantía del argumento refutado y el análisis de la pertinencia de la información inicial que se incluye para fundamentar una conclusión.

5.4. Trayectorias de aprendizaje

En la primera fase del experimento de enseñanza "Refutemos en lo colectivo" se diseñaron seis tareas matemáticas con base en trayectorias hipotéticas de aprendizaje que incluyeron predicciones (H) sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Para la tarea introductoria (Ti), la trayectoria de aprendizaje implicó las predicciones (H1, H2, H3 y H5), los estudiantes analizaron la situación planteada en la tarea respecto a la propiedad que cumplen las caras opuestas de los dados y compartieron sus conclusiones, pero no las refutaron según planteado en (H4). Esta tarea propició familiarizar a los estudiantes en la lógica de trabajar en un momento individual y luego compartir las respuestas ante la clase.

Respecto a la trayectoria de aprendizaje descrita en la tarea 1, no se desarrolló en el orden esperado (H1, H2, H3, H4, H5 y H6). Los estudiantes implementaron el análisis de casos particulares (*i.e*., etapas cernas del patrón de figuras) para identificar una regla local que describiera el comportamiento del patrón (*i.e*., va aumentando de dos en dos). Algunos estudiantes luego de identificar esta regularidad se percataron que no se cumplían para los casos lejanos, identificaron una relación entre la cantidad de cuadros que compone la figura y cada etapa del patrón, determinaron la cantidad de cuadros de la figura 2 y 20 del patrón y refutaron la conclusión falsa presentada como parte del enunciado de la tarea 1.

Las trayectorias de aprendizaje evidenciadas en las tareas 2, 3, y 4 se desarrollaron con base en las predicciones establecidas para cada tarea. Los estudiantes se implicaron en la dinámica planteada en las tareas matemáticas, construir argumentos en lo individual, presentar conclusiones en el momento colectivo con el propósito de validarlas a través de refutaciones. En cambio, la trayectoria de aprendizaje de la tarea 5 evidenció que algunos estudiantes en el trabajo individual identificaran las gráficas de barras y los valores numéricos de las ventas proporcionadas como parte del enunciado no se correspondían (H4), esto provocó la refutación de datos y conclusiones desde el inicio de la sesión (H5).

5.5. Implicaciones de los resultados en el proceso de enseñanza de la matemática

El experimento de enseñanza desarrollado en el contexto de la argumentación colectiva y la refutación tiene implicaciones sobre el proceso de enseñanza de la matemática. Se presentan aspectos teóricos y metodológicos a considerar por el profesor para promover la construcción de argumentos por parte de los estudiantes en clase de matemática. Con respecto a los aspectos teóricos, reconocemos que es necesario conocer y analizar la estructura básica de un argumento y la función que cumple cada elemento que la compone, esto permite al profesor identificar episodios argumentativos de la clase donde los estudiantes presenten datos, conclusiones, garantías y refutaciones (Knipping y Reid, 2015, 2019).

Respecto a los aspectos metodológicos, el diseño de las tareas matemáticas proporciona una herramienta que potencia la construcción de argumentos en lo colectivo. Para ello, se deben considerar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como parte previa al diseño de tareas, plantear las predicciones sobre el proceso de aprendizaje que van a experimentar los estudiantes permite al profesor-investigador clarificar el objetivo de aprendizaje y plantear tareas matemáticas idóneas. De las trayectorias hipotéticas de aprendizaje planteadas en el experimento de enseñanza se verificó que las predicciones establecidas para cada tarea evidenciaron formas posibles de solucionar la tarea matemática por parte de los estudiantes, sin embargo, algunos estudiantes no resolvieron las tareas matemáticas tal cual como se planteó en la trayectoria hipotética.

Incluir principios de diseño que aborden el nivel de demanda cognitiva, tipos de preguntas, incluir conclusiones falsas fomenta la construcción de argumentos y refutaciones por parte de los estudiantes en lo colectivo. En apoyo a lo anterior, Rumsey et al. (2019)

consideraran las tareas matemáticas con preguntas abiertas que gestionen oportunidades para que los estudiantes se den cuenta de (notice, en inglés), justifiquen y realicen observaciones presentadas por otros estudiantes. En cuanto al desarrollo de las tareas, el docente debe considerar su participación con base en preguntas que conduzcan las respuestas de los estudiantes en la construcción del consenso matemático o una conclusión final que atienda al objetivo de la tarea (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Mercado-Porras, 2020). Por lo tanto, considerar el objetivo de aprendizaje, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y los principios de diseño para gestionar la argumentación en el salón de clase son elementos que permiten al profesor conducir a los estudiantes en la construcción de argumentos y con esto el consenso matemático.

Como parte de la argumentación colectiva suscitada en las tareas, se identificaron diferentes tipos de preguntas que realiza el profesor para promover la construcción de argumentos que orientan a los estudiantes hacia la construcción de consensos y la validación: ¿Qué pueden decir de la respuesta de Pedro? ¿Quién lo hizo de forma diferente? ¿Por qué la conclusión de Juan está errada? ¿Quién dijo que sí? En contraste con la investigación realizada por Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2020), los autores identifican tipos de preguntas que un profesor de matemáticas plantea para promover la argumentación colectiva en el salón de clases, e involucrar a los estudiantes en la construcción de garantías matemáticas, evalúen los argumentos de los compañeros y recurran a las representaciones gráficas como respaldos de sus argumentos. Por lo tanto, reconocemos que la gestión del error por parte del profesor implica identificar conclusiones inválidas, presentadas al inicio con el objetivo de que los demás estudiantes lo refutaran y así evidenciar el nivel de comprensión que tenían los estudiantes en relación con el contenido matemático.

5.6. Implicaciones de los resultados en el proceso de aprendizaje de la matemática

Las implicaciones de los resultados de esta investigación sobre el proceso de aprendizaje de la matemática toma como base algunos principios reportados en investigaciones sobre argumentación matemática en el salón de clases. El primer principio tiene que ver con la implicación de los estudiantes participen en clase de matemáticas, es decir, si los estudiantes participan en la construcción de argumentos en lo colectivo estos aprenden (Krummheuer, 1995, 2015). En contraste con lo reportado en la literatura, la participación de los estudiantes implica el aprendizaje de las matemáticas, se generan oportunidades para compartir las respuestas con otros y dar lugar para que validen el contenido de sus argumentos y construyan conocimiento matemático en lo colectivo (Schwart, 2009).

Otra implicación de los resultados de esta investigación tiene que ver con el desarrollo de habilidades argumentativas como: refutar, construir argumentos, validar un argumento presentado. En este sentido, se reconoce que los estudiantes de primaria están aprendiendo a usar el lenguaje (Mercer, 2009), inferimos que los estudiantes pueden refutar argumentos y fomentar la reflexión sobre la validez del contenido del argumento que se presentó. En cuanto a la construcción de argumentos en lo colectivo, implicó que los estudiantes evidencien el nivel de comprensión que tienen con respecto al contenido matemático en estudio y con esto se preparen para validar o presentar una refutación en contra de un argumento de los compañeros.

En cuanto al contenido de los argumentos que construyeron los estudiantes en el experimento de enseñanza, se identificó que los estudiantes construían en la tarea inicial (TI) argumentos sin garantía que justificara sus conclusiones y en el desarrollo de las demás tareas presentaron garantías con contenido que refieren a la matemática. En un primer momento los argumentos que construyeron los estudiantes en las tareas 1, 2, 3, 4 y 5 evidencian características y propiedades matemáticas, consecuencias, aspectos visuales y conceptuales empleadas como garantías para fundamentar conclusiones y refutaciones. En efecto, la interacción con pares, la generación de oportunidades para refutar, validar conclusiones, son medios promotores de la mejora en los procesos de argumentación en clase de matemáticas.

5.7. Productos de la investigación

La investigación doctoral reporta resultados empíricos sobre el contenido y la estructura de los argumentos que construyen estudiantes de primaria en el contexto de la refutación. Se presentan además algunos productos de esta investigación: artículos de investigación publicados en revistas indexadas, ponencias en congresos internacionales y capacitación docente.

Las publicaciones que se lograron en el transcurso de tres años académicos contribuyen con aspectos teóricos, metodológicos y resultados empíricos en el marco de la argumentación colectiva. Del aporte teórico, se escribió el artículo de investigación “tipos de argumentos en la refutación de conclusiones” con el objetivo de contribuir con una caracterización de los argumentos que construyen estudiantes en el contexto de la argumentación colectiva, este artículo se encuentra en proceso de evaluación en la International Journal of Science Education and Technology. En cuanto a los aspectos metodológicos, se publicó el artículo “Principio de diseño de tareas en el contexto de una planificación didáctica” en la revista UNO con el objetivo de proporcionar una lista de principios de diseño que ayude al profesor de matemáticas en el diseño de tareas que fomenten la construcción de argumentos por parte de los estudiantes. De los resultados empíricos se publicó un artículo de investigación en la revista PNA titulado “Complex Argumentation in Elementary School”, en este artículo reportó las estructuras argumentativas emergentes en clase de matemáticas a nivel primaria y la nueva función que cumple la refutación de conclusiones en lo colectivo. En proceso de publicación se encuentra un capítulo de libro titulado “El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva” evaluado y editado por los encargados del congreso internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI). Este capítulo de libro presenta evidencia de cómo el profesor desde lo colectivo, apoya la construcción de conocimiento matemático a sus estudiantes a través de preguntas que fomentan la refutación de conclusiones. Además, fue aceptado y publicado en la memoria del congreso PME en el mes de Julio del 2020 un reporte de investigación (*research report)* sobre el tipo de pregunta que usa el profesor para promover la argumentación colectiva.

Los autores de la investigación participaron en diversos congresos de carácter internacional como (RELME, Monterrey), (EIME, Colima, 2017), (Mexicali, 2019) y (TEMBI, Puebla, 2019) y en diferentes modalidades: ponentes, talleres y carteles con el objetivo de difundir aspectos teóricos-metodológicos empleados en la investigación. En particular, se impartió el taller “La refutación en las prácticas argumentativas en el salón de clases” a profesores de primaria y secundaria en estos eventos con el fin de contribuir con el proceso de enseñanza de la matemática. Se hizo énfasis en el diseño de las tareas matemáticas, formas de promover la argumentación en el salón de clases y algunas recomendaciones para el desarrollo de investigaciones de este tipo.

Adicionalmente, se impartió un curso de actualización docente a un grupo de profesores de primaria del sector central de Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. El curso “Resolución y diseño de tareas para el desarrollo del pensamiento funcional y la argumentación en matemáticas” tuvo lugar el día 8 de marzo del 2019, se desarrolló en dos sesiones con la ayuda de los autores de esta investigación y un grupo de profesores investigadores con el objetivo de contribuir en el diseño de tareas que promueven la argumentación y el álgebra temprana con base en los libros de texto de matemáticas.

5.8. Investigaciones futuras

De los resultados presentados en esta investigación y lo reportado en estudios previos se identifican varios aspectos relevantes a tener en cuenta como parte de investigaciones futuras. De las conclusiones de esta investigación se recomienda profundizar en las acciones pedagógicas del profesor para promover la argumentación en el salón de clases, sobre el diseño y planeación de clases de matemáticas que propicien espacios de reflexión con base en los argumentos que construyen estudiantes de primaria y secundaria en temas relacionados con diversos contenidos matemáticos.

Se recomienda realizar investigaciones que describan niveles del contenido matemático en los argumentos que proporciona el profesor en clases y que den cuenta del progreso sobre el contenido matemático al que recurren los estudiantes cuando construyen argumentos en lo individual y los comparten en lo colectivo. Consideramos realizar investigación sobre argumentación vinculado con líneas de investigación en Matemática Educativa como: el álgebra temprana, formación de profesores, modelación matemática entre otras. Se puede profundizar en los estudios de corte cuantitativo comparados con los resultados obtenidos en investigaciones previas, esto con el objetivo de constatar los hallazgos y realizar conclusiones en el campo de la Matemática Educativa.

Referencias Bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa*. Fundamento y metodología, México: Paídos Educador.

Annales Kangourou Lycées (1999). *Kangourou des mathématique. ACL -* les Éditions du Kangourou, Francia.

Atkins, S. (1977). Lakato's proof and refutations comes alive in an elementary school. *School Science and Mathematics, 97*(3), 150-154.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Becker, J. R. y Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. Chick J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne, Australia: University of Melbou.

Becker, B. (2019). Addressing common misconceptions with informal arguments. *Mathematics Teacher, 112*(6), 426-430.

Boero, P., N., Douek, F., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). "Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation", En M.F.F. Pinto y T.F. Kawasaki (eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology.*

Brown, B. (2017). Using collective argumentation to engage students in a primary mathematics classroom*.* *Mathematics Education Research Journal*. DOI 10.1007/s13394-017-0198-2

Cabañas-Sánchez, G. y Cervantes-Barraza, J. A. (2019). Principios que fundamentan el diseño de tareas matemáticas en una planificación didáctica. *Revista Uno*, (85), 7-12.

Cervantes-Barraza, J. A. (2017). A*rgumentos en la refutación de aserciones en torno a la clasificación de triángulos* (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cervantes-Barraza, J. A. y Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en clase de geometría a nivel primaria*. Educación matemática, 30*(1), 163-183. DOI: 10.24844/EM3001.06

Cervantes-Barraza, J. A., Cabañas-Sánchez, G. y Reid, D. (2019). Complex argumentation in elementary school. *PNA*, *13(4)*, 221-246. DOI: 10.30827/pna.v13i4.8279

Cervantes-Barraza, J. A., Cabañas-Sánchez, G. y Mercado-Porras, K. (2020). El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva. En H. Hernández, J. Juárez, J. Slisko (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación, volumen 4.* Puebla, México: El errante Editor

Cervantes-Barraza, J. A. y Cabañas-Sánchez, G. (2020). Teacher promoting student mathematical arguments through questions. En Inprasitha, M., Changsri, N. & Boonsena, N. (Eds). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Interim Vol, (pp. 81-89). Khon Kaen, Thailand: PME.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A. E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Conner, M. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sepúlveda (Eds.) *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, 361-368, México, Morelia.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014a). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200. DOI.org/10.1080/10986065.2014.921131

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014b). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401–429.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Corcoran, J. (1989). Argumentation and logic. *Argumentation, 3*(1), 17-43.

Cramer, J. (2018). *Mathematisches argumentieren als diskurs: Eine theoretische und empirische Betrachtung diskursiver hindernisse*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Cramer, J. C. y Knipping, C. (2019). Participation in argumentation. En U. Gellert, H. Straehler-Pohl, y C. Knipping. (Eds.), *Inside the Mathematics Class, Advances in Mathematics Education*. (pp. 229-244) Springer International Publishing AG https://doi.org/10.1007/978-3-319-79045-9_11

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Edwards, M., Meagher, M. y Özgün-Koca, A. (2017). Nurturing argumentation and reasoning with pentominoes. *Mathematics teaching in the middle school, 23*(1), 54-59.

Erkek, Ö. y Bostan, M. (2018). Prospective middle school mathematics teachers' global argumentation structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI:10.1007/s10763-018-9884-0

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D. y Zachariades, P. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(3):160-168. DOI: 10.1016/j.jmathb.2010.07.001

Gómez-Guzmán, P. y Romero, I. M. (2015). Enseñar las matemáticas escolares, en P. Flores, L. Rico (Eds.): *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 61-87). Madrid, España: Anaya,

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA, 7*(4), 155-170.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F. y Roa, R. (2004). *Matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godden, D. y Walton, G. (2007). A Theory of presumption for everyday argumentation. *Pragmatics & Cognition, 15*(2), 313-346. DOI: 10.1075/pc.15.2.06god

Graham, M. y Lesseig, K. (2018). Tool kit for early-career teachers focus issue back-pocket strategies. *Mathematics Teacher*, *112*(3), 173-178.

Hoffman, B. L., Breyfogle, M. L. y Dressler, J. A. (2009). The power of incorrect answer. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 232-238.

Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática, 10*(2), 327-352.

Jiménez, A. y Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia, 16*, 101–116. DOI:10.19053/01207105.3243

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., Lesh R. A. y Baek J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* Nueva York: Routledge.

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der unterrichtspraxis–vergleichende analysen von mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 427–441.

Knipping, C. y Reid, D. (2015). *Reconstructing argumentation structures: A Perspective on proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions*. En A. Bikner-

Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. DOI: 10. 1007/978-94-017-9181-6_4

Knipping, C. y Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. InKaiser, G., y Presmeg, N. (Eds.) *Compendium for early career researchers in mathematics education*. (pp. 3–31). Cham, Switzerland: Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-15636-7_1

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(1), 1-10. DOI: 10.1016/j.jmathb.2010.01.003

Kotaro, K., Tsujiyamab., Y. y Sakamakic, A. (2014). Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(7), 1053-1067. DOI: 10.1080/0020739X.2014.902135

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 147–162. DOI: 10.1007/s10649-015-9677-0

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T. y Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 47*(1), 1-15. DOI: /10.1016/j.jmathb.2017.05.002

Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2),129–144. DOI: DOI: 10.1007/s10649-016-9731-6

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. En: P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. (pp. 229–269), Hillsdale: Erlbaum.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *Learning of Mathematics, 20*(1)*, 22*-32.

Krummheuer, G. (2015). *Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction*. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping., y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. DOI:10.1007/978-94-017-9181-6_4

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Larsen, S. y Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205–216.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 153–169. DOI: 10.1016/j.jmathb.2006.02.006

Lepak, J. (2014). Enhancing students' written, mathematical. *Mathematics Teaching In The Middle School, 20*(4), 213-219.

Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*(4), 357–380. DOI: 10.1016/S0959-4752(00)00037-2

Lin, P. J. (2018). The development of students mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação y Realidade, Porto Alegre, 43*(3), 1171-1192. DOI: 10.1590/2175-623676887

Macagno, F., Mayweg-Paus, E. y Kuhn, H. (2015). Argumentation theory in education studies: Coding and improving students' argumentative strategies. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 523–537. DOI: 10.1007/s11245-014-9271-6

Metaxsas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 383-397. DOI: 10.1007/s10649-016-9701-z

Mercer, N. (2009). Developing argumentation: Lessons learned in the primary school. En M. Muller Mirza y A-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education. Theoretical Foundations and Practices* (pp. 177-194). New York: Springer.

Melhuish, K., Thanheiser, E. y Fagan, J. (2019). The student discourse observation tool: Supporting teachers in noticing justifying and generalizing. *Mathematics Teacher Educator, 7*(2), 57-74. DOI: 10.5951/mathteaceduc.7.2.0057

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá, D. C: Autor.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2012). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de la ciencia, 29*(1), 075–088.

Morales-Carballo, A., Locia-Espinoza, E., Ramírez-Barragán, M., Sigarreta, J. M. y Mederos, O. (2018). The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology, 9*(1), 1510-1517. *DOI: 10.24297/ijrem.1.8013*

Muller Mirza, N. y Perret-Clermont, A. (2009). Introduction. En N. Muller Mirza & A-N. Perret-Clermont (Eds). *Argumentation and education theoretical foundations and practices* (pp. 1-5). New York: Springer Nature Switzerland AG

Muller, N. y Buty, C. (2015). *L'argumentation dans les contextes de l'éducation*. Éditions Scientifiques Internationales Moosstrasse 1, Pieterlen: Suisse.

Nardi, E., Biza, I. y Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 157–173. DOI: 10.1007/s10649-011-9345-y

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nordin, A. y Björklund, L. (2018). A framework for identifying mathematical arguments as supported. *Journal of Mathematical Behavior, 51*, 15-27. doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.005

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2007). *Programa pisa de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Paris, Francia: Autor.

Dorit Patkin, P. (2012). High school students' perceptions of geometrical proofs proving and refuting geometrical claims of the 'for every … ' and 'there exists' typ. *International*

Journal of Mathematical Education in Science and Technology, *43*(8), 985-998. DOI: 10.1080/0020739X.2012.662301

Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. En *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME*-11). (pp. 1-7), Utrecht, the Netherlands

Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *Journal of Mathematical Behavior, 41,* 104-122. DOI: 10.1016/j.jmathb.2015.10.008

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. Rassmusean

Potari, D., Zachariades, T. y Zaslavsky, O. (2010). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims, En V. Durand-Guerrier, France S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds) of *Sixth Congress of European Research in Mathematics Education*, (pp.281-290), Lyon France: CERME 6

Potari, D. y Psycharis, G. (2018). Prospective mathematics teacher argumentation while interpreting classroom incidents. En M. E. Strutchens et al. (ed.), *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers,* ICME-13 Monographs, DOI: 10.1007/978-3-319-91059-8_10

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Reid, D., Knipping, C. y Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA, 6*(1), 1-10.

Rigotti, E. y Greco Morasso, G. (2009). Argumentation as an object of interest and as a social and cultural resource. En N. Muller Mirza y A-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education Theoretical Foundations and Practices* (pp. 9-66). New York: Springer

Roig, A., Llinares, S. y Penalva, M. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Rumsey, C. y Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics, 22*(7), 413-419.

Rumsey, C., Guarino, J., Gildea, R., Cho, C. y Lockhart, B. (2019). Tools to support K-2 students in mathematical argumentation. *Teaching Children Mathematics*, *25*(4), 208-217.

Schwarz, B. (2009). Argumentation and learning. En N. Muller Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education Theoretical foundations and practices*. Berlin: Springer.

Schnell (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. In C. Nicole, S. Oesterle, P. Lijedahl, y D. Allan, (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 5, (pp. 113-120). Vancouver, Canadá.

Secretaria de Educación Pública (2011). Plan de estudios, México, Distrito Federal

Secretaría de Educación Pública (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Quinto grado.* México: Subsecretaría de Educación Básica-Dirección General de Desarrollo Curricular/Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio.

Shinno, Y. (2017). Reconstructing a lesson sequence introducing an irrational number as a global argumentation structure. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., y Choy, B.H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, (pp. 193–200). Singapore: PME

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for the learning of mathematics, 26*(2), 114-145.

Singletary, L. M. y Conner, A. M. (2015). Focusing on mathematical arguments. *Mathematics Teacher,109*(2), 143-147.

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical task, form research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350.

Solar, D., Azcarate, C. y Deulofeu, J. (2011). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 133-153.

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016) Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30*(56), 1092–1112. DOI: 10.1590/1980-4415v30n56a13

Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación,* 74, 155-176.DOI: 10.17227/rce.num74-6902

Sriraman, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? the use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom. *Mathematics in School, 32*(2), 2-6.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.* En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Tekin-Dede, A. (2018). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2). DOI: 10.1080/0020739X.2018.1501825

Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2nd ed.). New York London: Macmillan

Van Ness, C. y Maher, C. (2019). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 13-41. DOI: 10.1016/j.jmathb.2018.04.004

Walton, D. "Objections, rebuttals and refutations" (2009). OSSA Conference Archive. Junio 3 del 2009, Paper151.http://scholar.uwindsor.ca/ossaarchive/OSSA8/papersandcommentaries/151

Walton, D., Reed, C. y Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes.* Cambridge University Press, New York.

Wagner, P., Smith, R., Conner, A., Singletary, M. y Francisco, R. (2014). Using Toulmin's model to develop prospective secondary mathematics teachers' conceptions of collective argumentation. *Mathematics Teacher Educator, 3*(1), 8-26. DOI: 10.5951/mathteaceduc.3.1.0008

Whitenack, J. y Yackel, E. (2002). Making mathematical arguments in the primary grades: the importance of explaining and justifying ideas. *Teaching children mathematics, 8*(9): 524-527.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440.

Zazkis, R. Lijedahl, P. y Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting Generalizations. *The international Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*,131–141. DOI: 10.1007/s11858-007-0065-9

Zacharos, K., Pournantzi, V., Moutsios-Rentzos, A. y Shiakalli, M. (2016). Forms of argument used by pre-school children. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair, 3*(2),167-178. DOI: 10.26220/une.2742