UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

METODOLOGÍA PARA FAVORECER LA ASIMILACIÓN DE TEOREMAS: TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

TESIS

Para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

PRESENTA

M. en C. Melvis Ramírez Barragán

DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. José María Sigarreta Almira

Chilpancingo de los Bravos, Guerrero, noviembre del 2020.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el beneficio de la beca otorgada a mi persona durante mis estudios del Doctorado.

Becario N°: 279168

Agradecimientos

Al Dr. José María Sigarreta Almira por el tiempo dedicado para la mejora del trabajo y por el apoyo brindado en esta etapa de mi vida. A su familia, gracias.

A la señora Iris y a mi madre por cuidar una parte de mí.

CONTENIDO

Introducción

Esta investigación propone una metodología, para favorecer los procesos de asimilación del Teorema del Cambio de Variable en la resolución de la integral definida. Los fundamentos teóricos que la sustentan descansan en los aportes del Constructivismo Social, la Resolución de Problemas y el Tratamiento de Teoremas. La validación práctica de la metodología, se realiza con los estudiantes del nivel Técnico Superior Universitario en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

En el Capítulo 1 se plantea la problemática que atiende la investigación, así como los objetivos propuestos y las preguntas científicas que la guían.

El Capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos asociados a la construcción del conocimiento. El Constructivismo Social, que tiene sus bases teóricas en los trabajos desarrollados por Lev Semiónovich Vygotsky (1896-1934) y colaboradores y Jean Piaget (1896-1980) y colaboradores. Desde esta perspectiva teórica, se considera que el proceso de asimilación de la psiquis humana, está dado sobre la base de la experiencia social y además, que son las relaciones sociales que se dan en un momento determinado y bajo una determinada condición cultural, las que contribuyen al desarrollo del conocimiento del hombre.

En el Capítulo 3 se presenta la metodología integradora, para el tratamiento de teoremas en función de favorecer la asimilación de teoremas a partir de la resolución de problemas. Dando a conocer los resultados obtenidos, durante la validación por expertos y validación práctica de la metodología. Por último, en las conclusiones se presenta un análisis general de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1.

ASPECTOS FUNDAMENTALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se destacan los elementos esenciales que describen la problemática que atiende la presente investigación, de manera específica, acerca del estado que guardan las investigaciones en matemática educativa sobre los procesos de asimilación del teorema del cambio de variable durante el tratamiento de la integral definida. Finalmente se formula el problema de investigación y los objetivos proyectados como parte de la realización de la investigación.

1.1 Planteamiento del problema de investigación

En México, el Cálculo Integral comienza a desarrollarse en el último semestre del Nivel Medio Superior (léase Preparatorias y Bachilleratos) y se divide en el estudio de la integral definida e indefinida, se trabaja con aproximaciones y antiderivadas y de acuerdo a los métodos de integración se aplican la integración inmediata, por partes, por sustitución y por fracciones parciales. La fundamentación para su estudio se centra, principalmente, en la aplicación de los teoremas esenciales, para propiciar la evolución de las capacidades de abstracción y el razonamiento, para el desarrollo del pensamiento matemático y que este pueda ser utilizado en los estudios posteriores del estudiante (Dirección General de Bachilleratos (DGB, 2013).

Con el objetivo de lograr la aprehensión y asimilación de los contenidos matemáticos, las investigaciones realizadas en Educación Matemática han centrado sus esfuerzos en determinar, cómo debe desarrollarse el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Dando evidencia de los múltiples factores que dificultan este proceso, entre ellos: la falta de estrategias didácticas, metodologías, modelos didácticos, concepciones y creencias erróneas, entre otras.

Algunas investigaciones documentan los conflictos didácticos y cognitivos que se originan durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Integral Definida. Entre ellos se destaca la investigación realizada por Llorens y Santonja (1997), quienes presentan algunas dificultades encontradas en estudiantes universitarios, durante el tratamiento de la integral definida, las definen de la siguiente manera:

a) *Generalmente, los estudiantes identifican "integral" con "primitiva".* La integral para ellos no comporta ningún proceso de convergencia, ni tampoco algún aspecto geométrico. Es por tanto un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y siempre, autocontenido; de modo que un estudiante puede conocer distintos métodos de integración e incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (integrales por partes, de funciones racionales, trigonométricas, etc.) y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann, entre otros.

b) *Las integrales "definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no puede aplicarse*. Es decir, el símbolo representa sólo un paso más del cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow.

c) *No se integra el concepto de área con el de integral.* Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área; pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. Al respecto argumentan, que conforme se va aumentando el grado de dificultad en el tratamiento de los contenidos, este se vuelve más complejo para los estudiantes teniendo como consecuencias, que se pierdan algunas nociones sobre el uso y sus aplicaciones, adquiriendo sólo un sentido escolar y mecánico para ellos.

Según Llorens y Santonja (1997), estos conflictos se deben, en lo fundamental a que el objetivo que se persigue es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas, a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, "trucos y recetas" que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado, casi a costa de lo que sea (incluyendo, en no pocas ocasiones, el sacrificio del rigor matemático y de la esencia conceptual).

Desde otra perspectiva Olave (2005), comenta que los estudiantes desarrollan sus propias formas de entender y trabajar los contenidos. En el caso de los estudiantes de Enseñanza Media Superior, al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva, sin antes haber recibido una instrucción específica sobre este tema, comúnmente utilizan dos estrategias fundamentales, la división de la región en figuras conocidas para las cuales creen tener herramientas para determinar sus áreas y la otra estrategia es la "estimación visual". De esta forma los estudiantes resuelven el ejercicio con aproximaciones de área, utilizando figuras (rectángulos, cuadrados, triángulos, etc.) de las cuales pueda calcular su área con más facilidad, para así poder obtener el área bajo la curva.

En esta dirección, Muñoz (2007, 2010) declara que los procedimientos para calcular integrales usando los métodos de integración, se llevan a cabo a través de ejercicios repetitivos y de una manera separada de la parte conceptual. López (2010) afirma que desde este enfoque se da privilegio a lo algorítmico, logrando que los alumnos muchas veces puedan integrar, pero no comprendan qué es la integral, ni cuál es su utilidad. Tal como lo menciona Aldana y González (2012), quienes señalan que durante su experiencia y resultados obtenidos de investigaciones realizadas como Aldana y González (2009), el aprendizaje del concepto de integral definida presenta dificultades para los estudiantes, las cuales se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; los estudiantes no establecen una conexión entre pensamiento numérico, geométrico y analítico.

De las investigaciones en torno al estudio de los teoremas del cálculo integral, se identifica que en la mayoría de los casos su tratamiento no prioriza los elementos conceptuales, se reduce a elementos procedimentales. Mejía (2009) reporta en su trabajo sobre la percepción de las nociones de conservación, comparación y cuantificación del área por estudiantes universitarios, cómo los estudiantes argumentan y perciben que el área se conserva y cuantifica. Una de las actividades que propuso a los estudiantes fue resolver la integral $\int_0^1 x(x^2+1)^2 dx$. Los estudiantes establecieron que la garantía para que el área se conserve tiene que ver con el método de integración que usa, en este caso; el cambio de variable, permitiendo obtener la misma solución de la integral definida.

Observamos que los estudiantes basan su argumentación, en el hecho de que bajo el cambio de variable, la región es transformada a otra y en tal sentido considera que la condición de conservación de área tiene que ver con el método utilizado. Sin embargo, no necesariamente es así, pues se pueden utilizar otros métodos e igual conservar la medida de área. En las actividades que reportó la investigación analizada, se identifica que generalmente cuando los estudiantes utilizan el cambio de variable, no suelen preguntarse acerca de la naturaleza de la nueva variable.

Así, Morales (2013) establece que lo anterior puede estar asociado a que en las actividades sobre la integral definida y de su resolución, propuestas a los estudiantes de nivel medio superior y de primeros semestres universitarios, no se enfatiza en los significados del cambio de variable, por un lado se introduce el cambio de variable como técnica o procedimiento de integración y por otra parte, se enuncia el teorema del cambio de variable. En el estudio de la Integral Definida, el cambio de variable, en lo fundamental, es una herramienta de transformación, que permite reducir los problemas matemáticos a modelos y/o expresiones, para las cuales se conocen técnicas y procedimientos para enfrentar con éxito su solución. En particular, en el tratamiento de solución de la integral, el teorema del cambio de variable, juega un importante papel como un elemento integrador de contenido. Además, dicho teorema tiene su base en el teorema fundamental del cálculo integral, por lo cual hace interesante su tratamiento metodológico, como elemento teórico para el desarrollo del tema de la integral definida.

Coincidimos con Ponce y Rivera (2011), cuando plantean que es común ver en los libros sobre cálculo, el estudio de las primitivas de funciones; sin embargo, la mayoría de los autores prestan poca atención a los dominios sobre los cuales las primitivas son válidas, lo que podría conducir a errores en la evaluación de integrales definidas. Ponce y Rivera (2009) ponen de manifiesto dicha situación al utilizar la sustitución universal trigonométrica para el cálculo del área bajo una determinada curva. Así, al revisar los libros de texto utilizados comúnmente para la enseñanza del Cálculo en la Universidad Autónoma de Guerrero (Apóstol, 2001; Haaser, La Salle & Sullivan, 2003; Leithold, 1998; Piskunov, 1977); se corrobora lo planteado por dichos investigadores y además, se identificó que estos textos, tratan la técnica del cambio de variable para la solución de la integral definida sin centrarse en el análisis geométrico para comprender su significado, la explicación es más en el terreno analítico. Cabe destacar que (Stewart, 2001, p. 414), representa gráficamente la región principal y la que es producto del cambio de variable, para resolver la integral propuesta. En esa dirección, se identifican dos tratamientos: el primero, el más utilizado, se resuelve la integral como si fuese indefinida y luego se evalúa en los límites de integración; considerando nula la constante de integración, situación que no favorece el sentido matemático del cambio de variable y el segundo consiste en cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable, este procedimiento está basado en el teorema del cambio de variable, en esta propiedad está la argumentación de que bajo un cambio de variable, se transforma tanto la función como el intervalo de integración y por lo tanto la región cambia de forma, pero no el valor de su área.

Diversas investigaciones destacan la importancia del tratamiento de los teoremas, enfatizando en su "enseñanza para la búsqueda, formulación y demostración" como elemento esencial, que favorece los procesos de asimilación de los contenidos matemáticos y que permite al estudiante, la fundamentación y argumentación de las habilidades de tipo procedimental y de aplicaciones (Cardozo, Molina & Ortiz, 2015; Ricardo & Moya, 2007).

González y Sigarreta (2011), en su investigación trabajan sobre el tratamiento metodológico de teoremas, desde el punto de vista de estos investigadores, esta situación típica tiene como objetivo que los estudiantes se apropien de determinados teoremas, métodos y técnicas de demostración, para la comprensión o aplicación en diferentes contextos. Además, plantean que permite el desarrollo de habilidades matemáticas, tales como: reconocer relaciones, hacer suposiciones, argumentar, comprender la lógica de las demostraciones y generalizar.

Dentro de la situación típica "tratamiento de teoremas y sus demostraciones" además del trabajo con demostraciones está el trabajo de la búsqueda de teoremas (conjetura). Los investigadores, destacan que durante la enseñanza de la Matemática, los docentes comúnmente presentan el teorema y a partir de este se busca su demostración, nuestra investigación se centrará esencialmente en la búsqueda del teorema. En tal dirección, para la búsqueda de conjeturas Ponce (2013) sostiene que es importante que los docentes "sean capaces de inducir a los estudiantes a construir un conocimiento matemático sofisticado, con la finalidad de que formulen conjeturas, representen y exploren resultados matemáticos, usen distintos argumentos para aceptar o rechazar conjeturas (incluyendo contra-ejemplos) y comunicar claramente los resultados" (p.3).

Durante el estudio de la integral y de su solución, Pérez (2004) propone que se deben considerar los casos en que el integrando sea de tipo elemental (expresiones en las cuales tienen aplicación directa las fórmulas de integración), de la forma $F(g(x))g(x)$

(factibilidad de uso del método del cambio de variable), udv (factibilidad de uso del método de integración por partes), racional o con primitivas no elementales. Sin embargo, no se promueve el análisis y discusión sobre el uso adecuado de los métodos de integración y de los significados, en particular asociado con el Teorema del Cambio de Variable.

Sin duda el tratamiento de teoremas, beneficia el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del estudiante, pero los conflictos comienzan cuando los estudiantes no reconocen la necesidad de garantizar la existencia teórica de los objetos matemáticos y el porqué de las demostraciones (Cardozo *et al*., 2015). Al respecto Ricardo y Moya (2007) opinan que para favorecer la asimilación de teoremas, los estudiantes deben sentir la necesidad de argumentar y se les debe motivar para la búsqueda de los mismos. Este proceso debe lograr en los estudiantes, un aprendizaje caracterizado por: la independencia y creatividad, razonamiento lógico y habilidades para la búsqueda de proposiciones, etc.

En la misma dirección, respecto a la asimilación del cambio de variable para la solución de la integral definida Díaz *et.al.* (2019), Cabañas-Sánchez (2011) y Paschos and Faumak (2006), ponen de manifiesto las siguientes dificultades: los estudiantes utilizan el cambio de variable, para resolver la integral definida sin atender las condiciones necesarias que permitan realizar dicho cambio y los mismos presentan insuficiencias, para argumentar el significado geométrico del cambio de variable, así como no ven la relación entre el Teorema del Cambio de Variable con el Teorema Fundamental del Cálculo.

Al respecto, Morales (2013) argumenta que una de las razones por las que ocurren estas dificultades tienen que ver con el tipo y orientación de las actividades sobre la integral definida y de su resolución, la actividad propuesta a estudiantes de nivel medio superior y de primeros semestres de la Licenciatura en Matemáticas, en las que no se enfatizan los significados del cambio de variable. Por un lado, se introduce el cambio de variable como técnica de integración y por otra parte, se enuncia el teorema del cambio de variable. Siendo más puntuales respecto a este problema, Morales, Ramírez y Sigarreta (2018), en la investigación desarrollada con estudiantes de nivel licenciatura, ponen de manifiesto la insuficiencia que existe en el tratamiento de teoremas del cálculo integral, en particular, el Teorema del Cambio de Variables.

Preocupados por la problemática que sigue persistiendo en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de Cálculo Integral, esta investigación atiende el siguiente **problema de investigación**: Insuficiente Asimilación de teoremas del Cálculo Integral en los estudiantes del nivel Técnico Superior Universitario en Matemáticas Aplicadas, de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Esta investigación está dirigida en el sentido de que al trabajar el Cálculo Integral los estudiantes sólo aplican los métodos de integración, que les permiten reafirmar procesos algorítmicos del cálculo de integrales, sin lograr que lleven a cabo el proceso de asimilación del contenido. Nuestro objetivo es que los estudiantes logren dicho proceso de asimilación. Para ello, retomando la importancia que tiene el tratamiento de los teoremas en la formación matemática de los estudiantes, como un elemento que permite la evolución de las capacidades de abstracción y el razonamiento, para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Es necesario buscar nuevas propuestas de enseñanza-aprendizaje que logren favorecer la asimilación de los contenidos del Cálculo Integral, donde sea el estudiante quien construya su propio conocimiento, a partir de un sistema de actividades asociados a los métodos de integración.

1. 2 Formulación de objetivos

En función de lo antes expuesto, nos proponemos centrar esta investigación en el estudio del teorema del cambio de variable para la resolución de la integral definida y así contribuir a favorecer su asimilación, dentro del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Integral. Por lo tanto, se plantea como **objetivo de la investigación**: elaborar una metodología integradora para favorecer la asimilación de teoremas.

Para ello, es necesario tomar en cuenta algunos aspectos importantes que nos brinden elementos necesarios para atender nuestra pregunta de investigación, entre estos, consideramos los siguientes:

¿Qué elementos son necesarios para la construcción del conocimiento? y ¿Cómo se logra la asimilación de contenidos? Tomando esto en cuenta, comenzamos a indagar sobre el proceso de construcción del conocimiento, obteniendo como resultado las bases teóricas y metodológicas en la que se sustenta la investigación.

El **objeto** de la investigación: El tratamiento de teoremas y su asimilación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en el nivel Técnico Superior Universitario en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Guerrero. En tal dirección se precisa como **campo de acción**: El Tratamiento del Teorema Cambio de Variable en el Cálculo Integral en el nivel técnico superior en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Guerrero

1.3 Preguntas de investigación

El planteamiento del problema, construido a lo largo de este trabajo de investigación, tienen como guía las siguientes preguntas científicas:

- ¿Qué fundamentos teórico-metodológicos son necesarios para elaborar una metodología integradora que favorezca la asimilación de teoremas?
- ¿Qué metodología favorece la asimilación de teoremas?
- ¿Cómo validar dicha metodología asociada al Teorema del Cambio de Variable?

Para cumplir el objetivo de la investigación y en particular, de dar respuestas a las preguntas científicas planteadas fueron propuestas las siguientes tareas de investigación:

- Determinar el estado del arte asociado al proceso de enseñanza-aprendizaje de los teoremas del Cálculo Integral.
- Investigar el tratamiento durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de teoremas del Cálculo Integral.
- Elaborar una metodología para favorecer la asimilación de teoremas en los estudiantes.

Para llevar a cabo esta investigación se utilizaron los siguientes métodos de investigación:

- Análisis de fuentes, para analizar el estado del problema, así como las bases teóricas que sustentarán la investigación.
- El método de análisis histórico-lógico, para estudiar el desarrollo del problema y los procesos de enseñanza y aprendizaje de teoremas del Cálculo Integral.
- El análisis y la síntesis, para estudiar los diferentes aspectos que componen el tratamiento teórico-metodológico de teoremas del Cálculo Integral.

Las técnicas de investigación fueron las siguientes:

- Se diseñarán encuestas y entrevistas para estudiantes, profesores e investigadores con el fin de conocer:
    - ✓ Las concepciones que se tienen sobre los teoremas.
    - ✓ Metodologías utilizadas para la enseñanza-aprendizaje de teoremas.

- Un cuasiexperimento, para constatar la incidencia de la metodología propuesta en la formación matemática de los estudiantes, mediante la variante de dos grupos (control y experimental).

CAPITULO 2.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Fundamentos Psicopedagógicos

La Filosofía se ocupa, en lo general, de los fenómenos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento; la Matemática tiene su origen en los fenómenos de la realidad objetiva y mediante abstracciones, idealizaciones, generalizaciones u otros procedimientos específicos, conduce a conceptos, proposiciones, estructuras, sistema de ideas, que a menudo, sólo en apariencia, están muy lejos de los elementos que le dieron origen.

En particular la Filosofía Dialéctica, considera al pensamiento como base del conocimiento, pero no porque reproduce la naturaleza, sino porque permite entender dicha naturaleza, es decir, establece que el mundo, la naturaleza y todo lo que nos rodea existe independientemente de nuestra conciencia. Así mismo se estudian dos realidades, una la realidad objetiva y la otra la subjetiva; la realidad objetiva está asociada con la naturaleza, todo aquello que existe fuera e independientemente de la conciencia del ser humano. La subjetiva, se construye con la conciencia a partir de lo que cada persona tiene como concepción de la vida, esto implica que cada realidad subjetiva puede ser diferente; es en esta realidad donde se sustenta y construye el reflejo mental de los objetos.

Las leyes en la que se basa la Filosofía Dialéctica son:

Ley de los saltos cuantitativos a cualitativos, muestra el modo en cómo se realiza la aparición de lo nuevo, los procesos de desarrollo van aumentando en cantidad, hasta un punto en el que la acumulación de conocimiento que se tiene no es el adecuado, para solucionar un nuevo problema, es hasta entonces, cuando se necesita un salto de cualidad.
Ley de la unidad y la lucha de contrarios, el proceso de desarrollo se desprende de la interacción y contradicción, entre los distintos objetos y fenómenos y pasan del estado de diferencia no advertida y no esencial de los aspectos que integran el fenómeno dado a las diferencias esenciales de los aspectos del todo y a los contrarios. En esta ley la contradicción juega un papel muy importante, es necesario aceptar la contradicción como la

base del desarrollo del conocimiento. ***Ley de la negación de la negación***, para que se pueda llevar acabo el desarrollo de conocimiento, lo primero que se tiene que dar es la contradicción. Esta ley propone que la base del desarrollo de las ciencias y en particular de las matemáticas son las contradicciones, esto no significa que se deje de lado todo el conocimiento acumulado, al contrario se rescatan los viejos conocimientos necesarios para el desarrollo de conocimiento actual.

Moreno-Armella and Waldegg (1993) aseveran y demuestran, cómo las posturas filosóficas y las teorías epistemológicas, relacionadas con el conocimiento matemático tienen una influencia determinante en la Educación Matemática. Así, dentro de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, es importante estudiar ¿cómo el sujeto construye su conocimiento? y ¿cómo se logra la asimilación de estos conocimientos?, para ello se toma como base en esta investigación al Constructivismo Social, que está sustentado, esencialmente, en la Filosofía Dialéctica.

El Constructivismo Social, nos ofrece los elementos necesarios para atender los aspectos de la construcción del conocimiento y tiene sus bases, en los aportes teóricos de Lev Semiónovich Vygotsky (1896-1934) y colaboradores como Luria, A. N. Leontiev, P. Ya Galperin, entre otros; y Jean Peaget (1896-1980). Actualmente, la teoría se ha enriquecido por las implicaciones y aportaciones prácticas, desarrolladas por diversos investigadores entre los que destacan Rogers (1992); Ausubel (2002); Coll, Mauri y Onrrubia (2008); Ballester (2003, 2007); García, Ortiz, Martínez y Tintorer (2009); Chávez, Fauré, y Cereceda, (2017); Ratner, (2004, 2014, 2017 y 2018). Se infiere que el objeto de estudio (realidad tanto objetiva como subjetiva) y la manera en que se puede estudiar dicho objeto están siempre sujetas a un proceso de cambio y transformación.

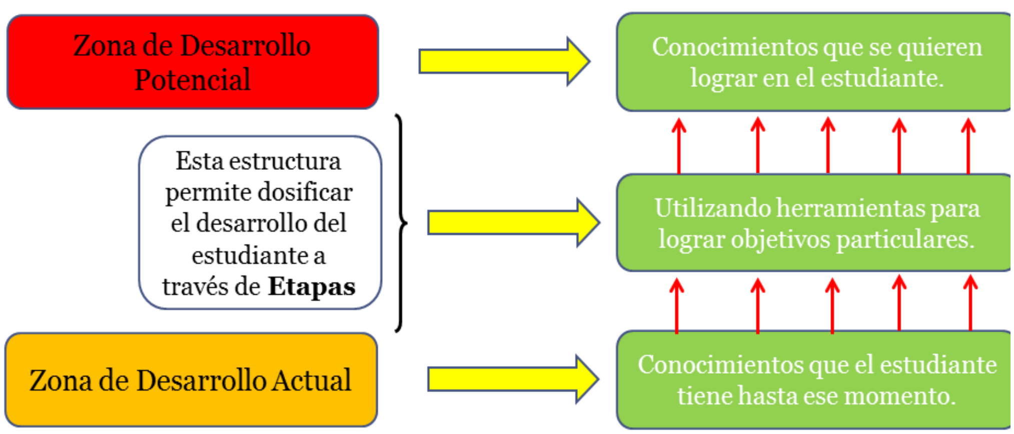
La importancia del Constructivismo Social (Cubero, 2005; Coll *et al.*, 2008; García *et al.*, 2009; Marín, 2015) es que se centra en los procesos psicológicos, de enseñanza y aprendizaje que se realizan durante actividades conjuntas en el aula de clases. Este enfoque enfatiza en las relaciones que existen entre estos procesos, el aprendizaje, entendido como el proceso de construcción de significados y de dar sentido a los contenidos y la enseñanza como el proceso que ayuda de manera sistemática y sustentada al proceso de aprendizaje, esto es posible por las secuencias de actividades conjuntas, que se llevan a cabo entre los docentes y estudiantes por periodos en los que se trabajan con actividades de acuerdo al contenido (Coll *et al.*, 2008; Londoño, 2008).

El Constructivismo Social se fundamenta en dos principios básicos:

❖ *La enseñanza guía al desarrollo.*

En la mayoría de los casos se da por hecho que el desarrollo (psíquico, cognitivo, motor) de un sujeto es fundamental para que este pueda lograr el aprendizaje de objetos de conocimientos, como lo es en el caso de México, los planes y programas de estudio consideran este criterio, respecto a esto el Constructivismo Social se fundamenta en que es la enseñanza quien guía al desarrollo (psíquico, cognitivo, motor) del sujeto, es decir, que el sujeto tenga cierta edad o desarrollo, no garantiza que pueda trabajar con un determinado contenido, es importante considerar que son la forma y las herramientas que se utilicen para la enseñanza del contenido, las que juegan un papel importante para lograr el desarrollo del sujeto. La forma de la enseñanza guía al desarrollo.

❖ *El desarrollo del conocimiento se da en dos momentos*.



Esquema 1. El desarrollo del conocimiento desde el Constructivismo Social.

El esquema anterior describe los dos momentos en los que se da el desarrollo del conocimiento, en el primer momento el sujeto se encuentra en la Zona de Desarrollo Actual (ZDA), esta zona está formada por todos los conocimientos que el sujeto ha logrado desarrollar hasta ese momento; el objetivo es llegar a la Zona de Desarrollo Potencial

(ZDP), en la que se encuentran los conocimientos que se quiere lograr en el estudiante. Esta estructura permite dosificar el desarrollo del estudiante a través de etapas, en la que cada etapa está diseñada para lograr un objetivo particular, utilizando diversas herramientas que el docente considere necesarias, se debe de aclarar que cada etapa y su objetivo particular deben estar planificados para llegar a la Zona de Desarrollo Potencial.

La teoría de Vygotsky se puede resumir en cuatro postulados:

- La base del desarrollo mental del hombre es un cambio en su situación social o de su actividad;
- La forma original de la actividad es su desempeño ampliado por un individuo en el plano externo, social;
- Las nuevas estructuras mentales que se forman en el hombre son derivadas de la interiorización de la forma inicial de su actividad
- Varios sistemas de signos desempeñan un papel fundamental en el proceso de interiorización (Davydov & Zinchenko, 2003).

Las teorías asociadas con el Constructivismo Social, surgen como un método experimental pedagógico formativo, ver como caso particular a Montealegre (1992), que examina la relación que existe entre la actividad psíquica interna y externa, analizando las etapas por las que pasa el proceso de asimilación o interiorización de una acción, esto quiere decir que la actividad externa (material) que realiza una persona, pasa por un proceso de transformación hasta que este se convierte en una actividad interna, (psíquica), a estos cambios cualitativos Galperin (1988) les llamó etapas.

Según De Posada (1994) existe un aspecto que no ha sido suficientemente contemplado y que reviste gran importancia en la enseñanza de las ciencias. Con esto se refiere a que las personas acumulan en la vida diaria experiencias, situaciones, hechos, etc., independientes entre sí. El tomar en cuenta estas experiencias, situaciones, hechos, etc., que son fruto de la práctica diaria, entonces se podría dar mayores oportunidades de producir un aprendizaje significativo.

Para el Constructivismo Social, el conocimiento puede desarrollarse a partir de una necesidad en la práctica, una interacción sociocultural y la interiorización por parte del sujeto, pero además debe actualizarse, es decir, es el resultado de reflexiones sensoriales y acciones de los individuos en contextos culturales, históricos y políticos, como por ejemplo cuando los estudiantes y maestros participan en las actividades en clases, con cada actividad o acciones realizadas, el conocimiento tiene que evolucionar o actualizarse para aparecer en la práctica concreta. El maestro es parte de la actividad para mediar y actualizar el conocimiento (Guerra, Sansevero & Araujo, 2005; Radford & Sabena 2007; Londoño, 2008). Investigadores como Vigotsky (1982), Leontiev (1981) y Talízina (1988) se interesaron en analizar el comportamiento. Vigotsky (1982) al analizar "actividad" la define como el proceso que media la relación entre el sujeto y aquella parte de la realidad (objetiva o subjetiva) que será transformada por él. Por su parte Leontiev (1981) con su Teoría de la Actividad (TA) permite realizar un análisis integral de la actividad del sujeto, explicando su estructura a partir de sus componentes principales que son: la necesidad, el sujeto, objeto, motivos y objetivos.

Dentro de la TA de Leontiev, se concibe a la actividad como un sistema de acciones y operaciones que realiza el sujeto sobre el objeto, en interrelación con otros sujetos. La acción incluye todos los elementos estructurales básicos de la actividad como: el motivo, el objetivo, lo medios de realización y el resultado, es decir, la acción está siempre dirigida a un objeto material (objetivo) o ideal y dicha acción se convierte en actividad, cuando hay un motivo. Las operaciones (medios) son los instrumentos materiales, informativos, lingüísticos y psicológicos, que posee el sujeto y que emplea en la transformación del objeto.

En la actividad, el motivo y el objetivo deben estar relacionados, pedagógicamente la actividad debe satisfacer una necesidad cognitiva y por consiguiente, sus motivos deben ser también cognitivos (García *et al.,* 2009). El maestro es parte de la actividad para mediar y actualizar el conocimiento del estudiante (Guerra, Sansevero & Araujo, 2005; Radford & Sabena, (2007); Londoño, 2008). Así como también es necesario conocer a detalle el contenido de cada materia, tanto para reorganizarlo como para establecer las formas más optimas de comunicación y colaboración entre los profesores y sus estudiantes, en las sesiones escolares (Solovieva, 2019).

2.2 Fundamentos Conceptuales

Hacia una caracterización de Asimilación

Los conceptos utilizados en las investigaciones juegan un papel importante, pero lo más importante es esclarecer la definición o la postura desde la que se va a mirar, con el propósito de dar una mejor coherencia a la investigación. El análisis desde diferentes perspectivas permite conocer lo que se dice del concepto, así como también permite discernir las diferencias entre una postura y otra, para retomar o estructurar la postura que favorezca la investigación en proceso.

Siendo este el caso, analizamos conceptos importantes para esta investigación. En un primer momento, nos enfocamos en el concepto de "asimilación" y partimos realizando el análisis desde diferentes visiones.

Para la Real Academia Española el concepto "Asimilación" significa: comprender lo que se aprende, incorporarlo a los conocimientos previos del individuo. Lo que cotidianamente se interpreta como comprender o entender cierta información.

Piaget (1975) lo caracteriza como un proceso cognitivo, en el que se trata la forma en que se incorpora nueva información al conocimiento ya existente en el sujeto.

Desde la Teoría de la Personalidad de Rogers (1992) asocia la asimilación a las experiencias vividas por el individuo, argumentando que sus experiencias permiten actualizar, mantener y desarrollar su organismo.

Ausubel (2002) considera que, para lograr la asimilación, los conocimientos que se aprenden deben relacionarse con los ya existentes y además, estos deben ser expresados por los sujetos, la asimilación desde esta perspectiva se lleva a cabo cuando el nuevo conocimiento es incorporado a las estructuras de conocimiento del alumno y este adquiere significado para él a partir de la relación lógica que se establece, entre el nuevo conocimiento y los conocimientos precedentes.

En Ballester (1992), (2003); Pijeira (2018), se considera a la asimilación como el resultado de un proceso en el que los estudiantes logran la: Comprensión, Apropiación, Representación y la Aplicación de los contenidos en diferentes contextos.

Desde el Constructivismo Social, se considera que el proceso de asimilación de la psiquis humana está dado sobre la base propia de la experiencia social y además, se considera que las relaciones sociales que se dan en un momento determinado y bajo una determinada condición cultural que contribuyen al desarrollo del conocimiento del hombre. Pero así mismo Vygotsky y colaboradores destacan, la importancia de la actividad del hombre mediatizada por las influencias históricas y culturales (García *et al.*, 2009).

Vista la asimilación desde la Teoría de Formación de las Acciones Mentales, es el resultado de un proceso en el que los estudiantes logran la comprensión, apropiación, representación y aplicación de los contenidos en diferentes contextos. El proceso de asimilación comienza cuando el sujeto actúa sobre los objetos de conocimiento, mediante un sistema de acciones, *las estructuras mentales* que ha *adquirido en su desempeño y su experiencia social* y mediante las *herramientas* o signos socioculturales. Entonces para lograr la asimilación de un contenido por parte de los alumnos, se deben considerar algunos elementos como las acciones, las operaciones, los objetivos, la motivación, las habilidades y los hábitos (García *et al.*, 2009; Sigarreta & Arias, 2009).

El término "asimilación" es un concepto fundamental para esta investigación, analizada en la literatura científica desde diferentes teorías; desde nuestra perspectiva, el Constructivismo Social, la asimilación, es como un proceso, que se inicia a partir de una necesidad y/o motivación en el individuo por conocer o interactuar con los objetos, esta interacción sujeto-objeto ocurre, en un primer momento, mediante la relación entre la necesidad cognitiva y la actividad que realiza el sujeto; dicha actividad en nuestro caso estará sustentada en la Resolución de Problemas, que al ser guiadas por un docente permite al estudiante aplicar su experiencia, conocimientos previos e intuición de una forma sistematizada, para favorecer el desarrollo del individuo.

Durante este proceso de asimilación, el sujeto (estudiante) construye y actualiza su conocimiento a partir de un sistema de acciones y operaciones, que ejerce sobre los objetos de estudio en las actividades propuestas y guiadas por el docente, nótese que aquí se establece la relación Sujeto-Sujeto, mediada por un determinado objeto, con el fin de lograr los objetivos propuestos para cada etapa del proceso de asimilación y además desarrollar en el estudiante ciertas habilidades que le permiten operar en diversos contextos.

Continuando con el análisis sobre el concepto, desde diferentes perspectivas para dar sustento teórico a la postura del concepto de "asimilación" para esta investigación, se construye la siguiente tabla.

Tabla de comparación sobre el concepto de "asimilación"

Visiones	Definición de asimilación	Cómo se desarrolla.
Cotidiano	Comprensión o entendimiento de cierta información.	*Rae*: Comprender lo que se aprende, incorporarlo a los conocimientos previos del individuo.
Piaget (1975)	Es un proceso cognitivo	Gestiona la forma en que se incorpora la nueva información al conocimiento existente.
Ausubel (2002)	Los conocimientos que se aprenden deben relacionarse con los ya existentes y son expresados por los sujetos.	Cuando el nuevo conocimiento es incorporado a las estructuras de conocimiento del alumno, adquiriendo significado para él a partir de la relación lógica que se establece entre el nuevo conocimiento y los conocimientos precedentes.
Teoría de la Personalidad C. Rogers (1992)	Asocia la asimilación a las experiencias vividas por el individuo.	Sus experiencias permiten actualizar, mantener y desarrollar su organismo.

Constructivismo social	Proceso de la psiquis humana. Está asociado a las relaciones que se establecen en un determinado momento histórico concreto.	Se desarrolla sobre la base de la experiencia acumulada por el individuo.
García, H. J et al (2009)	Comienza cuando este actúa sobre los objetos de conocimiento mediante un sistema acciones. Mediante *las estructuras mentales* que ha *adquirido en su desempeño y su experiencia social* y mediante las *herramientas* o signos socioculturales.	Se deben considerar algunos elementos como las acciones, las operaciones, los objetivos, la motivación, las habilidades y los hábitos.
Ballester (1992); (2003); Pijeira 2018	Es el resultado de un proceso.	Los estudiantes logran la: -Comprensión -Apropiación -Representación -Aplicación de los contenidos en diferentes contextos.
Teoría del Aprendizaje Robert Gagné (1970)	La información es procesada o transformada de varias formas conforme pasa de una estructura a otra.	En las fases del proceso de aprendizaje, las actividades internas como externa están relacionadas: -Motivación -Comprensión -Adquisición

		-Retención -Recuerdo -Generalización -Ejecución -Retroalimentación

El análisis realizado permitió discernir las semejanzas y discrepancias, entre las diferentes posiciones y perspectivas, respecto al proceso de asimilación desarrolladas por Ausubel (2002); Ballester *et al.*, (1992); Gagné (1970); Galperin (1995); García *et al.*, (2009); Leontiev (2005); Piaget (1975); Rogers (1992); en función de tomar una postura que favorezca nuestra investigación. Así, asumimos la *asimilación* desde las posiciones integradoras del Constructivismo Social, como un *"proceso cognitivo sustentado en las estructuras mentales que ha adquirido el individuo, en sus relaciones sociales (conocimientos previos, experiencias, habilidades, hábitos y motivaciones); que permite la comprensión, actualización, desarrollo y aplicación de un determinado conocimiento".* Así, para nuestro estudio el proceso de asimilación de teoremas estará estructurado por las siguientes etapas: 1. Comprensión; 2. Identificación; 3. Fijación; 4. Aplicación y 5. Valoración.

El desarrollo con éxito y el logro de los objetivos propuestos en cada etapa, indicará que se ha logrado favorecer la asimilación de los contenidos que se abordaron en clases.

La teoría del Constructivismo Social como base teórica para esta investigación, muestra que el proceso hacia la construcción del conocimiento y la asimilación, es un proceso continuo de tratamiento del objeto. De acuerdo a la literatura revisada no se percibe en el proceso de enseñanza-aprendizaje un tratamiento estructurado del contenido de Cálculo Integral que favorezca su asimilación, esto se debe a que el objetivo que se busca es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de integrales, utilizando los métodos y fórmulas de integración, la literatura muestra que esta forma de enseñanza no permite que el estudiante lleve a cabo un proceso de asimilación del contenido y además, que no se dé un tratamiento a los métodos de integración como teoremas y posteriormente realizar sus aplicaciones.

Esta investigación pretende aportar una **metodología, que favorezca la asimilación de teoremas del Cálculo Integral**. El término metodología ha sido objeto de múltiples interpretaciones, desde el ángulo de la actividad científica y de la propiamente educativa, algunas de ellas son:

- Sinónimo de didáctica especial (Ej. Metodología de la enseñanza de la matemática u otras asignaturas).
- **Vía para dirigir el proceso de enseñanza de determinados conocimientos** (Ej. Metodología para la enseñanza de las vías de solución de problemas matemáticos, metodología para la enseñanza de la lectura).
- **Manera de organizar determinada actividad o proceso educacional** (Ej. Metodología para el desarrollo de la evaluación).
- Vía para dirigir la formación de determinadas orientaciones, cualidades, componentes o rasgos de la personalidad (Ej. Metodología para la formación de valores, metodología para la formación de la laboriosidad).
- Asignatura para enseñar a investigar (metodología de la investigación).
- Forma específica de estructurar y aplicar uno o varios métodos de una investigación.
- Objetivo y resultado de la investigación. (De Armas, 2010).

El término metodología (nuestro objetivo) en esta investigación, se entenderá como un sistema de acciones y operaciones que permita organizar, estructurar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de un determinado contenido.

2. 3 Fundamentos Metodológicos

2.3.1 Tratamiento de Teoremas

Los aspectos metodológicos y matemáticos para esta investigación, están sustentados por la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM) (Ballester *et al.*, 1992). La MEM es un conjunto de conocimientos teóricos-prácticos, que están sustentados en métodos, estrategias, principios y procedimientos que debe considerar el docente para guiar al estudiante, durante el proceso de asimilación de los contenidos matemáticos (conocimientos, habilidades, actitudes y valores).

La MEM trabaja con situaciones típicas, una situación típica se denomina al tipo de actividad de enseñanza-aprendizaje, con una determinada estructura objetivo-contenido que agrupa todos los casos semejantes. Es decir, todas aquellas situaciones reales en la enseñanza de una o varias asignaturas, que poseen semejanza con respecto a determinados parámetros esenciales, especialmente, con respecto a la estructura de los objetivos y a la estructura objetivo-materia. Se consideran situaciones típicas de la enseñanza de la matemática entre otras a las siguientes:

SITUACIONES TÍPICAS EN LA METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMTÁTICA (STEM)
Elaboración de conceptos y sus definiciones.
Tratamiento de teoremas y sus demostraciones.
Resolución de problemas y ejercicios.
Construcción y aplicación de sucesiones con carácter algorítmico.
Realización de construcciones geométricas.

Para atender nuestro problema de investigación, nos enfocaremos en la segunda Situación Típica en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, que consiste en el "Tratamiento de teoremas y sus demostraciones". Los teoremas son las proposiciones verdaderas más importantes de la Matemática. Son las leyes que rigen a la Matemática.

Expresan las relaciones entre los conceptos que se abordan; su tratamiento en la enseñanza de la Matemática permite el desarrollo de múltiples habilidades matemáticas. Con el tratamiento metodológico de teoremas, se pretende que los estudiantes comprendan la esencia matemática y funcional de las relaciones expresadas en ellos y que puedan aplicarlos, en la fundamentación de sus afirmaciones y razonamientos, así como en la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos (Ballester *et al.*, 1992; Ballester, 2007; Cruz, 2006; Martínez, Infante & Brito, 2017).

Como nuestro objetivo es la asimilación de teoremas, abordaremos los procesos parciales del tratamiento de teoremas a través de la resolución de problemas, de forma que le permitan al estudiante formular una conjetura y/o suposición. En esta dirección, planteamos un conjunto de conocimientos teórico-prácticos sustentados en métodos, estrategias, principios y procedimientos, que debe considerar el docente para guiar al estudiante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Desde el punto de vista metodológico, el tratamiento de teoremas en función de favorecer su asimilación está estructurado en dos grandes etapas:

Búsqueda del Teorema	Buscar suposiciones. Plantear una tesis. Formular un teorema.
Búsqueda de la demostración	Buscar una idea de demostración. Plantear un plan de demostración. Desarrollar la demostración.

Procesos parciales para el tratamiento de teoremas

1. ***Procesos parciales para la búsqueda de un teorema***.

Las acciones y operaciones del docente y los estudiantes, deben estar dirigidas a realizar un proceso de trabajo con actividades específicas (sistema de problemas) que permitan establecer una determinada suposición o conjetura. En este sentido, la búsqueda parcial está en relación directa con los recursos heurísticos y la resolución. Dentro de los recursos heurístico se tomarán en cuanta, entre otros, los siguientes: probar, comprobar, aplicar analogías, observación de ejemplos parciales, observación de casos especiales, casos límites, sustituir conceptos por definiciones operantes, formulación de recíprocos y la formulación de la suposición (ver Ballester, 2007; Ballester *et al.*, 1992; Cruz, García & Sigarreta, 2016).

2. ***Procesos parciales en la búsqueda de ideas para la demostración*.**

Búsqueda de ideas para la demostración. El punto de partida es el análisis del problema que se está tratando y para realizar la demostración, se deben considerar algunas preguntas importantes como: ¿de qué tipo es la proposición a demostrar?, ¿es una proposición existencial o universal?, ¿en qué dominio matemático radica el problema a demostrar?, ¿es posible ilustrar el problema a demostrar mediante una figura apropiada?, ¿cuáles son las premisas y la tesis del teorema?

Tomando en cuenta las reflexiones sobre estas cuestiones, se formula un plan de demostración, se analizan los medios disponibles (definiciones, teoremas) y procedimientos, posteriormente se decide el método de demostración: directa o indirecta.

3. ***Realización de la demostración***

Se ejecutan las ideas y el plan de solución propuestos, destacando las inferencias y fundamentaciones necesarias durante el proceso de solución.

El último momento de la demostración de un teorema matemático, está formado por las consideraciones retrospectivas y perspectivas, las cuales consisten en lo siguiente:

- Se analiza cómo se procedió en la búsqueda del teorema y su demostración, los métodos utilizados, si se ha tenido con ellos y si se podrá proceder en otros casos de la misma forma.
- Se trata de ordenar el teorema demostrado en el sistema existente de teoremas, es decir, se investiga si el teorema puede generalizarse, si tiene casos particulares interesantes o si tiene un recíproco verdadero.

La demostración es un procedimiento riguroso y legítimo, para determinar el valor de verdad de una proposición utilizando reglas de inferencia lógicas.

La situación típica que se aborda en esta investigación es: Tratamiento de teoremas y sus demostraciones; en nuestro caso para este estudio se trabajará fundamentalmente sólo en la parte del tratamiento del teorema, para ello abordaremos únicamente los procesos parciales del tratamiento de teoremas, que le permitan al estudiante formular una conjetura o suposición. Entonces los procesos parciales que se abordan son: Búsqueda del teorema, Formulación del teorema y Proponer una idea de la demostración.

En el proceso de Búsqueda de la Demostración, únicamente abordaremos el proceso de "proponer una idea de demostración" el objetivo principal es que el estudiante, logre dar una propuesta de la demostración fundamentada en sus razonamientos y argumentos, no es el objetivo que el estudiante estructure o escriba una demostración formal de la conjetura, que se está abordando.

Entre los aspectos a desarrollar en el estudiante, con el tratamiento de la búsqueda de teoremas se deben considerar:

- Argumentar y fundamentar valores de verdad de proposiciones.
- Reformular proposiciones conocidas, saber negarlas y hallar sus recíprocos.
- Establecer relaciones con otros teoremas conocidos.
- Formular una suposición.

2.3.2 Resolución de Problemas

En la práctica del tratamiento de teoremas, se desarrollará a través de la resolución de problemas, en las que se deben construir una serie de inferencias lógicas para hallar o comprobar una determinada suposición. En investigaciones, como la de Cedeño *et al.* (2018); Murcia y Valdivieso (2013); Silva *et al.* (2019); se emplea la resolución de problemas como estrategia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, concluyen que se ha logrado a partir de la resolución de problemas el desarrollo de habilidades, experiencias y mejoramiento de procesos de comprobación, de conjeturas y de validación de resultados.

El objetivo de la Matemática es resolver problemas y aprender matemáticas significa, generar las habilidades para formular, reformular y resolver problemas, verificar sus soluciones y efectuar generalizaciones. Investigadores de la talla de (Polya (1999); Bransford & Stein (1987); Schoenfeld (1985, 2001); Sigarreta & Laborde (2004); Silva *et al.* (2019), Valle *et al.*, (2007); Campistrous & Rizo, (1999); Pérez & Ramírez, (2011); Valle & Curotto, (2008); Santos-Trigo & Moreno-Armella (2016); Cala, Buendía & Herrera (2017)), han centrado sus trabajos en el proceso de Resolución de Problemas proponiendo diferentes técnicas y estrategias, mismas que hacen referencia a un patrón de decisiones que se deben tomar para lograr la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr cierto objetivo al resolver un problema.

Entre las investigaciones acerca de la resolución de problemas destaca Polya (1976) "… Se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de la dificultad, de saltar un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados". Su estrategia para la resolución de problemas está estructurada por cuatro fases:

A) Comprender el problema
B) Concebir el plan
C) Ejecutar el plan
D) Vista retrospectiva

Para Charles y Lester (1982) resolver problemas es "el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido".

Los problemas matemáticos han sido empleados como: objetivo de aprendizaje, actividad docente, instrumento de aprendizaje, elemento evaluador, etc., de acuerdo con los intereses de los investigadores o docentes. Actualmente la resolución de problemas matemáticos se ha convertido en un recurso importante para favorecer el desarrollo de los estudiantes. Situación que está en relación directa con el objetivo fundamental de la enseñanza de la matemática, aprender a resolver problemas, que significa generar las habilidades para formular, reformular y resolver problemas, verificar sus soluciones y efectuar generalizaciones. Algunas acciones importantes para favorecer el proceso de asimilación de teoremas a partir de la resolución de problemas son la ejercitación, profundización y la sistematización de conocimientos asociados al teorema a tratar.

La ejercitación, se lleva a cabo para fijar habilidades, como ser capaces de identificar las premisas de teoremas, en diferentes condiciones y ayudar a deducir las conclusiones a partir de ellas. La profundización, está encaminada hacia la comprensión del enunciado del teorema y de su reconocimiento cuando se les presenta en diferentes contextos; en este proceso el estudiante debe tener dominio del lenguaje y un pensamiento crítico, para realizar las tareas (formación de recíprocos, negaciones y contraposiciones) propuestas para lograr la profundización del tratamiento de teoremas. En la sistematización, se analizan propiedades comunes o diferentes y se hacen visibles las relaciones entre los diferentes componentes del saber, esto permite articular hechos aislados en la estructura del saber. Es decir, se construye un sistema de conocimientos; teniendo en cuenta el manejo de los recursos heurísticos.

En esta parte los procesos heurísticos, desempeñan un papel fundamental tanto en la resolución de problemas como en el tratamiento metodológico del teorema. Por ejemplo, se pueden aplicar analogías, se hacen observaciones, análisis de ejemplos y contraejemplos, se estudian casos especiales y la posibilidad de formar recíprocos de teoremas conocidos, se mide, se prueba y se compara, se hacen trasformaciones de tipo: geométricas, analíticas y algebraicas (ver Campos, 2019; Cruz, García & Sigarreta, 2016). Cabe mencionar que la resolución de problemas va más allá de aplicar fórmulas, pues estimula la capacidad de crear, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar, comunicar ideas, razonar y analizar situaciones para luego resolverlas (Pérez & Ramírez, 2011).

Para la elaboración de los problemas asociados con el teorema del cambio de variable trabajaremos con la caracterización de problema planteado por Sigarreta y Laborde (2004):

1) Existirá una situación inicial y una situación final.

2) La vía de pasar de una situación a otra debe ser desconocida o que no se pueda acceder a ella de forma inmediata.

3) Debe existir el estudiante que quiera resolverlo y dispone de los elementos necesarios para buscar relaciones que le permitan transformar la situación.

Para Rubinstein (1964) el proceso mental es un acto regulado y orientado conscientemente, hacia la solución de una determinada tarea o un determinado problema y está, por tanto, vinculado a la práctica y a toda la vida psíquica del individuo, como un sistema de acciones intelectuales. A su vez, las acciones se sustentan en operaciones, o sea, en las vías, procedimientos, métodos, formas mediante las cuales la acción transcurre. Así, las acciones están subordinadas en el proceso de la actividad, a un objetivo y las operaciones, a las condiciones en que la actividad se desarrolla. En particular, Silva *et al.* (2019), se sustentan en la Teoría Constructivista del aprendizaje y resaltan la importancia de los "conocimientos previos" los cuales son fundamentales para el éxito, en la resolución de problemas, especialmente en los que contienen conceptos específicos, en cuyo caso los errores conceptuales obstaculizan el proceso de resolución, además aclaran la tendencia a la memorización de fórmulas en detrimento de su comprensión y aplicación.

De esta manera las actividades y problemas propuestos por el docente, al igual que las acciones y operaciones deberán estar diseñadas con un objetivo particular, para que en conjunto se logren los objetivos generales. El conocer los objetivos particulares y generales puede servir de elemento regulador del proceso, al permitirle al docente orientar su actividad.

La estrategia para la Resolución de Problemas que se implementará en este trabajo está integrada por las siguientes acciones:

Acción 1. Aproximación al problema.

Acción 2. Profundización en el problema.

Acción 3. Selección de una estrategia de trabajo.

Acción 4. Aplicación de la estrategia de trabajo.

Acción 5. Valoración.

La relación entre la Resolución de Problemas y la Asimilación de Teoremas, radica esencialmente en que ambas situaciones típicas de la enseñanza de la matemática, exigen procesos de búsqueda, representación, demostración y aplicación, en el primer caso llegar a la solución y reformulación de un problema, en el segundo mediante procesos parciales buscar una formulación del teorema y una posible demostración. Además, con ambas actividades se favorece el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. En este trabajo se hará énfasis en la asimilación del teorema de cambio de variable, mediante la resolución de problemas, permitiendo así una aproximación a la formulación de dicho teorema. El objetivo de nuestra metodología se centra en capacitar a los estudiantes para la búsqueda y formulación de un determinado teorema a partir de la resolución de un sistema estructurado de problemas.

CAPÍTULO 3

PROPUESTA Y VALIDACIÓN DE LA METODOLOGÍA

3.1 Propuesta de la Metodología para favorecer la asimilación de teoremas

La metodología propuesta está sustentada en el Constructivismo Social, considerando la evolución y desarrollo del pensamiento, como base gnoseológica y analizando el resultado de la interacción constante entre los objetos de conocimiento y la acción de los sujetos, que tratan de conocerlos, mismos que están condicionados por el contexto sociocultural, los medios de investigación y el conocimiento previo sobre el objeto (sujeto).

Cabe destacar que para esta investigación "metodología" se asumió, como un *"sistema de acciones y operaciones que permite organizar, estructurar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de un determinado contenido"*. En particular, en este caso de estudio, el contenido a tratar serán los teoremas asociados al Cálculo Integral (particularmente el Teorema del Cambio de Variable).

La metodología que se propone en esta investigación tiene como objetivo: Favorecer la asimilación de teoremas del Cálculo Integral, a partir de su tratamiento metodológico y la Resolución de Problemas.

El siguiente esquema muestra, las etapas de la metodología que se propone y que están asociadas con las etapas generales de la Teoría de la Actividad (orientación, ejecución y control), como vía para lograr una metodología efectiva, clara y específica para los docentes proponemos y desarrollamos un refinamiento en dichas etapas.

Para esta metodología se consideran cinco etapas: *aproximación, planeación, concreción, valoración y control*, cabe destacar que en cada etapa se realiza un control parcial. Es importante destacar, que la Teoría de la Actividad propone la etapa de Control al final del proceso de enseñanza-aprendizaje, para nuestra propuesta se considera como una acción el *control parcial,* que se lleva a cabo durante cada etapa de la metodología y que tiene la ventaja de realizar acciones pertinentes para garantizar el logro de los objetivos, conocer la calidad del conocimiento que se está desarrollando en el estudiante y analizar las acciones educativas realizadas por el docente.

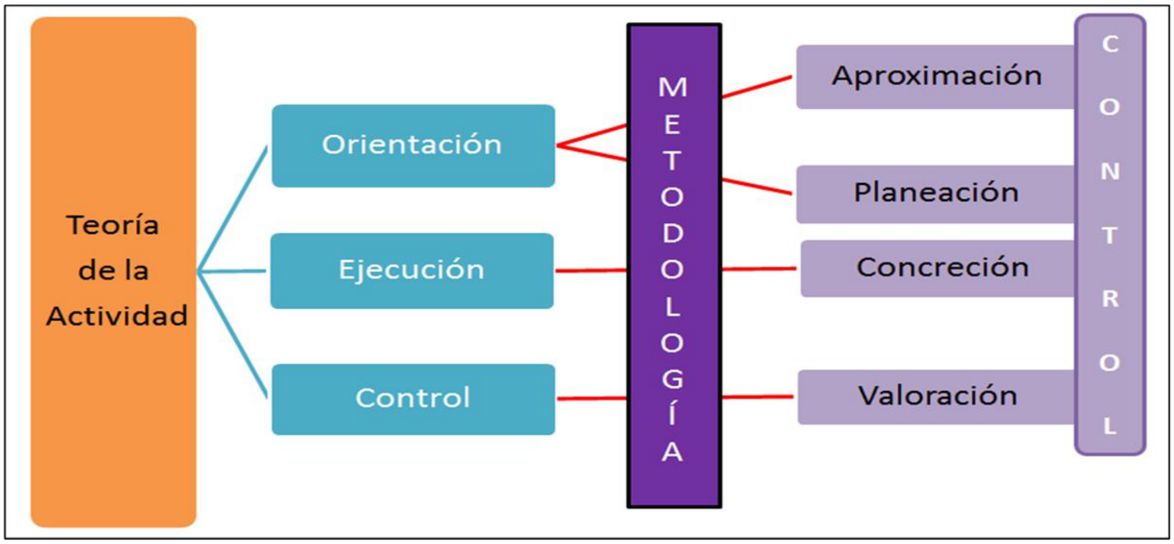


Diagrama 1. Relación entre las etapas de la Teoría de la Actividad y la Metodología para el Tratamiento de Teoremas.

La propuesta metodológica para lograr la asimilación de teoremas, se estructura en relación a la situación típica: Tratamiento de Teoremas y su demostración. Misma que estará sustentada, en las etapas del proceso de Resolución de Problemas y en las acciones y operaciones asociadas con la Teoría de la Actividad. A continuación se presenta la propuesta de la Metodología Integradora para el Tratamiento de Teoremas, estructurada por etapas asociadas a la Teoría de la Actividad con algunas variantes.

METODOLOGÍA INTEGRADORA PARA FAVORECER LA ASIMILACIÓN DE TEOREMAS		
APROXIMACIÓN	1. Comprender los fundamentos teóricos que permiten garantizar la puesta en práctica de la metodología propuesta. 2. Conocer al estudiante y el medio sociocultural donde se desarrolla la actividad.	i. Analizar y sintetizar cada fundamento teórico de la metodología propuesta desde el punto de vista epistemológico. ii. Relacionar los principales elementos asociados con los fundamentos teóricos considerando las condiciones socioculturales bajo las cuales se desarrolla la actividad. iii. Diagnosticar integralmente al estudiante, considerando las esferas: cognitiva, afectiva-motivacional y volitiva asociada al contexto donde se desarrolla la actividad.
PLANEACIÓN	3. Plantear los objetivos a lograr la asimilación de teoremas. 4. Determinar los elementos necesarios para la asimilación de teoremas. 5. Diseñar el sistema de actividades para lograr los objetivos generales.	i. Establecer un orden jerárquico (depende de la importancia del teorema dentro de la formación matemática y de los resultados del diagnóstico) de los teoremas del tema, en función de seleccionar el teorema a tratar. ii. Elaborar un perfil integral de los estudiantes a partir de los resultados del diagnóstico. iii. Considerar el momento del desarrollo del contenido (cuáles son los temas que los estudiantes necesitan o están en posición de aprender). iv. Realizar una actualización de conocimientos (orientaciones

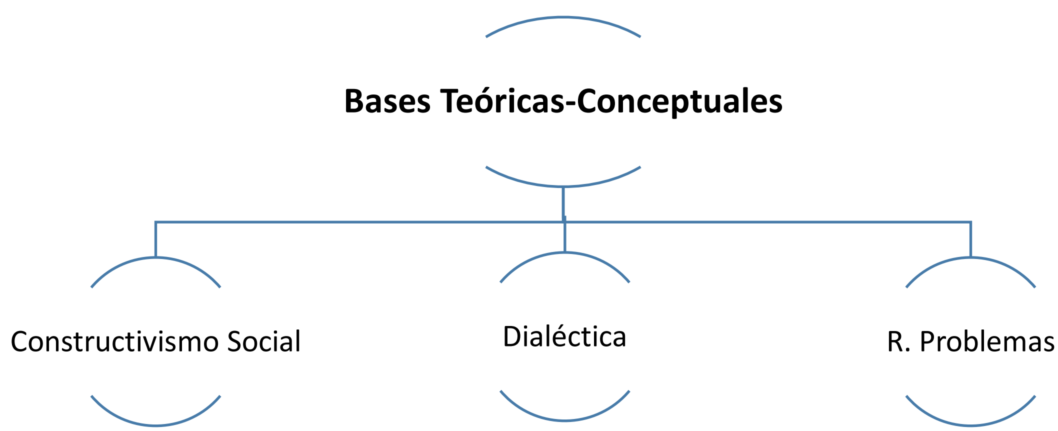
		para la búsqueda, representación y aplicación de los teoremas). v. Diseñar un sistema de tareas y/o problemas considerando los resultados del diagnóstico (conocimientos, habilidades, actitudes, hábitos y valores), en función de lograr el objetivo.
CONCRECIÓN	6. Selección del teorema a tratar, en función de su alcance tanto teórico como práctico. 7. Concretar los objetivos particulares a lograr en el proceso de asimilación del teorema 8. Seleccionar los contenidos necesarios y suficientes asociados con el teorema. 9. Aplicación del sistema de actividades.	i. Considerar el perfil de los estudiantes para el tratamiento del teorema. ii. Identificar el sistema de conocimientos precedentes y futuros asociados al teorema. iii. Identificar teoremas y/o corolarios relacionados con el teorema a tratar. iv. Realizar una actualización de conocimientos asociados al teorema a tratar y de los objetivos propuestos v. Analizar e integrar dentro del sistema de tareas y/o problemas los elementos más importantes de su medio sociocultural. vi. Preparar las condiciones del ambiente para la aplicación del sistema de actividades. En esta parte se consideran las etapas del proceso de asimilación a través de la estrategia propuesta para la resolución de problemas. De las relaciones establecidas,

		emergen las acciones y operaciones que se llevarán a cabo. vii. Establecer relaciones sujeto-sujeto para favorecer el desarrollo cooperativo entre estudiantes-estudiante y estudiante-profesor en las actividades.
VALORACIÓN	10. Análisis crítico del sistema de acciones y operaciones realizadas por los docentes y estudiantes. 11. Retroalimentación a partir de las acciones y operaciones. 12. Análisis y evaluación de los resultados de las actividades.	i. Cabe mencionar que cada una de las etapas del proceso lleva una acción de Control parcial. Y en esta etapa de Valoración se hace un control global a partir de los controles parciales. ii. Reflexionar sobre el sistema de acciones y operaciones, ¿son las adecuadas para lograr los objetivos? iii. Reflexionar sobre los métodos aplicados, los procedimientos, resultados y errores, con la finalidad de valorar críticamente la vía utilizada para la asimilación del teorema. iv. Corroborar el logro de los objetivos propuestos. v. Reformular y/o enriquecer el sistema de actividades a partir de la experiencia ganada en el proceso.

La metodología que se propone está asociada con las etapas generales de la Teoría de la Actividad (orientación, ejecución y control), en nuestro caso como vía para lograr una metodología efectiva, clara y específica para los docentes proponemos y desarrollamos un refinamiento en dichas etapas.

ETAPA DE APROXIMACIÓN

Acción 1. Comprender los fundamentos teóricos que permiten garantizar la puesta en práctica de la metodología propuesta.



Queda al criterio del docente indagar sobre los fundamentos teórico-conceptuales y metodológicos que sustentan la metodología que se implementará. Los fundamentos teórico-conceptuales, brindan la información necesaria sobre el proceso del desarrollo del conocimiento y los conceptos fundamentales de la investigación, los fundamentos metodológicos muestran los elementos, métodos, procesos y acciones que se deben considerar para favorecer la asimilación de teoremas. La comprensión de este conjunto de elementos teóricos, le permitirá al docente lograr los objetivos propuestos.

Acción 2. Conocer al estudiante y el medio sociocultural donde se desarrolla la actividad.

Actualmente, desde el Constructivismo Social el acercamiento al sujeto es esencial para la modificación y actualización de su conocimiento. Entonces, dado que el estudiante juega un papel muy importante dentro de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es tarea del docente indagar sobre la formación actual del estudiante, con el fin de conocer los conocimientos (contenido, habilidades, actitudes, hábitos y valores) que posee, así como también la situación sociocultural en la que se está desarrollando.

Para conocer a los estudiantes, se le propone al docente realizar un diagnóstico, este le permitirá conocer la situación en la que se encuentran, sus conocimientos actuales y potenciales y sus debilidades en el área a tratar. Con el objetivo de brindar una atención personalizada (si es necesaria) antes de iniciar el tratamiento de teoremas en clase. En esta investigación, cuando hablamos de *conocimientos* hacemos referencia al contenido, habilidades, actitudes, hábitos y valores que poseen o se pretenden desarrollar en los estudiantes.

El diagnóstico se debe realizar, en lo fundamental, en forma de cuestionario con preguntas abiertas para evitar interferir en las respuestas de los estudiantes, además debe realizarse cada vez que se aborde un determinado teorema, centrándose en los siguientes aspectos:

i. **Esfera Cognitiva**. Aplicar un cuestionario diagnóstico centrado en los *conocimientos previos-potenciales del estudiante*, así como en su c*onocimiento sobre la aplicación de procedimientos heurísticos*, *para la resolución de problemas,* en relación al campo de la Matemática donde radican los teoremas.

Las interrogantes deben estar enfocadas, esencialmente, en los conceptos que están relacionados con el teorema a tratar, teniendo en cuenta sus relaciones y diferencias. Además, se debe indagar sobre los procedimientos heurísticos en la resolución de problemas, que posee el estudiante, tales como el uso de principios, reglas y estrategias en la resolución de problemas.

ii. **Esfera Afectiva-Motivacional**. Aplicar un cuestionario centrado en *los intereses cognitivos del estudiante*, en relación al campo de la Matemática donde radica el teorema y el medio sociocultural donde se desarrolla la actividad.

Las preguntas deben estar planteadas, respecto a los temas vistos durante el curso y que están relacionados con el teorema a estudiar. El docente debe identificar las preferencias, motivaciones e intereses que tiene el estudiante, respecto a los contenidos que se relacionan con dicho teorema.

iii. **Esfera Volitiva**. Aplicar un cuestionario diagnóstico centrado en determinar si el estudiante, *posee la capacidad o disposición para enfrentar con éxito una determinada actividad.*

En esta parte se le presentan al estudiante, problemas anteriormente seleccionados que permitan determinar, si posee diversas cualidades de la personalidad tales como: perseverancia, tomar decisiones, ser crítico y autocrítico, si acepta o no ayuda de sus compañeros.

El diagnóstico, además de dar a conocer los conocimientos actuales y potenciales del estudiante, también permite que el docente obtenga información necesaria para la orientación de las actividades a desarrollar (tanto por el mismo docente como por los estudiantes).

ETAPA DE PLANEACIÓN

Acción 3. Plantear los objetivos a lograr la asimilación de teoremas.

Los objetivos generales y particulares a lograr en el estudiante, deben estar en función de la derivación gradual de los mismos, teniendo en cuenta fundamentalmente el plan de estudios de la asignatura correspondiente.

El docente deberá estructurar un plan de acción, en el que se atienda cada uno de los aspectos a desarrollar en el estudiante y que estén expresados en el plan de estudios. La metodología propuesta al estar sustentada en las etapas del proceso de Resolución de problemas, está dotada de acciones y operaciones, para que se lleven a cabo los procesos de *razonamiento, argumentación y estructuración de ideas* para favorecer al objetivo propuesto.

Acción 4. Determinar los elementos necesarios para la asimilación de teoremas.

Dentro de los elementos necesarios para la asimilación de teoremas, se encuentran los metodológicos. Son un conjunto de conocimientos teóricos-prácticos sustentados en métodos, estrategias, principios y procedimientos que debe considerar el docente para guiar al estudiante, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos. Como nuestro objetivo es la asimilación de teoremas, para ello abordaremos los procesos parciales del tratamiento de teoremas a través de la resolución de problemas, de forma que le permitan al estudiante formular una conjetura y/o suposición. Los procesos parciales que se abordan son: Búsqueda del teorema y Formulación del teorema.

En esta parte los procesos heurísticos desempeñan un papel fundamental. Por ejemplo, se pueden aplicar analogías, se hacen observaciones y análisis de ejemplos y contraejemplos, se analizan casos especiales, se analiza la posibilidad de formar recíprocos de teoremas conocidos, se mide, se prueba y se compara, se hacen trasformaciones de tipo: geométrico, analítico, gráfico y se busca la transición de una a la otra, etc.

Acción 5. Diseñar el sistema de actividades para lograr los objetivos generales.

Esta etapa consiste en realizar la planeación de clases, el diseño de las actividades y la organización del tiempo que se necesita, para desarrollar cada actividad que permitan lograr los objetivos propuestos por el plan de estudios. Es importante que el docente comprenda los elementos que son necesarios para el tratamiento de teoremas, esto le permitirá diseñar de manera organizada, los problemas, las acciones y operaciones a realizar en las actividades que proponga.

Para la elaboración de los problemas trabajaremos con la caracterización de problema planteada por Sigarreta y Laborde (2004):

1.- Existirá una situación inicial y una situación final.

2.- La vía de pasar de una situación a otra debe ser desconocida o que no se pueda acceder a ella de forma inmediata.

3.- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo.

4.- El estudiante dispone de los elementos necesarios para buscar relaciones que le permitan transformar la situación.

Es necesario que el docente tenga claridad, de la relación que existe entre acciones, operaciones y actividad como elementos importantes, para el desarrollo de conocimiento. Para Rubinstein (1964) el proceso mental es un acto regulado y orientado conscientemente, hacia la solución de una determinada tarea o un determinado problema y está, por tanto, vinculado a la práctica y a toda la vida psíquica del individuo, como un sistema de acciones intelectuales. A su vez, las acciones se sustentan en operaciones, o sea, en las vías, procedimientos, métodos, formas mediante las cuales la acción transcurre. Así, las acciones están subordinadas en el proceso de la actividad, a un objetivo y las operaciones, a las condiciones en que la actividad se desarrolla.

De esta manera las actividades y problemas propuestos por el docente, así como las acciones y operaciones deberán estar diseñadas con un objetivo particular, para que en conjunto se logren los objetivos generales. El conocer los objetivos particulares y generales puede servir de elemento regulador del proceso, al permitirle al docente orientar su actividad. Considerando el sistema de actividades, los problemas diseñados y los resultados del diagnóstico, el docente debe trabajar en las deficiencias, que muestren los estudiantes para la asimilación de teoremas.

ETAPA DE CONCRECIÓN

Esta etapa se enfoca en concretar un plan de acción, aquí el docente deberá delimitar su contenido o teorema, plantear los objetivos particulares que desea lograr con los estudiantes, diseñar las actividades y estructurar el protocolo que seguirá en el aula; la otra parte se enfoca en la interacción entre el docente y los estudiantes, que se debe de desarrollar durante las actividades propuestas.

Acción 6. Selección del teorema a tratar, en función de su alcance tanto teórico como práctico.

Para la selección del teorema a tratar, se debe contemplar los aportes que puede brindar su tratamiento metodológico, entre los aportes que puedan ofrecer se deben destacar los conocimientos, habilidades, actitudes y valores a desarrollar en el estudiante y que estén relacionados con los objetivos generales y particulares a lograr.

Acción 7. Concretar los objetivos particulares a lograr en el proceso de asimilación del teorema.

En la enseñanza de la Matemática, el tratamiento de teoremas permite desarrollar en el estudiante, habilidades para actuar en diversas situaciones o resolver problemas intramatemáticos y extramatemáticos.

Para esta acción es necesario que el docente considere:

- Los objetivos generales que persigue el programa de estudios y los objetivos particulares asociados al contenido.
- Los resultados del diagnóstico, que indicarán los conocimientos (habilidades, actitudes, valores) del estudiante, algunos objetivos particulares pueden estar enfocados a trabajar en las deficiencias de los estudiantes, para así lograr los objetivos asociados al contenido.
- El contenido o teorema que se abordará.
- El ambiente sociocultural en el que se desarrolla la actividad.

Los objetivos particulares estarán, en un principio, a consideración del docente, tomando en cuenta los resultados del diagnóstico de los estudiantes. Con base en estos puntos, se deben plantear las actividades, que permitan lograr los objetivos particulares y generales.

Acción 8. Seleccionar los contenidos necesarios y suficientes asociados con el teorema.

Un punto muy importante es que los estudiantes, deben poseer los conocimientos básicos que le permitan enfrentar con éxito el teorema a tratar. Para esta acción el docente debe seleccionar los contenidos que les serán de utilidad a los estudiantes, para lograr la asimilación del teorema. Antes de abordar el teorema debe realizar la actualización de conocimientos: definiciones, relaciones, métodos, estrategias, proposiciones o teoremas para que el estudiante tenga en su poder los elementos necesarios, para el desarrollo de la actividad.

Acción 9. Aplicación del sistema de actividades.

Esta etapa se caracteriza por la ejecución del sistema de actividades y la interacción que se da, entre sujeto-sujeto a través de preguntas heurísticas o impulsos que permitan desarrollar la clase en conjunto, para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante con el propósito de favorecer la asimilación de teoremas del Cálculo Integral.

Para realizar esta acción se necesita, trabajar en un ambiente adecuado (sin ruidos y distracciones), que cuente con las condiciones básicas de un contexto de clases. La organización del grupo queda sujeta a las consideraciones del docente y al diseño de sus actividades, trabajar de forma individual, en parejas o en equipo.

A continuación se muestra la tabla que imbrica las etapas del proceso para la resolución de problemas con las del proceso de asimilación, así como también las operaciones a realizar en cada etapa para lograr un resultado favorecedor en el trabajo de las actividades.

SISTEMA DE ACCIONES-OPERACIONES, PARA FAVORECER LA ASIMILACIÓN DE TEOREMAS		
ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (ACCIONES)	ETAPAS DEL PROCESO DE ASIMILACIÓN	OPERACIONES
Aproximación al problema	**Comprensión**	- Leer el problema. - ¿Son familiares para ti todos los términos que intervienen en la formulación del problema? - Enunciar el problema con tus propias palabras. - Precisar lo dado y lo que se busca. - Identificar los conocimientos que se relacionan con lo que se da y se busca.

		- ¿Es un problema intramatemático o extramatemático? - ¿A qué campo de conocimientos asocias el problema planteado? - ¿Qué tipo de problema vas a enfrentar? - ¿Requiere el uso de conocimientos matemáticos? - ¿Has visto alguno formulado de manera parecida? - ¿Es un problema relacionado con tu entorno sociocultural?
Profundización en el problema	**Identificación**	- Determinar los conocimientos necesarios para enfrentar el problema. - ¿Has visto alguno formulado de manera parecida? - Establecer analogías. - Experimentar con otros datos. - Proponer regularidades. - ¿Se han comprobado todos los casos posibles? - Subraya las expresiones que consideres de mayor valor semántico en el problema. - Busca sinónimos y antónimos de los términos que estimes fundamentales. - Establece la(s) incógnita(s), es decir, qué es lo que se busca. - Determina los datos que se dan de manera directa en la formulación del problema. - ¿Entre qué valores deberá encontrarse? - En un segundo momento se puede pensar en elaborar un esquema, diagrama, tabla, etc. - ¿Son suficientes o sobran datos? - ¿Existen elementos contradictorios?
Selección de una vía de	**Fijación**	- Transformar el problema en otro equivalente.

trabajo		- ¿Cómo se pueden relacionar los datos con la(s) incógnita(s)? - ¿Qué inferencias se pueden hacer de los datos encontrados? - Evaluar contraejemplos. - Utilizar correctamente la terminología y la simbología matemática. - Escoger un lenguaje apropiado o una notación adecuada. - Delimitar qué conocimientos se relacionan con los elementos del problema. - Fundamentar las ideas, juicios y argumentos. - Seleccionar las propiedades o definiciones que te puedan resultar útiles. - Suponer el problema resuelto. - ¿En qué campo de conocimientos se mueve el problema planteado: aritmético, algebraico o geométrico? - Delimitar qué sistema de conocimientos se relacionan con los elementos del problema. - ¿Cuáles de ellos tienen relación con la premisa o la tesis del problema? - ¿Podría darse una posible respuesta?
Aplicación de la vía seleccionada	**Aplicación**	- Establecer relaciones en correspondencia con las formas de trabajo. - Utilizar estrategias cognitivas y metacognitivas. - Ejecutar un plan de acción y aplicar conscientemente los procedimientos. - Realiza transformaciones equivalentes en la premisa y/o la tesis. - Analizar las posibles vías de solución. - Considera casos particulares y generales. - Integrar los posibles resultados para que sean utilizados en

		diferentes contextos. - ¿Puedes aplicar esa misma técnica de trabajo a otra situación? - ¿Puede ser generalizado el método utilizado para resolver otros problemas? - Realizar suposiciones basadas en las posibles soluciones.
Valoración Reflexionar y tomar postura crítica sobre el sistema de acciones y operaciones realizadas.	**Valoración**	- ¿Qué conjeturas puedes plantear? - Analizar los pasos y las acciones ejecutadas, analizar los errores y sus posibles causas, precisar cómo evitar los errores. - Explicar el proceso de razonamiento realizado y dar los detalles al respecto. - Reflexionar sobre los procedimientos y métodos utilizados. - Escoge un lenguaje apropiado o una notación adecuada. - ¿Todas las soluciones halladas son soluciones del problema? - Explica con tus palabras cómo arribaste a la solución. - ¿Tiene sentido la respuesta dada en relación con tu experiencia? - ¿Responde la solución propuesta realmente al problema en cuestión? - ¿Qué me aportó desde el punto de vista social y/o matemático con el trabajo en el problema?

Acción 10. Análisis crítico del sistema de acciones y operaciones realizadas por los docentes y estudiantes.

En esta etapa se desarrolla la valoración del sistema acciones y operaciones, realizadas durante el proceso de una manera crítica y constructiva. La acción de control consiste en la evaluación de la calidad del aprendizaje logrado por el alumno, contrastando lo alcanzado con los objetivos propuestos y a la vez se analizan las acciones educativas del profesor. El control se debe realizar no sólo en la etapa final, sino durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, esto permitirá conocer cómo es la evolución del conocimiento en los estudiantes en cada etapa, realizando un diagnóstico, para comparar los resultados con los del diagnóstico de las etapas anteriores.

El Control tiene la ventaja de realizar acciones pertinentes, para garantizar el logro de los objetivos, así como también cumple con dos funciones importantes:

- Revela la efectividad del trabajo realizado durante las etapas anteriores, lo que permite corregir decisiones erróneas, total o parcialmente que se hayan tomado en este sentido.
- Posibilita responder a tiempo y con eficacia a las desviaciones sufridas, en el cumplimiento de los objetivos.

Acción 11. Retroalimentación a partir de las acciones y operaciones.

Esta acción se lleva a cabo en conjunto con los estudiantes, el docente deberá proponer y guiar alguna actividad que favorezca la acción, se realiza una retroalimentación de las acciones y operaciones realizadas durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, es aquí el momento para reflexionar grupalmente sobre los métodos aplicados, los procedimientos, resultados y errores, con la finalidad de valorar críticamente cada acción y operaciones realizadas, así como la vía utilizada para la búsqueda del teorema y se modifican algunas acciones de ser necesario, para garantizar el logro de los objetivos propuestos.

La retroalimentación brinda la posibilidad, de detectar algún error cometido durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y permite corregirlo, para que no persista o afecte en el producto final. Además, se deben plantear metas de aprendizajes individuales y colectivas, así como también, relacionar el nuevo conocimiento con los que posee.

Acción 12. Análisis y evaluación de los resultados de las actividades.

En esta acción la tarea del docente en un primer momento es realizar un análisis exhaustivo de:

- los resultados obtenidos en las tareas,
- los avances en el desarrollo del conocimiento del estudiante (observados durante la acción de control parcial de cada etapa),
- las acciones que fueron favorables para lograr los objetivos y las que no lo fueron,
- y considerar los resultados del diagnóstico realizado al inicio del proceso y al final.

Además, se debe de contrastar los elementos antes mencionados para realizar la valoración de las acciones y operaciones de los resultados obtenidos, esto permitirá determinar si se han logrado los objetivos propuestos. La evaluación de los resultados permitirá valorar el sistema de acciones y operaciones realizadas, también el sistema de actividades ejecutadas, en caso de que los resultados no sean los esperados o no se cumplan los objetivos, se recomienda reformular el sistema de actividades.

3. 2 Validación teórico-cualitativa de la metodología

Para la validación práctica de metodología se diseñó un sistema de actividades, relacionadas para favorecer la asimilación del teorema del cambio de variable para la resolución de la integral definida, para ello, se tomaron en cuenta los aspectos teóricos y metodológicos descritos anteriormente y el contenido matemático necesario. El diseño constó de 13 problemas. Los primeros 4 están asociados a un diagnóstico inicial, diseñados con un doble objetivo, conocer el nivel de partida de nuestros estudiantes y corroborar si persisten las dificultades reportadas en las investigaciones sobre la enseñanza del Cálculo Integral en el nivel Medio Superior y los siguientes 9 son problemas tipo para ser desarrollos en clase (Anexo 3).

Además de la validación práctica de la metodología, así como también la secuencia de problemas propuestos, para validar su pertinencia para favorecer la asimilación de teoremas recurrimos a un método, que nos permita validar los aspectos teórico-cualitativos de la *Metodológica,* el **Método Delphi.** (Campistrous & Rizo, 2006; Cruz, 2009) establecen que este consiste, en analizar las respuestas de un grupo de expertos a un cuestionario. Luego, se efectúa un análisis de las posibles respuestas. No obstante, al no existir referentes de la Metodología en la UAGro, sólo utilizaremos un caso particular del Método Delphi, el llamado Método de Expertos. El Criterio de Expertos aplicado a la Metodología, se centró en indagar en los siguientes aspectos:

1.- Planeación.

(a).- Elementos a considerar en la *Validación*:

1.- *Rigor Científico.*

2.- *Coherencia.*

3. -*Adecuación.*

(b).- *Criterios para la Selección de los Expertos.*

2.- Exploración.

(a).- *Elaboración de los Cuestionarios.*

(b).- *Aplicación de los cuestionarios a los Expertos.*

3.- Valoración.

(a).- *Presentación y análisis de la información.*

(b).- *Criterios para la Selección de los Expertos.*

(*i*).- *Formación Académica y Matemática.*

(*ii*).- *Formación con respecto a la Enseñanza de la Matemática.*

(*iii*).- *Experiencia como docente y/o investigadora.*

(c).- *Elaboración de los cuestionarios.*

Aplicación del Método Dephi. Para la aplicación del método se elaboró un cuestionario dirigido a los expertos que contiene preguntas a las que se les asigna un valor, ya que cada pregunta tiene la posibilidad de varias respuestas. Las preguntas aluden al *Rigor Científico, la Coherencia y la Adecuación* de la metodología que se presenta y el diseño de las actividades aplicadas en esta investigación. Posteriormente *la información se procesa a partir de las Técnicas del Diseño Experimental no Paramétrico.*

A continuación se presenta el Cuestionario, *el cual se aplicó a ocho expertos: todos ellos especialistas en Análisis Matemático y en Didáctica de la Matemática.*

- Una vez analizada la *Metodología* conteste explicando el porqué de sus respuestas.

1.- ¿*Considera que la Metodología cumple con las expectativas esperadas desde la perspectiva teórica considerada*?

2.- ¿*Considera que la Metodología cumple con los aspectos de rigor científico*?

3.- ¿*Tiene la Metodología coherencia en sus etapas*?

4.- ¿*El Sistema de Actividades es el adecuado para los fines que se persiguen*?

2- (b).- Aplicación de los cuestionarios.

Cada investigador respondió a las preguntas y estableció el porqué de su respuesta haciendo, además, observaciones y sugerencias que se atendieron.

3- (a).- Análisis y presentación de la información.

Todos los expertos dieron una opinión satisfactoria a las cuestiones incluidas en el cuestionario, lo que determinó la validez, en general, de los elementos evaluados. Se muestra a continuación una tabla donde se aprecia el resultado a las preguntas realizadas a los expertos.

Número de la pregunta	**Respuestas a favor**	**Respuestas con sugerencias**
1	7	1
2	8	0
3	7	1
4	7	1

La siguiente tabla muestra algunas de las respuestas por parte de los expertos.

Experto	Pregunta	Respuesta
1	2	Se apega a una teoría científica sólidamente establecida con lo que cumple con los requisitos del rigor científico.
	4	Las experiencias referidas en la tesis nos hacen suponer que es posible realizarlo una vez que los alumnos dominen los conocimientos básicos del Cálculo Integral.
3	1	Me parece que la Metodología cumple con las expectativas, esencialmente, al sustentarse en una teoría actual.
	4	Tomando en consideración que los estudiantes ya tienen los

		conocimientos básicos del Cálculo Integral, considero que el enfoque es el adecuado.
4	1	A partir de mi experiencia como docente, la metodología tiene coherencia con relación a las teorías analizadas y a las prácticas cotidianas desarrolladas en el aula.
	4	Sí. Creo que el sistema de actividades es adecuado siempre y cuando el profesor tenga en cuenta la cantidad y tipos de problemas necesarios para cumplir el objetivo de cada etapa.
6	3	En ese sentido me parece que las etapas están bien estructuradas como un sistema, considero se cumplen las expectativas de lograr los objetivos.
	4	El sistema de actividades está completo y tienen los elementos necesarios para la asimilación del Teorema del Cambio de Variable del Cálculo Integral.

De las respuestas de los Expertos al cuestionario planteado se tiene que, en lo general y considerando los aspectos teórico-cualitativos de la *Metodología*, se satisfacen los aspectos de *Rigor Científico*, *Coherencia* y *Adecuación de la metodología* planteada. Además, la metodología ha sido enriquecida con las experiencias ganadas en eventos, talleres, cursos, conferencias y coloquios que se han desarrollado durante esta investigación. De la opinión de los expertos que han revisado la *Metodología*, podemos afirmar que la Metodología aquí propuesta, tiene un alto grado de confiabilidad para favorecer la asimilación de teoremas en particular el Teorema del Cambio de Variable.

3.3 Validación práctica de la metodología.

3.3.1 Teorema del Cambio de Variable.

Resulta atinado plantear, que existen variaciones en el enunciado del teorema del cambio de variable, en los libros de texto dependiendo de los autores. Esencialmente, las variaciones se dan, en las condiciones que debe satisfacer la función $u = g(t)$ que realiza el cambio de variable. Aparecen condiciones tales como que g debe tener inversa, o debe ser biyectiva, o monótona o de derivada positiva. Cabe hacer notar, que la demostración del teorema del cambio de variable, no utiliza ninguna condición adicional a las expresadas en la versión que trabajaremos en esta investigación. Se pueden poner ejemplos en los que $g(t)$ puede no cumplir ninguna de esas condiciones adicionales y sin embargo, se puede aplicar el teorema. Tal es el caso de $\int_0^{\frac{5\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cos t \, dt$ en donde si tomamos $u = g(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t)$ no es biyectiva, por lo tanto no invertible en $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ y la integral se puede calcular mediante el teorema del cambio de variable.

Antes de pasar a la aplicación de la metodología, resulta imprescindible realizar un análisis del teorema a tratar, en este caso el del cambio de variables en integrales definidas que será analizado en los siguientes términos: *Supongamos que g tiene derivada continua en [a,b] y f es continua en la imagen (rango) de g. Entonces $\forall a, b \in I$, $\int_a^b f\big(g(t)\big) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$.*

Observemos que el teorema tiene varias hipótesis; el cumplimiento de estas garantiza que se da la igualdad entre las dos integrales. Si algunas de las hipótesis no se cumplen, entonces no necesariamente tiene que cumplirse dicha igualdad. Un elemento metodológico importante a tener en cuenta en el proceso de asimilación de teoremas, *es comprobar que si suprimimos algunas de las hipótesis el resultado, puede ser falso.* A título de ejemplo, presentamos algunas situaciones que discutiremos con los estudiantes.

Calcular la integral $\int_{-1}^{1} dx$ haciendo el cambio de variable $x = g(t) = \sqrt[3]{t^2}$. La integral se transforma en $\int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} dt = \int_0^0 \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} dt = 0$. En este caso, no se cumple la conclusión del teorema. Aunque, $g(t) = \sqrt[3]{t^2}$ es continua, su derivada no lo es en el intervalo $[-1,1]$.

En la misma dirección, planteamos calcular por sustitución la siguiente integral $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$. La función $\frac{1}{2+\cos t}$ es continua y estrictamente positiva en el intervalo $[0,2\pi]$, por lo que su integral es necesariamente un número distinto de cero; pero haciendo la sustitución $u = g(t) = \tan\frac{t}{2}$, la integral se transforma en $\int_{g(0)}^{g(2\pi)} \frac{2du}{3+u^2} = \int_0^0 \frac{2du}{3+u^2}$, cuyo valor es cero. Esto sucede porque la función $g(t) = \tan\frac{t}{2}$, no es continua en el intervalo de integración. Además, otro elemento metodológico a utilizar en este caso, son las condiciones de aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo; cuando los estudiantes intenten resolver la integral definida como si fuera indefinida, procedimiento natural en nuestros estudiantes.

Si consideramos la integral $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{t}{\operatorname{sen} t} dt$ y hacemos el cambio de variable $u = g(t) = \operatorname{sen} t$, cuyo dominio es $[-1,1]$, se tiene $\int_{g(\frac{\pi}{3})}^{g(\frac{2\pi}{3})} \frac{\operatorname{arcsen} u}{u\sqrt{1-u^2}} du = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\operatorname{arcsen} u}{u\sqrt{1-u^2}} du = 0$. En este caso no se cumple la conclusión del teorema; nótese que el dominio de definición de $f(u) = \frac{\operatorname{arcsen} u}{u\sqrt{1-u^2}}$ es el intervalo abierto $(-1,1)$.

En lo que respecta a la hipótesis de la continuidad de f, cabe hacer notar que el teorema del cambio de variable, está en relación directa con el teorema fundamental del cálculo y este exige que el integrando sea una función continua en el intervalo de integración. Sin embargo, es posible demostrar el teorema del cambio de variable, para el caso en el que el integrando es una función Riemann-integrable, (no necesariamente continua) pero ese análisis rebasa los objetivos del presente trabajo.

3.2.2 Participantes

La aplicación de metodología para favorecer la asimilación del Teorema del Cambio de Variable en la resolución de la Integral Definida, se desarrolló con los 16 estudiantes de la Carrera de Técnico Superior Universitario en Matemáticas Aplicadas, de la Universidad Autónoma de Guerrero, que estaban cursando la materia de Cálculo Diferencial e Integral II. Se diseñó un sistema de actividades relacionado con el Teorema del Cambio de Variable, para la resolución de la integral definida. Para el diseño de las actividades se tomaron en cuenta los aspectos teóricos y metodológicos descritos anteriormente y el contenido matemático necesario. El diseño constó de un diagnóstico y un sistema de problemas tipo asociados a cada una de las etapas del proceso de asimilación.

Los estudiantes ya habían abordado el cambio de variable para encontrar primitivas, por lo que se les aplicó un **diagnóstico,** que cumplió la función de conocer las condiciones previas, es decir, sus conocimientos básicos para poder enfrentar con éxito el tratamiento del teorema del cambio de variable para integrales definidas (problemas 1-4). De manera más precisa, se identificaron sus bases conceptuales, operativas y/o procedimentales. En el **Anexo 1** se muestran algunas de las respuestas.

La **aplicación** de la metodología se desarrolló en 6 sesiones, de aproximadamente una hora treinta minutos cada una. Para el análisis de los resultados asociados con dicha aplicación, se documenta la puesta en práctica de la misma. A continuación, presentamos algunos de los problemas tipo desarrollados en las secciones de clases (problemas 5-13). En el **Anexo 2** se muestran algunas de las respuestas.

3.3.3 Resultados

Diagnóstico.

1- ¿Considera usted que existe alguna diferencia entre la integral definida y la indefinida?

Objetivo: Identificar las bases conceptuales de los estudiantes.

Observaciones:

Notamos esencialmente, que el concepto de integral definida e indefinida se encuentra unificado en la forma de pensar de los estudiantes.

Estudiante A: *Son lo mismo, representan área.*

En los casos de reconocer diferencias, no son las adecuadas.

Estudiante B: Una es con límites y la otra no.

2- Resuelva las integrales siguientes

a) $\int (x^2 + 3x + 1)\, dx.$

b) $\int_0^{\pi} \sin x \ \ dx.$

Objetivo: Identificar las bases operativas y/o procedimentales de los estudiantes.

Observaciones: La mayoría de los estudiantes logró concluir de manera satisfactoria lo requerido en a), manifestando el reconocimiento de las técnicas aplicadas. Con respecto a la integral planteada en b), en diversos casos no lograron dar un resultado numérico, es decir, llevar a cabo las evaluaciones en la función $\cos x$.

Estudiante A:

a) $\int x^n \ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

b) $\int_{\pi/2}^{\pi/4} sen(x)\, dx = cos(\pi/2) - cos(\pi/4)$

3- Resuelva las siguientes integrales.

a) $\int \ \ 2xe^{x^2} dx$

b) $\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\, dx$

Objetivo: Analizar si reconocen las diferencias y procedimientos que aplican para la resolución.

Observaciones a): Las respuestas obtenidas evidenciaron principalmente la incorrecta aplicación del teorema de cambio de variable, destacando errores asociados a los límites de integración y la función de integración.

Estudiante A: $\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx = \int_0^2 e^y\, dy = e^2 - 1$, haciendo $x^2 = y,\ 2dx = dy$.

Estudiante B: Aplicando el cambio de variable $x^2 = y$ obtenemos $\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx = \int_0^2 2xe^y\, dx = 2e^y \int_0^2 x\, dx = \frac{4}{2}(2e^y)$.

Observaciones b):

En este inciso ningún estudiante determinó de manera adecuada la integral planteada. Reflejando, primordialmente que no se logró en el nivel medio superior de manera concreta en la mayor parte de los estudiantes, el reconocimiento del teorema del cambio de variable en la resolución de integrales.

4- Resuelva la integral $\int_0^2 2(x+1)^2\, dx$ mediante el cambio de variable $u = x + 1$ y represente las regiones y funciones de integración respectivas.

Objetivo: Corroborar los procesos implícitos en la aplicación del teorema del cambio de variable.

Observaciones: En este caso se le propuso al estudiante el cambio de variable que debía aplicar en la resolución de la integral planteada. Sin embargo, se volvieron a identificar los errores apreciados en el ejercicio 3 o no lograron aplicar la sugerencia, resolviendo la integral por otro método.

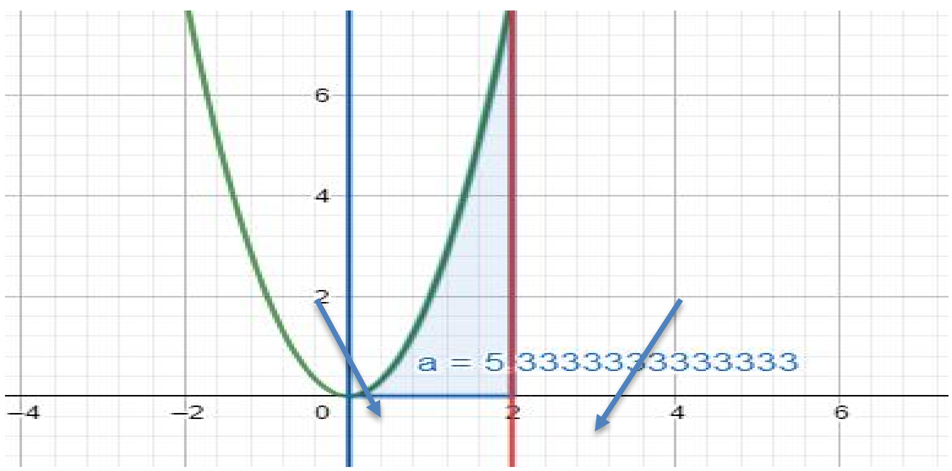
Estudiante A: $\int_0^2 2(x+1)^2 dx = \int_0^2 2x^2 dx + \int_0^2 4x dx + \int_0^2 2dx = \frac{2}{3}2^3 + \frac{4}{2}2^2 + 4$.

Estudiante B: Si $(x+1)^2 = y$ obtenemos $\int_0^2 2y^2\, dy = 2(\frac{2^3}{3})$.

Referente a las regiones y funciones de integración, notamos mayor dificultad en la representación gráfica de las respectivas regiones, repitiendo el error asociado a los límites de integración.

Estudiante A: $\boldsymbol{f(x) = 2(x+1)^2}$

$\boldsymbol{f(x) = 2x^2}$



Sistema de Problemas a desarrollar en clase.

5- Sea $f(x) = 4$ una función constante. Determinar el área bajo esta recta, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

a) Representar la región.

b) Obtenga el área de la región, planteando y resolviendo una integral definida.

Objetivo: Comprender la relación entre la integral definida y el área de una determinada región.

Observaciones:

Los alumnos que contestaron correctamente la parte a), procedieron identificando la longitud del lado del cuadrado y mediante el uso de la fórmula, para medir el área de un cuadrado, obtuvieron el resultado. Uno de los estudiantes planteó una integral sin relación a la actividad, un segundo estudiante no contestó. Por otro lado, los que contestaron correctamente el b), procedieron mediante el planteamiento de la integral $\int_0^4 4\,dx$ y al resolverla, llegaron al resultado 16 unidades cuadradas. Dos alumnos realizaron particiones del intervalo [0,4], luego construyeron rectángulos y determinaron las sumas, sin embargo, no completaron el razonamiento. De acuerdo con la producción realizada, se identifica que la mayoría de los alumnos, asocian el concepto de integral con el de la medida del área de una región dada (en este caso el cuadrado).

6- Sea $f(x) = ax$ una función dada, con a constante. En la siguiente figura se muestran tres casos asociados a distintos valores del parámetro a.

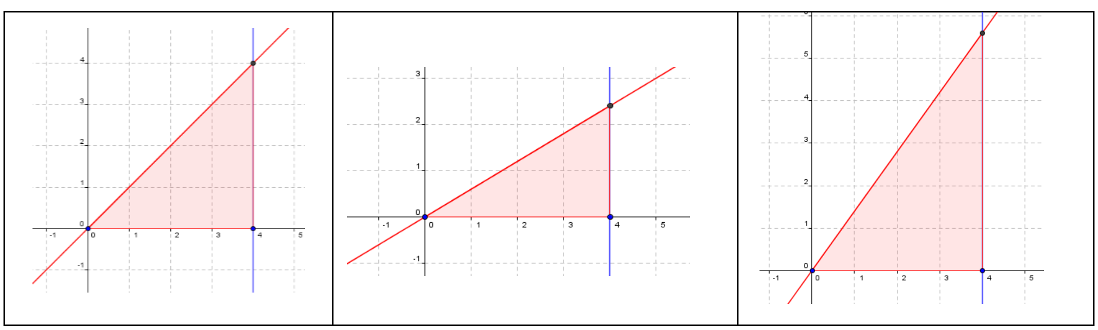


Figura 1.

a) Determine el valor de a para que se verifique, que el área de la región bajo la curva $f(x) = ax$, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$, sea de 16 unidades cuadradas.

b) ¿Puede construirse otra región limitada superiormente por la curva de $f(x) = ax$, inferiormente por el eje horizontal y lateralmente por las rectas $x = x_1$, $x = x_2$ cuya área sea de 16 unidades cuadradas? Argumente su respuesta y determine de ser posible los valores de a, x_1, x_2.

c) ¿Qué relaciones existen entre las regiones anteriormente construidas, en función de su forma y área respectivamente? Argumente sus respuestas.

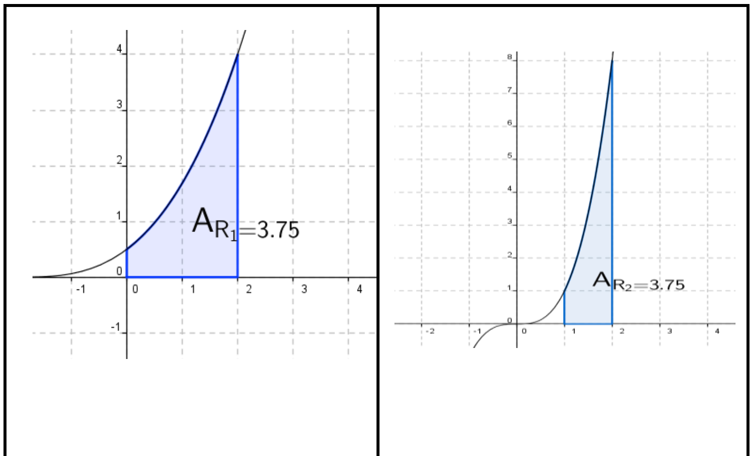
Objetivo: Comprender el cambio en las regiones de integración y su relación con la integral definida.

Observaciones a): Se identificó que 11 de los 16 estudiantes realizaron la actividad: tres de ellos determinaron el valor del parámetro, $a = 2$ al igualar con 16 la integral que plantearon en el intervalo $[0,4]$, tres estudiantes procedieron por ensayo y error, hasta llegar a establecer el valor del parámetro $a = 2$, un estudiante igualó con 16 la integral, pero resolvió incorrectamente la ecuación, cuatro estudiantes sólo plantearon la integral $\int_0^4 ax\,dx$ sin resolverla. Al analizar las producciones tres estudiantes pudieron reconocer la integral definida, como un método para resolver problemas asociados a determinar el área de una región.

Observaciones b): Esta actividad es fundamental, ya que a partir de aquí, se comienza a trabajar con el significado del cambio de variable. El objetivo perseguido fue que los estudiantes, plantearan una integral definida y la resolvieran para los valores de las variables pedidas y argumentaran al respecto. De los 16 estudiantes, sólo uno de ellos planteó los siguientes valores $a = 8, x_1 = 0, x_2 = 2$, luego, al resolver la integral definida $\int_0^2 8x\,dx$ determinó el valor 16. En este caso, el estudiante acepta que la región cambió de forma, pero según los cálculos hechos, la medida de su área se conserva. Establece que ha ocurrido una transformación, pero no argumenta la relación analítica de las integrales $\int_0^4 2x\,dx$ y $\int_0^2 8x\,dx$. El resto establecieron que no se puede resolver la actividad, pues no existe una función que cumpla con las exigencias. Otros, tendieron a proceder de forma errónea, luego de que el profesor los reorientara, se disminuyó la dificultad de la actividad.

Observaciones c): Se esperaba que los estudiantes argumentaran sobre las formas de las regiones y la relación de sus áreas, sobre el proceso de transformación de región a región, entre otras argumentaciones. El estudiante que contestó correctamente la pregunta anterior en el inciso b) estableció que sólo cambian las formas de las regiones, pero se mantienen las medidas de sus áreas, 10 estudiantes consideraron que en caso de poder determinar la función en el inciso b), cambiarían sólo sus formas, pero las medidas de su área sería la misma. Observemos que a pesar de no haber contestado correctamente la actividad del inciso b), estos conjeturan acerca de la posibilidad de igualdad de las áreas de las regiones bajo una curva. El resto establecen que las medidas de las áreas son distintas y las formas de estas también, sin embargo, no hacen una argumentación del porqué. El Inciso a) lo contestaron correctamente 11 e incorrectamente 5, en el Inciso c), se obtuvo igual resultado y el Inciso b) sólo fue contestado correctamente por un estudiante**.**

7- En la siguiente figura se muestran dos regiones en el plano con la misma área.



$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3;\ \ [0,2].}$	$\boldsymbol{g(x)=x^3;\ \ [1,2]}.$

Figura 2.

a) ¿Cómo justificas que en efecto las áreas de las regiones son iguales?

b) ¿Cuáles son las implicaciones de realizar un cambio de variable?

c) ¿Qué efectos tiene la aplicación del Teorema del Cambio de Variable en la resolución de integral $\int_0^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3\ dx$?

Objetivo: Fijar los alcances e implicaciones del cambio de variable en la resolución de integrales definidas.

Observaciones a): Once de los dieciséis estudiantes realizaron correctamente la transformación bajo el cambio de variable tal como se predijo y además, establecieron que una manera de verificar las equivalencias, es mediante la solución de las integrales en los intervalos indicados y el resto no realizó la actividad.

Observaciones b): Presentamos algunas respuestas obtenidas por los estudiantes:

> **Estudiante B:** Escoger una sustitución adecuada de variable de tal manera que su derivada esté relacionada con la función original y así, quede en términos más sencillos. **Estudiante F:** Hacer un cambio de variable, es llevar una función a otra más sencilla, para esto, modificamos el intervalo de evaluación que dependa de la nueva variable que se ha elegido. **Estudiante N:** Nos sirve para facilitar el trabajo, pero no siempre es necesario hacerlo. **Estudiante P:** Transformar la función en un determinado intervalo, en otra función definida en otro intervalo, de la cual es fácil calcular el área delimitada por la misma función.

Observamos que 4 estudiantes del total (B, F, N y P) a pesar, de que no argumentan formalmente los usos del cambio de variable, muestran ideas próximas al aspecto formal de dicho significado.

Observaciones c): Siete estudiantes establecen que el cambio de variable modifica los intervalos de integración, pero no el valor de la integral principal, cuatro establecen que el cambio de variable facilita el proceso de integración, uno plantea que bajo el cambio de variable, se modifica la forma de la región y el resto de los estudiantes presentan respuestas incorrectas. Como se pudo constatar, en un ambiente de debate sobre las actividades que realizan los estudiantes, emergen ideas intuitivas muy próximas a los efectos que realmente hace el cambio de variable en la solución de la integral definida. El Inciso a) lo contestaron correctamente 11 e incorrectamente 5, el Inciso b), se obtuvieron 4 respuestas correctas y 12 incorrectas y el Inciso c) fue contestado correctamente por doce estudiantes**.**

8- Represente la región limitada superiormente por la curva de $f(x) = x + 1$, inferiormente por el eje horizontal y por las rectas $x = 0,\ x = 4$.

a) Grafique la región y calcule su área, sin utilizar el cálculo integral.

b) Para calcular el área de la región anteriormente se plantea la siguiente integral $A(R) = \int_0^4 (x+1)\ dx$. Aplicando el cambio de variable, $u = x + 1$ con $du = dx$ se sigue que, $A(R) = \int_0^4 (x+1)\ dx = \int_0^4 u\ du = \frac{4^2}{2} = 8.$ ¿Argumente los resultados obtenidos?

Objetivo: Fijar el teorema del cambio de variable de la integral definida, en particular, reconocer el error asociado a la región de integración.

Observaciones b): En la discusión grupal se analizó que la región limitada era un trapecio y se recordó su fórmula. Siete de los estudiantes lograron argumentar correctamente la equivalencia entre los métodos, para el cálculo del área e identificaron el error en los límites de integración al aplicar dicho teorema, los restantes argumentaron errores relacionados con la fórmula del trapecio, área del trapecio o no lograron reconocer algún error en el procedimiento presentado. A continuación, se muestran algunas respuestas dadas:

Estudiante L: *No veo error alguno.*

Estudiante H: *La figura mostrada no es un trapecio.*

9- Determinar el valor de la integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$. En la siguiente gráfica se muestra la región que está bajo la curva $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

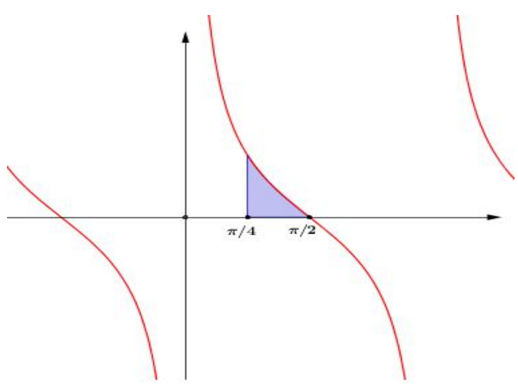


Figura 3.

Objetivo: Aplicar el teorema de cambio de variable en la solución de la integral definida.

Observaciones: La actividad permitió que los estudiantes que tuvieron dificultades al establecer las relaciones que se indicaron en las actividades anteriores, comprendieran que el cambio de variable no sólo permite la solución de algunas integrales; sino además, que clarificaron los efectos del teorema del cambio de variable, es decir, que modifica las regiones de integración sólo en la forma, pero no en la medida de su área. En esta actividad, se identificó que 9 estudiantes, llegan a la solución correcta de la integral a través del teorema del cambio de variable. Es decir, hacen un cambio de variable adecuado e identifican que bajo dicho cambio de variable se modifican los intervalos de integración, sin embargo, no es muy claro cómo llegan a los nuevos intervalos de integración, a continuación, se muestra una de las producciones:

> **Estudiante E:** Para resolver la integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$, hacemos $u = senx$, $du = cosx\, dx$, evaluamos $x = \frac{\pi}{2}$ →u=1y $x = \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{u} du$= ln (u) | $_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} =$ ln (1) – ln ($\frac{1}{\sqrt{2}}$) = ln (1) $-$ ln (1)+ln($\sqrt{2}$) = ln($\sqrt{2}$).

Tres estudiantes hacen un cambio de variable, sin embargo, no analizan que bajo dicho cambio de variable se modifican los intervalos de integración, así que llegan a soluciones incorrectas. El resto procedió incorrectamente, ya que no recordaron el método de integración, algunos no lo identificaron y otros no recordaron cómo se integra la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$.

10- ¿Demuestre que $\int_0^2 2(x+1)^2 \ dx = \int_1^3 2u^2 \ du$?

Objetivo: Aplicar el teorema del cambio de variable como un método de demostración.

Observaciones: Siete estudiantes respondieron de manera correcta a la actividad. Las respuestas planteadas por la mayoría de los estudiantes (9) pone de manifiesto, que los estudiantes sólo asocian el teorema del cambio de variable como un método de cálculo, es decir, procedimental; no reconocen el alcance teórico del teorema como un método de demostración u obtención de nuevas relaciones matemáticas. A continuación se muestra una respuesta dada por un estudiante, mismo que había contestado correctamente la actividad anterior.

Estudiante A: *No sabría cómo demostrarlo.*

11- Argumente sus respuestas.

a) ¿Qué relación existe entre $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x /_{\sin x}\, dx$ y $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 1/_{x}\ \ dx$?

b) En la resolución de una integral definida mediante el teorema de cambio de variable, ¿Qué variaciones consideras ocurren en la función principal para el intervalo dado?

Objetivo: Valorar los efectos que produce el cambio de variable en la región de integración y en el cálculo de la integral definida.

Observaciones a): Cinco estudiantes establecen que las integrales mediante un cambio de variable se transforman una en la otra, cuatro establecieron que las regiones que permiten formar las curvas de dichas funciones tienen la misma medida de área, dos estudiantes argumentaron que bajo el cambio de variable se transforman en otra función, sólo que se definen en intervalos distintos. El resto de los estudiantes no establecieron elementos cercanos para reconocer la relación, fue hasta la discusión grupal que los mismos identificaron la relación solicitada.

Observaciones b): Siete estudiantes respondieron correctamente la actividad, a título de ejemplo, se muestran cinco respuestas que consideramos arrojan elementos sobre una aproximación de los estudiantes a los elementos asociados, con el teorema del cambio de variable en la solución de la integral definida.

Estudiante B: La integral queda en términos de una función de fácil integración, además dicho cambio de variable debe ser el adecuado. **Estudiante C**: El cambio de variable se usa para poner a una integral en su forma más sencilla de calcular, ahora cuando se hace el cambio de variable en una integral definida, los intervalos de la función cambian. **Estudiante F**: El cambio de variable es un método que nos permite resolver integrales, esto se hace con el fin de llevar una integral a otra más sencilla, lo que hace el cambio de variable es cambiar una función por otra más sencilla, esto implica que los intervalos de evaluación cambian con respecto a la nueva variable. **Estudiante M**: Que hace la integral menos compleja haciéndola más fácil de integrar, ya que cambia los intervalos de integración y es menos complejo.

Estudiante Q: El cambio de variable modifica a una función y sus intervalos de integración de tal manera que produce otra función definida en un intervalo diferente, pero que al integrarla resulta tener la misma área, que la función sobre el cual se aplicó el cambio de variable.

A pesar de que las respuestas de los estudiantes, no son del todo formales y completas, basados en nuestra experiencia, las afirmaciones planteadas por ellos generalmente no aparecen en nuestras prácticas tradicionales de enseñanza, sin embargo, con el sistema de actividades planteadas, se favorece una posible formulación del teorema del cambio de variable. Por otra parte, el resto de los estudiantes que no explicó, al inicio, los significados del cambio de variable, a partir de establecer un debate grupal, lograron formular una idea estructurada respecto a los elementos asociados con la actividad.

12- Calcule utilizando la sustitución universal $u = \tan(\frac{x}{2})$, el área de la región mostrada en la Figura 4, limitada superiormente por la curva $f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}$, inferiormente por el eje horizontal y lateralmente por las rectas $x = 0,\ x = 2\pi$.

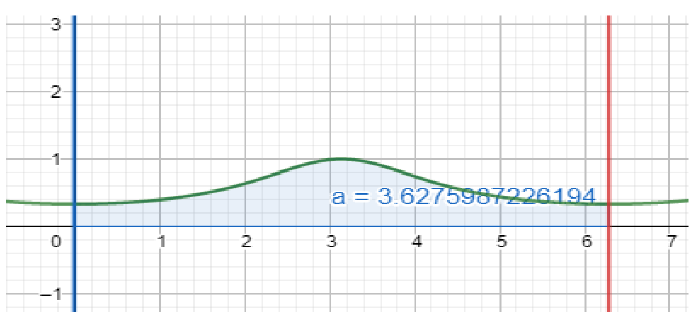


Figura 4.

Objetivo: Valorar condiciones necesarias para la aplicación del teorema del cambio de variable

Observaciones: Al revisar las respuestas presentadas por los estudiantes, identificamos que solamente 6 estudiantes, lograron establecer la condición que no se satisfacía para la correcta aplicación del cambio de variable. Presentamos a continuación las respuestas obtenidas por dos estudiantes que respondieron de forma acertada a la actividad, tomando como base esencialmente, los límites de integración y la función de integración resultantes de la aplicación del teorema de cambio de variable.

Estudiante H: Si hacemos $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, en $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+cos(x)}\, dx$, obtenemos que los nuevos límites de integración son, $tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0 = tan\left(\frac{2\pi}{2}\right) = tan(\pi) = 0$. Transforma una región con área positiva en un punto. **Estudiante K**: Si volvemos la integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\, dx$, indefinida y resolvemos usando el cambio de variable universal la integral $\int \frac{1}{2+\cos(x)}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{3}})$, pero si la derivamos, no cumple ser la función $\frac{1}{2+\cos(x)}$ en todo el intervalo $[0,2\pi]$.

Cabe destacar que en el análisis grupal desarrollado al final de la sección de clases, a través del uso de ejemplo y contraejemplo, se discutieron las condiciones que se deben cumplir para la aplicación del teorema.

13- ¿Cómo formularía usted un teorema del cambio de variable para integrales definidas?

Objetivo: Plantear una aproximación a la formulación del teorema del cambio de variable.

Observaciones: Después de haberse desarrollado una serie de actividades para la asimilación del teorema del cambio de variable del cálculo integral, se esperaba que los estudiantes formularan un suposición o conjetura, con la finalidad por un lado de favorecer la sistematización y generalización de las ideas trabajadas y por el otro, corroborar la efectividad de la metodología seguida a partir del sistema de actividades. Cabe destacar que 9 de los 16 estudiantes con los que trabajamos, plantearon elementos teóricos correctos que nos permiten inferir que hubo una aproximación correcta a una formulación del teorema del cambio de variable. A título de ejemplo mostramos las siguientes:

> **Estudiante B:** *Dada una función* $f(x)$ *y el teorema del cambio de variable permite encontrar* $F(x)$*, tal que:* $F(x) = \int f(x)dx$ *entonces mediante un cambio de variable* $\int f'(u) \cdot u'dx = F(u) + c$*, el cambio de variable se basa en una sustitución adecuada de tal manera que la integral sea más sencilla.*
>
> **Estudiante E:** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$ *donde* $u = \varphi(x) \to du = dx$ *cuando se usa el cambio de variable también cambia el intervalo.*
>
> **Estudiante F:** *Teorema. Si* $f(x)$ *es continua, entonces la integral* $\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\big(g(u)\big)g'(u)du$*.*
>
> **Estudiante J:** *Sea* $f(x)$ *una función integrable en el intervalo* $[a, b]$ *y continua. Al resolver por cambio de variable obtenemos:* $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} udu$*, cambian la función y los límites de integración y evaluamos la función, en el límite superior e inferior obtenidos al realizar el cambio de variable.*
>
> **Estudiante Q:** *Si una función* $f(x)$ *es continua en el intervalo* $[a, b]$*, sea* $u = \varphi(x)$ *derivable una función compuesta de* $f(u)$ *entonces* $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)u'du$ *.*

De las producciones, se pudo identificar que las formulaciones propuestas, no están totalmente formalizadas y poseen errores. Sin embargo, desde la visión de los investigadores se considera, que este proceso de desarrollo a través del sistema de actividades propuestas para la aproximación a una formalización del Teorema del Cambio de Variable, en el estudio de la integral definida, en los estudiantes de Técnico Superior Universitario en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Guerrero, favorece el proceso de búsqueda del teorema.

CONCLUSIÓN Y REFLEXIONES

¿Qué fundamentos teórico-metodológicos son necesarios para elaborar una metodología integradora que favorezca la asimilación de teoremas?

Los elementos teórico-metodológicos (Constructivismo social, Teoría de la Actividad, Resolución de problemas y Procesos de Asimilación), que fundamentan este trabajo posibilitaron la orientación y las etapas, para el proceso de asimilación del Teorema del Cambio de Variable en la resolución de la integral definida.

¿Qué metodología favorece la asimilación de teoremas?

De acuerdo a las respuestas de los estudiantes concluimos, que la propuesta de actividades diseñadas y experimentadas en esta investigación, aportan elementos que favorecen el proceso de asimilación del concepto de cambio de variable, durante la resolución de una integral definida, como pudo identificarse, en el promedio de respuestas a las actividades del diseño. De acuerdo a la respuesta favorable del trabajo realizado se puede inferir que esta metodología integradora favorece la asimilación de teoremas.

De la aplicación de la metodología y el diseño de actividades presentamos un análisis de los resultados:

-La mayoría de los estudiantes logran identificar, que el cambio de variable permite transformar el integrando en otra función definida en un intervalo distinto, pero que las soluciones de ambas integrales son iguales, y por otra parte, establecen que bajo dicho cambio de variable, las regiones sólo cambian en sus formas pero la medida del área prevalece en ambos casos.

-Como recurso, el cambio de variable facilita la resolución de las integrales definidas. El tratamiento de las actividades favorece, una aproximación al teorema del cambio de variable en la resolución de la integral definida; sostenemos que este logro, es debido al trabajo que se realizó con casos particulares de integrales definidas, en los que se exigió la interpretación del cambio de variable y su utilización en las resoluciones.

Las ideas que se establecieron, permiten concluir que el sistema de actividades trabajadas puede llevar a los estudiantes a hacer sus respuestas, cada vez más argumentadas desde la matemática. Esto último se favorece con la propuesta y análisis de situaciones, en donde, de forma directa, el cambio de variable conlleve a contradicciones y la superación de este tipo de contradicciones, permitan una mejor aproximación a la formulación del teorema del cambio de variable.

A partir de las investigaciones anteriores, se identifican las siguientes **dificultades cognitivas** en relación a la asimilación del Teorema del Cambio de Variable, en la solución de la integral definida:

-Cuando utilizan el cambio de variable para resolver la integral definida, sin atender las condiciones bajo las cuáles es posible hacer dicho cambio de variable. Este proceder tiene las implicaciones en los estudiantes, ya que una vez transformada la función bajo el cambio de variable, tienden a integrar en el intervalo dado sin considerar que bajo dicho cambio de variable también hay transformación en el intervalo de integración.

-Tras el cambio de variable, los estudiantes manifiestan que la función principal a integrar y la nueva función (producto del cambio de variable) tienen el mismo dominio. Situación que crea dificultades para argumentar el significado geométrico de dicho cambio.

Esta investigación contribuye con una herramienta metodológica, para la educación matemática, ya que atiende una problemática que he persistido en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, además proporcionado elementos necesarios para favorecer la asimilación de contenidos matemáticos, por un lado, el docente se verá beneficiado en su actividad de enseñanza y por otro lado, se ofrece un sistema de actividades concretas y validadas que benefician al estudiante de estos niveles; en el sentido de que favorece los procesos de asimilación del cambio de variable, lo que posibilita la mejora de los aprendizajes. Es importante mencionar que se trata de una metodología general para el tratamiento de teoremas.

¿Cómo validar dicha metodología asociada al Teorema del Cambio de Variable?

Como resultado de la validación de la metodología y del sistema de actividades específicas para el proceso de asimilación del teorema del cambio de variable, se concluye que la propuesta satisface los aspectos de Rigor Científico, Coherencia y Adecuación para su desarrollo en el aula. Esta propuesta también se ha enriquecido en las experiencias producto de su presentación y discusión en congresos nacionales e internacionales, talleres, cursos, conferencias y coloquios que se han desarrollado durante esta investigación. Los expertos destacan que el trabajo se apega a una teoría científica establecida, el enfoque para su implementación en el nivel indicado es adecuado, es decir, se identifican los recursos metodológicos integradores que inciden en la enseñanza y aprendizaje, en particular del teorema objeto de estudio.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención de conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Ed. Paídos. Barcelona.

Aldana, E. y González, M. T. (2009). *Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno Universitario.* XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM), Santander, España.

Aldana, E. & González, M. T. (2012). Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría APOE. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*, 689-705. Medellín: Universidad de Medellín.

Apóstol, T. (2001). *Cálculus, volumen 1*. Massachusetts, Estados Unidos: Blaisdell Publishing Company.

Ballester, S., Arango, C., Hernández, S., Almeida, B., Santana, H., & Torres, P. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática,* Tomo II. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Ballester, S. (2007). *Matemática superior I*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Bransford, J. & Stein, B. (1987*). Solución IDEAL de Problemas.* Barcelona: Labor.

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* [Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa]. Cinvestav-IPN. México.

Campos, M. (2019). The job of the heuristic procedures in the resolution of geometric exercises. Boletín *REDIPE 8*(5), 185-193.

Cardozo, S., Molina, O., & Ortiz, A. (2015). Tratamiento de los teoremas de existencia en un libro de geometría plana. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 155-162.

Cala, A., Buendía, A. M., y Herrera, L. J. (2017). *Métodos y estrategias para la resolución de problemas matemáticos: una revisión desde las investigaciones de la última década*. Proyecto de investigación. Medellín, Colombia.

Campistrus, L. y Rizo, C. (2006). *El criterio de expertos como método de investigación educativa.* Documento elaborado para el Doctorado Curricular: Ed. Instituto Superior de la Cultura Física "Manuel Fajardo", 1-31. La Abana.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(3), 31-45.

Cedeño, F. O., Caballero, H. H., Alcívar, S., y Macías, M. (2018). Resolución de problemas estrategia didáctica de Poggioli para mejorar el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo.*

Coll, C., Mauri, M. T., & Onrubia, J. (2008). Analyzing Actual Uses of ICT in Formal Educational Contexts: A Socio-Cultural Approach. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 10* (1), 1-17.

Cubero, R. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en la Psicología Latinoamericana. 1*(23), 43-61.

Cruz, M. (2006). La enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas. *Educación Cubana.*

Cruz, M. (2009). *El método Delphi en las investigaciones educacionales*. La Habana, Cuba, Editorial Academia.

Cruz, M., García, M. y Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in Mathematical Problems Solving. *Journal of Science Education, 2*(17), 84-90.

Davydov, V. V., & Zinchenko, V. P. (2003). A consrinuição de Vigotsky para o desenvolvimento da psicoçogia. En H. Daniels, Vygotsky em Foco: Pressuposto e desdobramentos (E. J. Cestari, & M. S. Martins, Trads., 6ª ed., pág. 296). São Paulo: Papirus.

Díaz, Y., Cruz, M., Velázquez, Y., & Molina, S. (2019). Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las Derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones. *Épsilon, 103*, 7-23.

Gagné, R. (1970). *Las condiciones del aprendizaje.* Aguilar. Madrid.

Galperin, P. (1995). *Desarrollo de las investigaciones sobre las acciones mentales*. La Habana: Universidad de la Habana.

Galperin, P. Y. (1998). La actividad psicológica como ciencia objetiva. Moscú, Rusia: Instituto de Ciencias Pedagógicas y Sociales.

García, H. J., Ortiz, A. M., Martínez, J. y Tintorer, O. (2009). La teoría de la actividad de formación por etapas de las acciones mentales en la resolución de problemas. *Revista Científica Internacional. Inter Sciencie Place, 2*(9).

González, J. & Sigarreta, J. M. (2011). Ideas para enseñar. Hacia una generalización del teorema de Pitágoras. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 27*, 179-194.

Haaser, N., La Salle, J., y Sullivan, J. (2003). *Análisis matemático, volumen 1 curso de introducción* (1ra ed.). México: Celigraf, S.A.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*, (7a ed.). Oxford University Pres.

Leóntiev, A. N. (2005). The Genesis of Activity. *Journal of Russian and East European Psychology, 43*(4).

Londoño, G. M. (2008). Aprendizaje colaborativo presencial, aprendizaje colaborativo mediado por computador e interacción: Aclaraciones, aportes, y evidencias. *Revista Educación comunicación Tecnología*, *2*(4), 1-22.

López, A. (2010). Propuesta para la enseñanza del concepto de integral un acercamiento visual con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 1351-1358.

Llorens, J., y Santonja, F. (1997) Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas, 5*(1/2), 61- 76.

Marín, E. (2015). Aprendizaje constructivista para el análisis de estructuras mediante el uso de un entorno virtual. *Revista Tecnocientífica URU*, 41-49.

Martínez, J. E., Infante, R. y Brito, M. (2017). Los procesos didácticos para el tratamiento de teoremas matemáticos en el nivel medio superior. *Universidad y Sociedad*, *9*(2), 145-153.

Mejía, O. (2009). *Percepción de las nociones de conservación, comparación y cuantificación del área por estudiantes universitarios. Un estudio socioepistemológico a través de sus argumentos*. [Tesis de Maestría no publicada].

Montealegre, R. (1992). Desarrollo de la acción intelectual y formación de la actividad en estudiantes universitarios. *Revista Latinoamericana de Psicología, 24*, 343-355.

Morales, A. (2013). *Estrategia metodológica para el tratamiento del concepto de límite al infinito.* Tesis de doctorado no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Morales, A., Ramírez, M. y Sigarreta, J. M. (2018). Aproximación a la formulación del teorema del cambio de variable en el proceso de resolución de la integral definida. Una propuesta de aprendizaje.

Morales, A., Locia, E., Mederos E., Ramírez, M. & Sigarreta, J. M. (2018). The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology*, *9*(1), 1510-1517.

Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo integral escolar fundamentado en la Predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 27-76. Madrid: Ediciones Díaz de Santos; Guerrero: Universidad Autónoma de Guerrero.

Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 13(4-II), 283-302. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, Organismo Internacional.

Murcia, S. M., y Valdivieso, M. A. (2013). Aspectos a considerar en la resolución de un problema. *II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática 2013.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja, Colombia.

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva* [tesis de Maestría] Instituto Politécnico Nacional.

Paschos, Th. Y Faumak, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, 337- 344.

Pérez, O. (2004). El cálculo de la integral indefinida y la evaluación del aprendizaje. *ALME 17*(17*)*, 642- 646.

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación 3(*35).

Piaget, J. (1975). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Madrid.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral.* (3ª ed.) Editorial: Mir Moscú. Traducido del ruso. URSS.

Polya, G. (1999). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Ponce, J. C. (2013). *El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación.* Tesis de Doctorado no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México.

Ponce, J. C. y Rivera, A. (2011). A discussion on the substitution method for trigonometric rational functions. *Mathematics and Computer Education 45*(1), 44-51.

Ponce, J. C. y Rivera, A. (2009). Reflections on the method for computing primitives: $u = tan(\frac{x}{2})$. In D. Wessels (Ed.) *Proceedings of the 7th Southern Right Delta Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics.* Gordon's Bay, South Africa, 206-215.

Ricardo, A. y Moya, D. (2007). Propuesta metodológica al tratamiento de teoremas y sus demostraciones. *EduSol 7*(20), 1-8. Cuba.

Rogers, C. (1992). *El proceso de convertirse en persona. Mi técnica terapéutica.* Departamento de Psicología y Psiquiatría. Universidad de Winsconsin.

Rubinstein, J. (1964). *El desarrollo de la Psicología principios y métodos*. Ed. Consejo Nacional de la Universidad. Habana.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. *ZDM Mathematics Education.*

Sigarreta, J. M. y Arias, L. (2009). La resolución de problemas: un recurso para el desarrollo de la formación de la personalidad. Ed. *Universidad Autónoma de Guerrero*. Guerrero. México.

Sigarreta, J. M. y Laborde. J. M. (2004). Estrategia para la resolución de problemas como recurso para la interacción sociocultural. *Revista PREMISA*, *6*(20), 15-29.

Silva, M., Rodríguez, A., y Santillán, O. (2019). Estrategias de resolución de problemas matemáticos empleados por estudiantes de sexto grado de primaria. *X Congreso Nacional de Matemática Educativa.*

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

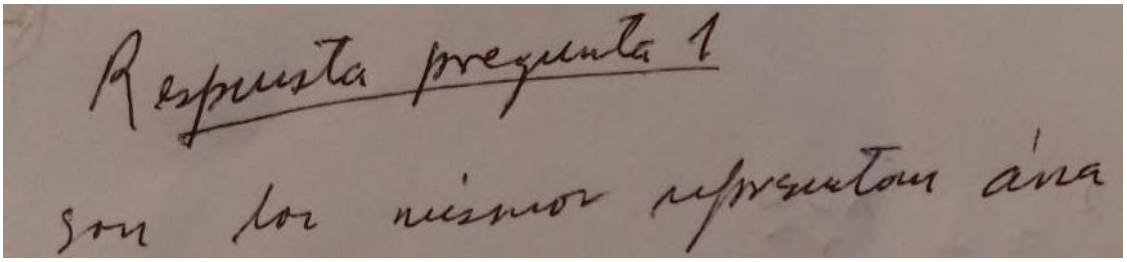
Schoenfeld, A. H. (2001). Objetivos y métodos de la investigación en educación matemática. *La Gaceta*, *47*(6), 185-205.

Valle, M. C., y Curotto, M. M., (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. 7*(2).

Valle, M. C., Juárez, M. A., & Guzmán, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *9*(2).

ANEXO 1 (Diagnóstico)

1- :

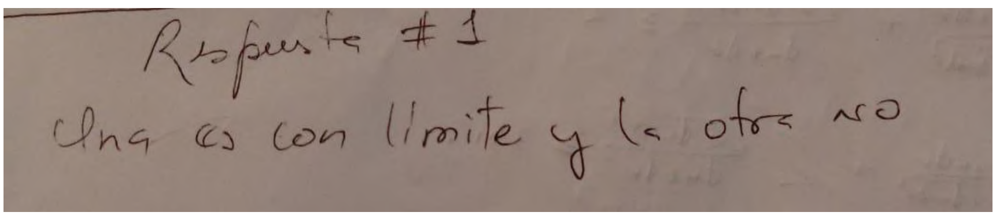


Respuesta pregunta 1

son los mismos representan área

Estudiante A:

Estudiante B:

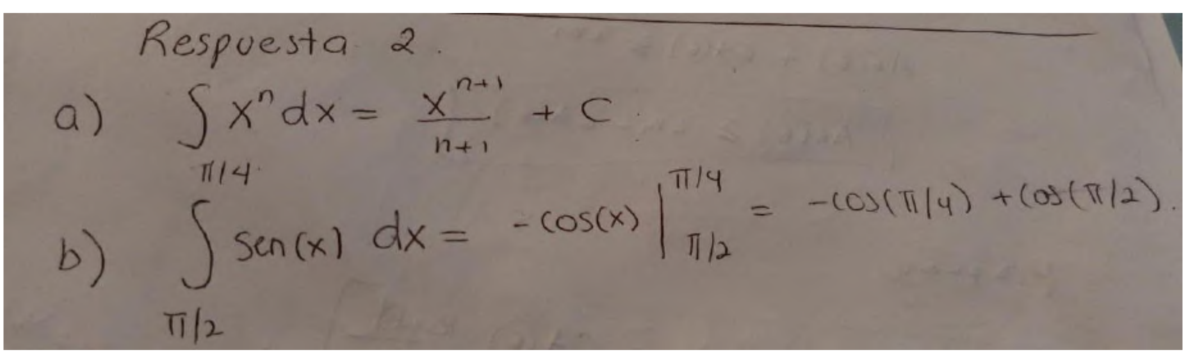


Respuesta #1

Una es con límite y la otra no

2- :

Estudiante A:



Respuesta 2.

a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

b) $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi/4} = -\cos(\pi/4) + \cos(\pi/2).$

3- :

Estudiante A:

$$\int_0^2 2x e^{x^2} dx \qquad \underset{2x}{x^2 = y} \qquad [x^n]' = nx^{n-1}$$

$$[x^2]' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$\int e^y dy = e^y + c$$

$$\int_0^2 e^y dy = e^y \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

Estudiante B:

$$\int_0^2 2x e^{x^2} dx = 2\int_0^2 x e^4 dx$$

$$= 2e^4 \int_0^2 x\, dx = 2e^4 \frac{x^2}{2}\Big]_0^2$$

$$u = x^2$$

$$= \cancel{2}e^4 \frac{4}{\cancel{2}}$$

$$= 4e^4$$

4-:

Estudiante A:

$$\int_0^2 2(x+1)^2\,dx = 2\int_0^2 x^2\,dx + 4\int_0^2 x\,dx + 2\int_0^2 dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 + \frac{4}{2}x^2\Big|_0^2 + 2x\Big|_0^2$$

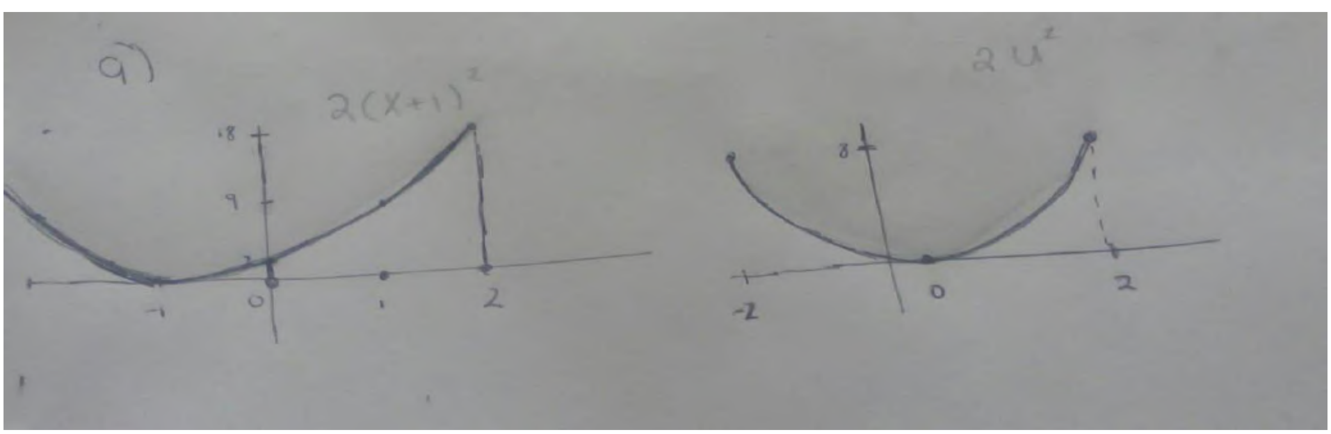
Estudiante B:

$$\int_0^2 2(x+1)^2\,dx \qquad (x+1)^2 = 4 \qquad x+1 = y$$

$$2(x+1)\cdot 1$$

$$\int_0^2 2y^2\,dy = 2\int_0^2 y^2\,dy = \frac{2}{3}y^3\Big|_0^2 = \frac{2\cdot 2^3}{3} = 24/3$$

Estudiante A:



Resultados:

Número de la pregunta	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
1	0	16
2	14	2
3 a)	2	14
3 b)	0	16
4	4	12

Tabla 1: Resultados obtenidos en la aplicación del diagnóstico.

ANEXO 2 (Sistema de Actividades)

7. **b):**

Estudiante B:

Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, sea $u=\phi(x)$ una función compuesta de $f(x)$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

Estudiante F:

Alumno F: Hacer un cambio de variable, es llevar una función a otra más sencilla, para esto, modificamos el intervalo de evaluación que dependa de la nueva variable que se ha elegido.

Estudiante N:

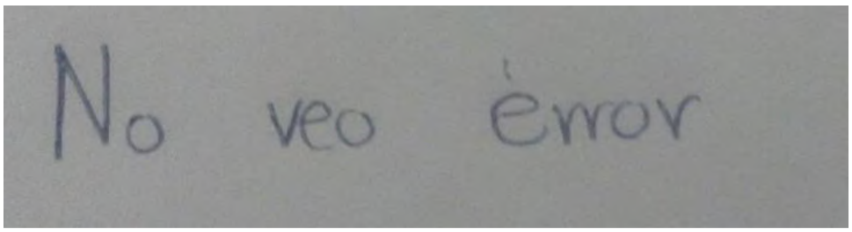
Nos sirve para facilitar el trabajo pero no siempre es necesario hacerlo.

Estudiante P:

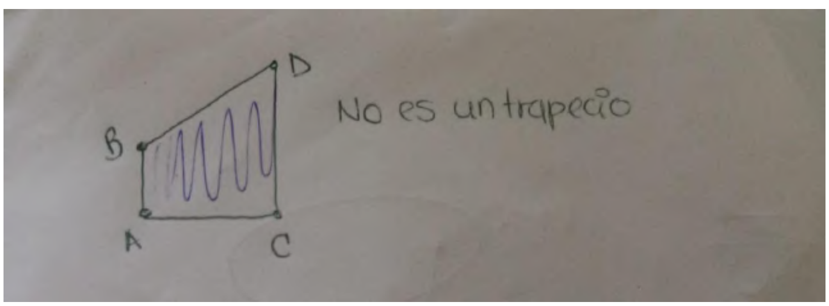
Transformar la función en un determinado intervalo, en otra función definida en otro intervalo, de lo cual es fácil cálcular el área delimitada por la misma función.

8- b):

Estudiante L:



Estudiante H:



9- :

Estudiante E:

Para resolver la integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$,

hacemos $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$, evaluamos

$x = \frac{\pi}{2} \to u = 1$ y $x = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{u}\, du = \ln u \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(1) - \ln(\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}).$$

10- :

Estudiante A:

No sabria probarlo.

11- b):

Estudiante B:

Alumno B: La integral queda en términos de una función de facil integración, además dicho cambio de variable debe de ser el adecuado.

Estudiante C:

El cambio de variable se usa para poner a una integral en su forma más sencilla de calcular, ahora, cuando se hace el cambio de variable en una integral definida los intervalos de la función cambian.

Estudiante F:

Alumno F: El cambio de variable es un método que nos permite resolver integrales, esto se hace con el fin de llevar una integral a otra más sencilla, lo que hace el cambio de variable es cambia una función por otra más sencilla, esto implica que los intervalos de evaluación cambian con respecto a

Estudiante M:

Alumno M: Que hace la integral menos compleja haciéndola más fácil de integrar, ya que cambia los intervalos de integración y es menos complejo.

Estudiante Q:

El cambio de variable modifica a una función y sus intervalos de integración de tal manera que produce otra función definida en un intervalo diferente, pero que al integrarla resulta tener la misma área que la función donde se aplicó el cambio de variable

13- :

Estudiante B:

Alumno B:

Dada una función f(x) y el método que permite encontrar F(x), tal que $F(x) = \int F(x)\,dx$, entonces mediante un cambio de variable $\int F'(v) \cdot v'\,dv = F(v) + C$, el cambio de variable se busca en una sustitución adecuada de tal manera que la integral sea más sencilla

Estudiante E:

Alumno E:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$ donde $u = \varphi(x) \rightarrow du = dx$

cuando se usa el cambio de variable también cambia el intervalo

Estudiante F:

AlumnoF: Teorema, una integral $\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(u))g'(u)du$

Estudiante J:

Sea f(x) una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y continua.
Al resolver por cambio de variable obtenemos: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u\,du$
cambian los limites e integración y evaluamos la función
en el límite superior e inferior obtenidos al realizar el
cambio de variable.

Estudiante Q:

Sea $F(x)$ una función continua evaluada en el intervalo
$[a, b]$, entonces si se hace el cv el límite de
$F(x) = F(a)$ y $F(x) = F(b)$ y se reduce a su minima expresión.

Estudiante N:

Propiedad de la integral definida, $F(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ con $a<b$. Sea $F(x)$ tal que $F'(x)=F(x)$, entonces por definición $\int_a^b F(x)dx = F(b)-F(a)$

ANEXO 3

Diagnóstico.

1- ¿Considera usted que existe alguna diferencia entre la integral definida y la indefinida?

Objetivo: Identificar las bases conceptuales de los estudiantes.

2- Resuelva las integrales siguientes

   c) $\int (x^2 + 3x + 1)\, dx.$

   d) $\int_0^{\pi} \sin x \;\; dx.$

Objetivo: Identificar las bases operativas y/o procedimentales de los estudiantes.

3- Resuelva las siguientes integrales.

   a) $\int \;\; 2xe^{x^2} dx$

   b) $\int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x)\, dx$

Objetivo: Analizar si reconocen las diferencias y procedimientos que aplican para la resolución.

4- Resuelva la integral $\int_0^2 2(x+1)^2 \;\, dx$ mediante el cambio de variable $u = x + 1$ y represente las regiones y funciones de integración respectivas.

Objetivo: Corroborar los procesos implícitos en la aplicación del teorema del cambio de variable.

Sistema de Problemas a desarrollar en clase.

5- Sea $f(x) = 4$ una función constante. Determinar el área bajo esta recta, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

c) Representar la región.

d) Obtenga el área de la región, planteando y resolviendo una integral definida.

Objetivo: Comprender la relación entre la integral definida y el área de una determinada región.

6- Sea $f(x) = ax$ una función dada, con a constante. En la siguiente figura se muestran tres casos asociados a distintos valores del parámetro a.

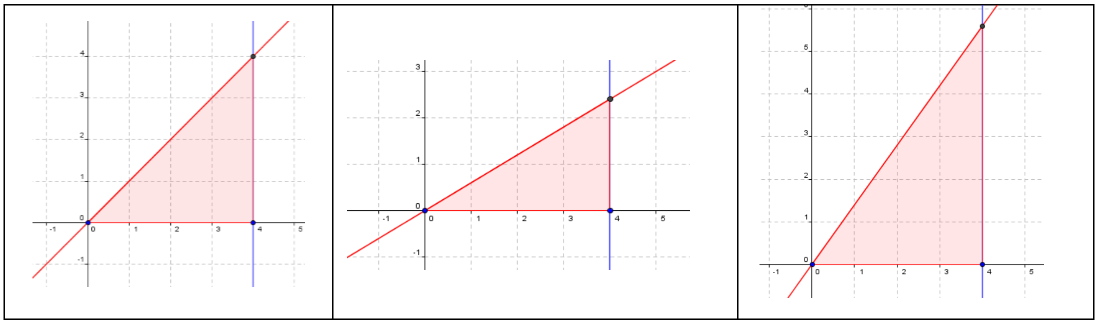


Figura 1.

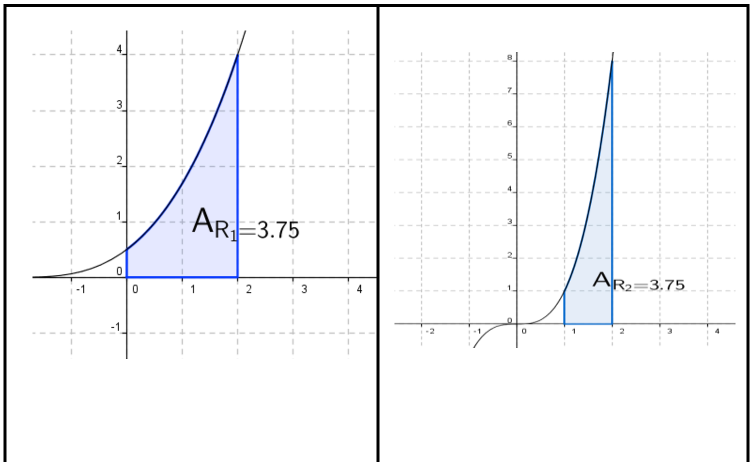
d) Determine el valor de a para que se verifique, que el área de la región bajo la curva $f(x) = ax$, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$, sea de 16 unidades cuadradas.

e) ¿Puede construirse otra región limitada superiormente por la curva de $f(x) = ax$, inferiormente por el eje horizontal y lateralmente por las rectas $x = x_1$, $x = x_2$ cuya área sea de 16 unidades cuadradas? Argumente su respuesta y determine de ser posible los valores de a, x_1, x_2.

f) ¿Qué relaciones existen entre las regiones anteriormente construidas, en función de su forma y área respectivamente? Argumente sus respuestas.

Objetivo: Comprender el cambio en las regiones de integración y su relación con la integral definida.

7- En la siguiente figura se muestran dos regiones en el plano con la misma área.



$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3; \ [0,2].}$	$\boldsymbol{g(x) = x^3}; \ [\boldsymbol{1,2}].$

Figura 2.

d) ¿Cómo justificas que, en efecto las áreas de las regiones son iguales?

e) ¿Cuáles son las implicaciones de realizar un cambio de variable?

f) ¿Qué efectos tiene la aplicación del Teorema del Cambio de Variable en la resolución de integral $\int_0^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3 \ dx$?

Objetivo: Fijar los alcances e implicaciones del cambio de variable en la resolución de integrales definidas.

8- Represente la región limitada superiormente por la curva de $f(x) = x + 1$, inferiormente por el eje horizontal y por las rectas $x = 0, \ x = 4$.

c) Grafique la región y calcule su área, sin utilizar el cálculo integral.

d) Para calcular el área de la región anteriormente se plantea la siguiente integral $A(R) = \int_0^4 (x+1) \ dx$. Aplicando el cambio de variable, $u = x + 1$ con $du = dx$ se sigue que, $A(R) = \int_0^4 (x+1) \ dx = \int_0^4 u \ du = \frac{4^2}{2} = 8$. ¿Argumente los resultados obtenidos?

Objetivo: Fijar el teorema del cambio de variable de la integral definida, en particular, reconocer el error asociado a la región de integración.

9- Determinar el valor de la integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$. En la siguiente gráfica se muestra la región que está bajo la curva $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, arriba del eje horizontal y entre las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

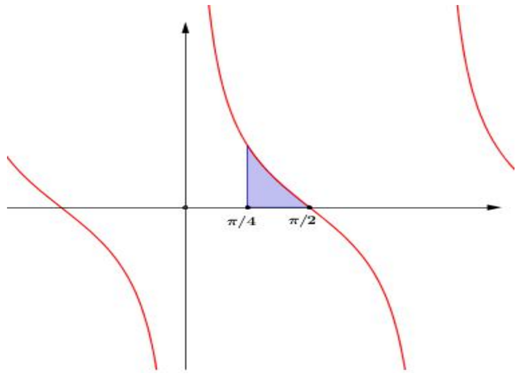


Figura 3.

Objetivo: Aplicar el teorema de cambio de variable en la solución de la integral definida.

10- ¿Demuestre que $\int_0^2 2(x+1)^2\ dx = \int_1^3 2u^2\ du$?

Objetivo: Aplicar el teorema del cambio de variable como un método de demostración.

11- Calcule utilizando la sustitución universal $u = \tan(\frac{x}{2})$, el área de la región mostrada en la Figura 4, limitada superiormente por la curva $f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}$, inferiormente por el eje horizontal y lateralmente por las rectas $x = 0,\ x = 2\pi$.

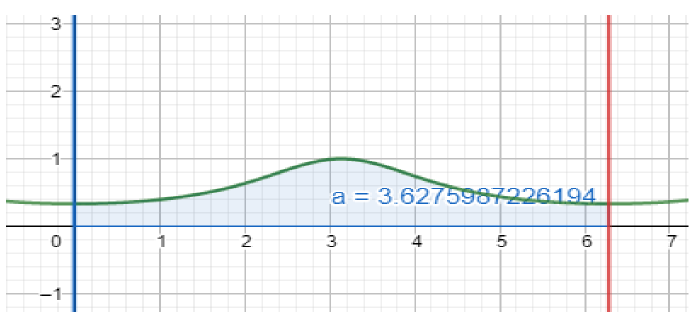


Figura 4.

Objetivo: Valorar condiciones necesarias para la aplicación del teorema del cambio de variable

12- ¿Cómo formularía usted un teorema del cambio de variable para integrales definidas?