UNIVERSIDAD AUTONÓMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

UN ESTUDIO SOBRE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN FUTUROS PROFESORES Y ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS

Presenta:
MANUEL TREJO MARTÍNEZ

Directora de proyecto
DRA. MARCELA FERRARI ESCOLÁ

Chilpancingo, Guerrero, febrero de 2020

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) el apoyo financiero para la realización de mis estudios doctorales. Con número de registro 172164.

Agradecimientos

Antes de todo agradezco a Dios por todas las bendicones recibidas.

A mis padres Manuel y Lucila, por el apoyo incondicional y ejemplo.

A mi esposa Magali por todo el apoyo a lo largo de esta etapa de mi vida y por las palabras de aliento en los momentos más difíciles. Te amo.

A la Dra. Marcela, quien a pesar de todas las dificultades surgidas a lo largo del proyecto tuvo las fuerzas y la determinación para sacar a flote el proyecto.

A mis profesores y amigos, por los consejos y sugerencias brindadas.

DEDICATORIA

A mis padres, esposa e hijos

ÍNDICE

Introducción

Investigaciones recientes en matemática educativa han dado evidencia sobre que el razonamiento covariacional es un elemento que ayuda, en gran medida, a que los estudiantes comprendan ciertos temas matemáticos. En particular, Moore (2014) muestra que se ha identificado que el razonamiento covariacional es de gran importancia como apoyo para el aprendizaje del concepto de función para alumnos de nivel secundaria y de bachillerato. Esto mismo es mostrado por las investigaciones de Castillo-Garsow (2010); Confrey y Smith (1995); Moore (2012); Thompson (1994 y 2011). Otros temas que se han trabajo bajo la idea del razonamiento covariacional son: Proporción, Tasa de cambio y Linealidad Variable, Funciones de una y dos variables, Trigonometría, Crecimiento exponencial.

Esta idea de covariación está impactado desde los programas de estudios en los Estados Unidos de América. Moore y Carlson (2012) comentan que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Standards abogó para que los estudiantes adquieran comprensiones y habilidades de razonamiento que los lleven a utilizar fórmulas matemáticas y gráficos para representar cómo las cantidades, en ciertos problemas, están relacionadas y cambian de manera simultánea.

No obstante, el desarrollo del razonamiento covariacional no es tan sencillo de lograr en los estudiantes, sobre todo si los encargados de acompañarlos no cuentan con herramientas apropiadas que fortalezcan el desarrollo de tal pensamiento. Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua, Byerley (2017) han criticado las formas que tienen los docentes para enseñar. Una de esas críticas hace referencia a los métodos que utilizan ya que se observa que emplean los mismos que se utilizaron con ellos en su formación inicial. Estos mismos autores señalan que es primordial y un factor muy importante que los docentes comprendan una idea matemática de manera sólida, debido a que ello impacta de manera directa en el entendimiento matemático por parte de los estudiantes.

Thompson y Carlson (2017) señalan la importancia de investigar las demandas que reciben los docentes y cómo se adaptan a ellas, referentes al apoyo que deben dar a los estudiantes para que desarrollen un razonamiento continuo (en el sentido de Castillo-Garsow, 2010). Consideran que los docentes no están preparados para brindar tal apoyo, pues para las personas adultas es complicado desarrollar estas ideas y formas de pensar, sobre todo cuando su formación matemática se ha forjado sobre números y variables estáticas. Varios investigadores y expertos como Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001), Cardeñoso, Cuesta y Azcárate (2015) y Dolores (2014) coinciden que es de suma importancia la formación inicial del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, debido a que ello está ligado a la cálidad del mismo proceso.

Esa línea de ideas nos llevó a considerar la formación inicial de profesores, específicamente de matemáticas, como un escenario ideal para trabajar el desarrollo del razonamiento covariacional. De tal manera que se planteó una investigación transversal que nos permitiera reflexionar sobre el quehacer de un futuro docente de matemáticas trabajando actividades de covariación en diferentes escenarios, lo cual nos brindara elementos que permitieran observar, analizar y reflexionar la influencia que tiene el razonamiento covariacional de un futuro docente matemáticas cuando trabaja tareas de covariación logarítmica-exponencial con estudiantes en diferentes contextos escolares (Figura 1).

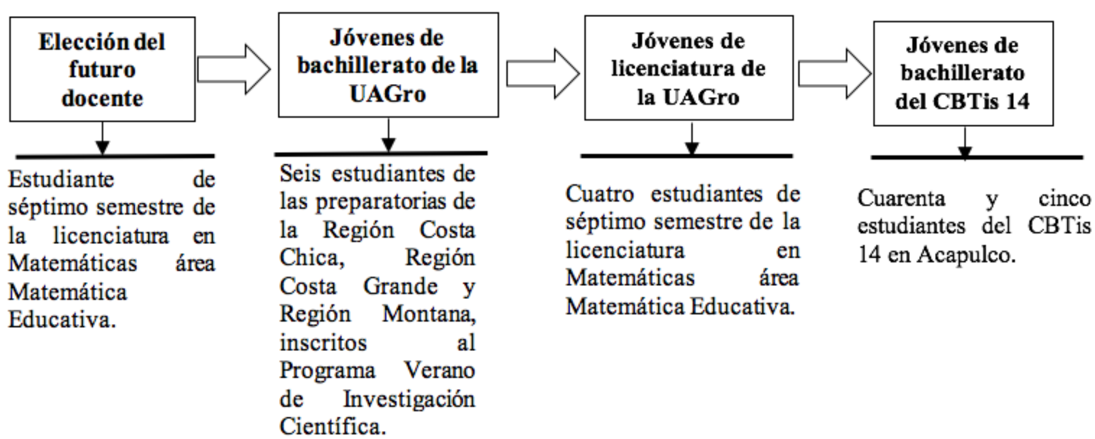


Figura 1. Diferentes escenarios del proyecto de investigación

Iniciamos con la elección del futuro docente, que en lo siguiente lo denominamos "Bunny", Bunny era un estudiante el cual se encontraba desarrollando su trabajo de tesis enfocado a los logaritmos en coordenadas polares, había tomado el 90% de los cursos de la licenciatura en matemáticas y del área de matemática educativa. Cabe mencionar que había participado en congresos nacionales e internacionales referentes al ámbito educativo donde colaboró en el desarrollo de distintos talleres o laboratorios referentes a las actividades de covariación logarítmica-exponencial. La trayectoria estudiantil de Bunny nos motivó a invitarlo a nuestra investigación sobre formación inicial y covariación logarítmica-exponencial.

El trabajo de Bunny con jóvenes de bachilletaro de la UAGro aparece publicado en el volumen 3, número 1 de la revista *Innovación e Investigación en Matemática Educativa* del 2018. En este artículo, se dio respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo los estudiantes de nivel medio, caracterizan la función exponencial mediante tareas específicas que involucran covariación logarítmica-exponencial?

En el Capítulo 2 presentamos los resultados derivados del trabajo de Bunny con los jóvenes del nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), éste se enfocó en un acercamiento al concepto de función exponencial bajo la mirada covariacional (reconocer la función exponencial apartir de la yuxtaposición de dos progresiones, una aritmética y otra geométrica). Participaron seis estudiantes, de los cuales cinco provenían de las preparatorias pertenecientes a la UAGro de la Región Costa Chica, Región Costa Grande y Región Montana, quienes se inscribieron al Programa Verano de Investigación Científica "Asómate a la Ciencia este Verano UAGro". El sexto participante pertenecía al Colegio de Bachilleres Plantel 2 en Acapulco. En el artículo mostramos cómo un equipo de tres estudiantes logran identificar dos variaciones distintas, una para los valores de x y otra para los valores de y, con las cuales esbozaron dos progresiones, llevándolos de está manera hacia el concepto de función exponencial bajo la covariación logarítmica-exponencial.

Cuando Bunny cursaba el séptimo semestre se inscribe a tres asignaturas las cuales estaban a cargo de tres profesoras de la Facultad de Matemáticas en Acapulco, tomando la decisión de unir las asignaturas para trabajarlas en conjunto (Figura 2), en ese escenario Bunny fue uno de los estudiantes que desarrollo un rediseño basado en actividades de covariación logarítmica-exponencial, ese rediseño lo utlilizó en el siguiente semestre con estudiantes de la misma licenciatura.

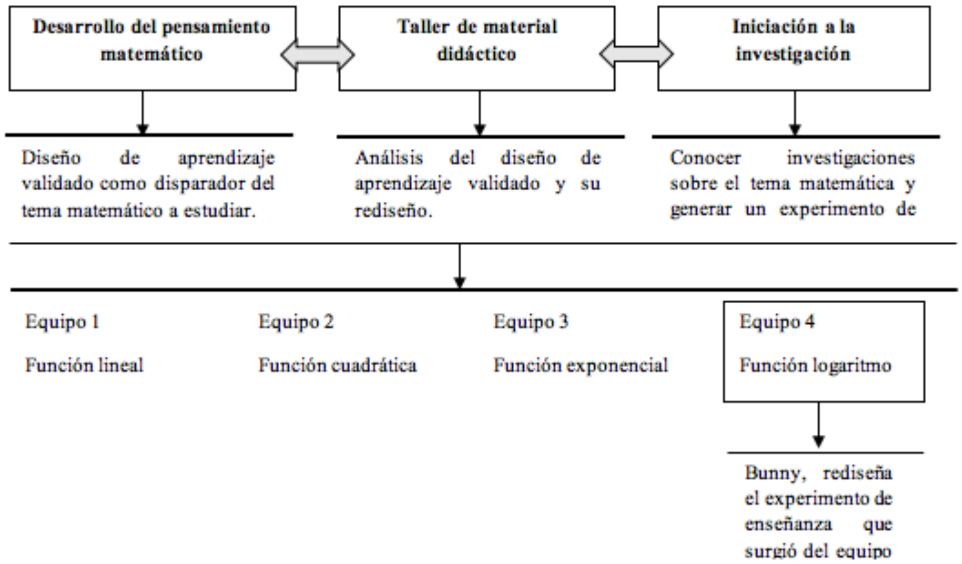


Figura 2. Trayectoria de Bunny en el séptimo semestre.

El escrito generado a partir del trabajo de Bunny con los jóvenes de licenciatura de la UAGro está en evaluación por la revista *Educación Matemática,* en dicho escrito reflexionamos sobre el trabajo realizado por estudiantes del nivel superior referente a la función logarítmica atendiendo la pregunta ¿Qué niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial se perciben en futuros profesores de matemáticas de sexto semestre de licenciatura? En el Capítulo 3 mostramos el trabajo de Bunny quien coordina a cuatro estudiantes pertenecientes a la Facultad de Matemáticas de la UAGro. En este estudio intentamos contribuir al cuerpo de investigación acerca del desarrollo del razonamiento covariacional en futuros profesores de matemáticas, reportando las acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial percibidos en dos estudiantes de sexto semestre de una Licenciatura en Matemáticas durante un experimento de enseñanza. Las tareas realizadas están basadas en una construcción geométrica de puntos de una curva, la cual con ayuda de GeoGebra se esperaba que los estudiantes explorarán las variaciones y describieran la curva que ajusta los puntos construidos. Lo que logramos percibir en estos dos estudiantes es que determinan una expresión general para la construcción de cualquier punto al reconocer las dos progresiones: la aritmética y la geométrica. Sin embargo, también se da evidencia de la complejidad de desarrollar un razonamiento covariacional continuo a partir de una tarea que incentiva el razonamiento covariacional discreto.

El trabajo de Bunny con los jóvenes del CBTis 14 se encuentra en el proceso de análisis por lo cual no se cuenta con resultados concretos, sin embargo nos estamos enfoncado en la forma de trabajo de Bunny con 45 chicos de nivel medio superior, donde las actividades planeadas abordaban los temas de función logaritmo y funcion exponencial desde la mirada covariacional.

Finalmente en las conclusiones dirigimos la discusión hacia el trabajo realizado por el futuro profesor en los diferentes escenarios, considerando que la formación inicial del profesor es un escenario ideal si se quiere influir de manera positiva en su labor como docente. También reflexionamos sobre lo alcanzado hasta el momento por las investigaciones, especialmente en el pensar cómo poder lograr un razonamiento continuo suave en el sentido Castillo-Garsow (2010) partiendo desde una actividad con un razonamiento covariacional discreto.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

1.1 Marco teórico

El razonamiento covariacional es un constructo teórico ampliamente utilizado dentro de un creciente cuerpo de investigación centrada en explicar el desarrollo cognitivo relativo a la coordinación de cantidades que varían simultáneamente (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Saldanha & Thompson, 1998; Thompson & Carlson, 2017). El razonamiento covariacional son las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende la relación de las formas en que ambas cambian (Carlson et al., 2002, p. 357). Razonar covariacionalmente implica realizar acciones mentales (AM), en diferentes niveles de desarrollo, involucradas en la concepción acerca de la variación de dos cantidades que varían.

La covariación puede ser entendida como estática y dinámica según Johnson (2012), en la primera se puede percibir como los incrementos de una cantidad están asociados con los incrementos de otra, por otro lado, en la covariación dinámica (discreta o continua), los cambios de una cantidad están asociados con los cambios de otra.

Desde la perspectiva dinámica, encontramos los trabajos de Carlson referentes a representación e interpretación de gráficas de funciones, de acuerdo a Carlson, et al. (2002), si se quiere determinar la capacidad que tiene un individuo de razonar covariacionalmente se debe analizar, en conjunto, los comportamientos y las AM exhibidos al responder tareas específicas de covariación. Para estos investigadores un estudiante logra cierto nivel de razonamiento covariacional de acuerdo a la imagen global que apoya las diversas acciones mentales exhibidas durante las tareas de covariación, la imagen, que describe los niveles, es caracterizada por Thompson (1994a) como aquello que se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales. Un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes al involucrarse en tareas de covariación es mediante las AM que aparecen en su marco conceptual, en dicho marco se proporciona una descripción de cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados. Dichos comportamientos se identificaron a partir de tareas que involucran la interpretación y representación de funciones asociadas a situaciones dinámicas.

Particularmente Confrey y Smith (1994) proporcionan una perspectiva de covariación estática de una función cuando se toma como una yuxtaposición de dos progresiones, cada una generada independientemente a través de patrones de datos, evidencia que emerge de su estudio sobre la función exponencial, el cual expresa que dicha función puede ser vista como la yuxtaposición de dos progresiones cada una de ellas construida de manera independiente (Figura 1) a través de análisis numéricos e identificación de patrones. En un sentido formal, la construcción de una función exponencial es la construcción de un isomorfismo entre los mundos de contar (aditivo) y multiplicar (multiplicativo) a través de la covariación.

En nuestra investigación, a diferencia de la Carlson, partimos de actividades de covariación de situaciones no dinámicas, iniciando con la construcción de puntos (evento discreto) de manera geométrica en GeoGebra y dirigiendo el trabajo hacia la parte dinámica. Dichas tareas están basadas en la covariación logarítmica-exponencial, la cual es caracterizada por Ferrari, Martínez y Méndez (2016) como la coexistencia de una variación regida por razones constantes y otra regida por diferencias constantes. La primera variación es reconocida como una progresión geométrica y la otra como una progresión aritmética. Entonces al querer clasificar los comportamientos exhibidos durante las tareas de covariación logarítmica-exponencial, nos llevó a considerar el marco conceptual (Tabla 1) descrito por Ferrari y colegas el cual es una adaptación al marco descrito por Carlson en el 2002.

Tabla 1. Razonamiento covariacional logarítmico-exponencial (tomado de Ferrari-Escolá, et al., 2016)

<table>
<tr>
<td>AM1.Coordi-nación entre los números. Reconocer orden y secuencia en cada progresión.</td>
<td>Nivel 1
Se percibe cuando se trabaja con los elementos de construcción de los puntos y se reconoce el orden de los elementos de las progresiones.</td>
<td rowspan="2">Nivel 2
Implica reflexionar sobre AM1 e incorporar AM2 mientras se trabaja en cómo cambian las cantidades involucradas.</td>
<td rowspan="3">Nivel 3
Articular AM1, AM2 y AM3, propician la internalización y coordinación de las operaciones involucradas, mientras se piensa en el conjunto de números y operaciones, sin aún coordinar las progresiones.</td>
<td rowspan="4">Nivel 4
Incorporar AM4 refuerza el nivel anterior al reconocer nuevas acciones y propiedades sobre objetos a través de la construcción de nuevos puntos de la curva.</td>
<td rowspan="5">Nivel 5
Coordinar las acciones mentales anteriores con AM5, promueve internalizar y coordinar acciones sobre progresiones y operaciones aritméticas que conducen a la covariación logarítmica-exponencial.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">AM2. Coordinación de la dirección de la cantidad del cambio en cada progresión numérica. Identificar si la progresión aumenta o disminuye al reconocer operaciones aritméticas entre números y, por lo tanto, el cambio aritmético (diferencia) y el cambio geométrico (cociente).</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">AM3. Coordinación de las operaciones aritméticas que generan las progresiones. Esto implica la asociación de la multiplicación con la suma como la operación que permite la construcción de puntos de la curva.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">AM4. Coordinación de las operaciones que completan las progresiones numéricas al extender el conjunto de números naturales al racional, y el conjunto de números racionales al real, para obtener la reversibilidad de las operaciones.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="5">AM5. Coordinación de las progresiones. Implica relacionar una coordenada de un punto con la otra coordenada del mismo punto, es decir, abstraer la relación funcional de forma numérica, gráfica o algebraica.</td>
</tr>
</table>

Las acciones mentales y su entrelace en niveles de razonamiento covariacional emerge del estudio epistemológico reportado por Ferrari (2008), en donde se identificó elementos esenciales que consideramos caracterizan la covariación logarítmica-exponencial. Percibimos allí que construir progresiones (una aritmética, otra geométrica), reconocer y vincular las operaciones aritméticas involucradas así como la convención matemática ($\log_a 1 = 0; a > 0, a \neq 1$) surge para generar un sistema logarítmico facilitador de cálculos, en tanto que en la exponencial ($a^0 = 1, a > 0$) para extender la estructura algebraica más allá de los números naturales.

1.2 Metodología

Dada la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje y la necesidad de una metodología sensible a ellos consideramos, adecuada para nuestra investigación sobre desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, los experimentos de enseñanza, los cuales están inmersos en la metodología de investigación basada en diseño. La cual de acuerdo con Molina, Castro, Molina y Castro (2011) es una metodología cualitativa que "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p.75). Para Molina et al. (2011) el objetivo de esta metodología es "analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76).

Los "experimentos de enseñanza" son considerados como una secuencia de episodios de enseñanza diseñados por un investigador. En un experimento de enseñanza participan uno o más estudiantes y un testigo (otro investigador o el profesor del curso); y, se determina un método de recolección de datos. Los datos son utilizados para rediseñar episodios siguientes y realizar análisis retrospectivo del experimento de enseñanza desarrollado (Steffe y Thompson, 2000).

De acuerdo a los experimentos de enseñanza, el equipo de investigación estuvo integrado por: Bunny que desarrollaría las sesiones, testigos encargados de tomar notas de campo (autores de este escrito) y dos auxiliares que videograbaron las sesiones.

Para la toma de datos se contó con tres videocámaras, dos de ellas se ocuparon para grabar la actividad de los dos equipos participantes, la tercera tuvo la función de grabar la actividad general del salón de clases a cargo de uno de los testigos. De igual manera se registraron las grabaciones de pantalla desde los equipos de cómputo utilizados para evidenciar el trabajo realizado en el software. También se recabó, al término de cada sesión, los archivos ". ggb" generados en GeoGebra. Se rescataron los archivos de audio de cada sesión, así como las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de los testigos.

El análisis de los datos se realizó de manera retrospectiva lo cual nos permitió reflexionar sobre los datos obtenidos durante todo el experimento de enseñanza (Molina, et al. 2011). Consideramos que las herramientas teóricas y metodológicas de la investigación están estrechamente ligadas a la pregunta/problema de investigación. De hecho, nuestro proceder teórico, metodológico y analítico es análogo a muchas investigaciones en el campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (e.g. Moore, 2013, 2014).

Se inició el proceso de familiarización con los datos a través de mirar, en repetidas ocasiones, los vídeos recabados, incluso se realizó una mejora en el audio eliminando ruido de las grabaciones mediante las herramientas proporcionadas por el software Audacity ®. Seguido de ello se realizó la transcripción de las grabaciones de vídeo; se revisaron y digitalizaron las hojas de trabajo resultantes de las sesiones; se revisó la construcción hecha en GeoGebra y la grabación de la pantalla recabada, elementos que nos ayudó a entender, de mejor manera, cómo fueron elaborados cada uno de los elementos geométricos de la construcción en GeoGebra. Cabe mencionar que los estudiantes involucrados presentaban un nivel básico en el uso del software lo cual implicó mantener la configuración predeterminada en aspectos como: ejes, cuadrícula, vistas algebraica y gráfica, así como el uso de dos cifras decimales. Este último aspecto jugó un papel importante durante el análisis de las variaciones realizada por los estudiantes. Con las transcripciones completas los autores identifican, por separado, momentos donde se vislumbran en los estudiantes aspectos covariacionales o elementos relacionados al crecimiento, o variación de las variables en juego, para luego triangular y validar los episodios escogidos como evidencia de las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional percibidos en el experimento de enseñanza.

CAPÍTULO 2

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Trejo, M. y Ferrari, M. (2018). Desarrollo del Razonamiento Covariacional en Estudiantes de Nivel Medio Superior. El caso de la función Exponencial. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa,* 31(1), pp. 36-58.

2.1 Introducción

Uno de los conceptos fundamentales dentro de las matemáticas es, sin lugar a duda, el concepto de función, el cual se presenta de manera formal en la educación básica mexicana del nivel secundaria. La Secretaria de Educación Pública (SEP, 2017) plantea que el estudiante analice y compare situaciones de variación lineal mediante las representaciones tabular, gráfica y algebraica; más aún, se espera que el estudiante pueda interpretar y resolver problemas que se modelan con este tipo de variación. Para el segundo año de secundaria se espera que el estudiante analice, situaciones de variación lineal, situaciones de proporcionalidad inversa incluyendo los modelos de fenómenos físicos. Finalmente, en el tercer grado, analizar situaciones de diversos tipos de variación y modelar situaciones de física y otros contextos. En los planes de estudio del Nivel Medio Superior (NMS) señalan que las funciones, como modelos del cambio, resultan de la mayor importancia en el currículo del bachillerato tanto por su potencialidad para las matemáticas y las ciencias, como por su flexibilidad para la representación en un sin número de situaciones.

Hitt y González-Martín (2016) presentan un análisis sobre las investigaciones que han sido reportadas en el PME (Psychology of Mathematics Education) respecto a funciones y cálculo, en él evidencían que el tema de función como objeto de investigación sigue vigente, afirmando:

> De primera vista, parecería ser un área de investigación condensada, sin embargo, pero la realidad es muy diferente a lo que imaginamos. La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones se está extendiendo hacia los primeros años de educación, y los investigadores de álgebra temprana abogan por fomentar el pensamiento algebraico comenzando en la escuela primaria, utilizando un enfoque funcional (p. 3).

En lo que respecta al nivel superior, en la última década, las investigaciones universitarias en matemática y física tenían una clara orientación cognitiva, cuyo objetivo giraba en comprender las concepciones, las dificultades y los procesos de los estudiantes sobre cierta noción (Artigue, 2016). Debido a las críticas recibidas estas investigaciones fueron evolucionando: de lo cognitivo a procesos socioculturales, y estas últimas originan investigaciones sobre diseño de tareas. En la Tabla 1 mostramos la clasificación de las investigaciones presentadas por Hitt et al. (2016) sobre el tema de funciones.

Clasificación de investigaciones	Objetivo	Investigaciones citadas en Hitt et al. (2016)
Uso de representaciones, patrones y variaciones.	Encontrar una regla general para un patrón dado y producir una representación semiótica para explicar su razonamiento.	Dooley (2009); Warren (2006); Wilkie (2015); Radford (2010, 2011); Trigueros y Ursini (2008).
Uso de covariación entre variables, modelación y diseño de tareas.	Mostrar la importancia del subconcepto de covariación entre variables como antecedente al concepto de función.	Carlson (2002); Thompson (2008); Musgrave y Thompson (2014); Johnson (2015); Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007).
Transición de imágenes mentales a un enfoque en representaciones semióticas y visualización como un proceso semiótico relacionado con funciones y cálculo.	Las representaciones externas de los objetos matemáticos son fundamentales, ya que permiten la comprensión de los conceptos matemáticos.	Duval (1995, 1999, 2006); Presmeg (2006a, 2006b, 2008); Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg (2008); Hähkiöniemi (2008).
Enfoques socioculturales para enseñar y aprender covariación entre variables y funciones.	La semiótica una forma de comprensión práctica y acción social.	Sáenz-Ludlow y Presmeg (2006); González-Martín et al. (2008); Mariotti (2012); Radford, Schubring y Seeger (2008).
Semiótica y tecnología, el concepto de función y procesos de modelado	La evolución de la investigación sobre los problemas de las funciones de aprendizaje y el cálculo en un entorno tecnológico.	Campos, Guisti y Nogueira de Lima (2008); Arzarello y Paola (2008); Hegedus y Moreno-Armella (2008); Mariotti (2012); Rojano y Perrusquía (2007); Naftaliev y Yerushalmy (2009); Arzarello, Robutti y Carante (2015);

Tabla 2. Clasificación de investigaciones realizada por Hitt et al. (2016)

Hemos encontrado algunas investigaciones que dan evidencia de la importancia de las funciones dentro del nivel medio superior y que a su vez proponen formas de trabajo que van más allá de la elaboración de tablas, gráficas y manipulación algebraica. Carrión y Pluvinage (2014), por ejemplo, realizan un trabajo sobre el tema de funciones reales de variable real con profesores del nivel medio superior en Tlanchinol, Hidalgo. Parten de la hipótesis de que saber álgebra no es suficiente para el tratamiento que ponen en juego las funciones; sino que es necesario tener un pensamiento que ellos llaman funcional. Proponen una serie de actividades en las que los participantes, a partir de una ecuación, hacen inferencias sobre los parámetros que la conforman utilizando diversas herramientas como lápiz-papel, hoja de cálculo, calculadora, software de cálculo formal y software de geometría dinámica.

Martínez-Sierra (2012) por su parte, presenta un estudio sobre la unidad de medida que contiene el argumento de las funciones trigonométricas, situándolo en el nivel medio superior mexicano. El objetivo que se plantea es conocer la estructura matemática escolar de las unidades de medida de las funciones trigonométricas y conocer las concepciones que tienen tanto profesores y alumnos sobre esa matemática escolar. Considera que el radián puede ser interpretado como un concepto articulador, porque proporciona una articulación entre la Trigonometría, que utiliza el grado como unidad de medida angular y al ángulo como argumento funcional de las razones y de las funciones trigonométricas, y el cálculo diferencial.

Landa (2010) afirma que la aproximación estática a las gráficas o superficie de funciones de dos variables pareciera suponer que las superficies en tres dimensiones, los planos con las que se intersectan y las curvas de contorno, son objetos matemáticos u objetos geométricos bien conocidos por los estudiantes. Señala que un acercamiento estático, partiendo de expresiones algebraicas inertes, puede no ayudar a hacer sentido de algunas ideas que incluye la noción de función con dos variables, como la covariación entre las variables involucradas, o la consideración que las superficies son una manera de representar la relación funcional de una variable que depende de dos variables independientes. En su estudio presenta el propósito de ayudar a los estudiantes en un primer contacto con la noción de funciones con dos variables, elaborando una secuencia de actividades para ser trabajada en el entorno Derive. Se pide a alumnos de bachillerato producir en Derive movimientos diferentes para un punto en el espacio, con la idea de detectar las dificultades.

Enfocándonos en la segunda clasificación de la Tabla 1, referente a la función mediante cantidades covariantes, encontramos la investigación de Moore, Silverman, Paoletti y LaForest (2014), quienes consideran que la función juega un papel central en las matemáticas de la escuela, a tal grado que proponen adoptar un enfoque basado en funciones para la enseñanza y aprendizaje, señalan que en el Common Core State Standards for Mathematics

(CCSSM) en los Estados Unidos visualizan el tema de funciones como un unificador de los niveles medios y secundarios.

Confrey y Smith (1991, 1994, 1995) describen un enfoque covariacional de la función afirmando que el concepto de función en general se entendería mejor desde esa perspectiva. Investigaciones recientes han respaldo dicha afirmación y han demostrado que estudiantes de primaria, secundaria y preparatoria pueden desarrollar una comprensión sofisticada de las funciones mediante el razonamiento covariacional. Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua y Byerley (2017) realizan un listado de las investigaciones que tratan el tema de función y realiza una clasificación de ellas como lo mostramos en la Tabla 2.

Funciones lineales y proporción	Trigonométricas	Funciones de 1 y 2 variables	Exponencial
Karplus, Pulos y Stage (1979). Lobato y Siebert (2002).	Moore (2012, 2014). Thompson, Carlson y Silverman (2007)	Boyer (1946). Bridger (1996). Carlson (1998). Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002). Confrey (1992). Hamley (1934). Hitt y Gonzaez-Martin (2005). Kaput (1994). Keene (2007). Martinez-Planell y Gaisman (2013). Nemirovsky (1996). Thompson (1994a, 1994b). Thompson y Carlson (2017). Weber y Thompson (2014). Yerushalmy (1997).	Castillo-Garsow (2013). Confrey y Smith (1994, 1995). Ellis, Ozgur, Kulow, Williams y Amidon (2012, 2015). Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan y Amidon (2016).

Tabla 3. Investigaciones sobre funciones desde el enfoque covariacional, Thompson et al. (2017, p. 95)

En lo referente a la función exponencial podemos encontrar en Ferrari, Martínez-Sierra y Méndez (2016) dos formas de aproximar a la exponencial; la primera en relación al trabajo de Confrey y Smith (1995), quienes explican que se puede aproximar covariacionalmente a una función mediante la yuxtaposición de dos progresiones, las cuales se generan de manera independiente apartir del análisis numérico identificando patrones en los datos. Para el caso especial de la covariación exponencial se tiene la coexistencia de variación de una progresión aritmética y una progresión geométrica. La segunda forma de aproximar a la función exponencial devine de las ideas de razón de cambio de Carlson de las cuales se derivan investigaciones como las de Castillo-Garsow (2010); Ellis, Ozgur, Kulow, Williams y Amidon (2012); Thompson (2008). En está línea de ideas Thompson (2008), considera que una característica que define a una exponencial es la razón proporcional a la cual una función cambia con respecto al valor de la función en un argumento específico. En ese sentido las investigaciones de Johnson (2012, 2015) generalmente consideran una razón constante de cambio, el cuál es el cambio constante en una variable en relación a otra. Si existe un cambio pequeño en una variable la otra debe cambiar en la misma proporción.

Concebir que dos variaciones se dan de manera simultánea y que los cambios tienen afectaciones en ambas nos lleva al razonamiento covariacional, si una de esas variaciones se puede regir por razones constantes y la otra por diferencias constantes estamos en el caso específico de lo que Ferrari y sus colegas llaman covariación logarítmica-exponencial. “La complejidad cognitiva reside en percibir la coexistencia y la codependencia, generando una función logarítmica o exponencial según la variación que desempeña el rol dependiente y cuál el independiente” (Ferrari et al., 2016, p. 95).

Como antecedente de nuestra investigación consideramos el trabajo de Ferrari et al. (2016) cuyo objetivo fue explorar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en estudiantes del NMS mediante un experimento de enseñanza: "multiplicar sumando"; esta frase la usan para referirse al hecho de yuxtaponer una progresión aritmética y una geométrica, en este caso la suma en la aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica. Estos investigadores utilizan la conceptualización de "logaritmos" trabajada por Napier y Briggs a principios del siglo XVII y las "curvas logarítmicas" de Newton, Huygens y Agnesi a fines del mismo siglo. Una revisión histórica se reporta en Ferrari (2008) y Ferrari y Farfán (2010). Por otro lado, consideran la perspectiva estática de la covariación exponencial de Confrey y Smith (1994, 1995), también los conceptos de la perspectiva dinámica de covariación por Carlson et al. (2002) para construir un marco conceptual para explorar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial. Para el desarrollo de su investigación hace uso de tarjetas hechas de fomi utilizadas durante las tres tareas diseñadas, cada tarea contenía actividades diseñadas para fomentar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, en la Figura 3 presentamos las tarjetas utilizadas.

16	4	64	8	
4	2	6	3	

Figura 3. Tarjetas usadas por Ferrari et al., 2016, p. 98.

De esta manera trabajamos con estudiantes del NMS del estado de Guerrero (México) un diseño derivado del estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos y la idea de covariación logarítmico-exponencial de Ferrari et al. (2016). El diseño estuvo constituido por 4 actividades que se encaminan hacia la caracterización de la función exponencial desde el enfoque covariacional mediante el análisis de tarjetas y la construcción de puntos de manera geométrica, el uso de tablas y hojas de cálculo, graficación y ajustes de puntos con el uso de software GeoGebra.

El objetivo de la investigación fue realizar un acercamiento al concepto de función considerando la covariación logarítmica-exponencial como la yuxtaposición de una progresión aritmética y geométrica. Para lograrlo nos preguntamos:

¿Cómo los estudiantes de nivel medio, caracterizan la función exponencial mediante tareas específicas que involucran covariación logarítmica-exponencial?

2.2 Los Participantes

Para el presente estudio se trabajó con seis estudiantes de nivel medio superior de los cuales cinco provienen de distintas preparatorias pertenecientes a la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) de la Región Costa Chica, Región Costa Grande y Región Montaña, quienes se inscribieron al Programa Verano de Investigación Científica “Asómate a la Ciencia este Verano UAGro”. El sexto participante pertenece al Colegio de Bachilleres Plantel 2 en Acapulco.

La organización del trabajo fue la siguiente:

- Se formaron 2 equipos de 3 integrantes.
- Se contó con un equipo de investigación que estuvo formado por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y el Doctorado en Matemática Educativa, quienes desarrollaron actividades de coordinación académica y recolección de datos. En cada sesión hubo dos investigadores, dos camarógrafos encargados de grabar a detalle el

desarrollo de las actividades y dos coordinadores encargados del diseño y gestión de la actividad matemática.

- Para la recolección de datos se emplearon dos cámaras móviles y una cámara de video fija para tener un panorama general. Se tomaron grabación del audio y de pantalla del trabajo en GeoGebra.
- Las sesiones de trabajo diario fueron de aproximadamente 4 horas, incluyendo un receso para la comida de 30 o 45 minutos.

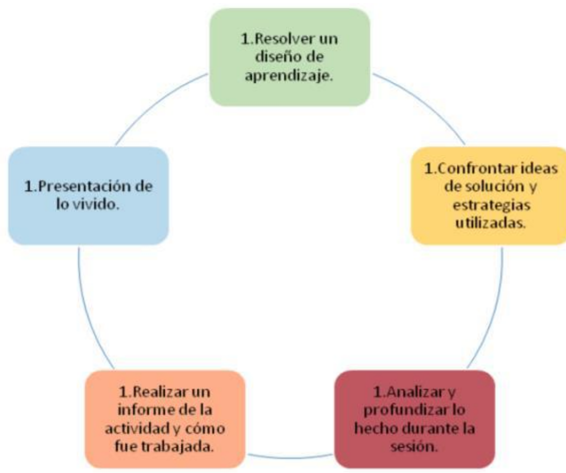


Figura 4. Dinámica de trabajo

La Figura 4 muestra las diferentes etapas de la investigación respecto a las sesiones de trabajo:

Etapa 1: los estudiantes se enfrentaron al diseño, donde realizaban la construcción de puntos, hacían análisis numérico, contestaban las preguntas sobre la variación de puntos;
Etapa 2: al terminar la sesión se solicitaba, a cada equipo, explicar la forma en que realizaron la actividad, haciendo énfasis en las herramientas usadas, en los problemas que tuvieron durante la actividad y la forma de solución que propusieron;
Etapa 3: los estudiantes se llevaban la tarea de analizar lo que habían realizado en la sesión para un mejor fortalecimiento en mira de la etapa 4;

Etapa 4: los estudiantes realizaban un informe de la actividad exponiendo todo lo sucedido y lo reforzado en la etapa 1 y 3;

Etapa 5: los estudiantes preparaban una exposición de la actividad, donde mostraban la manera de trabajar de su equipo, esto incluía fragmentos de videos, fotos.

2.3 El diseño

El diseño de aprendizaje trabajado está apoyado en el estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos. Ferrari y Farfán (2008, 2010, 2017) destacan la importancia que en siglos pasados se otorgaban a las construcciones geométricas dentro del estudio de las variaciones y el cambio, resaltando el papel de la covariación como unificador de modelos antecediendo a la idea de función. De la misma manera, se toman los trabajos de Martínez Sierra (2005, 2010) sobre exponentes y la importancia de reconocer convenciones matemáticas y de Lezama (2005) sobre función exponencial al realizar un estudio sobre la reproducibilidad de un diseño por profesores. Dennis y Confrey (1997) rescatan de la obra de Descartes la construcción geométrica como disparadora de argumentos covariacionales que se van generando mediante la construcción de puntos. Involucran la geometría dinámica en la construcción de una curva logarítmica con el uso del círculo unitario; de ciertas rectas tangentes y secantes; así como, de semejanza de triángulos.

De esta manera, el diseño estuvo constituido por 4 actividades que se encaminan hacia la caracterización de la función exponencial mediante el estudio y análisis de la covariación logarítmica-exponencial. Las actividades se pensaron para trabajarlas utilizando el software GeoGebra, alternando con el trabajo en fichas o tarjetas hechas de fomi y las hojas en papel donde se presentaban las actividades y preguntas. Para fines de este escrito sólo se discutirán las primeras dos actividades, las cuales consistían en construir puntos en GeoGebra, llevarlos hacia las fichas o tarjetas, realizar el análisis numérico y volver a GeoGebra para explorar propiedades cualitativas y características cuantitativas. En la Figura 5 mostramos el esquema de trabajo de estas dos actividades.

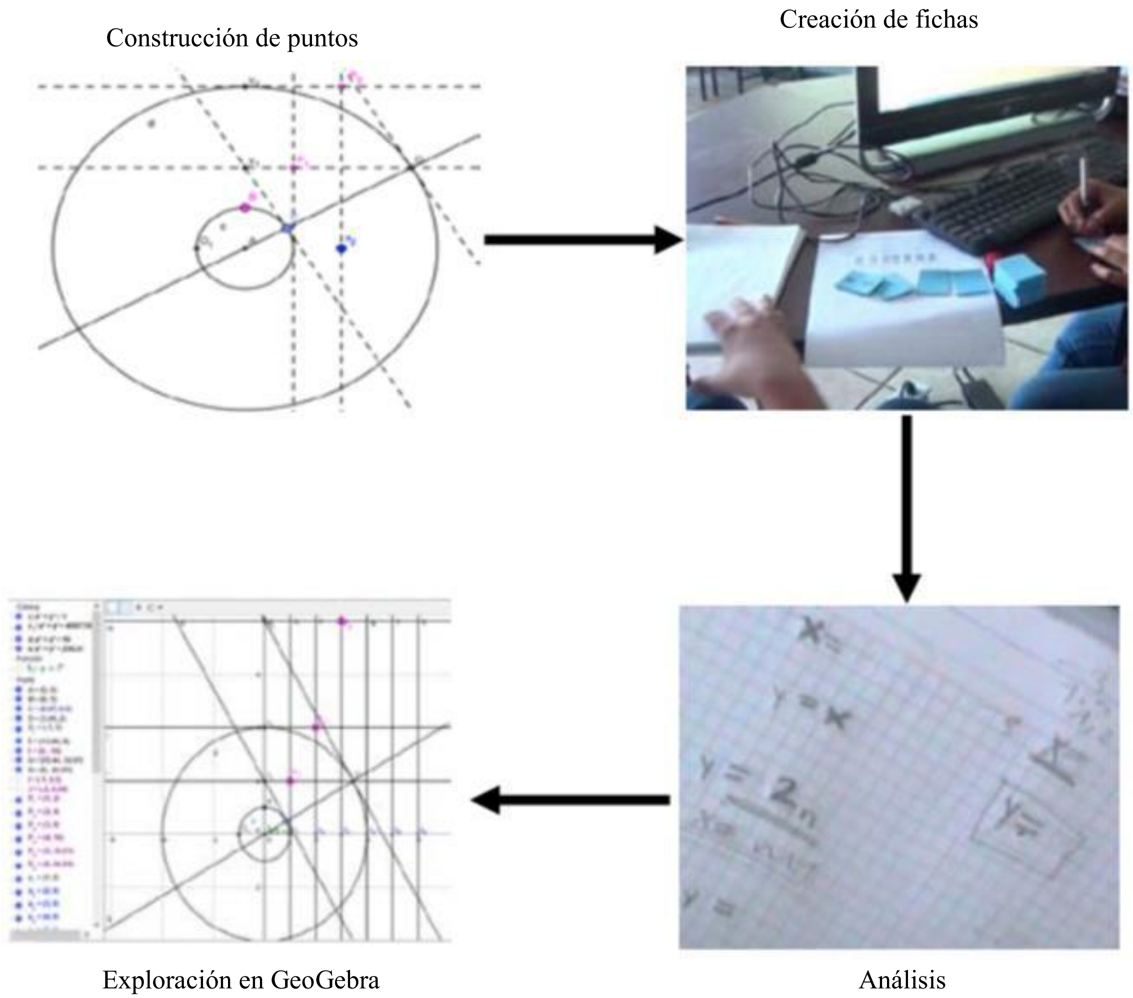
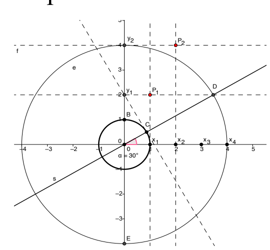


Figura 5. Esquema de trabajo

En la siguiente tabla describimos cada una de las actividades:

Actividad	Descripción
Actividad 1: El objetivo de esta actividad fue encontrar la regla general para construir el siguiente punto, para ello se solicitó: a) Colocar los puntos determinados en GeoGebra en las fichas. Construir tres puntos de la curva a la derecha de los que ya tienen. b) Comprueba tu respuesta con GeoGebra. c) ¿Cuál es la regla general para construir los puntos que siguen a un punto de la curva?	En esta parte los participantes construyen de manera geométrica mediante GeoGebra y con apoyo del coordinador los primeros 4 puntos. Luego de colocarlos en unas fichas deben buscar la manera de generar más puntos, usando sólo las fichas. Finalmente hay que generar una regla para construir puntos hacia la derecha y otra para generar puntos hacia la izquierda del punto de referencia dado (1,2).

<table>
<tr>
<td>
d) Construir tres puntos de la curva a la izquierda del punto (1,2).
e) ¿cuál es la regla general para construir los puntos anteriores a un punto de la curva?
</td>
<td>
Se espera que logren conjeturar que para encontrar puntos hacia la derecha se debe ir multiplicando por dos el número anterior correspondiente a los valores de “y” y sumar uno a los valores de “x”.
<table><tr><td>x
y</td><td>1
2</td></tr></table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Actividad 2: El objetivo de esta actividad fue encontrar la regla general para construir cualquier punto, para ello se preguntó:
a) ¿Cuál es la regla de multiplicar? Escríbanla,
b) ¿Cuál es la regla de dividir? Escríbanla
c) ¿Cuál es la regla general para construir cualquier punto de la curva?
d) Construyan los siguientes puntos de la curva rellenando las fichas ¿cómo comprobar que las fichas son puntos de la curva?
<table><tr><td>0
1</td><td>1/2
</td><td>1
2</td><td>1.5
</td><td>2
4</td></tr></table>
</td>
<td>
Los participantes multiplican dos fichas para poder generar otra, de igual manera deben dividir dos fichas y el resultado debe ser una nueva ficha o alguna de las que ya tienen.
Se espera que descubran que multiplicar dos fichas cualquieras implica multiplicar los valores en “y” y sumar los valores en “x”. Dividir implica restar valores en “x” y dividir valores en “y”. También se esperaba la aparición de las primeras progresiones (aritmética y geométrica) y con ello consolidar la regla general para determinar cualquier punto solicitado mediante 2_n para después llegar a la función exponencial 2_x.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Actividad 3: El objetivo de la actividad fue el reconocer la familia de curvas de la forma a_x para ello se plantearon dos actividades.
Actividad 3a. Utiliza el recetario de construcción para construir puntos de una curva. Esta vez, en lugar de trazar una recta a 30º, colocar directamente el punto C sobre la circunferencia y trazar la recta.

Actividad 3b. Moviendo el punto C observar lo que sucede con los puntos construidos. Hacer un informe sobre todo lo que observan. Pueden pensar en responder entre otras cosas:
a) ¿Algo cambia? ¿Por qué?
b) ¿Qué pasa con la forma de la curva?
</td>
<td>
Los participantes deben construir nuevos puntos en GeoGebra, con una variante de la construcción anterior (actividad 1) para después mediante las propiedades del software mover un punto de la construcción y analizar que sucede con los puntos pertenecientes a la curva.

Se espera que logren observar características de las curvas exponenciales, que logren una expresión para los nuevos puntos y para cada uno de los puntos que se generan al mover a “C”. Reconociendo la invariabilidad del punto (0,1) entre otros aspectos.
</td>
</tr>
</table>

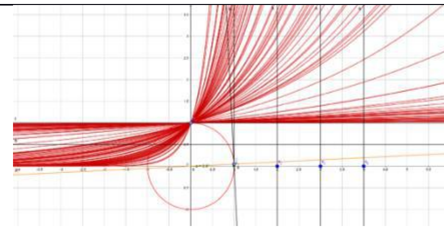
c) ¿Qué puntos de la curva son importantes observar? d) ¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, unirlos con una expresión algebraica	
Actividad 4: El objetivo de la actividad fue trabajar con la razón de cambio de curvas exponenciales. Par ello se plantearon las siguientes actividades. Actividad 4a. Construir puntos de una nueva curva usando los puntos de una función exponencial y siguiendo las instrucciones del profesor. Anotar los pasos. Actividad 4b. Construir una tabla con los valores de las abscisas y ordenadas de ambas curvas utilizando la hoja de cálculo. Hacer un informe sobre todo lo que observan, Pueden pensar en responder entre otras cosas: a) ¿Algo cambia? ¿Por qué? b) ¿Qué pasa con la forma de la curva? c) ¿Qué puntos de la curva son importantes observar? d) ¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, unirlos con una expresión algebraica	Los participantes a partir de la construcción de la actividad 3, realizan una nueva construcción de puntos utilizando rectas tangentes a los puntos de su curva, analizan los nuevos puntos y determinan la curva que se ajusta a dichos puntos. Se espera que logren encontrar la similitud entre esta nueva curva y las exponenciales trabajadas, y reconocer la existencia de una constante que afecta a la expresión que ellos habían trabajado anteriormente, es decir, que de la forma a_x cambió a la forma ka_x.

Tabla 4. Las actividades

2.4 Resultados

Para fines de este escrito, solo se mencionará lo realizado por un equipo de tres estudiantes que denotamos como: E1, E2, E3 a los estudiantes 1, 2, 3 y al coordinador con la letra C.

En la primera sesión se construyó, en GeoGebra, varios puntos de la curva y se incitó al análisis numérico en busca de los patrones de crecimiento de las abscisas y ordenadas. Para ello se solicitó colocar los puntos construidos (puntos “P” Figura 6) en fichas. Una vez reconocido dicho patrón la discusión se dirigió hacia la búsqueda de leyes que permitieran multiplicar y dividir con las fichas, la abstracción de progresiones hasta lograr el ajuste de los puntos y la expresión algebraica general del comportamiento que para nuestro caso particular fue 2^x. En lo siguiente describiremos a manera de episodios lo sucedido.

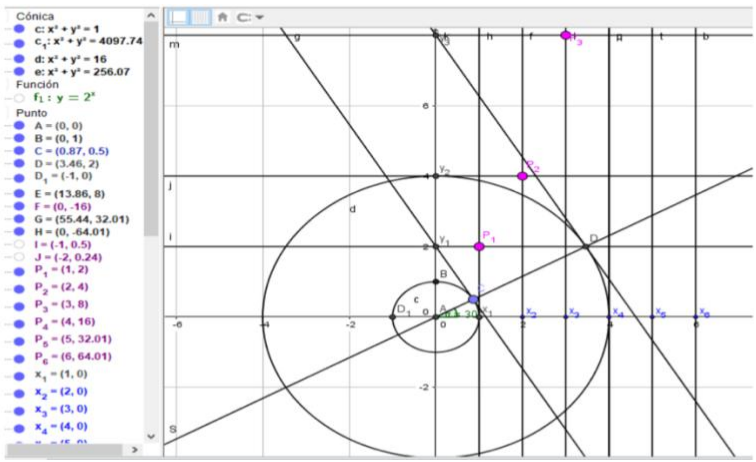


Figura 6. Puntos construidos

2.4.1 Episodio 1. Fichas vs construcción geométrica

Al construir más fichas surge la primera idea de sucesión numérica, los participantes deducen que los valores de "y" van avanzando de dos en dos, el nuevo punto tendría que ser (3,6) y el siguiente el (4,8) y el (5,10), Figura 7.

E1: Serían 1 y 2 abajo ¿cuál sería la otra?	231
E3: 2, 4	232
E1: La otra sería (3, 6) y (4, 8) ¿pero sólo vamos hacer tres no?	233
E2: sí	234
E1: y 5, 10 y ya ¿nada más son tres?	235

Figura 7. Van aumentando de dos en dos

Cuando compararon los puntos de las fichas con la construcción en GeoGebra observaron que no coincidían, por ejemplo, tenían (3,6) y (3,8). Debido a ello cambiaron su argumento "si estos números (los x) fueran n sería n por 2" (Figura 8, línea 262) esbozándose razonamiento covariacional lineal, vinculan el crecimiento de las ordenadas con la "x".

E1: 1, 2; 2,4; 3, 8... No, no concuerdan
C: ¿qué pasó? ¿por qué no concuerdan? ¿cómo pensaron acá la construcción?
E1: porque la sucesión numérica era 2, 4..
E2: ajá pensamos que la sucesión sería, por ejemplo, si estos números (los x) fueran n serían n por 2
C: ¿cómo?
E2: en este caso por así decirlo, el numerador si esto fuera como n sería la fórmula por así decirlo n por 2, que en sí lo de abajo sería lo doble que lo de arriba

Figura 8. No concuerdan los puntos

Finalmente, los estudiantes logran identificar la forma de crecimiento de los puntos auxiliándose de GeoGebra, para ellos la coordenada en "y" de los puntos siguen un comportamiento similar a la tabla del dos, 2*2=4; 4*2=8; 8*2=16; 16*2=32 (Figura 9).

E1: traza una línea vertical por x4, sería aquí, sería paralela a x4, aquí y tiene que intersectar con y4, hago una paralela aquí de x a y4, este es el punto P4
E2: ¿sus coordenadas cuáles son?... ¿(4, 16)?... sí
E1: Sería P4 ¿verdad? Ya está
E2: sí es (4, 16)
E1: 4 punto 15
E2: son decimales
E1: bueno sí 4, 16, porque yo puse 4, 15.999 redondéenlo (risa)
E: sí, es 4, 16 (risa)
E1: y nosotros 4, 8, 5, 10 (risa)
E2: qué nos pasa (risa)
E3: y de quién fue la idea... (risa)
E2: está bien, está bien. Entonces el siguiente será (5, 32)
E1: ¿sería 5, 32?
E2: podría ser
E1: es la tabla del 2?
E2: Sí, sí
E1: 2x2=4, 4x2=8, 8x2=16, 16x2... sí 32

Figura 9. Es la tabla del 2.

Ahora el reto que se plantearon los estudiantes fue deducir desde los números porqué dicho comportamiento, para ello buscan en su repertorio alguna herramienta que les pueda servir.

2.4.2 Episodio 2. "La forma primitiva"

Derivado del análisis de las variaciones de los puntos identificaron que las "x" aumentaban de 1 en 1, y las "y" multiplicando por 2 (Figura 10, línea 358), pero no lograban representar de forma algebraica.

E2: ¿seguimos con la siguiente actividad o esperamos?
E1: dice... 'cuál es la regla general para construir los puntos que siguen a un punto de la curva? ¿ya lo hiciste? ¿qué hiciste?... "x" sigue una sucesión normal de n+1 y por aparte "y" sigue una sucesión de n... n que sería 5? Pero no puede ser por dos.

Figura 10. ¿La regla general?

La idea de lograr una regla general se apoderó del equipo y empezaron a dar ideas; "es el doble", "el doble producto", "el doble de 2 de *n*", "la suma de los productos anteriores", "al cuadrado". Buscaron una herramienta o método, una idea imprecisa surgió en los participantes **E3** y **E2** empezaron a calcular diferencias entre los valores, sentía que podía lograr algo así pero no sabía que. El método fue denominado *"la forma primitiva"* ya que argumentan que fue aprendido en la escuela secundaria y básicamente sirve para encontrar el patrón de sucesiones numéricas. Esta forma de trabajo los conduce a encontrar un "2" utilizando diferencias, esto lo podemos ver en la Figura 11.

E3: ya sé cómo... hay que sacar, hay que hacerlo de la forma primitiva. 2, 4, 8, 16, 32 su diferencia es...
E2: 2, 4, 8, 16
E3: aquí es...
E2: 2, 4, 8
E3: 2, 4
E2: 2
E1: tenía que ser el número dos
E2: ¿y ahora qué?
E3: ¿cuántas veces lo utilizamos? 1, 2, 3, 4 ¿no se acuerdan de eso?
E1: sí, me acuerdo más o menos
E3: Yo también recuerdo pero no me acuerdo qué
C: a ver platíquenmelo a lo mejor yo me acuerdo
E1: es que en la secundaria nos podían hacer ese tipo de números para poder decretar una fórmula que siguiera esa sucesión es la forma primitiva
E3: ajá
E1: sacar lo intervalos de estos, hasta llegar a un sólo número eso te va a dar parte fundamental de la fórmula
C: ok

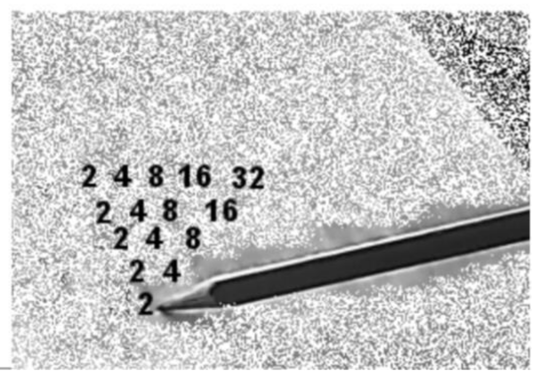


Figura 11. La forma Primitiva

El análisis que realizaron los estudiantes los llevo a reconocer que los valores en "*x*" siguen una sucesión "normal" en la forma "*n*+1" y que en "*y*" podían determinarse multiplicando por dos el número anterior. Al momento de buscar la regla general por medio de diferencias sucesivas, método muy utilizado en el nivel básico para encontrar patrones de crecimiento en sucesiones numéricas, no podían encontrar la razón de la progresión ya que esta era geométrica y no aritmética. Lo cual produjo no lograr una expresión algebraica.

2.4.3 Episodio 3. Reglas de multiplicar y dividir. "Multiplico y Sumo; Divido y Resto" ¿y cómo escribir eso entonces?"

En la actividad 2 debían encontrar una regla que permitiera multiplicar dos fichas del juego para obtener una nueva ficha, E1 señala que si toma dos fichas su multiplicación se realiza sumando y multiplicando "estoy observando que si multiplico esto (0.25) por esto (0.5) te va a dar eso (0.125) y si sumamos esto (-2) con esto (-1) te va a dar esto (-3)" como lo ejemplificamos en la Figura 12.

E1: Es que yo veo que aquí sumando uno más dos sería 3 y multiplicando 2 por 4 sería 8 inclusive aquí 3 más 4 y 6 por 8 da la ficha del 7
C: ah muy bien, a ver entonces comprueben y esa podría ser tu regla de multiplicar
E1: pues sí es lo que estoy viendo
C: compártenla, revisen si funciona y entonces esa sería una regla que ya te puede servir para las fichas ¿no?
E1: sí
E2: ¿cómo?
E1: estoy observando que si multiplicamos esto (señala 0.25) por esto (señala 0.5) te va a dar eso (señala 0.125) y si sumamos esto (señala -2) más esto (señala -1) te va a dar esto (señala -3), igual aquí si multiplicamos digamos 2 y 3, 2+3=5 y si multiplicamos 4x8 te da 32, así le puedes hacer con este (junta las fichas 3,8 y 4, 16), incluso aquí 1+3 te da 4, y 2x8 te da 16 y ya, según yo
E2: Aquí sería -1 -2 es -3 y 0.5 x 0.25 es 0.125
E1: Ajá, ahora no tengo una calculadora voy a hacerlo en la forma primitiva
E2: sí calcúlalo
E1: isí! 0.125 , ya está. Aquí sería 6 y 64, 64x2 sería 128, entonces sería 7, 128. Ahora 8x16 tiene que dar 128.. ahí está
E2: ya estuvo

Figura 12. Sumando los de arriba y multiplicando los de abajo

Para lograr una regla general, se preguntaban, cómo poder representar la multiplicación y la suma de los elementos de las fichas, **E1** argumentaba "*y1 por y2, es que no sé, hay que ponerle un puntito, así sería la regla es que significaría que x1 es cualquier número ya sea 1 más el siguiente número que puede ser 2 o puede ser tres*". Pero no está seguro debido a los ejemplos concretos que tienen, por ello replantea *"No, no, es la multiplicación, o sea, si es x1+x2 y luego y1* y2, pero tiene que salir 3 luego tiene que salir 8, entonces sería n1 y n2 entonces tendrían que ser dos fórmulas para poder sacar."*

E2 dice la suma de los dos valores de "*x*" debe dar un consecutivo, lo mismo ocurre con los valores de "*y*", propone *"x1+x2=x3"* para la suma *y* "*y4*y5=y6*" para la multiplicación. Generalizando sería "*(yn) (yn+1) = yn+2"*. La idea de generalizar utilizando *n*, *n*+1 y *n*+2 no fue entendida y **E1** evoca un ejemplo para refutar esa idea, "*por ejemplo 32 por 64 que es el número que sigue es igual a... quien sabe cuánto, y ese es el resultado que te va a dar. Aquí sería x1... xn+xn es que tiene que ser n y no n+1 o n+2 porque puede ser cualquier número no tiene que ser consecutivo*" (Figura 13, línea 855-859). Esta refutación parece estar fundamentada en el hecho de que 32*64 no es el valor de "*y*" correspondiente al valor 7 de "*x*".

Lo cual lleva a **E1** a declinar su propuesta.

E2: ajá y quizás para no poner el 3, 4, 5, 6 sería (yn)(yn+1)=yn+2, quizás
E1: ¿qué hiciste?
E2: Hay para no utilizar un solo valor
E1: pero Y es el de abajo no es el de arriba
E2: por eso es abajo
E1: pero al decir que n, aquí podemos poner que n puede ser 1
E2: no, n yo digo el número de abajo, por ejemplo, suposición va a ser 1, 2, 3, 4 y 5, y eso va a ser n. al poner n estamos diciendo simplemente que podría ser la posición que sea, por ejemplo 6, y al poner n+1 estoy diciendo que será el siguiente valor que le sigue a este, que es este número más otro
E1: pero Y es éste, no es éste
E2: no, a lo que me refiero es a esto
E1: pero a ver por ejemplo aquí y, y tiene que estar abajo puede ser, por ejemplo 32, más... no es más es por, por 64 que es el número que sigue igual a... quién sabe cuánto, y ese es el resultado que te va a dar. Ahora aquí sería x1... xn+xn es que tiene que ser n no n+1 o n+2 porque puede ser cualquiera número no tiene que ser sucesivo

Figura 13. ¿Quién es *n*?

Para el caso de dividir las fichas no tuvieron problema en describir que ahora se debería restar en "*x*" y dividir en "*y*". Hasta ese momento tenían tres formas de encontrar fichas, usando las anteriores inmediatas, las reglas de multiplicar y dividir. Ahora se tenían que centrar en cómo obtener una fórmula para encontrar cualquier ficha.

2.4.4 Episodio 4. "Las progresiones"

La noción de covariación se encontraba latente en los estudiantes, ya se preguntaban si era posible obtener con un "*n*" dos números, **E1** decía que "*al obtener n sólo obtengo un número ¿verdad? No tengo dos. Porque aquí en las fichas tenemos que obtener dos números, no nada más una*". La primera idea de expresión es lineal, **E1** propone escribir "*y=x por... o más...*" Tomando la ficha (5, 32) el coordinador pregunta eso sería "*32=5 por...* **E1** dice "*no, es que falta algo. (Figura 14)*" La linealidad no termina por convencer, pero tiene claro que es "*y*" a quien deben calcular.

E1: y=x, por.. o más..
C: en este caso 32 es igual a 5
E1: No... es que me falta...
C: ajá, sí sí te falta... yo te estoy ayudando con los números ya pusiste x pero dices que le falta algo, entonces sería 32 es igual a 5, 5 por... 5 por algo que te de 32
E1: eso no puede ser
C: Pero por ahí va la idea tenemos que pensar en esa relación
E1: Entonces vamos a calcular Y

Figura 14. Hay que calcular a "*y*"

El equipo tiene frases como *"el doble de un número cualquiera"* "*el doble del resultante anterior"* después de un rato de trabajo logran determinar la forma de representar dichas frases, para x=n+1 y para y= 2n (Figura 15) ahora la discusión es como lograr una sola expresión.

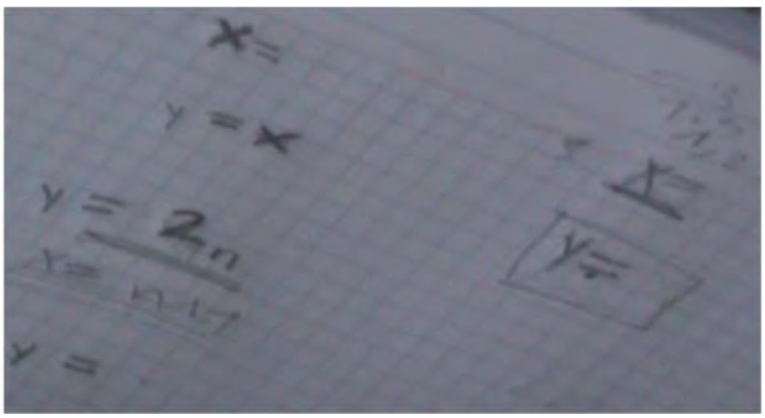
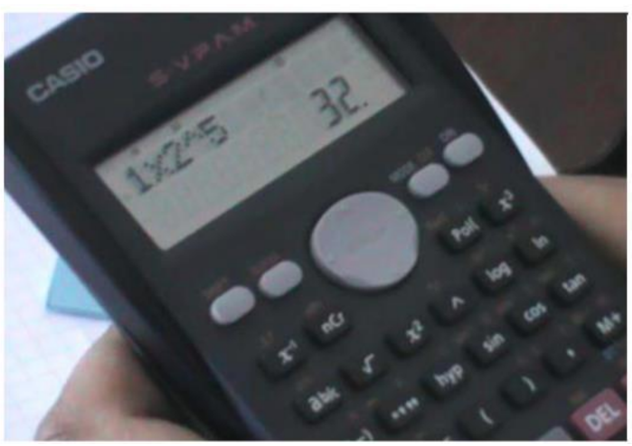


Figura 15. y=2n y x= n+1

E3 mediante su calculadora encuentra que los valores de "*y*" pueden calcularse mediante potencias de 2 por ejemplo, la ficha (5,32) se obtiene "1*2^5 =32" sin embargo no sabe cómo representarlo de manera escrita.



E3: No sé cómo representarlo
E1: pues escríbelo no te quedes callado
E3: pues es lo que no sé, no sé representarlo básicamente en lo que es fórmula n
E1: ¿quién es X ahí?
E3: X es n, n es un número cualquiera determinado por la posición que queremos tener de X, donde la Y es lo que tenemos que encontrar que sería básicamente n por 2 a la n, porque n es un número cualquiera, bueno no sería n (hace referencia a la n que está multiplicando al 2) sería otro. Es que de manera exponencial sale
E1: Pero al n en lugar de ponerlo acá (escribe al n que multiplica al 2) lo pusiste acá (escribe al n como potencia del 2) ¿y de dónde sacaste al 2?
E3: n viene de acá (busca la hoja donde anotaron las diferencias que hicieron al principio donde al final llegaron

Figura 16. Es n por 2 a la n

La forma de escribir los productos era algo peculiar, debido a que en cada operación realizaba una multiplicación por 1, por ejemplo (Figura 16), la ficha (9, 512) la encontraba como $1x2^9$. Sin embargo, no se logró entender el papel del 1 en dicho proceso, cuando el equipo cuestionó a E3, dijo que se podía quitar de ahí sin el mayor problema, por lo que se optó por escribir su fórmula como 2^n.

Podemos ver que los estudiantes logran reconocer dos progresiones, incluso pueden identificar el tipo de comportamiento que tienen. Después de cierto tiempo de análisis y discusión pudieron lograr representar el comportamiento mediante progresiones (n+1 y 2n) también logran identificar que tener dichas progresiones por separado no resuelve del todo lo que se pide en la actividad, se ven en la necesidad de buscar una única expresión, es decir buscan la covariación.

2.5 Conclusiones

La dinámica presentada a los jóvenes resultó motivadora, ello contribuyó de manera favorable a la hora de resolver las actividades. Por ejemplo, el trabajo con GeoGebra permitió crear objetos matemáticos interactivos y explorar sus propiedades cualitativas y características cuantitativas (Semenikhina, Drushlyak, 2015). Para los estudiantes resultó una herramienta interesante al permitir manipular puntos, rectas y toda la construcción en general.

Derivado del trabajo realizado podemos observar cómo los estudiantes logran identificar dos variaciones distintas una para los valores de “x” y otra para los valores de “y”. Como se mencionó anteriormente, los estudiantes no contaban con el conocimiento sobre el tema de función exponencial a la hora de trabajar las actividades propuestas; sin embargo, durante el manejo de fichas logran identificar el patrón de crecimiento de los puntos (cómo generar más fichas). De manera casi inmediata logran observar cómo los valores de “x” van cambiando de 1 en 1, mientras que los valores de “y” van doblando el valor del número anterior. Expresar la progresión $x = n+1$ y la progresión $y = 2n$ fue algo muy significativo ya que veían recompensado su esfuerzo. No obstante, la necesidad de poder expresar de una sola manera el comportamiento de ambos valores los llevó a decidir si “y” se escribía en términos de “x”, es decir, asignar la dependencia a los valores de "y" lo cual no resultó nada fácil, reafirmando que "La complejidad cognitiva reside en percibir la coexistencia y la codependencia, porque podemos generar una función logarítmica o una función exponencial preguntándonos qué variación desempeña el rol dependiente y cuál independiente" (Ferrari et al., 2016). También los estudiantes sintieron la necesidad de migrar de dos variaciones (n+1 y 2n) hacia la covariación (x y 2^x).

Dado los conocimientos previos de los participantes y el tiempo que se tuvo para trabajar, no se tocó la idea de continuidad. Sin embargo, algo que podemos observar es que el cambio de la progresión $y= 2^n$ a la función $y= 2^x$ fue realizada de manera natural, inducida por el mismo GeoGebra a la hora de graficar, sin razonar sobre la implicación de cambiar una "n" por una "x", ello nos conduce a repensar cómo podríamos abordar dicho aspecto desde el propio diseño.

En nuestro caso podemos concluir que los estudiantes logran reconocer las dos progresiones que están inmersas tanto en la construcción como en las fichas, al igual que reconocen la necesidad de "unir" de cierta manera las mismas para poder llegar a una función llamada "exponencial de base 2".

2.6 Comentarios finales

El capítulo nos enfocamos en describir la aproximación que logran tres estudiantes de nivel medio superior al concepto de función exponencial desde una mira covariacional logarítmica-exponencial, no se analiza de forma directa la intervención de Bunny durante el experimento de enseñanza, sin embargo, el trabajo realizado por Bunny logra conducir a los jóvenes en dirección al objetivo planteado para las actividades desarrolladas.

En ese sentido Bunny muestra fortaleza en su formación matemática (razonamiento covariacional logarítmico-exponencial), logrando enfrentar y vencer obstáculos que permitieron a los participantes construir conocimiento (concepto de función exponencial) mediante la buena orientación en el proceso del experimento de enseñanza. Logrando articular desde el punto de vista de Dolores (2014) las tres áreas fundamentales en la formación del docente de matemáticas: matemática, pedagogía y la docencia.

Durante la actividad los estudiantes construyeron tarjetas en fomi y tenían que comprobar mediante la construcción geométrica en GeoGebra si estaban en lo correcto. En una de las intervenciones Bunny (denotado con la letra C en la Figura 17) incita a los estudiantes a reflexionar sobre sus avances y revisar la construcción realizada, lanzando preguntas que conducen a la discusión entre E1 y E2 (estudiante 1 y 2, Figura 17, línea 259 y 263).

E1: 1, 2; 2,4; 3, 8... No, no concuerdan C: ¿qué pasó? ¿por qué no concuerdan? ¿cómo pensaron acá la construcción? E1: porque la sucesión numérica era 2, 4.. E2: ajá pensamos que la sucesión sería, por ejemplo, si estos números (los x) fueran n serían n por 2 C: ¿cómo? E2: en este caso por así decirlo, el numerador si esto fuera como n sería la fórmula por así decirlo n por 2, que en sí lo de abajo sería lo doble que lo de arriba	258 259 260 261 262 263 264 265 266

Figura 17. Revisión de la construcción

Podemos percibir el mismo tipo de intervención en el momento de generar una regla que permite multiplicar dos tarjetas ya construidas para obtener otra (puede ser una tarjeta nueva u otra que ya estuviera construida), Bunny propone comprobar la regla y discutirla entre los estudiantes, logrando generar un diálogo de colaboración por parte de los participantes que los condujo al establecimiento de la regla buscada (Figura 18, línea 787, 789 y 790).

E1: Es que yo veo que aquí sumando uno más dos sería 3 y multiplicando 2 por 4 sería 8 inclusive aquí 3 más 4 y 6 por 8 da la ficha del 7 C: ah muy bien, a ver entonces comprueben y esa podría ser tu regla de multiplicar E1: pues sí es lo que estoy viendo C: compártenla, revisen si funciona y entonces esa sería una regla que ya te puede servir para las fichas ¿no? E1: sí E2: ¿cómo? E1: estoy observando que si multiplicamos esto (señala 0.25) por esto (señala 0.5) te va a dar eso (señala 0.125) y si sumamos esto (señala -2) más esto (señala -1) te va a dar esto (señala -3), igual aquí si multiplicamos digamos 2 y 3, 2+3=5 y si multiplicamos 4x8 te da 32, así le puedes hacer con este (junta las fichas 3,8 y 4, 16), incluso aquí 1+3 te da 4, y 2x8 te da 16 y ya, según yo E2: Aquí sería -1 -2 es -3 y 0.5 x 0.25 es 0.125 E1: Ajá, ahora no tengo una calculadora voy a hacerlo en la forma primitiva E2: sí calcúlalo E1: isí! 0.125 , ya está. Aquí sería 6 y 64, 64x2 sería 128, entonces sería 7, 128. Ahora 8x16 tiene que dar 128.. ahí está E2: ya estuvo	784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804

Figura 18. Buscando la regla de multiplicar

Finalmente percibimos que el trabajo de Bunny frente logra conducirlos mediante diálogos, reflexiones y análisis hacia el objetivo trazado para el experimento de enseñanza, en contraste con el siguiente capítulo donde el desempeño de Bunny muestra ciertas debilidades en cuanto a herramientas pedagógicas que permitan a los participantes solventar los obstáculos encontrados, podemos reflexionar que mientras menos elementos matemáticos escolares tengan los participantes el trabajo con las actividades fomenta con mayor fuerza el desarrollo del razonamiento covariacional continuo, lo contrario sucede con los dos estudiantes del nivel superior (capítulo 3), quienes con un repertorio amplio en temas matemáticos (debido a su formación) no logran desarrollar la idea de continuidad de manera suave. Esto fortalece lo descrito por Thompson y Carlson en el sentido de que, si logramos desarrollar en los estudiantes en una etapa escolar temprana un razonamiento variacional o covariacional continuo, al tiempo que aprenden a razonar cuantitativamente y a representar simbólicamente su razonamiento, ya estarán preparados para trabajar los temas en los grados superiores.

CAPÍTULO 3

COVARIACIÓN LOGARÍTMICO-EXPONENCIAL EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Trejo, M., Ferrari, M., Martínez, G. ( ). Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. *Educación Matemática. En revisión.*

3. 1 Introducción

El *razonamiento covariacional* es un constructo teórico ampliamente utilizado dentro de un creciente cuerpo de investigación centrada en explicar el desarrollo cognitivo relativo a la coordinación de cantidades que varían simultáneamente (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Saldanha & Thompson, 1998; Thompson & Carlson, 2017). El razonamiento covariacional son las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende la relación de las formas en que ambas cambian (Carlson et al., 2002, p. 357). Razonar covariacionalmente implica realizar acciones mentales, en diferentes niveles de desarrollo, involucradas en la concepción acerca de la variación de dos cantidades que varían.

Se ha demostrado que el razonamiento covariacional es fundamental para que los alumnos comprendan numerosos conceptos matemáticos en nivel bachillerato y superior; como son las relaciones exponenciales (Castillo-Garsow, 2010; Confrey & Smith, 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, & Amidon, 2016; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams, & Amidon, 2012; Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra, & Méndez-Guevara, 2016), en trigonometría y las funciones trigonométricas (Moore, 2010, 2012, 2014), la razón de cambio (Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el concepto de función (Carlson et al., 2002; Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el teorema fundamental del cálculo (Thompson, 1994b), gráficos de funciones (Carlson et al., 2002; Moore, Paoletti, & Musgrave, 2013) y ecuaciones diferenciales (Castillo-Garsow, 2010).

El razonamiento covariacional es considerado como una forma fundamental del razonamiento matemático de estudiantes que utilizan cuando se aprende el concepto de función (Johnson, McClintock & Hornbein, 2017). Existen dos perspectivas de covariación: una estática y otra dinámica. De manera general, desde la perspectiva estática las cantidades de una variable se asocian con las cantidades de otra variable; en tanto que desde la perspectiva dinámica los cambios en una variable están asociados con cambios en otra variable (Johnson, 2012).

Particularmente Confrey y Smith (1994) proporcionan una perspectiva de covariación estática de una función cuando se toma como una yuxtaposición de dos progresiones, cada una generada independientemente a través de patrones de datos, evidencia que emerge de su estudio sobre la función exponencial. En tanto que Carlson et al. (2002) trabajan desde una perspectiva dinámica que parte de interpretar y representar modelos gráficos, entre otros, el llenado de recipientes. Referente a la función exponencial, Ferrari-Escolá, et al. (2016), resaltan dos formas de aproximar a dicha función. La primera aproximación hace referencia al trabajo de Thompson (2008), Ellis et al (2012), y Castillo-Garsow (2010) sobre razón de cambio donde se considera que la tasa proporcional en la cual una función cambia con respecto al valor de la función, en un determinado instante, es una característica que define a las exponenciales. Es decir, $\forall x \in \Re, f(x)$ es una función exponencial si existe $h \in \Re$, tal que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ es una constante que depende del tamaño de h.

La segunda forma de aproximación reconoce que la función exponencial puede ser vista como la yuxtaposición de dos progresiones cada una de ellas construida de manera independiente (Figura 1) a través de análisis numéricos e identificación de patrones (Confrey & Smith, 1994). En un sentido formal, la construcción de una función exponencial es la construcción de un isomorfismo entre los mundos de contar (aditivo) y multiplicar (multiplicativo) a través de la covariación.

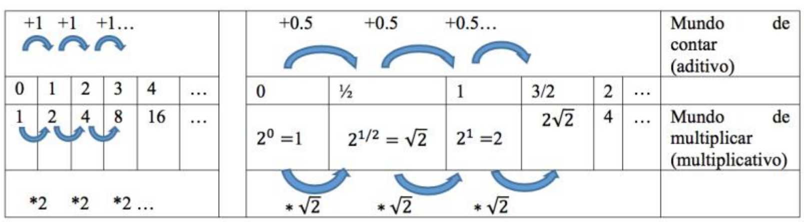


Figura 19: Recreación de ejemplo tomado de Confrey y Smith (1995, p.85)

A partir de la segunda aproximación podemos pensar en construir la función logaritmo y la función exponencial desde el mismo razonamiento covariacional el cual surge al considerar ambas funciones como la yuxtaposición de dos progresiones una aritmética y otra geométrica, bajo la misma mirada de Napier y Briggs que, a principios del siglo XVII, buscaban un herramienta para facilitar cálculos; en tanto que Newton, Huygens y Agnesi, a finales del mismo siglo, se enfocan en describir fenómenos que involucran continuidad (Ferrari & Farfán, 2010).

El propósito de esta investigación es indagar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas desde una perspectiva estática de covariación hacia una perspectiva dinámica mediante la construcción geométrica de puntos con el software GeoGebra, el uso de tablas y hojas de cálculo, así como la graficación o ajuste de puntos que involucra un acercamiento a la continuidad de la función.

3.2 Participantes y recolección de datos

En este artículo nos centramos en el análisis de las producciones de los participantes del experimento de enseñanza sobre función logarítmica diseñado por Bunny (pseudónimo), integrante del Equipo 4, quien cursaba el octavo semestre. Bunny desarrolla su experimento de enseñanza en el curso Matemática Escolar con estudiantes de sexto semestre de la facultad. Bunny se encontraba desarrollando su trabajo de tesis de licenciatura enfocado a los logaritmos en coordenadas polares, había tomado el 90% de los cursos de la licenciatura en matemáticas y del área de matemática educativa. Bunny había participado en congresos nacionales e internacionales referentes al ámbito educativo donde colaboró en el desarrollo de distintos talleres o laboratorios, ponencias y carteles referentes a covariación logarítmica-exponencial. La trayectoria académica de Bunny nos motivó a invitarlo a esta investigación sobre formación inicial y covariación de la cual se desprende el presente escrito.

El objetivo de la investigación es contribuir a la literatura que indaga acerca de cómo lograr el desarrollo del razonamiento covariacional a través de contestar la pregunta ¿Qué niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial se perciben en futuros profesores de matemáticas de sexto semestre de licenciatura? En particular en esta investigación indagamos el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas provocado por un experimento de enseñanza basado en la construcción geométrica de puntos de *una curva logarítmica* según la construcción geométrica de puntos que aporta Descartes en su obra de Geometría (1630) que Dennis y Confrey (1997) analizan en su artículo.

Así, la contribución de nuestra investigación es dar evidencia empírica de cómo el experimento de enseñanza fomenta el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, según la reformulación de (Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara, 2016).

En el experimento de enseñanza participan cuatro jóvenes, de entre 22 y 24 años, tres hombres y una mujer, inscritos en el curso Matemática Escolar de sexto semestre del área de Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la UAGro. Dentro de la trayectoria escolar de los participantes encontramos asignaturas de formación básica como: Álgebra lineal (I al III), Geometría, Geometría Analítica (I y II), Cálculo (I al IV), Análisis Numérico, entre otras. Su formación de especialidad en matemática educativa marca como asignaturas cursadas al momento de su participación: Tecnologías en la Matemática Educativa, Historia de las Matemáticas, Fundamentos de la educación, Análisis del Sistema Educativo, Metodología de la enseñanza, por mencionar algunas.

Los cuatro participantes fueron distribuidos en dos equipos (Equipo 1 y Equipo 2), de dos integrantes cada uno. Las tareas se desarrollaron como parte del curso, en dos sesiones cada una de 100 minutos.

En las dos sesiones se trabajó sobre logaritmos, iniciándose con la construcción geométrica de una curva logarítmica utilizando GeoGebra. Estas sesiones se desarrollaron en el laboratorio de modelación de la Facultad de Matemáticas en Acapulco. El equipo de investigación estuvo integrado por: Bunny que desarrollaría las sesiones, testigos encargados de tomar notas de campo (autores de este artículo) y dos auxiliares que videograbaron las sesiones.

Para la toma de datos se contó con tres videocámaras, dos de ellas se ocuparon para grabar la actividad de los dos equipos participantes, la tercera tuvo la función de grabar la actividad general del salón de clases a cargo de uno de los testigos. De igual manera se registraron las grabaciones de pantalla desde los equipos de cómputo utilizados para evidenciar el trabajo realizado en el software. También se recabó, al término de cada sesión, los archivos ". ggb" generados en GeoGebra. Se rescataron los archivos de audio de cada sesión, así como las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de los testigos.

Se presenta en este escrito, luego del análisis de los datos obtenidos, algunos elementos sobre las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial percibidos en dos estudiantes del Equipo 1 (E1 y E2) mientras desarrollan las tareas en el experimento de enseñanza.

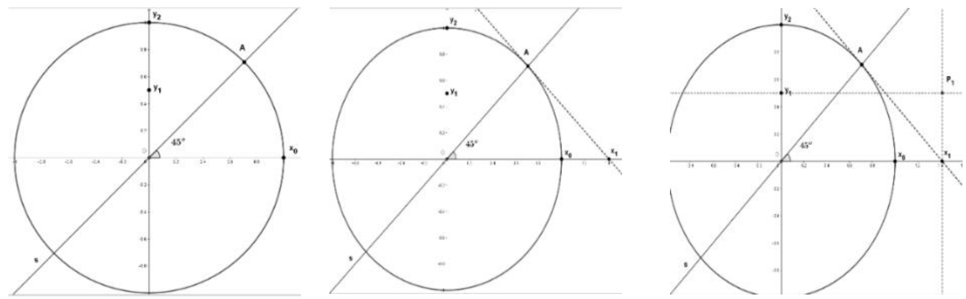
3.3 Tareas

El sustento del diseño de las tareas descansa en el estudio epistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos donde se destaca la importancia, que, en siglos pasados, se otorgaba a las construcciones geométricas dentro del estudio de las variaciones y el cambio. En el mismo sentido Dennis y Confrey (1997) rescatan, de la obra de Descartes, la construcción geométrica de puntos en un plano propiciando la asociación de las coordenadas con su variación, es decir, favoreciendo argumentos covariacionales. En el diseño de las tareas se involucramos la geometría dinámica en la construcción de una curva logarítmica con el uso de un círculo unitario; de ciertas rectas tangentes y secantes; así como, de semejanza de triángulos. Elementos que fueran trabajados en el curso de Desarrollo del pensamiento matemático y que fueron reproducidos en el experimento de enseñanza con pequeños retoques personales del estudiante Bunny.

De esta manera, el diseño del experimento de enseñanza estuvo constituido por dos actividades que se encaminan hacia la construcción geométrica de puntos pertenecientes a la función logaritmo base 2, para lo cual se utilizó GeoGebra. La dinámica de clases organizada por Bunny fue:

1. Iniciar la sesión con las instrucciones de trabajo para guiar a los estudiantes en la construcción geométrica de puntos de la curva (Figura 20):

    1. Construcción del punto P_1
        - Particionar el eje y: $y_0=0; y_1=0.5; y_2=1: y_3=1.5; y_4=2$
        - Insertar una circunferencia unitaria cuyo centro sea el origen del sistema de coordenadas cartesianas y la cual determina el punto $x_0 = (1,0)$.
        - Trazar una línea recta *(s)* que pase por el origen y un punto *A* (cualesquiera) de la circunferencia logrando un ángulo de inclinación de 45 grados (Figura 20-a).
        - Trazar una recta tangente a la circunferencia por el punto A y determinar x_1 (Figura 20-b).
        - Trazar una recta vertical por x_1 y una recta horizontal por y_1 y determinar el punto P_1 (Figura 20-c).



a b c

Figura 20. Construcción de los primeros puntos

2. Dar tiempo a los participantes para construir más puntos de manera independiente; analizar variaciones en datos e intentar ajustar la curva; identificar las variables en juego y su comportamiento "variacional"; percibir la covariación existente y ajustar una curva a dichos puntos; tareas que serían orientadas mediante preguntas preparadas para incentivar la discusión (Tabla 5);

Tabla 5: *Preguntas guía del diseño de aprendizaje*

Número de pregunta	Preguntas	Consideraciones
1.1	¿Qué forma creen que tiene la curva que pasa por todos los puntos construidos? Dibujarla y explicar sus ideas.	Se espera que los estudiantes realicen un primer esbozo de la curva, sin ser exactos, ya que sólo se consideran puntos en el primer cuadrante del plano. Esto los llevaría a percibir la forma de la curva e imaginarla continúa.
1.2	¿Cómo se comportan los puntos construidos de la curva?"	Se espera una descripción en base a la observación de puntos, como por ejemplo, son crecientes, decrecientes, están ubicados en cierto cuadrante, etc. que daría indicios de AM1 y AM2
1.3	¿Cuánto cambian las variables involucradas?"	Se espera que reconozcan, en primer lugar, las variables en juego, y luego trabajen con el comportamiento numérico, para poder determinar los patrones de crecimiento de las dos progresiones en juego. Evidenciarían mayor uso de AM1 y AM2, fortaleciendo tácitamente los niveles 1 y 2.
1.4	¿Consideran que el punto "B" pertenece a la curva? ¿Por qué?	Se espera que reconozcan un punto especial de la curva B= (1, 0), el cual les permitiría explorar o reconocer algunas características importantes de la función en juego y quizás estabilizar AM3.
1.5	¿Se pueden encontrar puntos de la curva a la izquierda del punto "B"? Expliquen por qué y de ser necesario den ejemplos	Se espera que esta pregunta ayude a romper esquemas que pudieran haber sido establecidos referente al tipo de función que se está trabajando, ya que con la ubicación de más puntos se hacen visibles la asíntota de la función logaritmo base 2. Exige también esta tarea la reversibilidad (AM4)
1.6	¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, lograr una curva que pase por todos ellos ¿cuál será?"	Se espera que con el análisis cuantitativo desarrollado en la pregunta 3 y las características visuales encontradas en las preguntas 4 y 5, identifiquen la covariación de ambas progresiones en juego, y así identifiquen la covariación logarítmica-exponencial inmersa y enunciar la curva logaritmo en base 2, lo cual evidenciaría la AM5.

3. Finalizar cada sesión invitando a los estudiantes a presentar los avances de manera plenaria donde el profesor cuestionará algunos aspectos con el fin de profundizar y reforzar el trabajo realizado.

3.4 Análisis de datos

El análisis de los datos se realizó de manera retrospectiva lo cual nos permitió reflexionar sobre los datos obtenidos durante todo el experimento de enseñanza (Molina, et al. 2011). Consideramos que las herramientas teóricas y metodológicas de la investigación están estrechamente ligadas a la pregunta/problema de investigación. De hecho, nuestro proceder teórico, metodológico y analítico es análogo a muchas investigaciones en el campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (e.g. Moore, 2013, 2014). La particularidad de nuestra investigación es la reformulación de (Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara, 2016) para el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial.

Se inició el proceso de familiarización con los datos a través de mirar, en repetidas ocasiones, los vídeos recabados, incluso se realizó una mejora en el audio eliminando ruido de las grabaciones mediante las herramientas proporcionadas por el software Audacity ®. Seguido de ello se realizó la transcripción de las grabaciones de vídeo; se revisaron y digitalizaron las hojas de trabajo resultantes de las sesiones; se revisó la construcción hecha en GeoGebra y la grabación de la pantalla recabada, elementos que nos ayudó a entender, de mejor manera, cómo fueron elaborados cada uno de los elementos geométricos de la construcción en GeoGebra. Cabe mencionar que los estudiantes involucrados presentaban un nivel básico en el uso del software lo cual implicó mantener la configuración predeterminada en aspectos como: ejes, cuadrícula, vistas algebraica y gráfica, así como el uso de dos cifras decimales. Este último aspecto jugó un papel importante durante el análisis de las variaciones realizada por los estudiantes. Para analizar los datos nos apoyamos en el marco conceptual de covariación logarítmico-exponencial expuesto en Ferrari-Escolá, et al. (2016), así como no perder de vista el objetivo propuesto, por lo que utilizamos el análisis continuo (Molina, et al. 2011) al final de cada sesión, que nos permitió tomar decisiones y reorientar el trabajo de ser necesario. Con las transcripciones completas los autores identifican, por separado, momentos donde se vislumbran en los estudiantes aspectos covariacionales o elementos relacionados al crecimiento, o variación de las variables en juego, para luego triangular y validar los episodios escogidos como evidencia de las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional percibidos en la primera sesión del experimento de enseñanza.

3.5 Resultados

El experimento de enseñanza inicia con la explicación de Bunny para la construcción de dos puntos (P_1 y P_2) de la curva a analizar. Esta actividad tuvo una duración aproximada de 23 minutos, pues fue necesario instruir a los estudiantes en las herramientas de GeoGebra que se utilizarían. Después de eso, se les solicita construir más puntos y analizarlos hasta lograr reconocer la curva; tantos puntos como consideraran necesarios.

El Equipo 1, inicia construyendo los puntos P_1= (1.42, 0.5) y P_2= (2.01, 1) con cierta imprecisión, debido a que no han ajustado la inclinación de la recta inicial a 45º como se les solicita en la actividad, y eso les perturba para analizar numéricamente el crecimiento de los puntos.

Luego de las explicaciones de Bunny y la construcción de los dos primeros puntos, E1 y E2 acuerdan construir dos puntos más (P_3 y P_4), utilizando aproximadamente 5 minutos en esa tarea (Figura 21).

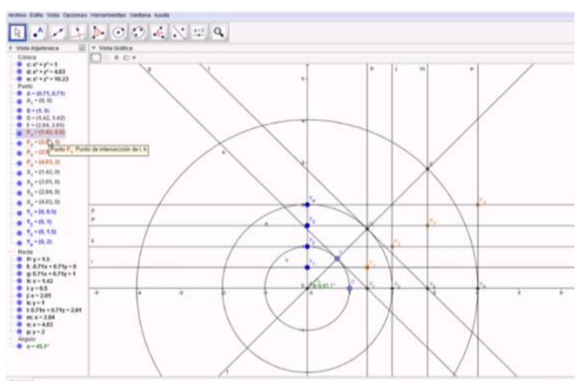
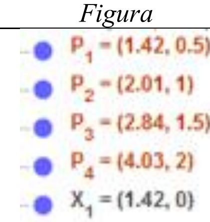


Figura 21. Construcción de los puntos

3.5.1 Episodio 1: Los puntos se van "anchando" de manera creciente

Con los cuatro puntos construidos los estudiantes inician la búsqueda de patrones de crecimiento (Extracto 1) y como primera herramienta toman diferencias entre ordenadas consecutivas (Extracto 1, Línea 029). Reconocen que deben encontrar la variación de las coordenadas de los puntos construidos. E2 menciona: "¿cuánto van variando?, o ¿no crees que van variando?” (Extracto 1, Línea 026) refiriéndose a las abscisas luego de que E1 señalara que los valores de “y” tienen un aumento constante de 0.5 en 0.5 (Extracto 1, Línea 023). Se observa que los estudiantes logran identificar las dos variables en juego, pero explicitar sólo la manera de cómo varía las ordenadas “y”, cuya construcción deriva de la partición solicitada. El reto mayor es determinar cómo varían los valores de “x” que emergen de la construcción geométrica propuesta, ya que buscan una regularidad en la diferencia de dos valores consecutivos.

Extracto 1. Diferencia entre valores de x

Línea	*Participación*	*Figura*
022	*E2: x_1, la distancia que hay de…*	
023	*E1: 1.42… bueno nada más con estos puntos estos son los que hice… los de las “y” nada más van aumentando punto 5*	
024	*E2: ¿Y los de “x”?... ¿ Calculadora?*	
025	*E1: ¿Para qué?*	
026	*E2: Para ver cuánto van variando, ¿o no crees que van variando?*	
027	*E1: Sí van variando aquí son 51 o 52, acá no? [refiriéndose a la distancia entre las abscisas de P_1 y P_2] Este de acá son 83 [indicando a la distancia entre las abscisas de P_3 y P_4]*	
028	*E2: 0.59 [usa la calculadora para la distancia entre las abscisas de P_1 y P_2]*	
029	*E1: El otro es 4.03 – 2.84 son…*	
030	*E2: 59, 83 y 1.19 [anotando en su hoja de trabajo]*	

Hasta ese momento los estudiantes han percibido que las variables van en aumento y que para “y” es de 0.5 en 0.5, mientras que siguen buscando determinar la variación de “x” mediante diferencias. Este trabajo no los conduce hacia algo concreto, sin embargo, mediante la observación de los puntos construidos, conjeturan que se trata de un “parábola”, ya que consideran que el gráfico “debería ser simétrico”. Incluso a la hora de graficar la curva en la hoja de trabajo, su trazo inicia en el origen y generan una curva que va creciendo con la concavidad hacia arriba (Figura 22).

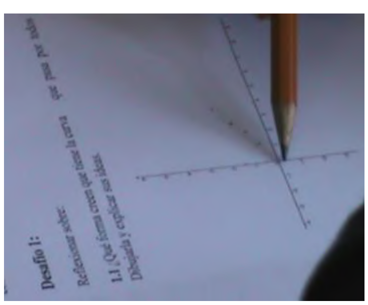
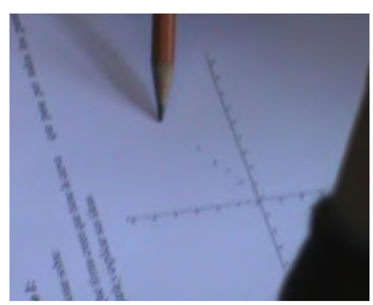



Figura 22. Puntos se van a ir “anchando”

Observamos entonces que los estudiantes identifican qué varía, pero, no logran aún determinar cuánto varía, al menos no para los valores de “x”, sólo logran visualizar que ambas variables crecen y discuten sobre si se trata de un crecimiento cuadrático (E1) o exponencial-logarítmico (E2), sin llegar a una conclusión conjunta para el cómo varía el crecimiento de los puntos.

En este episodio evidenciamos cómo, en las discusiones y trabajo de los estudiantes, se perciben indicios de AM1 y AM2, debido a que logran identificar las dos variables en juego y que ambas crecen. Buscan también, de manera cuantitativa, la variación de una de ellas (la variable “x”) sin lograr aún el patrón de crecimiento, mientras que para la segunda variable (“y”) observan que es creciente de manera directa por la partición indicada en la tarea, por tanto, conocen cuánto varía. Esto induce a los estudiantes a percibir que los puntos construidos se van “anchando” de manera creciente, como lo comenta E2 a su compañero, lo que implícitamente involucra percibir que la razón de cambio va siendo más pequeña.

3.5.2 Episodio 2: Para valores naturales podemos sumar 1 y duplicar

Los estudiantes llegan a un momento de confusión, su análisis numérico mediante diferencias no les ha permitido identificar la variación de los valores de “x”; en tanto que la parte gráfica los lleva a conjeturar que podría tratarse de una parábola. Bunny interviene para apoyarlos y les hace la observación de que el ángulo de inclinación de la recta S (Figura 20) no mide 45º y les solicita ajustar el ángulo. Con ello los puntos construidos se tornan más cómodos, incluso aparecen números naturales como se puede observar en la Figura 5 donde los puntos de la izquierda son los que construyeron primero y los puntos de la derecha son los que obtuvieron después del ajuste del ángulo.

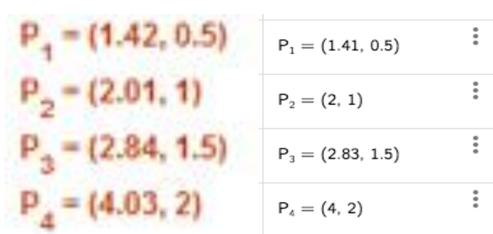


*Figura 23***.** Los nuevos puntos

Con los nuevos puntos (Extracto 2), reconocen que van apareciendo, primero, un número decimal y después uno entero; aparece un decimal y luego un entero, y así siguiendo en ambas variables. Construyen entonces otro punto (sólo la abscisa) utilizando una circunferencia para probar su conjetura de número decimal, entero, decimal, entero y predicen que para el valor 3 de "y" el valor de la coordenada "x" va a ser 8, así determinan el punto P5= (8,3). Los estudiantes reconocen que las ordenadas enteras 1, 2 y 3 están relacionadas con los valores enteros de las abscisas 2, 4 y 8 respectivamente. Es decir, observan el cambio en "x" y el cambio en "y". Más aún, podían determinar que los valores en "x" aumentan al doble (Extracto 2, línea 105) y los valores en "y" de uno en uno, fortaleciendo así las AM1 y AM2 parcialmente, ya que no logran aún el patrón general de crecimiento de cada variable en conjunto.

Extracto 2. *Va aumentando el doble*

Línea	*Participación*
097	*E1: es que en los puntos 1, 2, 3 en el 1 llega el 2 para x, y= 2 va 4, en y=3 se va al 8 y los decimales en y… esta… tiene decimales en x en los puntos*
098	*Bunny: ¿encontraste que aquí es 2, 4, 8? [indicando las abscisas]*
099	*E1: sí*
100	*Bunny: el siguiente entonces ¿cuál sería?*
101	*E1: el siguiente va a quedar con decimal, va a tener decimales pues*
102	*Bunny: ¿y el siguiente?*
103	*E1: El siguiente sería… ¿Cuál es el siguiente Chavo? pienso que 16, pero si 16*
104	*Bunny: 16 ¿por qué?*
105	*E1: porque va aumentando, el punto que tenemos es 2, luego el doble sería 4, luego el doble es 8, el doble de 8, 16*

En este momento, los estudiantes observan que ambas cantidades (valores de x y valores de y) crecen con cierto incremento; el doble en valores enteros de "x" y aumento de 1 en valores enteros de "y", lo cual podemos identificar como AM1 e inician un acercamiento más robusto de AM2, pese a que no logran incorporar en su discusión los puntos intermedios construidos que involucran números no enteros.

3.5.3 Episodio 3: Las progresiones

E1 y E2 han determinado que en las coordenadas de los puntos construidos se podían encontrar números decimales o enteros. Para las coordenadas de valor entero descubrieron que se puede ir duplicando los valores de las abscisas y sumar 1 en las ordenadas para obtener el punto siguiente con coordenadas enteras. Sin embargo, aún no han logrado percibir con mayor fineza el patrón de crecimiento de las variables, es decir, sólo pueden determinar P_2, P_4 y P_6 dejando los huecos de P_1, P_3 y P_5 que precisamente son puntos cuyas coordenadas son decimales. Para salir de esa encrucijada necesitan el apoyo de Bunny quien los induce a observar que el valor de la abscisa del punto P1 se puede considerar como una aproximación a la raíz cuadrada de dos (Extracto 3, línea165). Con ello reescriben los puntos que han construido (Extracto 3, línea 171).

Extracto 3. *Reemplazando por raíz de dos*

Línea	*Participación*
165	*Bunny: ajá las "y" siempre crecen 0.5 en 0.5. Bueno lo que yo haría primero es poner los puntos que tengo allí que voy a analizar qué quiero cuantificar ponerlos aquí más claro ¿no? [refiriéndose a escribirlos en papel], digo también en la pantalla es más complicado, poner los "x" claro, ¿Cuáles son solamente los P y quizás ahí encontrar algo, si no funciona la resta, no sale nada uniforme en la resta, que qué otra puedo encontrar la variación? … … … 1.41… ese 1.41 no les evoca nada? ¿no se acuerdan qué número es?*
166	*E2: esto es raíz cuadrada de 2 [indicando el 1.41 del punto P_1 en la lista de puntos que han escrito], esto es raíz cuadrada de 4 [indicando la abscisa del punto P_2]*
167	*E1: entonces es como ésta, pero no*
168	*E2: así lo dejamos [refiriéndose a la pregunta 4 sobre B=(1,0)]*
169	*E1: sí ya*
170	*E2: Pero lo podemos tomar como un punto x sub cero*
171	*E1: Si reemplazamos esto por lo que dijimos hace rato, éste es la raíz de 2, ésta raíz de 4, ésta raíz de 8, raíz de 16, raíz de 32, raíz de 64 y el punto que está aquí es la raíz de 1 es el que tenemos pues a ver cómo concebimos eso que habíamos dicho*

Al realizar la reescritura de las coordenadas de los puntos (Figura 24), logran una perspectiva más amplia sobre la forma de variar los valores de "x". Con ello pueden ver que para obtener el siguiente punto debían duplicar el valor anterior y sacar la raíz cuadra (para x) así como aumentar 0.5 para los valores de "y". Sin embargo, dudan sobre qué colocar cuando y = 0 y a su abscisa la asocian con "raíz de 1", que corresponde al punto "B" de la construcción geométrica, punto sobre el que se les pregunta si pertenece o no a la curva (Tarea 1.4).

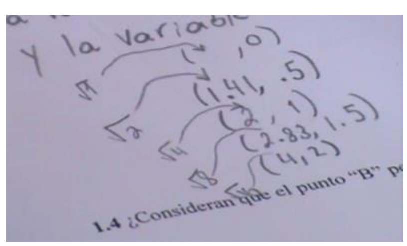


Figura 24. Reescribiendo los valores de x

Los estudiantes logran coordinar las operaciones de duplicar y extraer raíz cuadrada en las abscisas y sumar 0.5 en las ordenadas, que les permite generar las progresiones para "x" y "y". Consideramos que comienzan a incursionar en los elementos de AM3. Mantienen esta estrategia de duplicar en las abscisas hasta incorporar la aplicación de la raíz cuadrada para lograr atrapar todas las abscisas construidas geométricamente. Se percibe, en la discusión de los estudiantes, que pierden de vista la base 2 de la progresión geométrica analizada, al no rescribir la raíz cuadrada como exponente.

Finalmente, el análisis anterior los lleva a expresar las variaciones encontradas mediante dos expresiones algebraicas, que articulan mediante la notación de un par ordenado (Figura 25). Consideramos que la covariación estuvo latente durante todo su trabajo (línea 097 del Extracto 2) y logran determinar una sola expresión para denotar la forma en que varían los puntos, pero de manera discreta, es decir, dejando las progresiones en términos de "n", tomándolo como el representante de los números enteros que permiten determinar puntos de la curva estudiada.

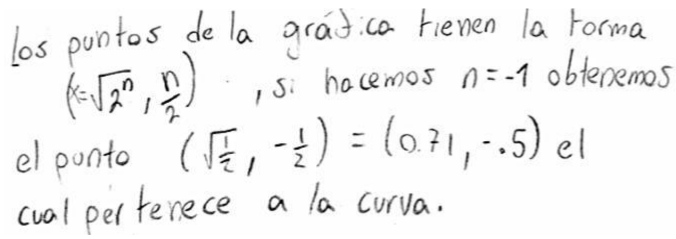


Figura 25. Progresión geométrica y aritmética

Comienzan a percibir que también existen puntos a la izquierda de P_1 (Figura 25) elemento de reversibilidad en su razonamiento (AM4) de forma discreta, ya que extienden su "n" natural hacia los enteros, dando un ejemplo $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. Si bien, en los esbozos a lápiz de la forma de la curva estudiada es continua y así la consideran en sus discusiones, no logran comprobar su conjetura del crecimiento de los puntos al no establecer la expresión algebraica en términos de $y = f(x)$ requerido por GeoGebra para graficar la curva. Sin embargo, $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ da indicio de que han logrado explicitar el crecimiento de la curva de manera discreta, es decir, emerge en su trabajo una forma de expresar la covariación logarítmica-exponencial aunque ellos aún no se atreven a asegurarlo.

La primera sesión finaliza invitando a los estudiantes a compartir sus conclusiones. En primer lugar, participa el Equipo 2 (no reportado en este artículo) el cual se dedica la mayor parte del tiempo a construir geométricamente nueve puntos de la curva. En su exploración, al igual que el Equipo 1, percibe dos progresiones geométricas distintas, una de números naturales y otra de números decimales que construyen multiplicando por 2 (abscisas); cada una de las cuales relacionan con una progresión aritmética que construyen sumando 1 (ordenadas). Comentan que para determinar los puntos de números enteros se puede utilizar el par (2_n, n) pero que aún no lograban encontrar la fórmula para la progresión que involucra decimales.

El Equipo 1, al coincidir con la exploración que exponen sus compañeros se limitan a presentar su tabla numérica (Figura 5) y su conclusión (Figura 6), respecto a que los puntos pueden ser construidos con un único par $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$. Comentan que reconocer la raíz cuadrada de 2 les permitió unificar sus exploraciones; ideas que sorprenden al Equipo 2 y les aporta nuevos elementos a utilizar.

La instrucción para la segunda sesión, fue revisar y analizar lo que se había trabajado en la primera sesión para ver si lograban percibir otros aspectos. Los estudiantes en su inquietud por descubrir la curva trabajada realizan una búsqueda de información sobre funciones exponenciales y logarítmicas, eso lo demuestran ya que al iniciar esta sesión tanto E1 y E2 afirman que la función estudiada es $f(x) = log_2 x$. A partir de ahí enfocan el trabajo de la segunda sesión a comprobar su afirmación utilizando las expresiones logradas en la primera sesión. Al final explican a sus compañeros que generaron un sistema de dos ecuaciones igualando las variables a su conjetura sobre la forma de determinar cualquier punto, es decir, escriben en el pintarrón:

$x = \sqrt{2^n}$

$y = \frac{n}{2}$;

Despejando n y utilizando función inversa logran la expresión algebraica que necesitaban para que GeoGebra uniera los puntos con una gráfica. Se observa que no reflexionan sobre el pasaje de “números enteros” a “números reales” al generar este sistema de ecuaciones, sino que con naturalidad aceptan la continuidad de la función.

3.6 Discusión

En este artículo presentamos los resultados de un experimento de enseñanza que tuvo por objetivo propiciar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. El experimento de enseñanza se basó en la construcción geométrica de puntos de la función logarítmica que se desea estudiar con los participantes, retomando argumentos primigenios del Cálculo (siglo XVII), que fueran rescatados de los trabajos de Ferrari (2008) y Dennis y Confrey (1997).

Encontramos que la construcción geométrica de puntos, utilizando GeoGebra, propicia un acercamiento a reconocer la covariación logarítmica-exponencial discreta trabajándose tácitamente con la continuidad de la curva al solicitar "el ajuste" de los mismos, tareas que hay que seguir afinando e investigando. En este sentido, coincidimos con Thompson y Carlson (2017) sobre que propiciar el razonamiento covariacional es crucial en el desarrollo matemático de estudiantes, en particular, al construir expresiones algebraicas, fórmulas, tablas numéricas o gráficos que les permitan describir variaciones simultáneas generando nuevos significados.

Al inicio del experimento los participantes construyeron puntos de la curva e intentaron identificar el tipo de variación que observan en las variables. Percibimos allí indicios de AM1 y de AM2, pero retenido por el entremezcle de coordenadas con pares de números enteros y aquellas coordenadas con pares de números reales. Lo primero que perciben es multiplicar por 2 y sumar 1, "saltando" así los puntos cuyas coordenadas involucran decimales. Demoran en descubrir que el patrón general de crecimiento de las abscisas es $\sqrt{2}$ y, el de las ordenadas es 0.5. Problema que reporta Gruver (2017) sobre la dificultad percibida en su investigación sobre diferenciar las relaciones lineales de las exponenciales y el cómo crecen, misma que aborda desde una recta numérica con subdivisión exponencial de segmentos generada desde los datos proporcionados a los estudiantes. Sin embargo, su atención está hacia las propiedades aritméticas de los logaritmos, no tanto hacia el reconocimiento de la covariación presente.

Ellis et al. (2016, p. 176), por su parte, mencionan que sus hallazgos sugieren que razonar con cantidades covariando es un aspecto crítico para construir una comprensión particular del crecimiento exponencial. Idea que compartimos, desde nuestra perspectiva, pues se trata de abstraer la covariación logarítmica-exponencial desde un estudio de cantidades variando, una (ordenadas) desde la suma y otra (abscisas) desde la multiplicación. Coincidimos también con Kuper y Carlson (2017) quienes reportan que en su exploración reconocen que es crucial que los estudiantes determinen los factores de crecimiento parcial y general para reflexionar sobre la covariación logarítmica. Conclusiones que reforzamos con nuestros datos, iniciados desde una construcción geométrica.

3.7 Síntesis de resultados

En este apartado sintetizamos la producción de E1 y E2 durante la primera sesión del experimento de enseñanza, presentado en este artículo, mediante la Tabla 6 organizándola según las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial que consideramos haber percibido en estos estudiantes según la adecuación teórica de Ferrari-Escolá, et al. (2016).

Tabla 6. Acciones Mentales de los estudiantes

<table>
<tr><th>Acciones Mentales</th><th>Nivel 1 y 2</th><th>Nivel 3</th><th>Nivel 4 y 5</th></tr>
<tr><td>AM1. Los estudiantes identifican que existe cambio constante en la diferencia de ordenadas consecutivas y aplican la misma estrategia en las abscisas : “aquí son 51 o 52, acá no? éste de acá son 83” (Extracto 1) sin éxito de encontrar una constante de crecimiento.
Los estudiantes cambian la estrategia de “diferenciar” números consecutivos a “multiplicar”. Es decir, desde P_2 (2,1) y P_4 (4,2) predicen P_6 (8,3) y P_8 (16,4): “Porque va aumentando, el punto que tenemos es 2, luego el doble sería 4, luego el doble es 8, el doble de 8, 16” (Extracto 2).</td><td rowspan="2">Estos niveles se entremezclan ya que la primera tarea de esbozar la “forma” de la curva desde los puntos construidos, genera discusión entre crecimiento “cuadrático” o “logarítmico”. Distinguir entre ambos recae en reconocer las progresiones presentes (geométrica en las abscisas y aritmética en las ordenadas)</td><td rowspan="3">Los estudiantes se despegan de la única estrategia que utilizan al analizar la forma de crecimiento de las ordenadas de los puntos construidos (diferencia) agregando la de multiplicar. Logran entonces la dupla de factores de crecimiento: 0.5 para ordenadas y $\sqrt{2}$ en las abscisas, unificando el cómo y cuánto crece la curva, es decir, cuál es el siguiente punto.</td><td rowspan="3">Los estudiantes logran una fórmula única para generar nuevos puntos.
Si bien no logran una expresión general que “ajuste” los puntos en esta primera sesión, evidencian avances hacia estos niveles de razonamiento</td></tr>
<tr><td>AM2. Desde el inicio reconocen que ambas variables crecen con diferentes formas de hacerlo, sin aún lograr determinar un único factor de cada progresión que provoque su crecimiento, lo logran parcialmente en el conjunto de los números naturales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AM3. Logran la dupla de factores de crecimiento: 0.5 para ordenadas y $\sqrt{2}$ en las abscisas, unificando el cómo y cuánto crece la curva. “Si reemplazamos esto por lo que dijimos hace rato, éste es la raíz de 2, esta raíz de 4, esta raíz de 8, raíz de 16, raíz de 32, raíz de 64 y el punto que está aquí es la raíz de 1 es el que tenemos pues a ver cómo concebimos eso que habíamos dicho”(Extracto 3).</td></tr>
</table>

AM4. Se habre la discusión desde las coordenadas con números naturales hacia coordenadas con números reales de manera discreta, evidenciando tímidamente reversibilidad en su razonamiento, al menos presentan un ejemplo: $\left(\sqrt{1/2}, -1/2\right)$	
AM5. Generan una expresión general para describir la curva de manera discreta, es decir, dan una "fórmula" general para construir cualquier punto $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ que evidencia que perciben la covariación logarítmica-exponencial sin lograr, en la primera sesión, una expresión $y = f(x)$	

Observamos entonces que, durante gran parte del experimento de enseñanza E1 y E2 se enfocan en determinar cómo obtener el siguiente punto de la curva mediante un análisis cuantitativo, apoyándose en GeoGebra para comprobar su conjetura, no para construirlos. Con este estudio logran coordinar las operaciones aritméticas (al menos para los números naturales) de multiplicar por 2 y sumar 1, que les permite generar las progresiones para "x" y "y". Sin embargo, van dejando huecos, aquellos que implicaban números reales, asomándose así a AM3 de manera sesgada sin poder aún relacionarlas con el comportamiento logarítmico. Ello fortalece lo que Ferrari-Escolá, et al. (2016) se refieren al mencionar que si bien, concebir la simultaneidad de dos variaciones diferentes cuyos cambios se afectan de manera simultánea conduce al razonamiento covariacional, la complejidad cognitiva radica en percibir la coexistencia y la codependencia de las progresiones.

3.8 Sobre la continuidad tácita

Respecto al tipo de variación, Castillo-Garsow (2010, 2012) distingue dos concepciones de variación continua que denomina "chunky" y "smooth", elementos que son considerados también por Thompson y Carlson (2017) como los niveles más avanzados del razonamiento covariacional (Covariación continua a trozos - Covariación continua suave). Consideran entonces, que la variación continua a trozos implica pensar que los valores varían discretamente, es decir, que existen huecos entre dos puntos consecutivos, aunque el fenómeno estudiado sea continuo y donde el estudiante tiene una imagen tácita de un continuo entre valores sucesivos. En tanto que, consideran que la covariación continua suave implica concebir los cambios (aumentos o disminuciones) en el valor de una cantidad o variable tal como ocurre, simultáneamente, con los cambios en el valor de la otra variable, y se abstrae que ambas variables varían de manera continua y suave. Ellis et al, (2016), coincide con esta idea, ya que consideran que el razonamiento covariacional temprano en estudiantes que logran describir numéricamente el crecimiento de un cactus, precede a su capacidad de desarrollar reglas de correspondencia de la forma $y = f(x)$.

En nuestro diseño, provocamos en los participantes la concepción de variación simultánea discreta durante las tareas, debido a que nuestro experimento de enseñanza inicia desde la construcción geométrica de puntos invitándolos a reflexionar sobre covariación continua al solicitar ajustar los puntos, ya que la tarea general es describir la curva que "une" los puntos. Observamos que E2 menciona que los puntos se van "ensanchando" refiriéndose a las abscisas, implicando la desaceleración del crecimiento de la curva, es decir, evoca a la función logarítmica que es discutida por su compañero que insiste en que se trata de una parábola. Idea que se diluye al insistir con hacer diferencias entre cantidades consecutivas, estrategia apropiada para funciones polinomiales, pero desafortunada para funciones trascendentes.

Un software como GeoGebra, exige una expresión algebraica para trazar una función determinada, desafío que propone como cierre de la discusión las tareas diseñadas en el experimento de enseñanza. Su pantalla "vista gráfica", permite visualizar la forma de crecimiento de los puntos que geométricamente se construyen; así como, la pantalla "vista algebraica" explicita las coordenadas de cada punto determinado. Un razonamiento covariacional cuantitativo de los estudiantes se percibe al construir una columna de pares ordenados de la cual organizan sus ideas sobre los patrones de crecimiento de cada ordenada (multiplicación para las abscisas y sumar para las ordenadas). Coincidimos con Ellis et al, (2016) respecto a que los estudiantes abstraen el crecimiento implicado covariacionalmente considerando un nuevo valor como producto de un valor anterior y un factor de crecimiento, forma de pensar que corresponde intrínsecamente a una covariación continua a trozos. Si bien logran, luego de investigar en internet, la expresión algebraica: $f(x) = log_2 x$ y explicar su hallazgo desde una manipulación algebraica de un sistema de ecuaciones (segunda sesión del experimento de enseñanza); no podemos asegurar que hayan evolucionado a un razonamiento covariacional continuo suave. Visualmente observan cómo la curva pasa por todos los puntos que han construido, es decir, logran ajustar los puntos, pero no se cuestionan sobre cómo establecer la continuidad de la función cuando pasan de utilizar "n" representante de los enteros que también involucra a algunos números irracionales a "x" y "y" como números reales. Es decir, de un dominio discreto a $\Re^+$ y de un codominio de números racionales a uno de números reales.

Para Thompson y Carlson (2017), la instrucción matemática escolar generalmente enfatiza la perspectiva de correspondencia a expensas del razonamiento covariacional, lo que puede fomentar una imagen de función restringida, ya que no se anima a los estudiantes a pensar en el cambio entre variables. Incluso, para nosotros, es necesario desarrollar en los estudiantes la habilidad de reconocer funciones desde un razonamiento covariacional cuantitativo que involucra el reconocimiento de patrones de crecimiento que abonen a la determinación de una expresión algebraica y construir nuevos significados de la continuidad de funciones.

3.9 Conclusiones y futuras investigaciones

En el experimento de enseñanza desarrollado, en los dos futuros profesores estudiados, se evidencia fragilidad en sus estrategias algebraicas ya que, en la primera sesión, si bien logran una expresión general $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ para la construcción de puntos no perciben que la base es 2. Tampoco identifican la raíz cuadrada como un exponente de 2. Vinculan ambas progresiones mediante un número natural "n", provocado por la construcción geométrica, que extienden hacia los enteros. Visualizan la continuidad de la curva en la pantalla de GeoGebra, la esbozan en su hoja de trabajo con lápiz, pero no logran, en los primeros 100 minutos de trabajo, generar una expresión algebraica que demanda aceptar un dominio de números reales positivos que tácitamente están considerando.

Dado el carácter cognitivo de nuestra investigación consideramos que el hecho que nuestra evidencia empírica surja de la cognición de dos de los participantes no representa una debilidad. De hecho, este tipo de exploraciones con unos pocos participantes es común en el campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (e.g. Moore, 2014; Paoletti & Moore, 2017). En este sentido, nuestros resultados invitan a continuar afinando el diseño de aprendizaje desde construcciones geométricas, ya perdidas en el ámbito escolar, así como en las investigaciones, mismas que hemos evidenciado provocan exploraciones generadoras de razonamiento covariacional en estudiantes, dándoles la posibilidad de probar sus conjeturas numéricas al predecir nuevos puntos de la curva estudiada.

Consideramos importante seguir explorando el pasaje de lo discreto a lo continuo desde construcciones geométricas, argumento que sustenta las primeras ideas de Cálculo en siglos pasados a manos de personalidades como Descartes, Newton, Huyens, Agnesis o Euler. Un ambiente de geometría dinámica nos permite replantearnos el significado de funciones particulares como las funciones trascendentes y su continuidad en el razonamiento de los estudiantes al contar con herramientas como "vista algebraica-gráfica-hoja de cálculo-cálculo simbólico" cuya articulación podría fortalecer el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico exponencial de futuros profesores.

3.10 Comentarios finales

En el escrito del capítulo 3 no se analiza de forma directa la intervención de Bunny durante el experimento de enseñanza y sólo nos basamos en reportar los niveles que alcanzaron los estudiantes con la actividad, sin embargo, mirar el logro de los estudiantes es una manera de reflejar el trabajo realizado por Bunny, quien mediante sus participaciones logra dirigir a los jóvenes de licenciatura en dirección del objetivo planteado para las actividades desarrolladas, en ese sentido Dolores (2014) menciona que el rendimiento de los estudiantes está ligado a la calidad de la educación que a su vez tiene vinculación con la formación de profesores. De esta manera consideramos que al querer reflexionar sobre la influencia del razonamiento covariacional de Bunny en su faceta de docente lo podemos lograr a través del análisis del logro alcanzado por los futuros docentes.

Algunas de las intervenciones de Bunny dejan ver que si bien tiene claro los objetivos de la actividad referente a la covariación logarítmica-exponencial, denota cierta debilidad en lo que Dolores llama "la formación pedagógica", es decir, no puede utilizar o diseñar los medios didácticos que posibiliten el aprendizaje, esto lo vemos reflejado en el momento en que de manera directa induce a los estudiantes a reemplaza el número 1.41 por la raíz cuadrada de 2, sin buscar una reflexión sobre la variación de las cantidades por parte de los participantes (Extracto 3, línea165, pág. 45).

Línea	*Participación*
165	*Bunny: ajá las "y" siempre crecen 0.5 en 0.5. Bueno lo que yo haría primero es poner los puntos que tengo allí que voy a analizar qué quiero cuantificar ponerlos aquí más claro ¿no? [refiriéndose a escribirlos en papel], digo también en la pantalla es más complicado, poner los "x" claro, ¿Cuáles son solamente los P y quizás ahí encontrar algo, si no funciona la resta, no sale nada uniforme en la resta, que qué otra puedo encontrar la variación? ... ... 1.41... ese 1.41 no les evoca nada? ¿no se acuerdan qué número es?*

Figura 26. El 1.41 como raíz cuadrada de dos.

Un caso diferente se puede apreciar cuando Bunny invita a reflexionar sobre la manera en cuánto van variando las cantidades en ambas variables, utilizando preguntas ¿qué encontraste aquí? ¿cuál sería el siguiente? Lo que lleva a los participes a observar, analizar y determinar la variación al menos para ciertas cantidades (Extracto 2, línea 098, 100, 102 y 104 pág. 44).

098	*Bunny: ¿encontraste que aquí es 2, 4, 8? [indicando las abscisas]*
099	*E1: sí*
100	*Bunny: el siguiente entonces ¿cuál sería?*
101	*E1: el siguiente va a quedar con decimal, va a tener decimales pues*
102	*Bunny: ¿y el siguiente?*

Figura 27. La variación es al doble para los valores de "*x*".

Lo anterior nos lleva a reflexionar cuando hablamos de futuros docentes se debería tener en presente aspectos de suma importancia en su formación, en ese sentido Dolores (2014) sostiene que la formación del docente de matemáticas debe articularse sobre tres áreas fundamentales: La formación matemática, la formación pedagógica y la formación docente. Particularmente lo afirmado por las investigaciones del campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (ej. Moore, 2014; Paoletti y Moore, 2017; Thompson y Carlson, 2017) sobre que propiciar el razonamiento covariacional es crucial en el desarrollo matemático de estudiantes, fortalece sin lugar a duda la primera área.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

4.1 Covariación logarítmica-exponencial

En los capítulos 1 y 2, presentamos los resultados de los experimentos de enseñanza que tuvieron por objetivo aproximar el concepto de función exponencial a estudiantes del nivel medio superior y propiciar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas identificando las acciones mentales (AM) y niveles alcanzados, respectivamente. Ambos experimentos de enseñanza están basados en la construcción geométrica de puntos de la función logarítmica que se desea estudiar con los participantes, retomando argumentos primigenios del Cálculo (siglo XVII), que fueran rescatados de los trabajos de Ferrari (2008) y Confrey y Dennys (1997).

Coincidimos con Thompson y Carlson (2017), quienes declaran que la instrucción matemática escolar generalmente enfatiza la perspectiva de correspondencia a expensas del razonamiento covariacional, lo que puede fomentar una imagen de función restringida, ya que no se ánima a los estudiantes a pensar en el cambio entre variables.

Por ello, para nosotros es necesario desarrollar en los estudiantes la habilidad de reconocer funciones desde un razonamiento covariacional cuantitativo que involucra el reconocimiento de patrones de crecimiento, en el trabajo con los tres estudiantes del nivel medio superior los enfrentamos precisamente con actividades que requerían el uso de tecnología para la construcción de puntos pertenecientes a la función exponencial de base 2, el uso de GeoGebra para la construción geométrica y las fichas de foami para el análisis de los datos numéricos, con lo cual prendimos que los estudiantes lograrán una aproximación a la covariación logarítmica-exponencial. Ello se reflejó en la identificación de las dos variaciones, una para los valores de "x" y otra para los valores de "y". De igual forma creemos que el trabajo con las fichas permitió identificar el patrón de crecimiento de los puntos (cómo generar más fichas mediante la suma y la multiplicación) que los llevó a lo que Ferrari, et al. (2016) llaman *multiplicar sumando.*

Cuando los estudiantes logran observar cómo los valores de "x" van cambiando de 1 en 1, mientras que los valores de "y" van doblando el valor del número anterior, se van introduciendo a los mundos numéricos que describen Confrey y Smith, uno aditivo donde la base es una progresión aritmética con la peculiaridad de tener una diferencia constante entre cada dos elementos sucesivos y el mundo multiplicativo en la cual existe una progresión geometríca con múltiplo constante entre elementos sucesivos. Lo siguiente para los estudiantes fue yuxtaponer ambos mundos para llegar a la exponenical, "la construcción de un mundo de aditivo y multiplicativo y su yuxtaposición a través de la covariación proporcionan la base para la construcción de una función exponencial" (Confrey y Smith, 1995, pág. 80).

Para poder llegar a la exponencial, primero tuvieron que determinar las progresiones aritmética $x = n+1$ y geométrica $y = 2n$, lo que fue muy significativo, sin embargo, "la complejidad cognitiva reside en percibir la coexistencia y la codependencia, porque podemos generar una función logarítmica o una función exponencial preguntándonos qué variación desempeña el rol dependiente y cuál independiente" (Ferrari et al., 2016). Orillando a los estudiantes a convertir dos variaciones ($n+1$ y $2n$) en una covariación (x, 2^x).

En este sentido, coincidimos con Thompson y Carlson (2017) sobre que propiciar el razonamiento covariacional es crucial en el desarrollo matemático de estudiantes, en particular, al construir expresiones algebraicas, fórmulas, tablas numéricas o gráficos que les permitan describir variaciones simultáneas generando nuevos significados.

Precisamente Thompson y Carlson señalan la importancia de investigar en el escenario del docente lo cual implicaría una "inversión en el desarrollo profesional de los docentes y la tranformación de la praparación en la licenciatura del docente" (Thompson y Carlson, 2017, pág, 462).

En ese sentido nuestro segundo experimento de enseñanza que se desarrolló en el nivel superior, con dos futuros profesores de matemáticas, busca dar indicios sobre la influencia que tiene el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en el actuar del profesor de matemáticas, aunque no se reporta desde ese punto de vista en el presente escrito.

Las actividades de inicio fue la construcción de puntos dónde se percibe en los participantes indicios de los mundos aditivo y multiplicativo, es decir, deducen que deben multiplicar por 2 y sumar 1, pero solo para los puntos con coordenadas enteras, debido a su insistencia de analizar las variaciones mediante diferencia numérica, confirmando lo reportado por Gruver en el 2017 sobre la dificultad para diferenciar relaciones lineales de las exponenciales y la forma de crecimiento que tiene cada una. Sin embargo, se logra percibir en los participante indicios de la AM1 y AM2. Por su parte Ellis et al. (2016, p. 176) mencionan que razonar con cantidades covariando es un aspecto crítico para construir una comprensión particular del crecimiento exponencial. Idea que compartimos, desde nuestra perspectiva, pues se trata de abstraer la covariación logarítmica-exponencial desde un estudio de cantidades variando, una (ordenadas) desde la suma y otra (abscisas) desde la multiplicación.

El experimento de enseñanza desarrollado, nos permitió ver la fragilidad en las estrategias algebraicas de los futuros profesores, si bien logran una expresión general $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ pero no perciben que la base es 2, además no logran identifican la raíz cuadrada como un exponente de 2. Sin embago, logran vincular ambas progresiones mediante un número natural "n" y visualizan la continuidad de la curva en la pantalla de GeoGebra sin generar una expresión algebraica que demanda aceptar un dominio de números reales positivos que tácitamente están considerando.

Un aspecto muy interesante de resaltar es el papel jugado por el futuro profesor quien coordinó ambos experimentos de enseñanza, ya que en los momentos en que los participantes entraban en un momento de confusión él logró guiarlos con base a preguntas, que de cierta manera permitió ciertos avances en la actividad desarrollada, manejando de forma coherente los tiempos en cada proceso del experimento de enseñanza.

4.2 Buscando la continuidad

La variación continua en el sentido de Castillo-Garsow (2010, 2012), nos lleva a reflexionar sobre la forma tan natural en que los estudiantes realizan el cambio de la progresión $y= 2^n$ a la función $y= 2^x$, inducida tal vez GeoGebra, pero no reflexionada sobre la implicación de cambiar una "*n*" por una "*x*". Cabe señalar que la idea de continuidad no fue explicitada durante el trabajo con los estudiantes del nivel medio, pero si estuvo presente desde el mismo diseño de actividades, al igual que en el trabajo con los futuros profesores donde se invitaba a reflexionar sobre covariación continua al solicitar ajustar los puntos, y a describir la curva que los "une". Lo anterior nos hace mirar hacia dos direcciones, el primero es el hecho que percibimos que mientras menos elementos matemáticos escolares tengan los participantes el trabajo con las actividades fomenta con mayor fuerza el desarrollo del razonamiento covariacional continuo, esto lo podemos observar en los logros de los estudiantes del nivel medio quienes en el momento de realizar la actividad no tenían elementos escolares sobre función exponencial, lo contrario sucede con los dos estudiantes del nivel superior, quienes con un repertorio amplio en temas matemáticos (debido a su formación) no logran desarrollar la idea de continuidad de manera suave, incluso cuando logran ajustar los puntos en GeoGebra. Esto mismo es descrito por Thompson y Carlson en el sentido de que si logramos desarrollar en los estudiantes en una etapa escolar temprana un razonamiento variacional o covariacional continuo, al tiempo que aprenden a razonar cuantitativamente y a representar simbólicamente su razonamiento, ya estarán preparados para trabajar los temas en los grados superiores.

El segundo es mirar nuestro propio diseño y preguntarnos si realmente es posible lograr una continuidad suave desde una actividad que parte de algo discreto como es la construcción de puntos? Otro punto que consideramos importante es el uso de un software como GeoGebra que, particularmente nos ha otorgado la parte dinámica del diseño, permitiendo a los participantes una exploración más detallada de los puntos construidos gracias a sus diferentes tipos de vista, y sobre la potencialidad que nos podría proporcionar en el términos de la continuidad y qué tal vez nos ha faltado explorar más a fondo.

4.3 Futuras investigaciones

Los resultados obtenidos en ambas investigaciones nos invitan a continuar afinando el diseño de aprendizaje desde construcciones geométricas, las cuales se han perdido en el ámbito escolar, así como en las investigaciones, mismas que hemos evidenciado provocan exploraciones generadoras de razonamiento covariacional en estudiantes, dándoles la posibilidad de probar sus conjeturas numéricas al predecir nuevos puntos de la curva estudiada. Es importante el pasaje de lo discreto a lo continuo, explotando el potencial otorgado por un ambiente de geometría dinámica, el cual nos permite replantearnos el significado de funciones particulares como las funciones trascendentes y su continuidad en el razonamiento de los estudiantes.

Es nuestra intención reflexionar sobre el papel que jugó en ambas investigaciones un futuro profesor de matemáticas, quien estuvo fungiendo como docente durante ambos experimentos de enseñanza, analizando la influencia que tiene en él la formación bajo la línea de investigación del desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial.

Para fortalecer lo anterior se está analizando el trabajo realizado en un tercer escenario, donde el futuro profesor trabaja en un ambiento no controlado (con más de 40 estudiantes) como pudieron ser los reportados en los capítulos 1 y 2 del presente escrito. En esa línea de ideas, estaremos reflexionando en cómo influye su formación al trabajar actividades de covariación con estudiantes de nivel medio superior y nivel superior, y cómo es su quehacer docente cuando trabaja temas de función exponencial y función logaritmo como profesor sustituto en el CBTis 14 de Acapulco. Las dificultades presentadas referente a la cantidad de estudiantes o la repercusión que tiene el mismo sistema educativo en un profesor recién egresado a la hora de planear las actividades y dar su clase.

Al finalizar el capítulo 3 mencionamos la importancia que tiene la formación inicial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, reflexionamos en el quehacer de Bunny, cuando se enfrentó a jóvenes de bachillerato sin mayor problema pudo llevar hasta buen término las actividades correspondientes, caso contrario cuando trabaja con jóvenes de licenciatura, dejando ver la carencia o debilidad de herramientas de índole pedagógico que le ayuden a llevar a buen término la actividad.

Sosa (2011) menciona lo difícil que con lleva ser docente, debido a que la mayoría de las veces es señalado como el principal resposable de los problemas de los estudiantes, sin llegar a comprender la complejidad del aula en la cual está sumergido. De igual forma señala que muchas de la veces se subestima el proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual combina diversos factores de diferente índole (ejm. ecónomicos, políticos, científicos, afectivos, didácticos, epistemologícos). Coincidimos con Sosa al decir que para la enseñanza de la matemática hace falta algo más que saber el contenido (lo cual es muy necesario), este punto se hace evidente en nuestro trabajo, cuando Bunny da clases a jóvenes del CBTis 14 en Acapulco, donde se le solicita cubrir a la maestra titular en los temas de función logaritmo y función exponencial. En un principio Bunny planea sus clases (ver Tabla 7) y está decidido a trabajar con los diseños de actividades pertenecientes a la línea de covariación logaritmica-exponencial, es decir, maneja el contenido matemático de los temas, sin embargo, se encuentra con ciertos factores propios del proceso de enseñanza-aprendizaje, loc cuales no los había considerado, como lo es el tiempo de la sesiones, la cantidad de alumnos y el programa de estudios, entre otros; lo cual lo conduce a cambiar durante la marcha el tipo de actividades o el objetivo de las mismas. Podríamos decir que aun no había desarrallado del todo las competencias necesarias para planear, orientar y evaluar el proceso de una clase de matematicas ante un grupo tan numeroso.

Tabla 7. Actividades planeadas por Bunny para el trabajo en el CBTis 14

Clase	Actividad	Duración	Material	Objetivo
Primera	Exponencial base 2	50 minutos	Fichas de papel	Identificar la función exponencial mediante variación numérica
Segunda	Graficación GeoGebra	50 minutos	Laptop, cañón	
Tercera	Exponencial base 1/2	50 minutos	Fichas de papel	
Cuarta	Familia de puntos y propiedades	50 minutos	Laptop, cañón	
Quinta	Resolver problemas	50 minutos	Libreta, libro	Aplicación de la exponencial
Sexta	Logaritmos fichas	50 minutos	Fichas de papel	Identificar la función logaritmo mediante variación numérica

Reconocemos que falta profundizar en el papel desarrollado por Bunny como docente, en los tres escenarios, hasta el momento podemos reconocer que, con grupos pequeños y bajo cierto tipo de control (talleres, laboratorios, puestas en escena) Bunny logra cumplir con los objetivos planteados en las actividades, sin embargo, sucede lo contrario cuando el grupo está formado por una cantidad considerable de alumnos, la complejidad del aula aparece, dejando ver factores que no puede controlar, al menos con las herramientas que tenía al momento. Durante una entrevista Bunny reflexiona:

> *Como profesor si me causó problemas tener tantos equipos, pero es que tengo muy arraigada la idea de hacer investigación, pasaba por un equipo y le discutía las ideas, pasaba a otro y discutía sus ideas, pero eran tantos equipos y tantas ideas que fue complicado, y teniendo esa idea de investigar intentaba sacar más sobre lo que habían hecho " por ejemplo un equipo construyo fichas sin meter el 3, se me hizo interesante lo que hicieron, sumar 2 y después 1, sumar 2 y después 1"pero al final tenía que traerlos de nuevo a la idea de la función y las progresiones*.

La reflexión de Bunny nos da indicios de que, si bien, el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial fortalece el conocimiento del futuro docente, con ello sólo se atiende una de las cuestiones escenciales para el docente (saber qué enseñar) y pone en juego la parte del cómo enseñar, cuestión que se debe analizar y reflejar en futuros trabajos.

Referencias

Cardeñoso, J.M., Cuesta, J., Azcárate, P. (2015). Un instrumento para analizar las actividades prácticas en la formación inicial del profesorado de Secundaria de Ciencias y Matemáticas desde la perspectiva de la sostenibilidad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 12(1), 109-129.

Cardeñoso, J.M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los Profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Universidad de Granada.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Carrión, V., Pluvinage, F. (2014). Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 267-286.

Castillo-Garsow, C. (2010). Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth. Tesis doctoral no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experien*ce (pp. 124–159). New York: Springer.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.

Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 135–164.

Dennis, E. y Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.* Washington D.C., USA: Mathematical Association of America. 147-156.

Dolores, C. (2014). La formación profesional de los profesores de matemáticas. En Dolores, C., García, M.S., Hernández, J.A. y Sosa, L. (Eds). Matemática Educativa: La formación de profesores (pp.15-27). Ediciones Díaz de Santos, S. A. Universidad Autónoma de Guerrero.México.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., y Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes y L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios

Avanzados-IPN. México.
Ferrari-Escolá, M, Martínez-Sierra, G. & Méndez-Guevara, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior* 42, 92–108.
Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2017). Multiplicar Sumando: Una Experiencia Con Estudiantes De Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) 20 (2): pp. 137-166.*
Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), pp.59-68.
Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), pp.309-354.
Gruver, J. (2017). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *Journal of Mathematical Behavior* 50, 1–22.
Johnson, H. L. (2015a). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 37–41. http://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946
Johnson, H. L. (2015b). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*. http://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y.
Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), pp. 313–330. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001.
Johnson, H.L., McClintock, E. y Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education* 49(6), 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4.
Kuper, E. G. & Carlson, M. (2018). Sparky the Saguaro: A Teaching Experiment Examining a Student's Development of the Concept of Logarithms. En A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, y S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.441-449), San Diego, California.
Landa J. (2010). Acercamiento a funciones con dos variables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), 129-145.
Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), pp. 339-362.
Martínez Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. Revista *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(1), 35-62.
Martínez Sierra, G. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática; una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(4), 269-282.*
Martínez Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(2), 195-218.*

Méndez, M. (2013). Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 29(1), pp. 75–88.
Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. En R. Mayes, & L. L. Hatfield (Eds.), Quantitative reasoning and mathematical modeling: a driver for STEM integrated education and teaching in context (pp. 75–92). Laramie, WY: University of Wyoming Press.
Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6.
Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. Journal for Research in Mathematics Education, 45(1), 102–138.
Moore, K. y Carlson M., (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. Journal of Mathematical Behavior 31 (2012) 48–59. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.001.
Moore, K. LaForest, K. y Kim, H. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics* 92(2), 221-241. DOI 10.1007/s10649-015-9671-6.
Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 461–473. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002.
Moore, Silverman, Paoletti y LaForest. (2014). Breaking Conventions to Support Quantitative Reasoning. *Mathematics Teacher Educator*, 2(2), pp. 141-157.
Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48(April), 137–151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003.
Saldanha, L., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. En S. B. Berensah, y W. N. Coulombe (Eds.). *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education—North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.
Secretaría de Educación Pública (2017). Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Ciudad de México, México. Recuperado https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf
Semenikhina, O., Drushlyak, M. (2015). The Necessity to Reform Mathematics Education in Ukraine. *Journal of Research in Innovative Teaching*, 8(1), pp. 51-62.).
Sosa, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos. Tesis doctoral publicada, disponible en http://hdl.handle.net/10272/4509.
Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1) (pp. 31–49). México: Morelia.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (1994a). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* 1 (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 229–274. http://doi.org/10.1007/BF01273664.

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S. y Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematical Behavior* 48 (2017), pp. 95–111.