UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA PROPORCIONALIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA DE MÉXICO: UN ANÁLISIS DE CONTENIDO

TESIS
Que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

Presenta:

Damián Chan Hernández

Directora de tesis:

Dra. Catalina Navarro Sandoval

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México *Mayo, 2022*

A mis padres,
Prudencia y Damaciano
A quienes les debo y
agradezco todo lo que soy

A mis hermanos,
Eduardo Enrique, Gaspar
Eugenio, Andres y Jorge Luis
Por sus esfuerzos en casa

A mis amigos de Yucatán,
Gabriela de la luz, Ericka Areli,
Zara, Lizethe, Dulce Yuliana,
Russell, Kevin Alberto
Por creer en mí y motivarme a
seguir formándome
académicamente

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por el apoyo financiero otorgado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario No. 946280

Al Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero por formarme académica y profesionalmente.

Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de vivir esta experiencia y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecerme y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que me acompañaron durante el periodo de estudios de la maestría.

A mis Padres Damaciano Chan y Prudencia Hernández, por haberme forjado como la persona que soy; muchos de los logros se los debo a ustedes, en los que incluyo este. Gracias por motivarme a seguir formándome académicamente y por estar siempre para mí, sin su apoyo hubiese sido difícil.

A mis hermanos, por motivarme a realizar estudios de maestría lejos de Yucatán y por sus esfuerzos en casa.

A Landy Sosa, Eddie Aparicio, Karla Osalde y Leslie Torres del Cuerpo Académico de Enseñanza de las Matemáticas de la UADY por creer en mi para cursar estudios de maestría. Gracias por su apoyo y consejos.

A mi directora de tesis, Dra. Catalina Navarro Sandoval, por su esfuerzo y dedicación, sus orientaciones y conocimientos, su motivación y paciencia, que han aportado a mi formación y para la finalización de este trabajo de investigación.

A la Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez por su apoyo durante su gestión como Coordinadora del posgrado y por sus enseñanzas en los seminarios.

A mis sinodales, M.C. Lizzet Morales García y el Dr. Javier García García por tomarse el tiempo de leer mi trabajo y haberla enriquecido con su experiencia.

A mis profesores y compañeros de la maestría, por su amistad, enseñanzas, tiempo y por compartir sus experiencias y conocimientos, lo cual contribuyó sin duda a mi formación profesional.

¡Gracias a todos!

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Introducción

En esta investigación se discuten los resultados de un estudio en el que se analizaron los libros de texto de quinto y sexto grados de la Educación Primaria mexicana. El interés de llevar a cabo este trabajo fue determinar los significados asociados a la proporcionalidad que se favorecen en los libros de texto mencionados.

Este estudio se llevó a cabo empleando el análisis de contenido desde la postura de Lupiáñez (2013), situándose en la dimensión cultural y conceptual del currículo, permitiendo identificar, seleccionar y organizar los significados de los conceptos y procedimientos de un tema. Además, se consideraron las etapas para realizar un análisis de contenido descritas por Rico (2013).

Para el logro del objetivo se analizaron los libros de texto para el docente de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria de México en los que se aborda el concepto de proporcionalidad. Cabe señalar que tanto los estudiantes como los docentes cuentan con los libros de texto de matemáticas, siendo éste único y oficial por parte de la Secretaría de Educación Pública (SEP), en los que se atienden los contenidos matemáticos del programa de estudios, y tienen como nombre *Desafíos Matemáticos*.

El reporte de investigación en general se estructuró en cinco capítulos: en el capítulo uno se presentan los antecedentes, pregunta y objetivo de investigación. En particular en el apartado antecedentes, con base en la literatura actual se aborda lo siguiente: significados de la proporcionalidad en la enseñanza aprendizaje; razonamiento proporcional; importancia del concepto proporcionalidad en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y análisis de libros de texto sobre la proporcionalidad. En conjunto estos cuatro aspectos fundamentan la pregunta de investigación.

El capítulo dos, como parte del sustento teórico, se describe la caracterización del concepto significado, conceptos matemáticos importantes para la investigación, y caracterización de los documentos oficiales de la Educación Primaria.

En el capítulo tres, metodología, se presenta la descripción del análisis de contenido, las etapas de realización del análisis de contenido descritas por Rico (2013). Específicamente se delimita el corpus del contenido, se definen las unidades de análisis y sus respectivas categorías, base para el análisis de la información, se localizan y delimitan los desafíos matemáticos en los que se aborda el contenido matemático de proporcionalidad, siendo estos la información a analizar de los libros de texto.

En el capítulo cuatro, se presenta ampliamente el análisis del contenido sobre los desafíos matemáticos indicados en los dos libros de texto, con base en las unidades de análisis y las categorías establecidas en el capítulo tres.

Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones con base en los resultados del análisis de contenido, concretando tres mapas conceptuales respecto de la estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Logrado presentar un panorama general de los significados asociados a la proporcionalidad favorecidos en los libros de texto. Respecto a la estructura conceptual se identifica un énfasis en los conceptos de razón, proporción y números naturales, que en conjunto con otras ideas matemáticas permiten generar tres estrategias para la solución de problemas multiplicativos que plantean relaciones de proporcionalidad. En cuanto a los sistemas de representación se reconoce el empleo de las representaciones numérico, tabular y figural-icónico, pero con una ausencia de las representaciones algebraico y gráfico. Ahora bien, para proveer de sentido y funcionalidad al contenido matemático de proporcionalidad se reconoce el empleo de las situaciones personales y laborales, con una ausencia de las situaciones científico o tecnológico y las sociales. Por último, se contrasta los resultados de las investigaciones con los resultados obtenidos en el análisis de contenido.

Por último, se muestran las referencias bibliográficas empleadas para el presente trabajo de investigación.

Capítulo 1

Antecedentes, pregunta y objetivo de investigación

En este apartado se presentan investigaciones realizadas desde diferentes perspectivas entorno a la proporcionalidad. Lo anterior se enmarca en cuatro apartados, el primero atiende los significados y conceptos desde el conocimiento del profesor en formación y estudiantes; el segundo refiere a conceptos importantes para la proporcionalidad y en consecuencia para el desarrollo del razonamiento proporcional; el tercero sobre la importancia de la proporcionalidad en la enseñanza aprendizaje de la matemática y; el cuarto al análisis de libros de textos sobre este concepto. Estas investigaciones en conjunto aportan hacia el entendimiento y pertinencia de este trabajo.

1.1. Significados de la proporcionalidad en la enseñanza aprendizaje

Sobre el conocimiento de los significados de la proporcionalidad Rivas et al. (2012), han estudiado si a los profesores dicho conocimiento les permite identificar *proposiciones* y elaborar *argumentos* que trascienden la aplicación de reglas en la resolución de problemas de proporcionalidad, este conocimiento de la red de objetos y significados forma parte del *conocimiento especializado del contenido* necesario para la enseñanza de la matemática. Y, dado que la enseñanza de la proporcionalidad es una tarea compleja, se requiere el profesor pueda ir más allá de la simple aplicación de reglas razonando proporcionalmente, para lograr el desarrollo del razonamiento proporcional en sus alumnos. Sin embargo, esta investigación, se identificó que profesores en formación presentaban limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervenían en la resolución de un problema de proporcionalidad y, como consecuencia, no interpretaban de manera apropiada las respuestas de alumnos de Educación Primaria sobre problemas de este concepto matemático.

En el mismo sentido Rivas et al. (2012), examinaron el conocimiento de los profesores consideraron lo siguiente: 1) El análisis epistémico, específicamente la *Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados* (GROS) del Enfoque Onto-Semiótico; 2) El conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, y el conocimiento del contenido y del estudiante, que forman parte del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT); 3) El problema de *Mr. Tall/Mr. Short* diseñado por Karplus en 1970 y 4)

Los niveles de razonamiento proporcional propuesto por Karplus, Adi y Lawson (como se citó en Rivas et al., 2012).

Al igual que Rivas et al. (2012), Buforn y Fernández (2014) mencionan que los profesores en formación tienen un limitado conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional, en tres aspectos: 1) La dificultad para identificar situaciones no proporcionales, 2) dificultad para reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y 3) manejar el significado multiplicativo de la idea de operador en contextos multiplicativos. Los autores mencionan que el conocimiento de los profesores está centrado en las relaciones cualitativas o únicamente en los significados de los números racionales o en reglas algorítmicas como la regla de tres. Por lo que una comprensión no adecuada de estos aspectos del razonamiento proporcional limita el desarrollo de otras tareas de enseñanza y de competencias en el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Para examinar el conocimiento de los profesores en formación de Educación Primaria, diseñaron un cuestionario que constaba de 13 tareas, dada la importancia del conocimiento de significados asociados a la proporcionalidad, considerando en su diseño los siguientes componentes: las interpretaciones y significados del número racional como razón, operador, parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad y cociente; las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento up and down, unitizing); y la capacidad de resolver problemas de valor faltante o perdido (proporcionales y no proporcionales) así como la capacidad de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales.

Si bien las investigaciones anteriores se orientaron a examinar y reflexionar sobre el conocimiento de los significados de la proporcionalidad en profesores en formación, considerando problemas proporcionales y no proporcionales, Buforn et al. (2017) no solo se interesaron en examinar el conocimiento del razonamiento proporcional de estos, si no también reconocer características en la comprensión de estudiantes al resolver tareas relacionadas con el razonamiento proporcional.

En la misma investigación se consideraron dos instrumentos. El primero, fue un cuestionario que constaba de 12 tareas diseñadas con base en los sub-constructos (componentes) del razonamiento proporcional con base en Buforn y Fernández (2014), pero con la diferencia que lo organizaron en tres bloques: esquema fraccionario (parte-todo, medida-recta numérica, medida-densidad, reparto equitativo-cociente, razonamiento up and down, operador), discriminación de situaciones proporcionales (problema valor perdido proporcional y problema valor perdido no proporcional) y comparación de razones (Pensamiento relativo-absoluto o pensamiento relacional, proceso uniziting, razón, covarianza). El segundo, fue un cuestionario que constaba de 12 tareas en las que se presentaban tres respuestas diferentes de estudiantes, cada uno de los problemas se habían resuelto en el Cuestionario 1, las resoluciones mostraban diferentes características de la comprensión de los estudiantes.

De acuerdo con el análisis de las respuestas del primer instrumento concluyeron que los profesores en formación tuvieron éxito en los problemas que aplicaban un procedimiento previamente aprendido, pero tenían dificultades en los problemas que requerían comprender los significados vinculados a la relación entre las cantidades y en los que no se tenía un procedimiento. Respecto al segundo cuestionario, los profesores en formación presentaron mayor dificultad para reconocer características de la comprensión de los estudiantes en situaciones donde las respuestas mostraban una comprensión conceptual y no basadas en procedimientos. Por último, en ambos instrumentos se evidenciaron dificultades por una parte para resolver y por otra para reconocer la comprensión en tareas relacionadas con la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones.

Por su parte Godino et al. (2017), afirman que el profesor debe de conocer los diversos significados de los objetos matemáticos. Bajo esta idea evidenciaron la importancia del conocimiento, desde el sistema de prácticas (significados) y configuraciones ontosemióticas de la proporcionalidad. Incluyendo significados parciales del objeto, y la resolución de las tareas prototípicas que lo caracterizan, señalan la necesidad de que el docente conozca la interrelación entre objetos matemáticos y procesos implicados, con el fin de planificar la enseñanza, gestionar las interacciones en el aula, comprender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje en los estudiantes. Mencionando que el universo de significados de la proporcionalidad se puede clasificar de acuerdo con: el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las practicas matemáticas realizadas.

Respecto del contexto o campo de aplicación, mencionan que algunos contextos de aplicación de la razón y la proporción implica la intervención de objetos y procesos específicos, en este sentido se pueden delimitar variantes de significados propios de algunos contextos en los que se aplica la proporcionalidad, por ejemplo, significado geométrico, probabilístico, etc. En relación con el nivel de algebrización, los autores aplican estos a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a la proporcionalidad, concluyendo que es útil y razonable para la organización curricular y la gestión de intervenciones didácticas distinguir entre los siguientes significados: *aritmético*, el cual se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritmético (multiplicación, división); *proto – algebraico*, el cual se centra en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma $Ax = B$; y *algebraico – funcional*, caracterizándose por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones.

Al identificar características del conocimiento de futuros profesores en los sub-constructos (componentes) implicados en el razonamiento proporcional (Buforn et al., 2018), determinaron en qué medida dichos sub-constructos forman parte del conocimiento de los futuros profesores y cuáles son las características del conocimiento de estos, respecto de los distintos sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional.

Para ello aplicaron un cuestionario formado por 12 problemas, divididos en tres dominios de contenido matemático: esquema fraccionario, distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones. Los resultados indicaron que los futuros maestros tuvieron, en general, éxito en la resolución de problemas en los que se podía aplicar procedimiento previamente aprendido como la regla de tres o el algoritmo de la división, pero tuvieron dificultades al resolver problemas que implicaban reconocer la relación entre cantidades y cuando no se podía aplicar un procedimiento aprendido. Esta característica fue transversal en los tres dominios de contenido matemático. La caracterización del conocimiento de los futuros profesores permitió construir cuatro perfiles según su forma de resolución.

Otra perspectiva para identificar aspectos del conocimiento especializado puesto en juego por profesores en formación para Educación Primaria en la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta al usar diferentes métodos de resolución es la propuesta por (Pérez-Bueno et al., 2018). Para el logro del objetivo, proporcionaron a cuatro profesores en formación un problema de proporcionalidad compuesta, las respuestas fueron examinadas utilizando el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), puntualizando en los métodos de resolución usados desde las evidencias e indicios de dicho conocimiento, así como la oportunidad de identificar el conocimiento evocado por las respuestas. Como parte de los resultados y las conclusiones tres de los cuatro profesores evidenciaron un limitado conocimiento enmarcado en la proporcionalidad, y el cuarto profesor hizo uso de significados, definiciones y fundamentos en su resolución, así como una argumentación de cómo y porqué lo realizado en el problema.

Considerando la importancia de los significados en el conocimiento de los profesores Riley (2010), reporta que durante la educación de los profesores en formación para primaria se deben desarrollar competencias en el área de fracciones, decimales, porcentajes, razones y proporciones, ya que son fundamentales para el álgebra y con ello generar en los estudiantes una comprensión sobre el razonamiento proporcional. De modo que evidenciaron la comprensión del razonamiento proporcional de profesores en formación. Para ello, aplicaron un cuestionario con ocho ítems en un curso final. Los primeros dos ítems fueron problemas de opción múltiple y los últimos seis abiertos, solicitando a los participantes que completaran estos últimos, los cuales se basaron en conceptos de valor faltante, proporcionalidad inversa, proporcionalidad directa, pensamiento aditivo y multiplicativo, la razón como un elemento cualitativo, que forman parte del razonamiento proporcional.

Como parte de los resultados y las conclusiones, determinaron que los profesores en formación tienden a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia incluso emplean este algoritmo en situaciones no proporcionales, lo que provoca respuestas incorrectas.

Otras investigaciones como Fernández et al. (2011) centraron la atención en estudiantes de educación secundaria sobre el conocimiento de los significados de la proporcionalidad en el aprendizaje. Específicamente se interesaron en ampliar el conocimiento y la forma de razonar a partir del contenido matemático de proporcionalidad. Empleando para ello un instrumento que constaba de 12 problemas tanto proporcionales como no proporcionales, tomando en cuenta relaciones proporcionales enteras o no enteras y cantidades de naturaleza continua o discreta. Los resultados evidenciaron que, como estrategia de resolución, los estudiantes aplican relaciones multiplicativas para resolver situaciones proporcionales y no proporcionales.

En el estudio de Fernández y Llinares (2012), analizaron el conocimiento de estudiantes de primaria y secundaria para diferenciar y resolver problemas de naturaleza proporcional y no proporcional, así como al coordinar o establecer una relación aditiva o multiplicativa con los datos según sea el caso del problema. Diseñaron un conjunto de problemas considerando el pensamiento aditivo y multiplicativo, manejo de cantidades enteras y decimales, problemas de naturaleza aditiva y proporcional, complejidad del cálculo del valor faltante, ubicación del valor desconocido dentro del problema, entre otros.

De acuerdo con los resultados, se identificaron cinco perfiles asociados a la resolución de los problemas, caracterizándolos de la siguiente manera: tipo 1 (perfil correcto), los estudiantes dan respuestas proporcionales a los 4 problemas proporcionales y dan respuestas aditivas a los 4 problemas aditivos; tipo 2 (perfil proporcional), los estudiantes dan respuestas proporcionales tanto a los problemas aditivos como a los proporcionales; tipo 3 (perfil aditivo), los estudiantes dan respuestas aditivas tanto a los problemas aditivos como a los problemas proporcionales; tipo 4 (perfil que depende del tipo de razón), los estudiantes dan respuestas proporcionales en los problemas con razones o relaciones multiplicativas enteras y dan respuestas aditivas en los problemas con razones o relaciones multiplicativas no enteras. Esto lo hacen independientemente del tipo de problema proporcional o aditivo; y el tipo 5 (perfil otros), Los estudiantes emplean “otras respuestas”, siendo estas incorrectas sin sentido.

El interés por comprender cómo los estudiantes desarrollan el razonamiento proporcional forma parte del trabajo de Rielh y Steinthorsdottir (2017). Mencionaron que el razonamiento se desarrolla a lo largo de la educación escolar y a medida que los estudiantes desarrollan el razonamiento proporcional, avanzan a través de etapas de razonamiento que se basan, primero en ideas cualitativas, luego en la suma repetida y finalmente con base en relaciones multiplicativas. Para lo cual diseñaron un instrumento de 8 problemas considerando el valor faltante y la ampliación y reducción de figuras. Los resultados concluyeron que el éxito en la resolución por parte de los estudiantes se relaciona según las características de los problemas, por ejemplo, cuando los problemas de valor faltante involucran una proporción entera, proporción no entera o igual estos tienen éxito. Sin embargo, en problemas de ampliación presentan más éxito que en problemas de reducción. Estas formas de razonar permiten al profesor indagar sobre el conocimiento de los estudiantes para entender sus dificultades y potenciar su aprendizaje.

Considerando los resultados de las investigaciones arriba citadas, el conocimiento de los significados de la proporcionalidad tiene transcendencia hacia tres aspectos en la práctica docente. Primero, identificar *proposiciones* relacionadas con la proporcionalidad y elaborar *argumentos* que trasciendan en la aplicación de reglas durante la resolución de problemas de proporcionalidad; segundo, potencia la comprensión durante la resolución de problemas por parte de estudiantes no basados en el empleo de algoritmos convencionales; tercero, lo facultan para diferenciar los significados de la proporcionalidad y conocer la relación entre la dimensión conceptual y procedimental de dicho objeto matemático, que en conjunto contribuyen a su organización curricular, intervenciones didácticas, comprensión de dificultades. La ausencia de tal conocimiento en el profesor provoca dificultades para diferenciar situaciones proporcionales y no proporcionales, resolver problemas relacionados con conceptos asociados a la proporcionalidad o comprender la resolución de estudiantes, además, de emplear algoritmos de manera no razonada.

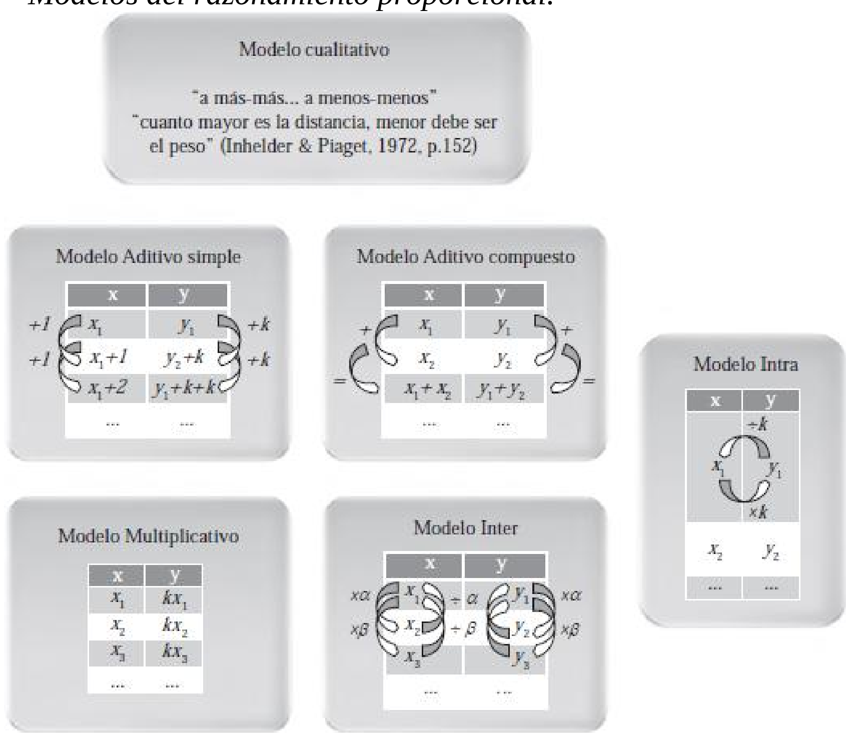
En línea con lo anterior, de acuerdo con Reid y Reid (2017), la presencia de dificultades en el conocimiento del profesor se asocia con un limitado conocimiento del contenido matemático por un lado y por otro el aprendizaje de los estudiantes se puede ver comprometido, en otras palabras, si el conocimiento del profesor es limitado entonces también el del alumno lo será. Puesto que se han reportado dificultades en estudiantes al establecer relaciones multiplicativas tanto en situaciones proporcionales y no proporcionales, así mismo se han presentado dificultades para coordinar o establecer relaciones aditivas o multiplicas, de modo que al partir de un problema aditivo se establece una relación multiplicativa o de manera inversa, otra dificultad se presenta al resolver problemas donde la proporción resulta no entera o en problemas que implican el uso de la proporción para reducir o ampliar figuras conservando su forma.

1.2. Razonamiento proporcional

En el apartado anterior se mencionó sobre significados asociados a la proporcionalidad desde la literatura para el diseño de instrumentos que permiten examinar el conocimiento del profesor en formación con base en su razonamiento. Respecto del contenido de proporcionalidad, para Modestou y Gagatsis (2010) los conceptos razón y proporción fundamentan el razonamiento proporcional, de modo que el conocimiento de éstos conlleva procesos cognitivos interrelacionados que van desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo, e implica comprender las relaciones multiplicativas entre variables en situaciones proporcionales y reconocer cuándo no se dan estas. Por lo anterior, definen el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que implica un entendimiento de la relación multiplicativa existente entre las cantidades de magnitud de una situación, el éxito en la resolución de tareas proporcionales rutinarias, la capacidad de manejar analogías verbales y aritméticas, y la habilidad de discriminar situaciones proporcionales y no proporcionales.

Reyes–Gasperini (2013), realizó un análisis cognitivo sobre la proporcionalidad, sintetizando el análisis en un esquema que se compone de seis modelos para el razonamiento proporcional, cada uno encierra una estrategia específica (Véase figura 1): *cualitativo, aditivo simple, aditivo compuesto, multiplicativo, inter e intra*. Estos modelos permiten interpretar e intervenir didácticamente en su momento, sobre las respuestas que produzcan los estudiantes y tomar las riendas de las situaciones a fin de generar discusiones pertinentes que lleven a la idea de la proporcionalidad sustentada como la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes, así como permitir a los estudiantes transitar el proceso de significación de la proporcionalidad.

Figura 1
Modelos del razonamiento proporcional.



Nota: Tomado de Reyes-Gasperini (2013).

Si bien la razón es uno de los conceptos fundamentales para el desarrollo del razonamiento proporcional se ha identificado que este concepto diferentes funciones o roles, al respecto Obando (2015), diferencia entre los siguientes:

> *Razón como relator,* dadas dos magnitudes heterogéneas M_1 y M_2, y dos cantidades a_1 y b_1 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente, la razón es una cantidad con unidades, se emplea para expresar la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1; *Razón como operador,* se presenta cuando la razón se aplica a magnitudes homogéneas para ampliar o reducir. Sean M_1 y M_2 dos magnitudes homogéneas y a_1 y b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente, la razón representa una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad a_1 de M_1 produce la cantidad b_1 de la magnitud M_2; *Razón como correlator,* sea M_1 *y* M_2 dos magnitudes heterogéneas, y A el conjunto de las cantidades de M_1, $A = \{a_{1,}a_2 \ldots\ a_n\}$, y B el conjunto de las cantidades de M_2, $B = \{b_{1,}b_2 \ldots\ b_n\}$, la razón es una cantidad con unidades y se emplea para expresar una propiedad invariante entre M_1 y M_2, satisfaciendo lo siguiente $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = k$, donde k es el factor constante de proporcionalidad. (pp. 292-300)

En este apartado se ha mencionado acerca de conceptos fundamentales para el desarrollo de una forma de razonar con el contenido matemático proporcionalidad. En el caso de la razón se mencionan los roles o funciones que puede tener. De formar parte del conocimiento del contenido matemático del profesor, permitiría incorporarlos en el proceso de enseñanza aprendizaje o en el diseño de actividades.

Otros aspectos que resultan importantes para el conocimiento del profesor son: significados del número real, formas de razonar con estos significados y la discriminación entre una situación proporcional o no. En línea con lo anterior, se ha señalado que los conceptos de razón y proporción, así como las funciones o roles de la razón son elementos importantes en la enseñanza aprendizaje por su estrecha relación con el concepto matemático de proporcionalidad. De modo que la literatura desde un punto teórico aporta elementos que se relacionan o asocian de manera directa o indirecta con la proporcionalidad. Los que deben ser considerados para la enseñanza aprendizaje en matemáticas (estudiantes), durante la formación de profesores y en su formación continua (profesores en servicio), que permitan el desarrollo del razonamiento proporcional. Con base en lo anterior, interesa conocer desde el contexto de la Educación Primaria mexicana qué conceptos y significados están presentes en el mismo currículo.

1.3. Importancia del concepto proporcionalidad en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas

La proporcionalidad por ser un concepto que se trata en la escuela se pensaría que su origen corresponde con era moderna y solo en el campo académico, pero realmente su uso toma sentido en aplicaciones de la vida cotidiana y desde luego esto no es reciente (Modestou y Gagatsis, 2010). Lo anterior se menciona debido a que su presencia se remonta desde civilizaciones antiguas de Egipto y Babilonia, revelando la importancia del mencionado concepto matemático, así como su carácter fundamental y sustancial para la vida cotidiana humana (Modestou y Gagatsis, 2010, p. 36). Además, la proporción, es un concepto relacionado directamente con la proporcionalidad que no se limita únicamente al campo matemático y escolar, sino que también es usado en disciplinas como la escultura, arquitectura, diseño, música y en una variedad de actividades cotidianas (Modestou y Gagatsis, 2010, p. 37).

En la época moderna, el Ministerio de Educación Argentino reconoce la importancia de la enseñanza de la proporcionalidad, por el estrecho vínculo entre el concepto y numerosos problemas de nuestro entorno, o de las ciencias, haciendo que esta temática sea reconocida como parte de los conocimientos básicos que toda persona debe poseer. Y esto, unido a la sostenida presencia de ésta en diferentes currículos, le da mayor importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Algunas de las acciones que requieren de la utilización de nociones y procedimientos vinculados con la misma, es la simple elección al comprar productos de acuerdo con la relación peso/precio como también las informaciones gráficas y numéricas, que exigen de una interpretación crítica con base en ese concepto. En el entorno académico, la proporcionalidad es un concepto unificante, ya que las primeras ideas y nociones en la educación básica son importantes para desarrollar conceptos asociados a la proporcionalidad en los siguientes grados y niveles educativos (Dirección General de Cultura y Educación, DGCyE, 2005, pp. 9-10).

En la misma idea, un ejemplo de su aspecto unificante es que, al iniciar su tratamiento como estructura multiplicativa en los primeros niveles educativos, permite llegar hasta su aspecto funcional en los niveles educativos medio superior o superior (DGCyE, 2005, p. 45). De modo que el alcance, tanto escolar como cotidiano, que llega a tener este concepto, se puede abordar desde diferentes puntos de vista o significados, dependiendo de los contextos de aplicación (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.), lo que conlleva la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes (Burgos et al., 2018, pp. 1-2).

Como se ha mencionado en los párrafos anteriores la proporcionalidad es un contenido matemático de carácter longitudinal y transversal, en parte, se debe a las diversas situaciones y contextos en las cuales se puede aplicar, por ejemplo, Godino y Batanero (2004), mencionan que "existe una variedad de situaciones en las cuales se ponen en juego el modelo matemático de la proporcionalidad y en muchas otras situaciones que se aplica pero no es exacta, porque en las mismas se presenta un componente aleatorio" (pp. 173-174).

De acuerdo con su funcionalidad tanto escolar como cotidiana, la proporcionalidad es una de las ideas principales presentes en todos los niveles de las matemáticas escolares y es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias (Mochón, 2012). Es decir, su importancia transciende en la mayoría de las actividades matemáticas de la vida cotidiana. Bajo la misma idea, Reyes–Gaspereni (2013), guía a la proporcionalidad "como un tema que recorre desde la educación básica hasta la educación superior, bajo modalidades interesantes en las ciencias y las técnicas" (p.19). Para Wilhelmin (2017), la "proporcionalidad es un objeto matemático longitudinal en el currículo de Educación Primaria y Secundaria. Y es transversal en diferentes asignaturas propias de la Educación Primaria y Secundaria" (p.1).

Por tanto, la importancia de la proporcionalidad se presenta desde tres aspectos, el primero por su uso en la vida cotidiana desde las civilizaciones antiguas hasta hoy día, el segundo por su empleo en las diferentes ramas de la matemática y tercero por su uso en otras disciplinas distintas a la matemática. Por lo anterior, la proporcionalidad tiene un lugar importante en los diferentes currículos y en lo cotidiano. Ahora bien, desde los puntos de vista académico y cotidiano, es necesario favorecer desde las aulas un manejo y dominio sobre el mencionado concepto, y con ello desarrollar razonamiento proporcional. Lo que permitiría comprender conceptos desde la Educación Primaria hasta la educación superior, donde se estudian estructuras conceptuales más complejas. En cuanto a la vida diaria, ante diferentes situaciones y/o contextos se tendría la oportunidad de tomar decisiones de forma razonada. En este sentido es importante que desde la formación del profesor se cuente con el conocimiento de conceptos que se relacionan directamente con la proporcionalidad para incidir de forma positiva en el aprendizaje de los alumnos.

1.4. Análisis de libros de textos

El análisis de libros de texto permite en medida de lo posible, conocer los significados de los contenidos matemáticos en un curso escolar, en el caso de Valverde et al. (2013), se interesaron por elaborar, implementar y analizar una secuencia didáctica con la intención de revisar y/o reconstruir el conocimiento de futuros maestros de primaria. En un primer momento analizaron los libros de texto que forman parte de la bibliografía de la asignatura Matemáticas y su Didáctica, enmarcada en un diplomado de la Universidad de Granada. El análisis de los libros de texto permitió la identificación de los distintos significados vinculados a la razón y proporción, que en conjunto con los lineamientos de la asignatura y estudios previos permitieron el diseño de un experimento de enseñanza como parte de la secuencia didáctica, específicamente, las intervenciones a realizar en el aula con los futuros maestros. Concluyeron, que el análisis de libros de textos y otros tipos de análisis, permitieron organizar y fundamentar muchos de los conocimientos que fueron necesarios en el desarrollo de su experimento de enseñanza.

Por otra parte, el análisis de libros de texto realizado por Zamora (2015), considera la falta de coherencia existente entre los libros del texto (currículo potencial) y el currículo oficial, lo que podría ser la causa del deficiente aprendizaje de las matemáticas. Para ello, analizó tres libros de texto y el Marco Curricular Común (currículo oficial) del subsistema de Educación Media Superior "Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas" para identificar las competencias matemáticas del currículo oficial que se favorecen mediante las actividades propuestas en los libros de texto. Los resultados señalan que en los libros de texto se adoptan significados de referencia similares con lo propuesto en el currículum oficial. Sin embargo, los significados que potencian los libros de texto guardan algunas diferencias entre sí, por ejemplo, el uso de sistemas de representación y el papel que éstos juegan en la construcción de estos. La fenomenología que los libros de texto utilizan para dar uso y sentido a los significados.

El programa oficial dota de carácter funcional a ciertos conceptos, ubicándolos como herramientas en la solución de problemas en diversos contextos fuera del campo de las matemáticas. Por lo anterior es importante que el profesor reconozca esa diversidad de posturas editoriales, asimismo, se sugiere que el profesor considere un conjunto de materiales de diversas características e intencionalidades para el diseño e implementación de cursos y no se sujete a la propuesta de un solo libro. Esto a fin de buscar un balance que permita ampliar los significados relevantes para la enseñanza a través de las tres dimensiones que los conforman.

Bajo la misma idea de determinar coherencia entre el currículo y los libros de texto se encuentra lo realizado por Pino y Blanco (2008), pues mencionan que los contenidos curriculares se expresan en los textos o manuales escolares, los cuales son utilizados en las aulas de clase como un recurso importante (a veces el único), para la implementación del currículo, siendo mediadores entre el currículo y el aula. De esta manera, los libros de texto constituyen una herramienta de primer orden para el profesorado. Considerando el rol que tiene el uso de los textos escolares, el trabajo de investigación se centró en el uso que los libros de texto hacen de los problemas matemáticos sobre la proporcionalidad numérica, y cómo los libros reflejan las propuestas curriculares sobre la resolución de problemas.

Para ello, consideraron 8 libros de texto (cuatro en Chile y cuatro en España), centrándose en el tema de proporcionalidad. La metodología usada fue el análisis de contenido. Con base en los resultados, concluyeron que la mayoría de los problemas eran de *traducción simple* y *ejercicios de reconocimiento y algorítmicos*; no se presentaban problemas del tipo *sobre situaciones reales*; en contradicción con lo planteado en los currículos oficiales, los textos no incluían modelos ni estrategias para la resolución de problemas; se advierte poca coherencia entre lo que se prescribe en los currículos oficiales y los libros de texto.

Siguiendo la misma línea de revisión de libros de texto, Martínez et al. (2017), realizaron una revisión bibliográfica de textos escolares para analizar problemas planteados sobre proporcionalidad, concretamente, los relativos a proporcionalidad compuesta. El estudio se realizó considerando el análisis de contenido sobre doce libros de la Educación Secundaria Obligatoria en España, de editoriales reconocidas. Como parte de sus resultados, clasificaron los problemas según su contexto, estructura, posición y papel dentro de la unidad didáctica correspondiente y a la tipología de magnitudes utilizadas. Entre otros resultados, mencionan que, aunque la cantidad de problemas varía ligeramente entre los distintos textos, el tratamiento es bastante homogéneo respecto a su contexto, estructura y magnitudes implicadas: la mayoría de los problemas son de contexto realista, de valor faltante y con cinco cantidades de magnitud extensivas. También se detecta poca presencia de problemas de comparación cuantitativa y de situaciones de tipo inversa - inversa, así como poca presencia y variedad de magnitudes intensivas.

En el trabajo de Burgos et al. (2020), señalan que el análisis de libros de texto es un tema relevante tanto para la práctica de la enseñanza como para la investigación en Educación Matemática. Desarrollaron un método aplicando herramientas del Enfoque Ontosemiótico para analizar a profundidad y amplitud las características de una lección, que aborda el estudio de la proporcionalidad en el último curso de Educación Primaria. En sus resultados mencionaron que la lección, propone una trayectoria epistémica, es decir, existe una selección y secuencia de un sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas, implicadas en la realización de tareas (ejemplos, ejercicios, problemas de aplicación), dicha trayectoria no siempre coincide con la trayectoria cognitiva de los estudiantes, lo que desemboca en un conflicto de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el tema, se considera que los dos aspectos son útiles para el docente, al emplear la lección como recurso contará con conocimientos que le permitirán modificar la trayectoria epistémica prevista y articularla con las trayectorias cognitivas de sus estudiantes.

Siguiendo la línea de investigación de análisis de libros de texto bajo el Enfoque Ontosemiótico, Castillo et al. (2022), mencionan que el libro de texto continúa siendo el material curricular de uso preferente por parte de los profesores, determinando en gran medida lo que sucede en el aula y actuando como mediador en el aprendizaje del estudiantado. Esto justifica la importancia que ha adquirido el análisis de los libros de texto como campo de investigación educativa. En este sentido, les interesó construir una *Guía de análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas* en el tema de proporcionalidad (GALT-proporcionalidad), con el propósito de disponer para profesores e investigadores una pauta de indicadores de idoneidad didáctica específicos, para el tema de la proporcionalidad, que pueda servir de apoyo para el análisis y valoración de lecciones de libros de texto, y como recurso para la reflexión de profesores sobre los procesos de instrucción efectivamente implementados sobre proporcionalidad.

Para construir la guía consideraron las facetas, componentes e indicadores de la teoría de la idoneidad didáctica y el análisis de contenido de investigaciones didácticas sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en Educación Primaria y secundaria que justamente permitieran procesar y revisar dimensiones cualitativas, describir tendencias y especificar características del contenido. Finalmente concluyeron que el libro de texto es un material curricular que determina en gran medida lo que sucede en el aula y actúa como mediador en el aprendizaje del estudiante, y que el estudio de las razones, proporciones y proporcionalidad en los currículos de Educación

Primaria y secundaria es importante, de modo que la guía como producto de esta investigación puede ser un recurso valioso para el docente.

Hoy día, el libro de texto es una herramienta didáctica para el profesor en servicio, base en la enseñanza de las matemáticas, siendo el medio de comunicación y apoyo en el diseño, planificación e implementación de contenidos matemáticos en el aula, y se corresponde con lo demandado en el currículo escolar. Algunas investigaciones sobre análisis de libros de texto se han orientado a los siguiente: determinar significados de un concepto matemático y concluir si existe coherencia entre el currículo oficial y el potencial; determinar los significados de un concepto para el diseño de experimentos de enseñanza, implementados para la formación de profesores; proponer trayectorias epistémicas; estudiar los problemas propuestos de proporcionalidad; generar una guía de análisis para determinar la idoneidad de las tareas propuestas en los libros de texto, entre otros.

Conociendo la relevancia del libro de texto para el profesor, el análisis de esta toma relevancia tanto en la investigación en Matemática Educativa como en la enseñanza, puesto que, para el docente, reconocer los conceptos, significados y procedimientos que se favorecen en dichos libros, resultan ser clave durante la enseñanza de cualquier tema relacionado con matemáticas y dentro de lo posible usarlos para reducir dificultades durante el proceso de aprendizaje.

1.5. Problemática

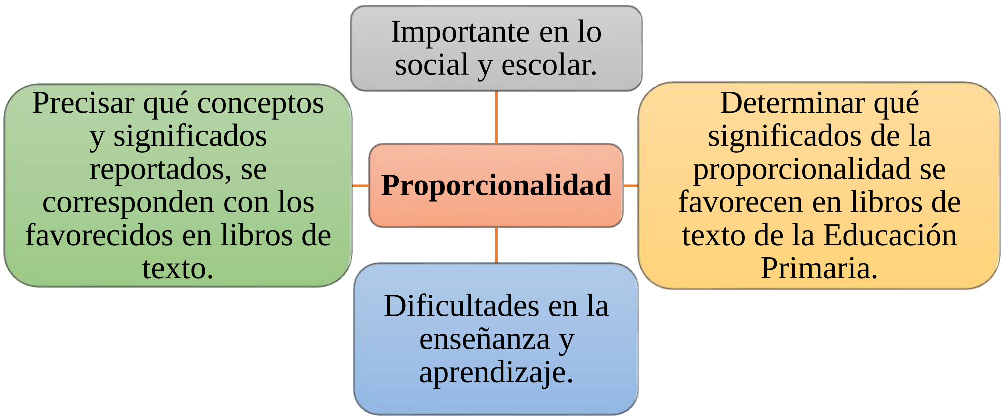
El contenido matemático proporcionalidad tiene presencia importante en el contexto social y escolar. En lo social se ha empleado desde civilizaciones antiguas (egipcia y babilónica) hasta hoy día y, en lo escolar se caracteriza por ser longitudinal y transversal, es decir, tiene presencia desde la educación básica hasta la educación superior a la par de relacionarse con otras ciencias. Bajo esta idea, los significados que se relacionan con este contenido matemático juegan un papel relevante durante la enseñanza aprendizaje, por ejemplo, en profesores permite generar argumentos y proposiciones que van más allá del empleo de algoritmos convencionales y se busca que en conjunto con estudiantes desarrollar una forma de razonar denominado razonamiento proporcional.

Buena parte de la literatura ha aportado en el aspecto teórico de la Matemática Educativa, es decir, han estudiado sobre conceptos y significados que mantienen relación entre sí. Así mismo, han reportado el análisis de libros de textos, para determinar significados de conceptos matemáticos, debido a que no existía claridad y precisión de los más favorecidos. En conjunto se busca el logro del diseñó de propuestas, con la intención de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

De acuerdo con los resultados de las investigaciones citadas en el primer apartado, el conocimiento del profesor sobre los significados y conceptos de la proporcionalidad es limitado, lo que se evidencia cuando emplean estrategias algorítmicas en la resolución de problemas proporcionales y no proporcionales, sin mostrar comprensión. Así mismo, presentan dificultad al no diferenciar entre una situación proporcional y una no proporcional. Asocian y condicionan el razonamiento proporcional a la resolución exitosa de problemas de valor faltante y finalmente muestran dificultad para comprender la resolución de los estudiantes que no basan su pensamiento y razonamiento en reglas o algoritmos. Por otra parte, los estudiantes presentan dificultad para diferenciar y establecer relaciones en situaciones proporcionales o aditivas, y muestran menos éxito al resolver problemas en los que la razón no es entera.

En el sentido curricular, las investigaciones sobre análisis de libros de texto no se han centrado en estudiar los significados relacionados con proporcionalidad favorecidos en los mismos, lo cual es importante puesto que dichos significados aportan información relevante al profesor a considerar y con ello apoyar en la enseñanza aprendizaje de la proporcionalidad. Pues hoy día el libro de texto es una herramienta que el profesor usa para el proceso de enseñanza aprendizaje de cualquier tema, dado que éste comunica los contenidos que el currículo demanda. Ahora bien, se han reportado conceptos y significados asociados a la proporcionalidad, sin precisar si existe una correspondencia entre estos con los considerados en los libros de texto. Lo anterior se presenta en la Figura 2.

Figura 2
Problemática.



Por tanto, este trabajo se interesa en analizar los libros de texto de la Educación Primaria mexicana, con el propósito de conocer los significados asociados a la proporcionalidad que se favorecen en los mismos, para contribuir al conocimiento del profesor y a su vez, en medida de lo posible, reducir dificultades tanto en docentes como en estudiantes respecto a dicho contenido matemático.

1.6. Pregunta de investigación

Con base en la problemática, para este trabajo de investigación se ha planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué significados asociados a la proporcionalidad se evidencian en los libros de texto de la Educación Primaria?

1.7. Objetivo general de la investigación

Determinar los significados asociados a la proporcionalidad que se favorecen en los libros de texto de la Educación Primaria.

Capítulo 2

Marco conceptual

En este trabajo de investigación el interés se centró en el análisis de libros de texto para determinar los significados que se favorecen sobre la proporcionalidad en la Educación Primaria mexicana. Como parte del sustento teórico, se presentan los aspectos que permiten caracterizar el significado de un concepto matemático, definiciones de conceptos matemáticos importantes para este trabajo, y finalmente se hace referencia a definiciones importantes del plan y programa de estudio, así como de los libros de texto *Desafíos matemáticos*.

2.1. Caracterización de los significados de conceptos matemáticos

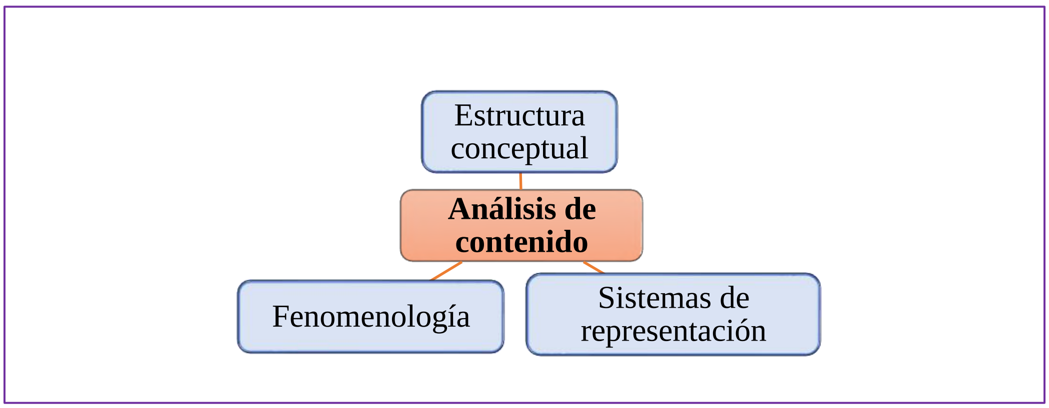
De acuerdo con las ideas de sentido y referencia de Frege (como se citó en Rico et al., 2007), se establece que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta (referencia), por los sistemas de símbolos que lo representan (signos), y por los objetos y fenómenos de los que surge (sentido). En la reflexión sobre matemática escolar, que corresponde al estudio curricular, el *significado* de un concepto se adecua a la terna: Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos, con la cual se caracteriza el *significado* de un concepto de la matemática escolar.

Lo anterior se debe, según Rico (2016), a que los conceptos matemáticos surgen por abstracción, como resultado del análisis y la generalización de experiencias cotidianas; cada concepto proviene de la síntesis del trabajo práctico y de conceptos anteriores, es decir, mediante un doble proceso de abstracción y generalización. La generación y desarrollo de conceptos es una faceta de la construcción del conocimiento matemático escolar, en tanto que son objeto de enseñanza y de aprendizaje. Es durante ese proceso de construcción, que un concepto matemático, muestra una diversidad tanto de signos para su representación como de términos, contextos, fenómenos y situaciones que dan sentido al mismo (Rico, 2016). Por lo tanto, hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido, siendo de esta manera que un concepto matemático tiene una multiplicidad de significados (Rico et al., 2007).

De este modo, Fernández-Plaza (2016) afirma que conocer un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades, y modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas. Así, conocer los significados de un concepto, es conocer el concepto matemático de interés.

De acuerdo con Rico (2016), “el significado de determinado concepto está establecido por sus componentes semánticos, estos incluyen su estructura conceptual, sus sistemas de representación y su fenomenología (sentidos o modos de uso)” (p. 95), los cuales forman parte de los tres organizadores curriculares del análisis de contenido (Véase figura 3). Por lo anterior, emplear el análisis de contenido, en conjunto con sus tres organizadores curriculares se analiza, describe, establece, identifica, selecciona y organiza los significados de un concepto matemático.

Figura 3
Análisis de contenido y sus organizadores curriculares.



El primer organizador curricular, de acuerdo con Lupiáñez (2013), quien señala que:

> La *estructura conceptual*, considera las relaciones de los conceptos y los procedimientos implicados en el contenido de estudio, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que forma parte, como a la que configuran dichos conceptos y procedimientos. (p. 85)

Fernández-Plaza (2016) establece un sistema de categorías para este organizador curricular (Véase Tabla 1).

Tabla 1
Sistemas de categorías para la estructura conceptual de los contenidos matemáticos escolares.

Estructura Conceptual		
Campos conceptuales		
Conceptual	***Procedimental***	***Actitudinal***
Primer nivel de complejidad		
Hechos	*Destrezas*	*Emociones*
Términos/Notaciones	Operaciones	Seguridad
Convenios	Reglas	Disciplina
Resultados	Algoritmos	Dominio y autoestima
Segundo nivel de complejidad		
Conceptos	*Razonamientos*	*Moralidad y normas*
Extensión	Inductivo	Respeto y aplicación de reglas
Comprensión	Deductivo	Corrección de procedimientos
Analogía	Relacional	Coherencia
Tercer nivel de complejidad		
Estructuras	*Estrategias*	*Valores éticos*

Nota: Tomado de Fernández-Plaza (2016).

Para el segundo organizador curricular Lupiáñez (2016), menciona que los sistemas de representaciones son:

> Aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o expresiones verbales, que se hacen presentes y son posibles de relacionar con conceptos y procedimientos, así como con sus características, propiedades y relaciones más relevantes; dichas representaciones pueden organizarse según sus características y propiedades, en diferentes *sistemas de representación,* en donde cada sistema constituye un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de una serie de reglas y convenios, que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático y posibilitan su uso para determinadas funciones. (p. 120)

En el tercer organizador curricular de acuerdo con Rico (2016) y Ruiz-Hidalgo (2016), la *fenomenología* permite conocer e identificar el sentido de un concepto matemático para completar el dominio de su significado mediante las situaciones en las que se aplica.

2.2. Conceptos matemáticos

2.2.1. Razón

Como se ha mencionado en el capítulo 1, la razón es uno de los conceptos matemáticos importantes para el razonamiento proporcional, de acuerdo con Godino y Batanero (2004) la razón se define como:

> Uno de los usos y significados de la fracción, bajo esta idea y de manera general se puede definir como la comparación de una parte con otra parte, sin embargo, no siempre son sinónimos, de manera específica las fracciones son *cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero*; mientras que una razón es *un par ordenado de cantidades de magnitudes*. (p. 170)

Otra definición de la razón es la planteada por Andonegui (2006), quién la define como:

> Una relación multiplicativa entre dos números naturales diferentes de cero. Por ejemplo, si en un grupo de personas hay 18 hombres y 27 mujeres, se dirá que la razón entre el número de hombres y el de mujeres es de "2 a 3", es decir, que hay 2 hombres por cada 3 mujeres. Distinguiendo entre los conceptos de razón y de fracción. Este último alude a la relación (también multiplicativa) entre la parte y el todo respectivo. (p. 7)

Andonegui (2006), menciona una forma de diferenciar entre razón y fracción, mientras que Godino y Batanero (2004) describen, otras diferencias entre la razón y la fracción:

> Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 piezas de pan por $15 pesos. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con $\frac{2}{3}$. De acuerdo con el ejemplo, la razón $\frac{3\ piezas\ de\ pan}{\$15\ pesos}$ no es una fracción sino una comparación entre cantidades de dos magnitudes; Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Si no más bien en términos verbales, por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades; Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede expresar como $4:7$ o $4 \rightarrow 7;$ Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la

> longitud de una circunferencia a su diámetro $\frac{C}{D}$ es el número π que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). (pp. 170-171)

Específicamente en matemáticas Huircan y Carmona (2013) definen a la razón como:

> La comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente. En este sentido la razón entre a y b, cuando b es un numero distinto de cero, se escribe: $\frac{a}{b}$ y se lee a es a b, el numerador recibe en nombre de antecedente y el denominador el nombre de consecuente. (p. 6)

Con base en las definiciones y en las diferencias que se puntualizan entre razón y fracción se considera para efectos de esta investigación, que la razón es una comparación entre dos magnitudes representadas de la forma $\frac{a}{b}$, donde su segunda componente es distinta de cero.

2.2.2. Proporción

Respecto al concepto de proporción, Godino y Batanero (2004) mencionan que:

> Se define como la igualdad y equivalencia entre dos razones. Es decir, cuando en dos pares de números, mantienen una regla de correspondencia, se establece una igualdad de razones y existe una equivalencia entre estas, se define *la proporción*. Por ejemplo, a 6 le corresponde 21, y a 8 le corresponde 28. Escribiéndolo como la igualdad entre dos razones: $\frac{21}{6} = \frac{28}{8}$ se dice que forman una proporción. (p. 172)

Andonegui (2006), lo define como:

> El conjunto de dos razones iguales, por ejemplo, de un grupo formado por 18 hombres y 27 mujeres, la razón del número de hombres al de mujeres es $\frac{2}{3}$, pero también $\frac{18}{27}$, $\frac{6}{9}$ ó $\frac{36}{54}$ son razones que establecen una comparación entre las cantidades de hombres y mujeres, en este sentido las razones son iguales o equivalentes, expresando la misma relación multiplicativa entre los números, de modo que al indicar la igualdad entre dos razones se hace referencia a *la proporción*. (p. 9)

Matemáticamente Huircan y Carmona (2013) la definen como:

> Una proporción es la igualdad entre dos o más razones. Se escribe como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se lee a es a b como c es a d, además a y d reciben el nombre de extremos de la proporción y b y c se denominan medios de la proporción. (p. 9)

Con base en las definiciones de proporción, para este trabajo se considerará como la igualdad o equivalencia entre dos o más razones que se caracterizan por mantener una regla de correspondencia representándose como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2.2.2.1. Propiedades de la proporción

Cuando en una situación es posible establecer una proporción con las cantidades de las magnitudes se presentan las propiedades de las proporciones. Huircan y Carmona (2013), mencionan que, al establecer una proporción, "el producto de los extremos es igual al producto de los medios $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow a\cdot d=b\cdot c$, donde $b,d\neq 0$. Recíprocamente, dos productos iguales pueden escribirse como una proporción $a\cdot d=b\cdot c\rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, donde $b,d\neq 0$" (p. 9). Bajo el mismo entendido Aparicio, Sosa y Mukul (2014), mencionan que establecer una proporción, "es establecer una relación de igualdad entre dos o más razones, y por consiguiente tiene sentido a la siguiente propiedad: el producto de los valores medios es igual al producto de los valores extremos, por ejemplo, $\frac{9}{5}=\frac{18}{10}\rightarrow 9\times 10=5\times 18$" (p. 234).

2.2.2.2. Situaciones de escala y reparto proporcional

Cuando se trabaja con los conceptos de razón y proporción, algunas situaciones particulares son las escalas y los repartos proporcionales. Andonegui (2006) menciona que:

> Respecto al primero, se refieren a representar algún objeto o parte de la realidad en un mapa, plano o dibujo, sin distorsionar las relaciones que guardan entre sí los elementos que componen la realidad que se representa; cuando esta transformación se hace correctamente, se dice que el dibujo, mapa o plano está *hecho a escala*, es decir, que se conservan, en el papel, las relaciones multiplicativas presentes en el objeto. En cuanto al segundo, se tratan del tipo de situaciones en la que hay que repartir una cantidad de alguna magnitud entre

determinado número de sujetos, de acuerdo con ciertas razones establecidas entre éstos. (p. 12)

2.2.3. Relaciones de proporcionalidad directa

Una situación que establece una relación de proporcionalidad directa se caracteriza si al considerar dos pares cualesquiera de valores relacionados, uno de cada magnitud, siempre forman una proporción. Mas precisamente, *dos magnitudes están en una relación de proporcionalidad directa, si los valores de una de ellas se multiplican o divide por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número.* (Andonegui, 2006, p. 9)

2.2.4. Factor constante de proporcionalidad

Andonegui (2006) y Huircan y Carmona (2013) coinciden en que una forma de representar una situación en la cual se establece una relación de proporcionalidad es mediante la expresión algebraica $y = kx$, donde y, x representan a las magnitudes y k es un valor invariante o constante que se denomina factor constante de proporcionalidad. Además, de acuerdo con Andonegui (2006), "el término k representa la razón existente entre cualquier par de valores correspondientes a las magnitudes y y x (en ese orden)" (p. 14).

2.3. Documentos oficiales de la Educación Primaria en México

2.3.1. Plan y programas de estudios

Actualmente la Educación Primaria de México están vigentes dos planes y programas de estudio (SEP, 2011; SEP, 2017). Los grados de primero y segundo, se encuentran bajo la disposición de la Reforma Educativa 2017, y los grados de tercero a sexto se rigen por la Reforma Educativa 2011.

La Reforma Educativa 2017, cuenta con un enfoque humanista; se basa en los fines que debe tener la educación del siglo XXI; consta de catorce principios pedagógicos; articula lo aprendido en la educación preescolar, primaria, secundaria y media superior; plantea que el sistema educativo está compuesto por el gobierno federal, autoridades educativas locales, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), el sindicato, escuelas, docentes, padres de familia, sociedad civil, y el poder legislativo; la organización curricular se compone de tres campos formativos, cuatro niveles educativos y se centran en aprendizajes claves (SEP, 2017).

Mientras que la Reforma Educativa 2011 tiene un enfoque por competencias; se basa en los rasgos que debe tener la educación de siglo XXI; plantea que el sistema educativo se compone por docentes, estudiantes, padres de familia, tutores, autoridades, los materiales de apoyo y planes y programas de estudio; la organización curricular se compone de cuatro campos formativos, divide en cuatro periodos la educación preescolar, primaria y secundaria, y se centra en los aprendizajes esperados (SEP, 2011).

Respecto al programa de la reforma educativa 2017 de Matemáticas, plantea los siguientes propósitos: *concebir* las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos; *adquirir* actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas; y, *desarrollar* habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias. Los contenidos matemáticos se organizan en tres ejes: Numero, álgebra y variación; Forma, espacio y medida; y, Análisis de datos. La asignatura esta bajo el enfoque de resolución de problemas (SEP, 2017).

En su contraparte, el programa de la reforma educativa de 2011 de Matemáticas plantea los siguientes propósitos: Desarrollar formas de pensar que permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos; Utilizar diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución; y, Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo. Los contenidos matemáticos se organizan en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; y, Manejo de la información. La asignatura esta bajo en el enfoque de empleo y resolución de secuencias de situaciones problemáticas (SEP, 2011).

Las situaciones problemáticas permiten el uso de las herramientas matemáticas que se pretenden estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir conocimiento y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje, esto en el libro de texto se traduce como problemas que el estudiante debe resolver. La solución debe construirse en el entendido de que existen diversas estrategias posibles y hay que usar al menos una. Para resolver la situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, mismos que le permiten *entrar* en la situación, el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación. El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y lo puedan reconstruir en caso de olvido; de ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, tanto en relación con el lenguaje como con las representaciones y procedimientos (SEP, 2011e; SEP, 2011f).

2.3.2. Libros de texto

Para la Educación Primaria el Gobierno de México distribuye libros de texto únicos los cuales son diseñados y elaborados únicamente por la Secretaría de Educación Pública.

Los libros de texto de matemáticas, para primer y segundo grados, reciben el nombre de *Matemáticas, primer grado* y *Matemáticas, segundo grado.* Los cuales pertenecen a la Reforma Educativa 2017.

En el libro para el docente, se identifican dos grandes apartados. El primero se llama *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Orientaciones generales*, cuyo propósito es ofrecer información acerca de la forma en que se aprende y enseña matemáticas de acuerdo con el enfoque de los programas de estudio, y facilitan recomendaciones por eje temático en las que se acentúan aspectos relevantes que se desarrollan a lo largo de las lecciones para propiciar que los alumnos adquieran conocimientos y desarrollen habilidades para mejorar su aprendizaje, además, aportan algunos aspectos que permiten al maestro seguir aprendiendo y desarrollando sus habilidades docentes. El segundo apartado se llama *Sugerencias didácticas específicas por trayecto y por lección*, en esta se presenta una ficha descriptiva de cada trayecto y se describen aspectos esenciales de cada lección como su intención didáctica, los materiales requeridos, cómo guiar el proceso de estudio, cómo apoyar a los alumnos y cómo extender las actividades para asegurar que todos aprendan (SEP, 2019; SEP, 2019a).

Para los grados de tercero a sexto se disponen de libros de texto que tienen por nombre *Desafíos Matemáticos.* Éstos pertenecen a la Reforma Educativa 2011.

Los libros para el docente estan organizados en cuatro secciones fundamentales. La primera, *Intención didáctica*, describe el tipo de recursos, ideas, procedimientos y saberes que se espera pongan en juego los alumnos ante la necesidad de resolver el desafío que se les plantea; la segunda, *Consigna*, se muestra la actividad o problema que se va a plantear, la organización de los alumnos para realizar el trabajo y, en algunos casos, lo que se permite hacer o usar y también lo que no se permite; la tercera, *Consideraciones previas*, contiene elementos para que el docente esté en mejores condiciones de apoyar a los alumnos en el análisis de las ideas que producirán: explicaciones breves sobre los conceptos que se estudian, posibles procedimientos de los alumnos, dificultades o errores que quizá enfrenten, sugerencias para organizar la puesta en común y preguntas para profundizar el análisis, entre otros; y finalmente *Observaciones posteriores*, se anotan en cada uno de los desafíos, con la intención de que el docente reflexione sobre su propia práctica y sobre la eficacia de la consigna (SEP, 2011e; SEP, 2011f).

.

Capítulo 3

Metodología

En esta investigación, el contenido matemático de interés es la proporcionalidad. Éste se comienza a estudiar desde la Educación Primaria mexicana, y para determinar los significados asociados a la proporcionalidad que se favorecen en los libros de texto de este nivel educativo, se emplea la metodología *Análisis de Contenido* bajo la postura de Lupiáñez (2013). Este investigador contextualiza al análisis de contenido desde un marco curricular, situándose en la dimensión cultural y conceptual del currículo, permitiendo identificar, seleccionar y organizar los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático.

3.1. Paradigma y tipo de investigación

El paradigma de la investigación es cualitativa, estas investigaciones se basan más en una lógica y en un proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas), entre las técnicas para la recolección de datos esta la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades (Hernández Sampieri et al. 2016).

La investigación es de tipo documental, de carácter interpretativo y comprensivo, buscando captar exhaustivamente lo que dicen los textos e, intenta leer y otorgar sentido a unos documentos que fueron escritos (Gómez, 2011).

3.2. Análisis de contenido

El origen del análisis de contenido se remonta a la Suecia del siglo XVIII, específicamente cuando la iglesia realizó análisis de documentos escritos de divulgación de la época con el objeto de identificar elementos contrarios a la religión, durante los siguientes períodos se empleaba para diferentes fines sin estar orientado hacia la investigación, no fue hasta el año de 1948 con Paul F. Lazarsfeld y Bernard Berelson quienes reconocieron al análisis de contenido como una técnica de investigación, lo cual permitió ampliar su uso a numerosas disciplinas (Krippendorff, 1990).

Desde la postura de Bardin (2002), se define como:

> Como el conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes. (p. 32)

Para Bernete (2013), menciona que:

> El análisis de contenido se utiliza para estudiar cualquier tipo de documento en el que esté transcrito algún relato, relativo a cualquier objeto de referencia. Definiéndose como una metodología sistemática y objetivada porque utiliza procedimientos, variables y categorías que responden a diseños de estudio y criterios de análisis, definidos y explícitos. Por esta razón, permite realizar estudios comparativos, entre diversos documentos, o distintos objetos de referencia; entre diversas fuentes o épocas. La práctica del análisis de contenido puede adecuarse a los requerimientos de la investigación científica. (p. 222)

Con base en lo anterior y reflexionando acerca de las posturas del análisis de contenido, existen elementos en común, en parte dependerá del interés de la investigación y a la disciplina que pertenezca. Para efectos de este trabajo de investigación y contextualizando en la Matemática Educativa, se adopta la postura de Lupiáñez (2013), dado que considera al análisis de contenido como:

> Una herramienta metodológica que se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen los conceptos matemáticos. Además, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor o investigador identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un contenido matemático que considera relevantes para efectos de su interés (pp. 83-85).

3.3. Etapas del análisis de contenido

Rico (2013) menciona que, de manera general, el procedimiento para realizar un análisis de contenido sigue determinadas etapas:

1. Delimitar el corpus del contenido (Texto, discurso, producción escrita) a analizar.
2. Concretar la unidad de análisis: palabra (nombre, verbo o adjetivo), frase o párrafo.
3. Localizar o inferir en el texto las unidades de información.

4. Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas. Evitar en lo posible la categoría “otros”, para obviar indeterminaciones.
5. Codificar y cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionados (sistema inductivo) cada unidad solo debe incluirse en una categoría.
6. Relacionar entre si e interpretar las categorías establecidas, considerando sus unidades de análisis adscritas.
7. Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga con los agentes intervinientes (hablante/escritor u oyente/lector).

3.4. Delimitar el corpus del contenido

Para el desarrollo de la presente investigación, se consideraron algunos documentos oficiales de la Educación Primaria, tales como los planes y programas de estudio y los libros de texto para el profesor. Por el interés particular de la investigación, en los libros de texto es dónde se realizó el análisis de contenido, siendo estos la fuente de información para determinar qué significados se favorecen sobre la proporcionalidad en este nivel educativo.

Para ubicar los libros de texto del profesor sobre los que se realizó el análisis de contenido se consideró lo siguiente: primero, la revisión del plan de estudios (SEP, 2011; SEP, 2017), en él se identificó que el conjunto de aprendizajes esperados para el pensamiento matemático de primero y segundo grado están organizado en tres ejes: Número, algebra y variación; Forma, espacio y medida; y, Análisis de datos. Para los grados de tercero hasta sexto estan organizados en: Sentido numérico y Pensamiento Algebraico (SNPA); Forma, Espacio y Medida (FEM); y Manejo de la Información (MI). Segundo, la revisión de los programas de estudios (SEP, 2017; SEP, 2017a; SEP, 2011a; SEP, 2011b; SEP, 2011c; SEP, 2011d), determinó que el contenido matemático de la proporcionalidad se trabaja en el tema de Proporcionalidad y Funciones (P y F) perteneciente al eje de Manejo de la Información (MI), su estudio inicia en quinto grado, teniendo continuidad en sexto grado de la Educación Primaria. Así que el corpus del contenido son los libros de texto de quinto y sexto grados de la Educación Primaria, llamados *Desafíos Matemáticos*.

3.5. Unidades de análisis

En este trabajo de investigación, las unidades de análisis son aquellas con las cuales se analizará la información de los libros de texto, específicamente los desafíos matemáticos en los que se trabaja el contenido de proporcionalidad. Se considera a los organizadores curriculares del análisis de contenido como las unidades de análisis dado que estos permiten conocer los significados de un concepto matemático.

3.5.1. Estructura conceptual

En esta primera unidad de análisis se tiene como propósito determinar los conceptos y procedimientos implicados respecto al contenido matemático de proporcionalidad que se favorecen en la Educación Primaria, así como la interrelación que existe entre lo conceptual y procedimental.

3.5.2. Sistema de representación

La intención con esta segunda unidad de análisis es determinar las notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales que evoca el contenido matemático de proporcionalidad en los libros de texto, los cuales se relacionan con los conceptos y procedimientos de este contenido, también conlleva a vislumbrar características, propiedades, relaciones y usos de este mismo.

3.5.3. Fenomenología

Con esta tercera unidad de análisis se pretende conocer e identificar bajo qué situaciones se dota de sentido al concepto matemático de proporcionalidad para su tratamiento escolar. Dado que el análisis se realiza en libros de texto de la Educación Primaria se esperaría que para la enseñanza aprendizaje del concepto, se emplee situaciones en un sentido cotidiano que permita evidenciar su funcionalidad.

3.6. Localizar o inferir en el texto las unidades de información

Como se ha mencionado en el apartado 3.3 los desafíos matemáticos en los que se trabaja el contenido matemático de proporcionalidad son los grados quinto y sexto de la Educación Primaria en México. La revisión realizada sobre documentos oficiales fue con doble intención, la primera para identificar los contenidos que se deben trabajar respecto a la proporcionalidad, la organización de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados, mientras que la segunda intención para delimitar los desafíos matemáticos de los libros de texto para el maestro en los que se aborda el tema de interés (SEP, 2011e; SEP, 2011f). Con base en la revisión se determinó un total de 25 desafíos matemáticos para trabajar el contenido de proporcionalidad, de los cuales trece corresponden a quinto grado y doce a sexto grado. La información anterior se presenta en la tabla 2.

Tabla 2
Relación de los contenidos matemáticos de proporcionalidad y los desafíos matemáticos de los libros de texto para maestro.

Grado	Eje	Tema	Contenido	Bloque	No. desafío matemático	No. Consignas	No. problemas
5to	MI	P y F	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario).	I	17	1	2
					18	1	1
					19	1	1
			Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.	II	33	1	1
					34	1	1
					35	1	1
			Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del Factor constante).	III	55	1	4
					56	1	2
					57	1	9
			Relación del tanto por ciento con la expresión “n de cada 100”. Relación de 50%, 25%, 20%, 10% con las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ respectivamente.	V	93	1	2
					94	1	3
					95	1	1
					96	1	3
6to	MI	P y F	Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia “por cada 100, n”, aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base).	I	19	1	1
					20	2	1 y 1
			Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos	II	30	1	1
					31	1	2
					32	1	2

			sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100%.				
			Comparación de razones en casos simples.	III	49	1	4
					50	1	2
					51	1	2
			Comparación de razones del tipo "por cada *n*, *m*", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.	IV	71	1	2
					72	2	2 y 1
			Resolución de problemas de comparación de razones, con base en la equivalencia.	V	84	1	2
					85	1	3

3.7. Categorías de análisis

3.7.1. Categorías para la unidad de análisis estructura conceptual

En Fernández-Plaza (2016) se establece un sistema de categorías para dar cuenta de la estructura conceptual escolar de los conceptos matemáticos, para efectos de esta investigación se consideran únicamente el campo conceptual y procedimental (Véase tabla 3).

Tabla 3
Sistema de categorías para la unidad de análisis estructura conceptual.

Unidad de análisis	Campo	Categoría	Subcategoría
Estructura conceptual	Conceptual	Hechos	Términos
			Convenios
			Notaciones
			Resultados
		Conceptos	
		Estructuras	
	Procedimental	Destrezas	
		Razonamientos	
		Estrategias	

Campo conceptual, los conceptos son las ideas con las que se piensan, relacionan y organizan hechos. Es decir, se pueden entender como redes estructuradas de hechos, que, a su vez, se relacionan y organizan para dar lugar a las estructuras conceptuales (Rico, 2016; Fernández-Plaza, 2016).

Hechos, son el primer nivel de complejidad y son unidades de información que se deben memorizar, pueden ser arbitrarios y no estar conectados entre sí, además, constituyen un primer nivel básico de complejidad para analizar el ámbito conceptual de un contenido matemático determinado (Rico, 2016; Fernández-Plaza, 2016). El estudio de los hechos se hace mediante cuatro categorías de análisis, que consisten en: términos, notaciones, convenios y resultados, relacionados con un tema considerado. *Los términos* son los vocablos o palabras que se emplean para denominar los objetos, nociones, relaciones y operaciones. *Las notaciones* constituyen los símbolos mediante los cuales hacemos presentes los conceptos del tema y operaciones. *Los convenios* son acuerdos de uso frecuente, explícitos o tácitos. *Los resultados* son aquellas inferencias básicas que se derivan de los hechos conceptuales anteriores (Fernández-Plaza, 2016).

Conceptos, es el segundo nivel de complejidad para analizar el ámbito conceptual de un contenido matemático, se caracteriza por la abstracción y la generalización de los conceptos y por las relaciones entre ellos, se encuentran los conceptos y relaciones. Las relaciones se establecen entre conceptos, o los mismos, dando lugar a relaciones $n - arias$ (Fernández-Plaza, 2016).

Estructuras, son el tercer nivel de complejidad, surgen de la consideración de diversos conceptos, transformaciones y relaciones entre ellos y de las operaciones y propiedades que los vinculan, que eventualmente, pueden dar lugar a conceptos más complejos (Fernández-Plaza, 2016).

Campo procedimental, en este campo se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y el conocimiento que lo sustentan. Al igual que en el campo conceptual, se diferencian tres niveles de complejidad: las destrezas, los razonamientos y las estrategias (Fernández-Plaza, 2016).

Destrezas, este primer nivel de complejidad consiste en el procesamiento secuenciado de contenidos básicos, mediante el uso de convenios y manipulación de las nociones correspondientes (Fernández-Plaza, 2016).

Razonamientos, este segundo nivel de complejidad involucra el procesamiento de relaciones e inferencias lógicas entre conceptos. Se consideran cuatro tipos de fundamentales de razonamiento: lógico-deductivo, inductivo, analógico y figurativo (Fernández-Plaza, 2016).

Estrategias, en este tercer nivel de complejidad, involucran el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos vinculados con una o varias estructuras, para responder a una cuestión o problema (Fernández-Plaza, 2016).

3.7.2. Categorías para la Unidad de Análisis Sistemas de representación

Lupiáñez (2016) afirma que los diferentes sistemas de representación no solo permiten identificar diferentes facetas o relaciones de las nociones matemáticas, sino que evidencian diferentes significados de estos. En este sentido, se consideran las siguientes categorías (Véase tabla 4).

Tabla 4
Categorías para unidad de análisis sistemas de representación.

Unidad de análisis	Categorías
Sistemas de representación	Sistema de representación numérico
	Sistema de representación algebraico
	Sistema de representación gráfico
	Sistema de representación tabular
	Sistema de representación Figural – icónico

Sistema de representación numérica, en este sistema, la representación es un procedimiento, se pueden o no utilizar las calculadoras o computadores para representar el proceso de calcular ciertos valores a partir de la asignación de valores arbitrarios que estén definidos según la situación. En los procesos se emplean algoritmos matemáticos, por ejemplo, el de la multiplicación o división en los números reales, de la suma o resta, o aplicar la ley de los signos en la multiplicación, división, sustracción o adicción (Ospina, 2012; Duval, 2006).

Sistema de representación algebraica, en este sistema el concepto es representado por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular valores faltantes o la imagen $f(x)$ para toda x perteneciente al dominio válido de una situación; esta expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra que permite formular generalizaciones. Por ejemplo, en proporcionalidad se emplea la siguiente expresión: $f(x) = kx$ o $y = kx$ para proporcionalidad directa, y $y = \frac{k}{x}$ para proporcionalidad inversa de modo que es posible realizar procedimientos algebraicos al reemplazar la variable x con diversos valores arbitrarios (Ospina, 2012; Duval, 2006).

Sistema de representación gráfica, son de tipo figurativo que disponen de reglas de composición y convenios de interpretación. En general se refiere a la construcción y descomposición de una gráfica en un sistema coordenado x y y, la lectura de representaciones gráficas de los conceptos matemáticos permite deducir comportamientos a partir de las relaciones de los elementos involucrados; además, esta representación admite una interpretación global, ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica (Lupiáñez, 2016; Ospina, 2012; Duval, 2006).

Sistema de representación tabular, se emplea una tabla de valores en donde se pone en juego la relación de correspondencia entre variables. Los problemas permiten establecer una relación de proporcionalidad, es decir, las cantidades mantienen una relación de correspondencia que permiten establecer proporciones. La representación tabular posee una relación directa con el pensamiento numérico, puesto que a partir del contenido numérico de las tablas es posible establecer generalizaciones, además, es un apoyo visual que permite realizar operaciones para determinar los valores faltantes según el problema (Ospina, 2012; Duval, 2006).

Sistema de representación Figural-Icónico, engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento, en el caso de la proporcionalidad permite visualizar las propiedades que se conservan en un dibujo al ampliar a reducir sus medidas, además, con base en este sistema de representación es posible plantear de forma verbal razones o proporciones (Ospina, 2012; Duval, 2006).

3.7.3. Categorías para la Unidad de Análisis Fenomenología

Ruiz-Hidalgo (2016) afirma que las situaciones aportan sentido a los contenidos matemáticos en los textos escolares en que aparecen, identificando ámbitos de actividad y usos del concepto. Por lo anterior se consideran las siguientes categorías (Véase tabla 5).

Tabla 5
Categorías para unidad de análisis fenomenología.

Unidad de análisis	Vía para dar sentido al concepto	Categorías
Fenomenología	Situaciones	Personales
		Laborales
		Sociales
		Científicas

Situaciones personales, son aquellas donde los problemas se enfocan sobre actividades cotidianas, ya sea en primera persona o en su vida familiar. Ejemplos de esta situación es la preparación de comidas, los juegos, las compras, los deportes o la economía personal.

Situaciones laborales o escolares, son aquellas situaciones centradas en el mundo del trabajo. Incluyen acciones como medir, ordenar materiales de construcción, control de calidad, realizar inventarios, diseño, arquitectura entre otras.

Situaciones sociales, son aquellas que se refieren a la comunidad local, nacional o global, en las que se observa determinados aspectos del entorno. Se pueden incluir cuestiones como las relativas a los sistemas electorales, transporte público, políticas gubernamentales, problemas demográficos o publicidad, gestión de recursos, y otras.

Situaciones científicas, son aquellas que se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y responden a cuestiones relacionadas con la ciencia y la tecnología.

3.8. Codificación de los desafíos matemáticos

Para realizar el análisis de contenido, según Rico (2016), se consideran las unidades de análisis con sus respectivas categorías (previamente establecidas en los aparatados anteriores), para la codificación. Dicha codificación implica tener presentes las definiciones de las unidades de análisis, así como cada elemento que conforman las diferentes categorías, y con ello realizar el análisis sobre los desafíos matemáticos, tomando en cuenta la intencionalidad didáctica y las consideraciones previas. De modo, que a partir de las características propias de los problemas que conforman a cada desafío se identifican y reconocen los conceptos, procedimientos, formas de representar y dar sentido al contenido matemático de proporcionalidad en los libros de texto.

3.9. Interpretación de la codificación

Ahora bien, con base en la codificación realizada, se podrán determinar los significados asociados a la proporcionalidad que se favorecen en los libros de texto de la Educación Primaria de México, lo que permitirá dar respuesta a la pregunta de investigación planteada al inicio de la investigación. De modo que interesa construir mapas conceptuales, con el propósito de evidenciar los significados, puesto que ésta es una forma de sintetizar el análisis de la información.

Capítulo 4

Análisis de los libros de texto

En este capítulo se presenta la codificación de la información presentada en los libros de texto desafíos matemáticos, de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria en México en los que se aborda el contenido matemático proporcionalidad, es decir, se presenta la explotación de los datos, con base en las etapas del análisis de contenido descrito por Rico (2013).

4.1. Análisis de los problemas

El contenido a analizar está conformado por veinticinco desafíos matemáticos, de los cuales trece corresponden a quinto grado (catorce consignas que contienen treinta y un problemas) y doce desafíos matemáticos a sexto grado (catorce consignas que contienen 26 problemas). Para llevar a cabo el análisis de contenido sobre los problemas de los libros de texto desafíos matemáticos, se consideraron las unidades de análisis y sus respectivas categorías, mencionadas en el capítulo anterior.

4.1.1. Quinto grado

Desafío matemático 17. Botones y Camisas

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea dos problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las figuras 4 y 5.

Figura 4

Problema 1, desafio matemático 17, quinto grado.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

Camisas de adulto					
Cantidad de camisas	1	6	14	75	160
Cantidad de botones	15				

a) ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas?

b) ¿Cómo lo supieron?

Nota: Tomado de SEP (2011e)

Figura 5

Problema 2, desafío matemático 17, quinto grado.

2. Luisa utilizó 96 botones en ocho camisas para niño. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten la pregunta.

Camisas de niño					
Cantidad de camisas	1	8	10		200
Cantidad de botones		96		1440	

¿Qué puede hacer Luisa para saber cuántos botones se necesitan para 140 camisas de niño?

Nota: Tomado de SEP (2011e)

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *usar el valor unitario al resolver problemas de valor faltante*. De modo que, analizar en su conjunto a ambos problemas y el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 6).

Tabla 6

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 17, quinto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Suma. - Multiplicación. - División. - Igual. - Tercera parte de… - Valores faltantes. - Cantidades.
	Notaciones	- ×, ÷, +, = - 1, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 25, 75, 96, 140, 160, 200, 1440.
	Convenios	- Los problemas multiplicativos del tipo valor faltante son aquellos en los que se conocen tres datos y se busca un cuarto. - Valor unitario, es el que corresponde a una unidad o pieza.
	Resultados	- Resolver problemas multiplicativos es calcular los valores faltantes.
Conceptos		- Significado de la fracción parte todo. - Relaciones de proporcionalidad.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - El valor unitario explicito o implícito establece una relación de proporcionalidad entre las magnitudes heterogéneas mediante el empleo de razones y proporciones.
Campo procedimental		
Destrezas		- Calcular el valor unitario por medio de la multiplicación o división según los datos del problema.
Razonamientos		- Razonar que el valor unitario es un elemento invariante, que al dividirlo o multiplicarlo por cierta cantidad se obtienen otras cantidades.
Estrategias		- Resolver problemas de valor faltante empleando el valor unitario explícito o implícito.

- Sistemas de representación

Problema 1

En el primer problema se presenta una tabla con el nombre de *Camisas de adulto*. Las características que se identifican son: planteamiento de una tabla, las magnitudes y cantidades mantienen una relación de correspondencia, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder las preguntas planteadas. Por las características, se favorece el sistema de representación tabular.

Asimismo, el problema solicita lo siguiente: a) ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas? b) ¿Cómo lo supieron? Para dar respuesta a la pregunta y completar la tabla, se menciona en el apartado de consideraciones previas que es necesario realizar operaciones en términos numéricos, si 15 botones corresponden a una camisa, 15 botones por $6 = 90$ botones, y 15 botones por $14 = 210$ botones, etcétera, las operaciones de pueden realizar con o sin calculadora, permitiendo calcular valores faltantes de la tabla mediante el algoritmo de la multiplicación, al emplear el valor unitario se relacionan y comparan las magnitudes por medio de la razón y, generalizando en las demás cantidades, se establecen proporciones numéricas para identificar una cantidad fija e invariante que multiplica a las demás cantidades para obtener valores faltantes. Por las características antes descritas, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de cada magnitud en la tabla se determina que $y = 15x$ es la expresión algebraica que representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2
En este problema se presenta una tabla con el nombre de *Camisas de niño*. Las características que se observan en esta representación son: planteamiento de una tabla, las magnitudes y cantidades mantienen una relación de correspondencia, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder las preguntas planteadas. Por las características, se favorece el sistema de representación tabular.

La pregunta del problema, además, solicita lo siguiente: ¿Qué puede hacer Luisa para saber cuántos botones se necesitan para 140 camisas de niño? Para dar respuesta a la pregunta y completar la tabla, se menciona en el apartado de consideraciones previas que se determina el valor unitario realizando la división $\frac{96}{8} = 12$ luego multiplicar $140 \times 12 = 1680, 10 \times 12 = 120, 200 \times 12 = 2400$ y dividir $\frac{1440}{12} = 120$, el procedimiento a seguir y las operaciones permiten calcular valores faltantes de la tabla, se emplea del algoritmo de la multiplicación y la división, al emplear el valor unitario explícito o implícito se relacionan y comparan las magnitudes por medio de la razón y, generalizando en las demás cantidades, se establecen proporciones numéricas para identificar una cantidad fija e invariante que multiplica o divide a las demás cantidades para obtener valores faltantes. Por las características se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de cada magnitud en la tabla se determina que $y = 12x$ es la expresión algebraica que representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y como elemento a considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

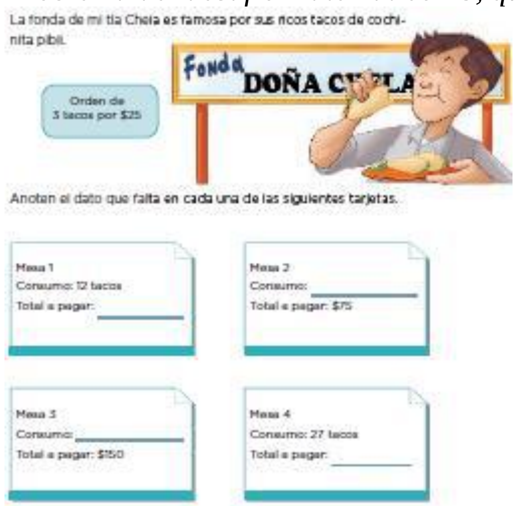
Como se ha mencionado la consigna consta de dos problemas. El problema 1 menciona que “Luisa trabaja en una fábrica de camisas…”, el segundo problema continua en el contexto de elaborar camisas al mencionar “Luisa utilizó 96 botones en ocho camisas para niño…”. Dado que los problemas explicitan que “*Luisa trabaja...*” y se enmarca en una fábrica, el problema 1 y 2 corresponden a una situación laboral.

Desafío matemático 18. La fonda de la tía Chela

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 6.

Figura 6

Problema del desafío matemático 18, quinto grado.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *usar factores internos, es decir, dobles, triples, etcétera, al resolver problemas de valor faltante*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 7).

Tabla 7

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 18, quinto grado.

Campo conceptual			
Hechos	Términos	- Multiplicación. - Factores. - Igual.	- Valores faltantes. - Múltiplos, el triple de, el cuádruple de, etc.

	Notaciones	- ×, = - 3, 12, 25, 27, 75, 150.
	Convenios	- Valor unitario, es el que corresponde a una unidad o pieza.
	Resultados	- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple, etc.
Conceptos		- Proporción, igualdad entre dos razones. - Factor interno, relación multiplicativa entre dos cantidades de la misma magnitud.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativa. - Aditiva. *Relaciones de proporcionalidad* - La relación de proporcionalidad entre las cantidades se establece a partir de las relaciones de múltiplo que existen entre éstas, que permite calcular valores faltantes.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identificar en un problema de valor faltante qué si la cantidad de una magnitud se triplica, (por regla de correspondencia) la cantidad de la otra magnitud también se triplica. - Identificar en un problema de valor faltante la relación de doble, triple, cuádruple que existe entre las cantidades de una misma magnitud.
Razonamientos		- Deducir que factor interno al ser entero los valores faltantes serán múltiplos del valor unitario.
Estrategias		- Resolver problemas valor faltante empleando el factor interno.

- Sistemas de representación

El problema se sitúa en una fonda en el que se debe determinar el dato que falta en cuatro tarjetas, la intención es usar el concepto de factor interno en una situación. Para ello, se requiere que a partir de las figuras o dibujos de las tarjetas y de la información que éstas contienen se realicen las operaciones que implica el factor interno para determinar el precio a pagar por la cantidad de tacos que se consumen, por lo anterior el sistema de representación que se favorece es la figural – icónico.

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas, para conocer el precio de 12 tacos hay que identificar la relación existente entre 3 tacos y 12 tacos, además, considérese que la orden de tres tacos cuesta $25 pesos, en este sentido la relación entre los precios debe ser la misma que entre las cantidades de tacos; es decir, 12 es cuatro veces 3, para conservar la misma proporción o relación que en las cantidades de tacos, $25 se multiplica por 4 para obtener $100, siendo el precio a pagar por 12 tacos; en estas relaciones se observa que 4 es el factor interno de 3 y 12, y de 25 y 100. De igual manera, para conocer cuántos tacos se consumieron con $75, se puede considerar que esa cantidad es tres veces $25 y aplicar el mismo factor a tres tacos. En esta resolución se emplea la multiplicación con su respectivo algoritmo, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora, se establece proporciones en términos numéricos. Por las características del problema se favorece el sistema de representación numérico.

- Fenomenología

Las tarjetas indican el consumo de tacos por los comensales en una fonda, centrándose en venta de comida. Como parte de sus labores, para cobrar, requieren calcular el precio a pagar por los clientes o con base en la cantidad de tacos consumidos, por lo que el problema representa una situación laboral.

Desafío matemático 19. ¿Qué pesa más?

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 7.

Figura 7

Problema del desafío matemático 19, quinto grado.

El dueño de la tienda de abarrotes del pueblo está haciendo una tabla para saber rápidamente el peso de uno o varios costales que contienen azúcar, trigo o maíz palomero. Ayúdenle a completarla y después contesten la pregunta.

	Cantidad de kilogramos de...		
Cantidad de costales	Azúcar	Trigo	Maíz palomero
1	21		
	63		78
5		170	
	420		

¿Qué pesa más: cuatro costales de maíz palomero, cinco costales de azúcar o tres costales de trigo?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *usar el valor unitario explícito o implícito al resolver problemas de valor faltante*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 8).

Tabla 8

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 19, quinto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Multiplicación. - Factores. - Igual. - Valores conocidos. - Valores faltantes. - Múltiplos
	Notaciones	- ×, = - 3, 12, 25, 27, 75, 150.
	Convenios	- Valor unitario explícito, es el que se da como dato del problema. - Valor unitario implícito, es el que no aparece como dato del problema, pero se puede calcular.
	Resultados	- El factor interno al ser entero, los valores faltantes serán múltiplos del valor unitario.
Conceptos		- La razón interna, es la relación multiplicativa que se establece entre dos datos de un mismo conjunto de cantidades. Por ejemplo, 63 kg es el triple de 21 kg. La razón o el factor interno entre 21 y 63 kg es 3.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - El valor unitario establece una relación de proporcionalidad entre las magnitudes mediante el empleo de razones y proporciones, además el factor interno, emplea las proporciones entre las cantidades de una misma magnitud.
Campo procedimental		
Destrezas		- Calcular el valor unitario por medio de la multiplicación o división según los datos del problema. - Identificar en un problema de valor faltante la relación de doble, triple, cuádruple que existe entre las cantidades de una misma magnitud.
Razonamientos		- Deducir que el valor unitario es un elemento invariante que divide o multiplica a las cantidades, según sea el caso, para calcular los valores faltantes.
Estrategias		- Resolver problemas de valor faltante empleando el valor unitario y el factor interno.

- Sistemas de representación

En el problema se presenta una tabla que relaciona la cantidad de costales y cantidad en kilogramos, las características que se presentan son: las magnitudes y cantidades están ordenadas en una tabla; existen tres relaciones de correspondencia (cantidad de costales - cantidad de kilogramos de azúcar, cantidad de costales - cantidad de kilogramos de trigo, cantidad de costales - cantidad de kilogramos de maíz palomero); la tabla es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder las preguntas planteadas. Por las características del problema, se favorece el sistema de representación tabular.

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas, para completar la tabla se emplea el valor unitario y el factor interno, lo implica el uso de la multiplicación y división para ambos conceptos. El empleo de dichas operaciones matemáticas implica usar sus respectivos algoritmos, apoyándose o no de la calculadora, en el empleo del factor interno se determina un valor numérico entre las cantidades de una misma magnitud y con el valor unitario se emplea la razón para establecer una relación en términos numéricos que justamente permita mediante la multiplicación o división, según sea el caso, calcular valores faltantes. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades y magnitud de cada relación de correspondencia en la tabla, se determina que $y = 21x, y = 34x, y = 26x$ son las expresiones algebraicas que se representan en el problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

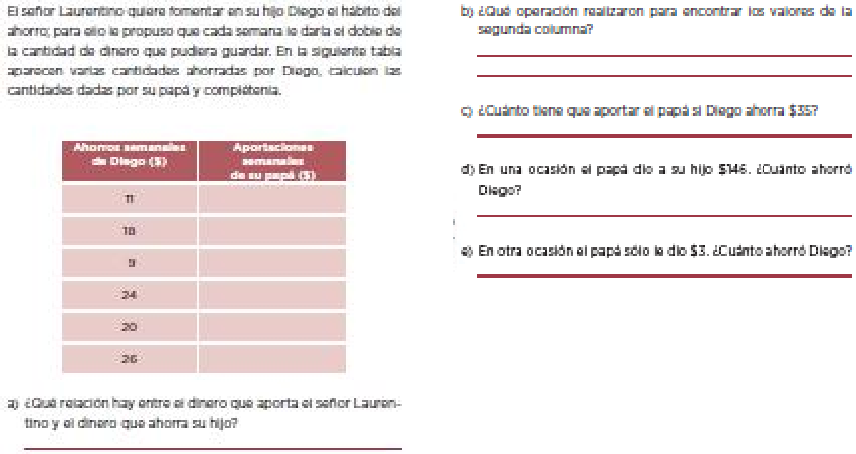
El problema se contextualiza en una tienda de abarrotes, como parte de su labor, el dueño lleva una relación para saber el peso de varios costales de tres productos diferentes. En este sentido el problema corresponde a una situación laboral.

Desafío matemático 33. El Ahorro

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 8.

Figura 8

Problema del desafío matemático 33, quinto grado.



El señor Laurentino quiere fomentar en su hijo Diego el hábito del ahorro; para ello le propuso que cada semana le daría el doble de la cantidad de dinero que pudiera guardar. En la siguiente tabla aparecen varias cantidades ahorradas por Diego, calculen las cantidades dadas por su papá y complétenla.

Ahorros semanales de Diego ($)	Aportaciones semanales de su papá ($)
11	
18	
9	
24	
20	
26	

a) ¿Qué relación hay entre el dinero que aporta el señor Laurentino y el dinero que ahorra su hijo?

b) ¿Qué operación realizaron para encontrar los valores de la segunda columna?

c) ¿Cuánto tiene que aportar el papá si Diego ahorra $35?

d) En una ocasión el papá dio a su hijo $146. ¿Cuánto ahorró Diego?

e) En otra ocasión el papá sólo le dio $3. ¿Cuánto ahorró Diego?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *aplicar un factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) para obtener valores faltantes en una relación de proporcionalidad con magnitudes de la misma naturaleza*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, y tomando en cuenta lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 9).

Tabla 9

Campo Conceptual y Procedimental del Desafío Matemático 33, Quinto Grado.

<table>
<tr><th colspan="4">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Multiplicación.
- Factores.
- Igual.</td><td>- Valores conocidos.
- Valores faltantes.
- Múltiplos.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td colspan="2">- +, ×, ÷, =
- 11, 18, 9, 24, 20, 26.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td colspan="2">- La suma reiterada de un número se expresa como una multiplicación.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td colspan="2">- El elemento invariante que se establece entre las cantidades de las magnitudes permite calcular valores faltantes.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td colspan="2">- Definición de factor constante de proporcionalidad, en el problema, se presenta como “el padre dará el doble de la cantidad que ahorre el hijo”.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td colspan="2">Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.</td></tr>
</table>

		- Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - Establecer razones y proporciones entre las magnitudes homogéneas para identificar el factor constante de proporcionalidad.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identificar y reconocer en un lenguaje verbal escrito el factor constante de proporcionalidad y entre las magnitudes homogéneas de un problema apoyándose de la razón y la proporción.
Razonamientos		- Razonamiento numérico al generalizar que el elemento invariante al multiplicarse o dividir cierta cantidad de una magnitud se obtiene su correspondiente en la otra cantidad.
Estrategias		- Resolver problemas aplicando el factor constante de proporcionalidad para obtener los valores faltantes que se solicitan.

- Sistemas de representación

En el problema se presenta una tabla en la que se relacionan Ahorros semanales de Diego ($) y Aportaciones semanales de su papá ($). Las características de esta representación son: se presenta la información en una tabla, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes ahorros semanales de Diego ($) y aportaciones semanales de su papá ($), es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder las preguntas planteadas. Por las características del problema, se favorece el sistema de representación tabular.

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas, la primera pregunta tiene la intención de identificar la relación multiplicativa de doble que existe entre las magnitudes, esto considerando que $11 \times 2 = 22, 18 \times 2 = 36, 9 \times 2 = 18, 24 \times 2 = 48, etc.$ A partir de identificar este factor multiplicativo se pretende sea empleado para determinar la cantidad que aportará el señor Laurentino según la cantidad ahorrada por Diego, lo anterior se realiza aplicando el algoritmo de la multiplicación. Una vez determinada la cantidad que ahorro Diego y conociendo la cantidad que aportó el señor Laurentino se considera el mismo factor, pero realizando una división $146 \div 2 = 73, 3 \div 2 = 1.5$ para saber la cantidad ahorrada por Diego. A partir de estas ideas de proceder y considerando el empleo de los algoritmos de la multiplicación y la división, así como identificar el factor constante de proporcionalidad en términos numéricos en la operación de la multiplicación y de la división, se concluye que se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de la tabla se determina que $y = 2x$

es la expresión algebraica que representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

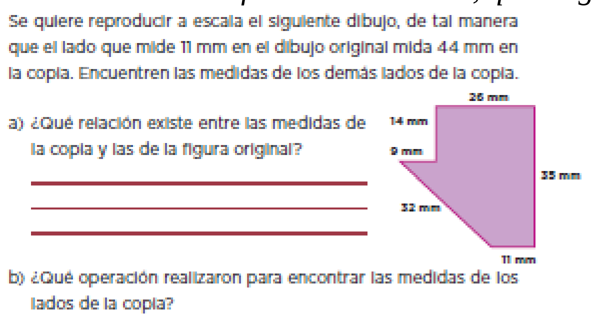
El problema hace referencia a una actividad cotidiana y de economía personal, en este caso se refiere al ahorro de cada semana, lo que corresponde a una situación personal, pues se caracterizan por enfocarse sobre actividades cotidianas que suelen presentarse, ya sea en lo personal o en lo familiar.

Desafío Matemático 34. Factor Constante

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 9.

Figura 9

Problema del desafío matemático 34, quinto grado.


Se quiere reproducir a escala el siguiente dibujo, de tal manera que el lado que mide 11 mm en el dibujo original mida 44 mm en la copia. Encuentren las medidas de los demás lados de la copia.

a) ¿Qué relación existe entre las medidas de la copia y las de la figura original?

b) ¿Qué operación realizaron para encontrar las medidas de los lados de la copia?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *identificar y aplicar el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) para obtener valores faltantes*. De modo que el analizar el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el citado desafío matemático (Véase tabla 10).

Tabla 10

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 34, quinto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Multiplicación. - Factores. - Igual. - Valores conocidos. - Valores faltantes.
	Notaciones	- ×, = - 9, 11, 14, 26, 32, 35, 44.
	Convenios	- Al aumentar las medidas del dibujo a la misma proporción, se garantiza se conserve la forma del dibujo original.

	Resultados	- En situaciones de aumento de las dimensiones de un dibujo, el factor constante de proporcionalidad permite conservar la forma de los dibujos. En estas situaciones, el factor constante de proporcionalidad se conoce como factor de ampliación.
Conceptos		- Factor constante de proporcionalidad.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - Establecer proporciones entre las magnitudes homogéneas para identificar el factor constante de proporcionalidad. *Ordinalidad de los números naturales* - *Orden de los números naturales, siguiente y antecedente.* - *Secuencia numérica en tabla.*
Campo procedimental		
Destrezas		- Calcular las medidas de la nueva figura con el factor constante de proporcionalidad.
Razonamientos		- Razonamiento numérico al generalizar que el elemento invariante al multiplicarse o dividir cierta cantidad de una magnitud se obtiene su correspondiente en la otra cantidad.
Estrategias		- Resolver problemas aplicando el factor constante de proporcionalidad para aumentar las medidas de dibujos.

- Sistemas de representación

Dado que el problema refiere a un dibujo, esta representación pertenece al sistema de representación Figural – Icónico, entendiéndolo como aquel que engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., permitiendo entender y visualizar las propiedades del concepto.

En el aparatado de consideraciones previas se menciona el uso de una tabla (Véase figura 10) en la que se relacionan medidas de los lados de la figura original (mm) y medidas de los lados de la copia (mm). Las características de esta representación son: se presenta en una tabla para ordenar las cantidades de ambas magnitudes de menor a mayor, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes medidas de los lados de la figura original (mm) y medidas de los lados de la copia (mm), es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder las preguntas planteadas. Por las características, se favorece también el sistema de representación tabular.

Figura 10

Medidas de la figura ordenadas en tabla

Medidas de los lados de la figura original (mm)	Medidas de los lados de la copia (mm)
9	
11	44
14	
26	
32	
35	

Nota: Tomado de SEP (2011e).

En el apartado de consideraciones previas se menciona que el problema proporciona de manera implícita el factor constante de proporcionalidad, bajo esta idea, la intención es identificar que el factor multiplicativo entre las cantidades 11 y 44 es 4. De modo que los valores faltantes se calculan de la siguiente manera: $9 \times 4 = 36, 14 \times 4 = 56, 26 \times 4 = 104, 32 \times 4 = 128, 35 \times 4 = 140$. Las operaciones anteriores se pueden calcular con o sin el empleo de la calculadora utilizando el algoritmo de la multiplicación, en las multiplicaciones se identifica un valor numérico fijo y constante que justamente multiplica a las cantidades conocidas para obtener los valores faltantes. Con base en estas características se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no se considera como parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de la tabla se determina que $y = 4x$ es la expresión algebraica que representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

El problema emplea la noción de escala para ampliar un dibujo, haciendo uso del factor constante de proporcionalidad, para que las demás medidas aumenten en la misma proporción y no pierda su forma, el problema se refiere a la acción de diseño, la cual corresponde a una situación laboral o escolar.

Desafío matemático 35. Tablas de proporcionalidad

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema que presenta tres tablas, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 11.

Figura 11

Problema del Desafío Matemático 35, Quinto Grado.

Individualmente, analiza la relación que hay entre los valores de las dos columnas en cada tabla. Determina en cada caso cuál es el número que debes multiplicar por los valores de la columna de la izquierda para obtener los valores de la columna de la derecha. Escríbelo debajo de cada tabla.

1	
6	30
9	45
2	10
10	50
12	60

2	
17	136
15	120
5	40
12	96
9	72

3	
7	84
15	180
8	96
3	36
11	132

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *identificar el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) en una tabla con dos conjuntos de valores que son proporcionales.* De modo que el analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 11).

Tabla 11

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 35, quinto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Multiplicación.
- Factores.
- Igual.
- Valores conocidos.
- Valores faltantes.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- ×, =
- 6, 30, 9, 45, 2, 10, 10, 50, 12, 60, 17, 136, 15, 120, 5, 40, 12, 96, 9, 72, 7, 84, 15, 180, 8, 96, 3, 36, 11, 132.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- En una relación de proporcionalidad directa el factor multiplicativo se llama factor constante de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- El factor constante de proporcionalidad es un valor que se conserva en los demás pares de cantidades de las magnitudes.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Factor constante de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.</td></tr>
</table>

		Relaciones de proporcionalidad - Establecer proporciones numéricas entre las magnitudes heterogéneas para identificar el factor constante de proporcionalidad.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identificar el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) en una tabla con dos conjuntos de valores que son proporcionales.
Razonamientos		- Numérico, a partir de los valores numéricos en tabla, se establece y valida el factor constante de proporcionalidad.
Estrategias		- La intención del desafío es identificar el factor constante de proporcionalidad.

- Sistemas de representación

En el problema se presentan tres tablas. Las características de dichas tablas son: se presentan de manera ordenada las cantidades de ciertas magnitudes, en las que existe una relación de correspondencia en cada una ellas, es un referente y un apoyo para determinar el número por el cual se debe multiplicar las cantidades del lado izquierdo para obtener las cantidades del lado derecho. Por las características descritas, se favorece el sistema de representación tabular.

De acuerdo con lo presentado en las consideraciones previas, para verificar que el factor constante de proporcionalidad de cada tabla se cumple en las demás cantidades es necesario establecer relaciones multiplicativas, para la primera tabla se plantea: $6 \times 5 = 30, 9 \times 5 = 45, 2 \times 5 = 10, 10 \times 5 = 50, 12 \times 5 = 60$; para la segunda tabla: $17 \times 8 = 136, 15 \times 8 = 120, 5 \times 8 = 40, 12 \times 8 = 96, 9 \times 8 = 72$; y para la tercera tabla: $7 \times 12 = 84, 15 \times 12 = 180, 8 \times 12 = 96, 2 \times 12 = 36, 11 \times 12 = 132$. Las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora y se emplea el algoritmo de la multiplicación, en las multiplicaciones se identifica un valor numérico fijo y constante que involucra la noción de razón, proporción y factor constante de proporcionalidad. Por las características, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de cada tabla se determina que $y = 5x$ para la tabla 1, $y = 8x$ para la tabla 2, y $y = 12x$ para la tabla 3. Siendo estas las expresiones algebraicas que se representan en el problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

El problema plantea tres tablas, la intención es identificar el factor constante de proporcionalidad que existe en cada una de ellas. El problema no se plantea sobre alguna situación en particular, además, las magnitudes no están contextualizadas y no aluden a unidades como peso, kilogramo, metros, horas, etc. En este sentido el problema no tiene elementos suficientes para relacionarlo con algún tipo de situación.

Desafío matemático 55. Un valor intermedio

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea cuatro problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las Figuras 12, 13, 14 y 15.

Figura 12

Problema 1 del desafío matemático 55, quinto grado

1. Si por 4 lápices se pagaron $12, ¿cuánto habría que pagar por 6 lápices?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 13

Problema 2 del desafío matemático 55, quinto grado

2. Si 4 bolígrafos cuestan $36, ¿cuánto se tendrá que pagar por 16 bolígrafos?

Nota: Tomado de SEP (2011e)

Figura 14

Problema 3 del desafío matemático 55, quinto grado.

3. Si 3 paquetes de galletas cuestan $25, ¿cuánto costarán 6 paquetes?

¿Y cuánto 9 paquetes?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 15

Problema 4 del desafío matemático 55, quinto grado.

4. Si por 3 chocolates se pagan $5, ¿cuántos chocolates se pueden comprar con $15?

a) ¿Cuánto se tendría que pagar por 12 chocolates?

b) ¿Y cuánto por 18 chocolates?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene la intencionalidad didáctica de *resolver problemas de valor faltante utilizando dobles, triples, etcétera, un valor intermedio o la suma de parejas de valores correspondientes ante la ausencia del valor unitario*. De modo que, al analizar en su conjunto los cuatro problemas, junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 12).

Tabla 12

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 55, quinto grado.

<table>
<tr><th colspan="4">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Multiplicación.
- Mitad.
- Suma.
- Factor.</td><td>- Igual.
- Datos conocidos.
- Valor faltante.
- Múltiplos.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td colspan="2">- +, ÷, ×, =
- 4, 12, 6, 36, 16, 3, 25, 9, 15, 5, 18.</td></tr>
</table>

	Convenios	- Valor unitario, es el que corresponde a una unidad o pieza. - Valor intermedio se obtiene como la suma de parejas de valores correspondientes.
	Resultados	- El valor intermedio se sustenta en la composición aditiva de números.
Conceptos		- Factor constante de proporcionalidad.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - Se establece razones y proporciones numéricas entre magnitudes heterogéneas que determinan un valor invariante llamado factor constante de proporcionalidad que son elementos propios de una relación de proporcionalidad.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identificar el valor unitario en los problemas. - Reconocer que los problemas se resuelven al sumar parejas de valores correspondientes. - Identifica el factor interno entre las cantidades de cada magnitud.
Razonamientos		- Numérico, a partir de los valores numéricos en tabla, se establece y valida el factor constante de proporcionalidad.
Estrategias		- Resuelve problemas de valor faltante usando valores intermedios. - Resuelve problemas de valor faltante empleando el valor unitario. - Resuelve problemas de valor faltante usando el factor interno.

- Sistemas de representación

Problema 1

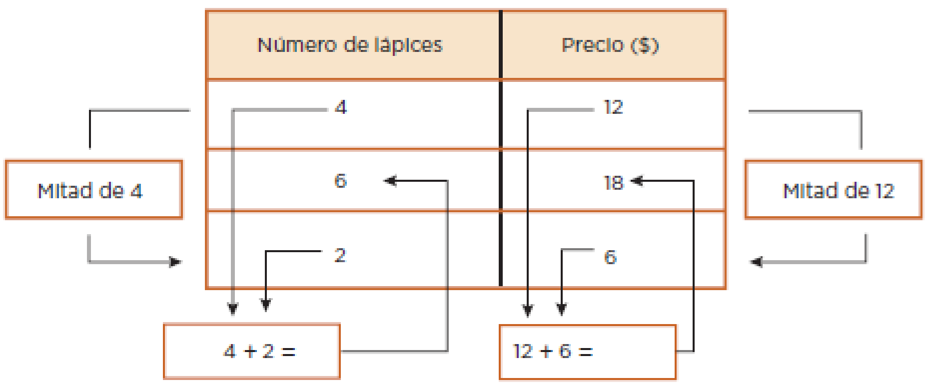
En el apartado de consideraciones previas se mencionan dos formas de proceder, una numérica y la otra tabular, para resolver el problema.

Para la estrategia numérica: una opción consiste en reconocer la estructura del problema y recurrir al uso del valor unitario, esto es, identificar que un lápiz cuesta $3 pesos y depués multiplicar $3 por 6 lápices para obtener el costo. Y otra opción es emplear un valor intermedio, el cual consiste en primer momento, determinar el costo de dos lápices, para ello, se divide entre dos tanto la cantidad de 4 lápices como el precio de los 4 lápices, es decir, $\$12 \div 2 = \$6$. En un segundo momento, se suman las cantidades de 2 y 4 lápices ($2 + 4 = 6\ lápices$) y sus respectivos precios ($\$6 + \$12 = \$18$). Se concluye que por 6 lápices se tiene que pagar $18. En ambas estrategias de resolución se realizan operaciones básicas como la multiplicación, la división y la suma, lo que implica el uso de sus respectivos algoritmos ya sea con o sin calculadora, existe una relación de correspondencia entre números, las operaciones se realizan considerando los valores numéricos del problema. Por lo tanto, se favorece el sistema de representación numérico.

En el caso de la segunda estrategia se sugiere el empleo de una tabla (Véase figura 16). Las características de esta representación son: permite visualizar el concepto de valor intermedio, presenta en orden las cantidades de las magnitudes del problema, existe una relación de correspondencia entre el número de lápices y su precio ($), lo que es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan responder la pregunta planteada. Con base en las características, se favorece el sistema de representación tabular.

Figura 16

Cálculo del valor intermedio empleando operaciones básicas.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

Problema 2

En el apartado de consideraciones previas se menciona que para este problema se tienen dos estrategias de resolución. La primera, consiste en calcular el precio de un bolígrafo y después multiplicarlo por dieciséis. La segunda, resulta más fácil calcular el cuádruple del precio, ya que se trata del cuádruple de bolígrafos, según lo solicitado en el problema. En ambas estrategias de resolución se realizan operaciones básicas como la multiplicación, lo que implica el uso de su respectivo algoritmo ya sea usar o no calculadora y, se establecen proporciones en términos numéricos entre las magnitudes para el empleo del valor unitario de manera se identifique un elemento invariante multiplicativo o para emplear el factor interno entre las cantidades de la misma magnitud, por lo tanto, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 3

De acuerdo con las consideraciones previas en este problema no resulta fácil manejar el costo unitario, así que seguramente recurrirá a otro procedimiento. El cual se describe de la siguiente manera: Si por tres paquetes de galletas se pagan $25 pesos, por el doble de paquetes se pagará el doble de dinero, etcétera. Bajo esta idea de resolución, destaca el empleo de la noción de múltiplos que permite determinar el factor interno en términos numéricos, en este sentido se emplea elementos de la multiplicación, así como su respectivo algoritmo ya sea con o sin calculadora. Por lo tanto, en este problema se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 4

En el apartado de consideraciones previas se menciona que este problema no resulta fácil de manejar el costo unitario, así que se propone una resolución similar al problema 3. El cual se describe de la siguiente manera: Si por tres chocolates se pagan $5, al pagar el triple ($15) se tendrá que recibir también el triple de chocolates. Para saber cuánto se paga por 12 y por 18 chocolates, basta con multiplicar 4 y 6 respectivamente por el precio de tres chocolates, obteniendo como resultados $20 y $30. En esta resolución, se destaca la noción de múltiplos, que permite determinar el factor interno en términos numéricos, bajo esta idea, se emplea elementos de la multiplicación, así como su respectivo algoritmo ya sea usando o no calculadora. Por lo tanto, en este problema se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean cuatro problemas, el análisis de cada uno evidenció que corresponden a situaciones personales, ya que se enfocan a actividades del quehacer diario pues involucra situaciones como la compra de lápices, bolígrafos, galletas y chocolates en los que se emplea el concepto de proporcionalidad.

Desafío Matemático 56. Ahorro compartido

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea dos problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Los cuales se presentan en las Figuras 17 y 18.

Figura 17

Problema 1 del desafío matemático 56, quinto grado.

1. Miguel trabaja en Estados Unidos. Por cada 10 dólares que gana envía seis a su familia, que vive en el estado de Guerrero. La semana pasada ganó 300 dólares. ¿Cuánto enviará a su familia?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 18

Problema 2 del desafío matemático 56, quinto grado

2. Luisa trabaja en Monterrey. De cada $5 que gana ahorra $3, y de cada $12 que ahorra manda $7 a su mamá, que vive en Oaxaca. La semana pasada ganó $1000. ¿Cuánto le enviará a su mamá?

Nota: Tomado se SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *usar reglas sucesivas de correspondencia del tipo "por cada n, m", al resolver problemas de proporcionalidad en los que no se da el valor unitario*. De modo que, analizar en su conjunto ambos problemas junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en este desafío (Véase tabla 13).

Tabla 13

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 56, quinto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Multiplicación. - Mitad. - Suma. - Factor - Igual. - Datos conocidos. - Valor faltante. - Múltiplos.
	Notaciones	- +, −, ×, = - 10, 6, 300, 5, 3, 12, 7, 1000. - Por cada n, m.
	Convenios	- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple…, etc.
	Resultados	- El valor intermedio se sustenta en la composición aditiva de números.
Conceptos		- Factor constante de proporcionalidad.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - La relación de proporcionalidad entre las cantidades se establece a partir de las relaciones de múltiplo que existen entre éstas, esto se refiere a que aumenta al doble una cantidad, su correspondiente cantidad aumenta al doble.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identifica la relación de correspondencia del tipo por cada n, m entre las magnitudes.
Razonamientos		- Numérico, a partir de los valores numéricos en tabla, se establece y valida el factor constante de proporcionalidad.
Estrategias		- Resolver problemas de valor faltante en los que no se da el valor unitario por medio de reglas sucesivas de correspondencia de tipo “por cada n, m”

- Sistemas de representación

Problema 1

De acuerdo con lo descrito en las consideraciones previas una manera abreviada de resolver el problema consiste en pensar que, si a 10 le corresponde 6, a 100 le corresponde 10 veces 6, es decir, 60, y a 300, tres veces 60, es decir, 180. Esta forma de resolución se basa en el empleo de múltiplos el cual se fundamenta en las estructuras multiplicativas de los números naturales, lo que implica el uso de manera implícita del algoritmo de la multiplicación, como se menciona en la estrategia es hacer innecesario el uso de la calculadora incluso el escribir las operaciones. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = \frac{3}{4}x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2

En el apartado de consideraciones previas se menciona que este problema es diferente al primero en tanto que no contiene una sino dos reglas de correspondencia; en la primera se relacionan salario y ahorro, y en la segunda ahorro y envío; el ahorro corresponde a las dos reglas. Una forma de iniciar la resolución del problema es identificar y resolver la primera relación de proporcionalidad; es decir, si de cada \$5 que gana ahorra \$3, ¿cuánto logró ahorrar si ganó \$1 000? Dado que el valor unitario es fraccionario, es muy probable que se empleen otros valores intermedios; por ejemplo, multiplicar por 20 el par de valores correspondientes ($\$5 \times 20 = \$100$ ganados y $\$3 \times 20 = \$60$ ahorrados) y los resultados multiplicarlos por 10 ($\$100 \times 10 = \$1000$ ganados y $\$60 \times 10 = 600$ ahorrados). Así, de los \$1 000 que ganó Luisa, ahorró \$600.

Con base en lo anterior, se puede establecer una segunda relación: si de cada \$12 que ahorra, manda \$7, ¿cuántos mandará si ahorró \$600? Para llegar a la solución se puede aplicar el factor de 50, $\$12 \times 50 = \$600$ ahorrados, $\$7 \times 50 = \$350$ que manda. Dadas las relaciones y valores del problema, Luisa mandará a su mamá \$350. En conclusión, por el solo empleo de la noción de múltiplo, implica el uso de relaciones multiplicativas en términos numéricos, operaciones multiplicativas y su respectivo algoritmo, por lo tanto, se favorece el sistema de representación numérico.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de la doble relación de correspondencia se determina que la primera relación se modela por la expresión $y = \frac{3}{5}x$ donde x representa la cantidad ganada en pesos y y representa la cantidad ahorrada en pesos, y para la segunda relación se modela por la expresión $y = \frac{7}{12}x$ donde x representa la cantidad ahorrada en pesos y y la cantidad enviada a la mamá. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

Problema 1

En el problema hace explícito que Miguel *"trabaja"* en Estados Unidos, en donde por cierta cantidad ganada envía una parte a su estado de origen. Bajo esta referencia este problema, corresponde a una situación laboral.

Problema 2

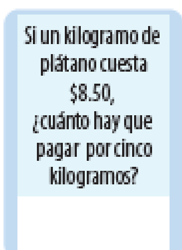
El segundo problema hace explicito que Luisa *"trabaja"* en Monterrey. Siendo esta una situación laboral.

Desafío matemático 57. Más problemas

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea nueve problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las Figuras 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 y 27.

Figura 19

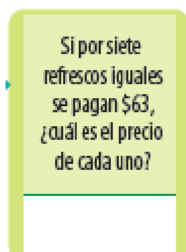
Problema 1 del desafío matemático 57, quinto grado.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 20

Problema 2 del desafío matemático 57, quinto grado.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 21

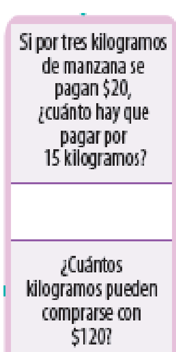
Problema 3 del desafío matemático 57, quinto grado.

Cajas	Libros
3	24
6	
	72
12	

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 22

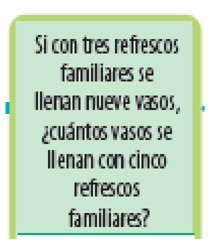
Problema 4 del desafío matemático 57, quinto grado.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 23

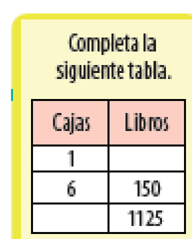
Problema 5 del desafío matemático 57, quinto grado.



Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 24

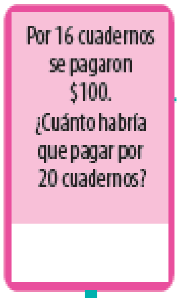
Problema 6 del desafío matemático 57, quinto grado.



Cajas	Libros
1	
6	150
	1125

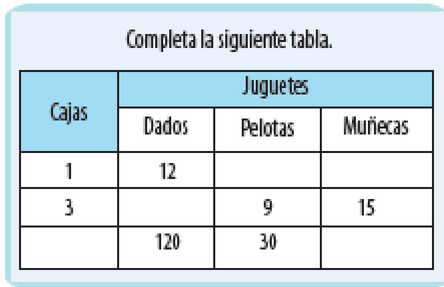
Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 25
Problema 7 del desafío matemático 57, quinto grado


Por 16 cuadernos se pagaron $100. ¿Cuánto habría que pagar por 20 cuadernos?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

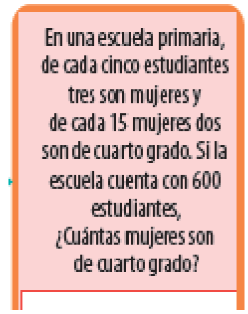
Figura 26
Problema 8 del desafío matemático 57, quinto grado


Completa la siguiente tabla.

Cajas	Juguetes		
	Dados	Pelotas	Muñecas
1	12		
3		9	15
	120	30	

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 27
Problema 9 del desafío matemático 57, quinto grado


En una escuela primaria, de cada cinco estudiantes tres son mujeres y de cada 15 mujeres dos son de cuarto grado. Si la escuela cuenta con 600 estudiantes, ¿Cuántas mujeres son de cuarto grado?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *ejercitar la resolución de problemas en los que se requiere calcular un valor intermedio (en particular, el valor unitario) y otras combinaciones (dobles, triples, sumar término a término)*. De modo que, analizar en su conjunto los problemas, junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en este desafío (Véase tabla 14).

Tabla 14
Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 57, quinto grado.

Campo conceptual			
Hechos	Términos	- Multiplicación. - Mitad. - Suma. - Factor	- Igual. - Datos conocidos. - Valor faltante. - Múltiplos.
	Notaciones	- $+, -, \times, \div, =$. - 10, 6, 300, 5, 3, 12, 7, 1000. - Por cada n, m.	
	Convenios	- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple…, etc. - Valor unitario explícito e implícito.	
	Resultados	- El valor intermedio se sustenta en la composición aditiva de números. - Resolver problemas multiplicativos es calcular los valores faltantes.	

Conceptos		- Factor constante de proporcionalidad.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - Los problemas permiten establecer razones, proporciones y factores constantes de proporcionalidad, así como el empleo de valor unitario, factor interno y valor intermedio, los cuales son propios de problemas en las cuales existe una relación de proporcionalidad.
Campo procedimental		
Destrezas		- Identifica el valor unitario en problemas de valor faltante. - Identifica el factor interno en problemas de valor faltante. - Reconoce el valor unitario se compone como la suma de valores correspondientes. - Identifica la relación de correspondencia del tipo por cada n, m entre las magnitudes.
Razonamientos		- Numérico, a partir de los valores en tablas, se establece y valida el factor constante de proporcionalidad.
Estrategias		- Resuelve problemas de valor faltante empleando el valor unitario explicito o implícito. - Resuelve problemas de valor faltante aplicando el factor interno. - Resuelve problemas de valor faltante utilizando la suma de parejas de valores correspondientes ante la ausencia del valor unitario o por no ser un número entero. - Resuelve problemas de valor faltante empleando el factor constante de proporcionalidad entero. - Resuelve problemas de valor faltante en los que no se da el valor unitario por medio de reglas sucesivas de correspondencia de tipo “por cada n, m”

- Sistemas de representación

En este desafío matemático se incorpora todo lo estudiado anteriormente sobre el concepto de proporcionalidad. Se presentan nueve problemas, en el apartado de consideraciones previas se describe el procedimiento a seguir para cada uno de ellos. De acuerdo con el análisis de los procedimientos propuestos y el mismo problema, es cómo se determinan los sistemas de representación que se favorecen.

Problema 1
Procedimiento: Se proporciona el valor unitario en el cual, un kilogramo de plátano cuesta $8.50, esto con la idea de que se utilice para determinar el costo de 5 kilogramos de plátano, de modo que para conocer la respuesta es posible realizar una suma numérica de 5 veces $8.50 o multiplicando $8.50 por 5.

Se considera realizar operaciones básicas como $\$8.5 \times 5 = \$42.50$, se emplea el algoritmo de la multiplicación, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. Se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 3x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2
Procedimiento: No se da el valor unitario, se pregunta por él. Basta con dividir $63 entre 7 botellas de refresco, de modo que un refresco cuesta $9.

Se considera establecer y realizar operaciones básicas numéricas como $63 \div 7 = 9$, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora, se emplea el algoritmo de la división, la expresión numérica $63 \div 7 = 9$ establece una relación de proporcionalidad la cual emplea las razones y proporciones numéricas $\frac{7}{\$63} = \frac{1}{¿?}$. Se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 9x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 3
Procedimiento: No se da el valor unitario. Se presenta una tabla y son varios los valores faltantes. Por los números que se utilizan, es suficiente duplicar, triplicar o sumar término a término para encontrar los valores faltantes.

En el problema se identifica lo siguiente: se plantea el problema en una tabla, las cantidades del problema están ordenadas en dicha tabla, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes libros y cajas, por último, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Procedimientos como duplicar, triplicar o sumar término a término para encontrar los valores faltantes implica operaciones numéricas, por ejemplo, si se desea la cantidad de libros para seis cajas es necesario duplicar la cantidad de 3 cajas (3 cajas× 2=6 cajas) y duplicar la cantidad de libros en tres cajas (24 libros×2=48 libros), por lo tanto, la cantidad de libros que le corresponde a 6 cajas es 48. En este sentido se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 8x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 4

Procedimiento: No se da el valor unitario. Se presenta el problema de forma textual y solicita ciertos valores. La información es tres kilos de mazana cuesta $20, las interrogantes son ¿Cuánto cuesta 15 kilos de manzana? ¿Cuántos kilos de manzana se compara con $120? Si se organiza los valores de su mismo tipo, es decir kilos con kilos y pesos con pesos se observa que los valores de cada magnitud son múltiplos, por ejemplo, 15 kilos es múltiplo de 3 kilos y el factor interno es 5, $120 es múltiplo de 20 y el factor interno es 6, por lo que aplicando factores internos se obtiene la respuesta a las preguntas.

Aplicar el factor interno, implica realizar operaciones numéricas de la siguiente forma $\$20 \times 5 = \$100$, siendo $100 a pagar por 15 kilogramos de manzana; $3\, kilos\ de\ manzana \times 6 = 18$, siendo 18 kilos de manzana que se pueden comprar con $120. Como se observa, se emplea el algoritmo de la multiplicación y las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. Se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 5

Procedimiento: el problema se presenta de forma textual y la pregunta es ¿Cuántos vasos se llenan con 5 botellas de refresco familiar? la información que se proporciona es que con tres botellas de refresco familiar se llenan 9 vasos, es este problema no se proporciona el valor unitario. Dado que los valores de cada magnitud no son múltiplos, una forma de encontrar la respuesta es calculando el valor unitario; posteriormente se obtiene el número de vasos a llenar con 5 refrescos familiares.

Para calcular el valor unitario se realiza la operación numérica de $9\, vasos \div 3\, botellas = 3$, entonces, por cada refresco se llenan tres vasos, luego para dar respuesta a la pregunta del problema se realiza $5 \times 3 = 15$, es decir, con 5 botellas de refresco familiar se llenan 15 vasos. Por lo anterior se emplean el algoritmo de la multiplicación y la división, las operaciones se pueden calcular con o sin calculadora. Se favorece el sistema de representación numérico.

Problema 6

Procedimiento: No se proporciona el valor unitario, se pregunta por él y por otro valor faltante. El problema se presenta en una tabla. La información que se facilita es de 6 cajas contienen 150 libros. Para determinara la cantidad de libros en una caja de divide 150 entre 6, posteriormente el resultado divide a 1125. La multiplicación y división de números naturales son pertinentes para encontrar los valores faltantes.

En el problema se identifica lo siguiente: el problema se plantea en una tabla, en la cual están ordenadas las cantidades, existiendo una relación de correspondencia entre las magnitudes libros y cajas, lo que es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Para calcular el valor unitario se realiza la división numérica $150 \div 6 = 25$, por cada caja se tienen 25 libros. Para calcular el número de cajas dado el número de libros se realiza una división de $1125 \div 25 = 45$. Las operaciones anteriores se plantean a partir las proporciones numéricas $\frac{6}{150} = \frac{1}{¿?}$, $\frac{1}{25} = \frac{¿?}{1125}$. En ambos casos se emplea el algoritmo de la división y las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. Se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 25x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 7
Procedimiento: el problema se presenta de forma textual, no se proporciona el valor unitario. La información que se facilita es que por 16 cuadernos se paga $100. Los valores de cada magnitud no son múltiplos y el valor unitario es un número decimal, por lo que se sugiere utilizar un valor intermedio; para ello se calcula el costo de 4 cuadernos con su respectivo precio que es $25 y se suma 16 y 4 cuadernos, así como sus respectivos precios $100 y $25.

Para determinar valores intermedios implica dividir 16 entre 4, de esta manera se estará calculado el costo para 4 cuadernos, dado que la cantidad de cuadernos se dividió entre 4, el precio de 16 cuadernos también debe ser dividido entre 4, $\$100 \div 4 = \$25$, así que 4 cuadernos cuestan $25. Como ya sabemos el precio de 4 y 16 cuadernos, se suman esas cantidades $4 + 16 = 20$ cuadernos, ocurriendo se manera similar con sus respectivos precios $\$100 + \$25 = \$125$, por lo tanto, 20 cuadernos cuestan $125. Por lo anterior se emplea el algoritmo de la división y la suma, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 8
Procedimiento: Se presenta en una tabla y son varios los valores faltantes. Las cantidades de cajas son las mismas para dados, muñecas y pelotas, pero para cada tipo de juguete se tiene diferente cantidad por caja. En algunos casos se da el valor unitario mientras en otros se solicita calcularlo. Es pertinente utilizar los factores internos y el valor unitario.

En el problema se identifica lo siguiente: el problema se plantea en una tabla en la que estan ordenada las cantidades de las magnitudes, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes cajas – dados, cajas – pelotas y cajas - muñecas, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Con base en el procedimiento de las consideraciones previas, implica realizar operaciones multiplicativas numéricas para calcular los valores faltantes o divisiones para calcular el valor unitario, incluso es necesario determinar los factores internos que multiplicados por el valor de una cantidad se obtiene un valor faltante. Las operaciones numéricas dan lugar al sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de las relaciones cajas – dados, cajas – pelotas y cajas – muñecas, se determina que $y = 12x,\ y = 9x$ y $y = 5x$ son las expresiones algebraicas que se representan a cada una. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 9
Procedimiento: Es un problema que incluye dos reglas sucesivas de correspondencia. Se presenta en un texto. Los valores de cada magnitud son múltiplos. Una forma de resolverlo es establecer una relación de proporcionalidad con cada regla de correspondencia. Los valores faltantes pueden calcular mediante factores internos o valores intermedios.

Al establecer las relaciones de proporcionalidad de cada regla de correspondencia para calcular los valores faltantes, usando factores internos, conlleva a realizar multiplicaciones numéricas, calcular valores intermedios lo que implica realizar sumas y divisiones. Se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

A continuación, se menciona la situación que se favorece en cada problema

Problema 1. La situación es acerca de compra de fruta donde el precio y kilogramo mantienen una relación de proporcionalidad, situación como ésta se presenta en la vida diaria que requiere del uso de conocimientos de la proporcionalidad, por lo anterior esta situación corresponde a una situación personal.

Problema 2. La situación plantea la compra de refrescos, donde el precio por unidad y el número total de la compra mantienen una relación de proporcionalidad, este tipo de situaciones se presentan en la vida diaria donde se aplican conocimientos de proporcionalidad, por lo anterior se trata de una situación personal.

Problema 3. No presenta contextualización para la tabla, el problema no tiene los suficientes elementos para asociarlo con alguna situación.

Problema 4. La situación es acerca de la compra de fruta donde el precio y kilogramos mantienen una relación de proporcionalidad, situación como ésta se presenta en la vida diaria y requiere del uso de conocimientos de proporcionalidad, por lo anterior esta situación corresponde a una situación personal.

Problema 5. La situación es acerca del llenado de vasos con refrescos familiares, lo cual puede suceder o no en la vida cotidiana, por lo que se puede relacionar con una situación personal.

Problema 6. No se presenta contextualización para la tabla, el problema no cuenta con los suficientes elementos para asociarlo con alguna situación.

Problema 7. El problema refiere a la compra de artículos que son empleados por estudiantes, siendo común dicha compra al inicio de cada ciclo escolar, el problema corresponde a una situación personal.

Problema 8. No se presenta contextualización para la tabla, el problema no tiene los suficientes elementos para asociarlo con alguna situación.

Problema 9. El problema se contextualiza en la escuela, siendo un entorno conocido y de la vida diaria, por lo que puede considerarse como una situación personal.

Desafío matemático 93. Dinero Electrónico

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea dos problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las Figuras 28 y 29.

Figura 28

Problema 1 del desafío matemático 93, quinto grado.

1. En una tienda de autoservicio por cada $100 de compra te regalan $8 en dinero electrónico. Con base en lo anterior, determinen cuánto regalarán en dinero electrónico para cada compra de la siguiente tabla.

Total en compras	Dinero electrónico
$100	$8
$200	
$250	
$300	
$400	
$450	

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 29

Problema 2 del desafío matemático 93, quinto grado.

2. Por cada $100 de venta, el dueño de la tienda obtiene una ganancia de $25. Si el total de ventas en una hora fue de $25 000, ¿de cuánto fue la ganancia para el dueño?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *resolver problemas que impliquen utilizar la regla de correspondencia "n de cada 100" como constante*. De modo que, analizar en su conjunto a ambos problemas, junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 15).

Tabla 15

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 93, quinto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Multiplicación.
- Mitad.
- Suma.
- Factor
- Igual.
- Datos conocidos.
- Valor faltante.
- Múltiplos.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- +, −, ×, ÷, =.
- 100, 8, 200, 250, 300, 400, 450, 25, 25000.
- Por cada n, m.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple…, etc.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- Resolver problemas multiplicativos es calcular los valores faltantes.
- La regla de tres es empleada en problemas de valor faltante en la que exista una relación de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Factor interno.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.
- Aditivas.
Relaciones de proporcionalidad
- El empleo de razones, proporciones y la regla de tres en el problema permite afirmar que existe una relación de proporcionalidad, es decir la estructura del problema es en términos de lo proporcional.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Campo procedimental</th></tr>
<tr><td>Destrezas</td><td></td><td>- Identifica la relación de correspondencia n de cada 100.
- Identifica el factor interno en problemas de valor faltante.</td></tr>
<tr><td>Razonamientos</td><td></td><td>- Numérico, determinar que por cada incremento de 100 en una magnitud se incrementa n en la otra magnitud.</td></tr>
<tr><td>Estrategias</td><td></td><td>- Resuelve problemas de valor faltante aplicando el factor interno.
- Resuelve problemas de valor faltante empleando el factor constante de proporcionalidad entero.</td></tr>
</table>

		- Resuelve problemas que impliquen utilizar la regla de correspondencia “n de cada 100”.

- Sistemas de representación

Problema 1

En el problema se identifica lo siguiente: el problema se plantea en una tabla, en la que están ordenadas las cantidades de las magnitudes, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes total en compras y dinero electrónico, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Los procedimientos planteados en las *consideraciones previas* se menciona que es válido recurrir al concepto de dobles, triples, mitad, etcétera. De modo que al procedimiento a seguir es de la siguiente manera: 1) Si por $100 te abonan $8, entonces por el doble ($200) te abonarán también el doble ($16). 2) Como $50 es la mitad de $100, entonces te abonarán la mitad de lo que abonan por $100, es decir, $4. Otro procedimiento es multiplicar la cantidad comprada por la cantidad abonada por cada $100 y el resultado dividirlo entre 100, con lo que obtendrán la cantidad que se les dará en dinero electrónico, es decir, por ejemplo: $200 × $8 = $1600 y $1600 ÷ $100 = $16; o bien $250 × $8 = $2000 y $2000 ÷ $100 = 20.

Con base en las formas que se puede proceder para la resolución del problema, ambas implican el empleo de operaciones básicas numéricas. El doble de 100 implica la suma reiterada ($\$100 + \$100 = \$200; \$8 + \$8 = \$16$) o de una multiplicación ($\$100 \times 2 = \$200; \$8 \times 2 = \$16$). La noción de mitad implica realizar una división entre dos ($\$100 \div 2 = \$50; \$8 \div 2 = \$4$). Considerando las operaciones y los procedimientos numéricos, y los cálculos que se pueden realizar con o sin calculadora se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 0.08x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2

En el problema se identifica lo siguiente: el problema se plantea en una tabla, en la cual están ordenadas las cantidades de las magnitudes, existiendo una relación de correspondencia entre total de ventas y ganancias, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

De acuerdo con el aparatado de consideraciones previas, una estrategia a seguir para la resolución del problema es: si de cada $100 le corresponden $25 de ganancia, entonces 10 veces $100 es $1,000, así que 10 veces $25 serán $250. Y como $25,000 equivale a 25 veces $1,000, entonces

25 veces $250 es $6,250. Las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora y se emplea el algoritmo de la multiplicación. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades del problema se determina que $y = 0.25x$ es la expresión algebraica que se representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

Problema 1
La situación se refiere a dinero electrónico que se otorga al cliente por cierta cantidad de compra, estas situaciones ocurren en los supermercados, en las gasolineras o tiendas de conveniencia de modo que suceden en la vida cotidiana, se emplean conocimientos de porcentaje. El problema corresponde a una situación personal.

Problema 2
La situación del problema refiere a ganancias del dueño de una tienda, específicamente en cierto horario de su jornada laboral, para calcular sus ganancias según la cantidad de ventas, se requiere del empleo de conocimientos de proporcionalidad, por lo anterior el problema corresponde a una situación laboral.

Desafío matemático 94. La mejor tienda
Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea tres problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las Figuras 30, 31 y 32.

Figura 30
Problema 1 del desafío matemático 94, quinto grado

1. En la tienda Doña Paty hacen un descuento de $3 por cada $20 de compra, y en la tienda El Amoroso ofrecen un descuento de $6 por cada $50 de compra. ¿En cuál de las dos tiendas conviene comprar?

¿Por qué?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 31
Problema 2 del desafío matemático 94, quinto grado

2. En una panadería dan siete panes por $15 y en otra panadería dan cuatro panes por $7. ¿Dónde conviene comprar el pan?

¿Por qué?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 32
Problema 3 del desafío matemático 94, quinto grado.

3. Una tienda anunció una oferta de dos suéteres por el precio de uno y otra tienda anunció los mismos suéteres con el mismo precio, pero con una rebaja de 50%. ¿En qué tienda conviene comprar y por qué?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *resolver problemas que impliquen convertir razones en otras equivalentes, cuyo antecedente sea 100*. De modo que, analizar en su conjunto a los tres problemas, junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 16).

Tabla 16

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 94, quinto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Valor faltante.
- Múltiplos.
- Descuento
- Razones.
- Equivalentes.
- Por ciento.
- Multiplicación.
- Mitad.
- Suma.
- Factor
- Igual.
- Datos conocidos.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- $+, -, \times, \div, =$.
- %.
- 3, 20, 6, 50, 15, 7, 50.
- n por cada 100.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple…, etc.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- Resolver problemas multiplicativos es calcular los valores faltantes.
- La noción de porcentaje se refiere a la idea de una parte de un todo.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Razón.
- Equivalencia.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.
- Aditivas.
Relaciones de proporcionalidad
- El empleo de razones, proporciones y la regla de tres en el problema permite afirmar que existe una relación de proporcionalidad, es decir la estructura del problema es en términos de lo proporcional.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Campo procedimental</th></tr>
<tr><td>Destrezas</td><td></td><td>- Identifica la regla de correspondencia n por cada 100.</td></tr>
</table>

		- Convierte razones en otras equivalentes cuyo antecedente sea 100.
Razonamientos		- Deductivo, con base en la regla de correspondencia n por cada 100, emite juicios y argumentos para dar respuesta a los problemas.
Estrategias		- Resuelve problemas que impliquen convertir razones en otras equivalentes, cuyo antecedente sea 100.

- Sistemas de representación

Problema 1

En las consideraciones previas se menciona del empleo de la noción de múltiplos entre las cantidades de cada magnitud para la resolución del problema (Véase figura 33). En este sentido en el problema se identifica lo siguiente: se plantea dos tablas en la que se presentan ordenadamente las cantidades de las magnitudes, en donde existe una relación de correspondencia entre las magnitudes descuento y compra en ambas tablas, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Figura 33

Tablas sugeridas para la resolución del problema 1 del desafío matemático 94, quinto grado.

El amoroso	
Descuento	Compra
\$6.00	\$50.00
\$12.00	\$100.00

Doña Paty	
Descuento	Compra
\$3.00	\$20.00
\$6.00	\$40.00
\$12.00	\$80.00
\$15.00	\$100.00

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Para este problema se sugiere aplicar las propiedades de duplicar, triplicar, etc. para calcular los valores faltantes hasta determinar el descuento correspondiente a \$100 de compra para cada tienda, pues es en esta cantidad de \$100 de compra donde las dos tablas permiten realizar la comparación para determinar en cual conviene comprar de acuerdo con el descuento que otorgan. Al duplicar o triplicar los datos se emplea la operación de multiplicación, en consecuencia, se usa el algoritmo de la multiplicación, al calcular mitades se emplea el algoritmo de la división o la suma de datos de dos más renglones, esto implica el uso de algoritmo de la suma. Lo cual favorece al sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades en la tabla El amoroso y Doña Paty se determina que $y = 0.12x$ y $y = 0.15x$ son las expresiones algebraicas que representan a cada una. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2
En este problema se espera recurrir al siguiente razonamiento: "en la panadería 1 por 7 panes pago \$15, en la panadería 2 por 4 panes pago \$7, pero si compro en la panadería 2 el doble de panes (8 piezas) me cuesta \$14, mientras que en la panadería 1 me dan 7 piezas por \$15, entonces me conviene la panadería 2". Esta forma de razonar emplea el conocimiento de múltiplos lo que implica multiplicar por 2 tanto la cantidad de panes como el precio para la panadería 2, $2 \times 4\, panes = 8\, panes$ y $2 \times \$7 = \$14$, además, existe una relación de correspondencia entre los valores numéricos, las operaciones se realizan con los números del problema, se puede realizar con o sin calculadora, y los resultados obtenidos permiten decidir de acuerdo con lo planteado en el problema. En este sentido se favorece el sistema de representación numérico.

Problema 3
Para responder la pregunta del problema necesario saber que, si un producto tiene el 50% de descuento, el precio original será dividido entre dos, en el caso de tener la promoción de dos por uno implica considerar el valor de cada prenda, pero después dividirlo entre dos. Estas formas de proceder implican el empleo de la división con los valores numéricos y que el resultado se interpreta de acuerdo con la situación, además valores numéricos del descuento y el precio final mantienen una relación de correspondencia, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. Por lo anterior para comparar, analizar y decidir es importante operar en términos numéricos de modo que el sistema de representación que se favorece es el numérico.

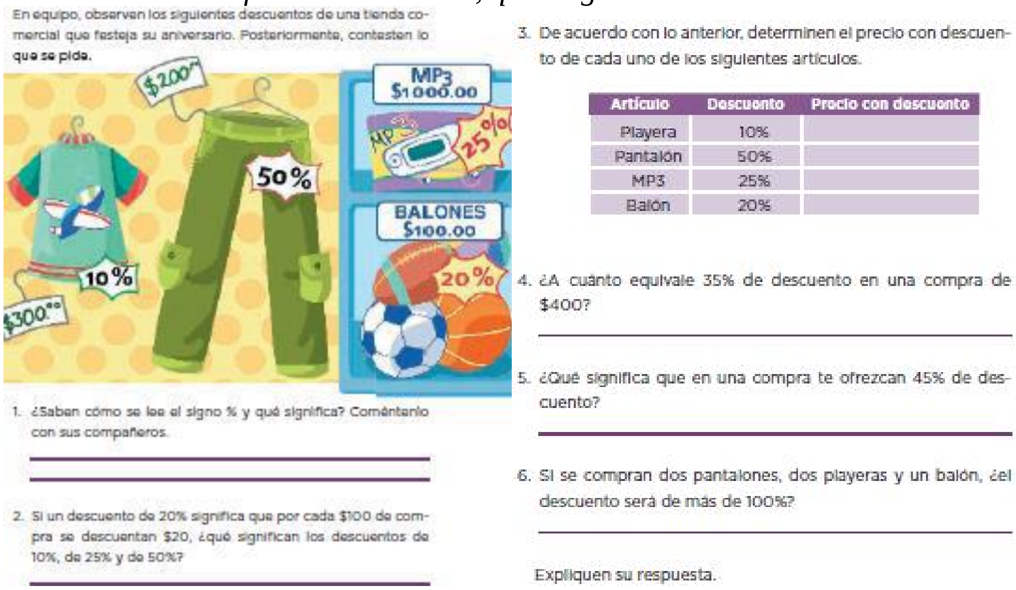
- Fenomenología

Los tres problemas se contextualizan en situaciones reales en las que se involucra la acción de comprar, siendo actividades de la vida cotidiana en las que se emplean conocimientos sobre porcentajes, en este sentido el problema 1, 2 y 3 corresponden a situaciones personales.

Desafío matemático 95. En busca de descuentos
Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 34.

Figura 34

Problema del desafío matemático 95, quinto grado.



En equipo, observen los siguientes descuentos de una tienda comercial que festeja su aniversario. Posteriormente, contesten lo que se pida.

1. ¿Saben cómo se lee el signo % y qué significa? Coméntenlo con sus compañeros.

2. Si un descuento de 20% significa que por cada $100 de compra se descuentan $20, ¿qué significan los descuentos de 10%, de 25% y de 50%?

3. De acuerdo con lo anterior, determinen el precio con descuento de cada uno de los siguientes artículos.

Artículo	Descuento	Precio con descuento
Playera	10%	
Pantalón	50%	
MP3	25%	
Balón	20%	

4. ¿A cuánto equivale 35% de descuento en una compra de $400?

5. ¿Qué significa que en una compra te ofrezcan 45% de descuento?

6. Si se compran dos pantalones, dos playeras y un balón, ¿el descuento será de más de 100%?

Expliquen su respuesta.

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *a partir de la resolución de problemas, relacionar la escritura n% con la expresión "n de cada 100"*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 17).

Tabla 17

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 95, quinto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Mitad. - Igual. - Datos conocidos. - Valor faltante. - Múltiplos. - Descuento. - Por ciento.
	Notaciones	- +, ×, ÷, =. - n%. - 20%, 100, 10%, 25%, 50%, 45%, 400, 100%. - n de cada 100.
	Convenios	- Una relación de proporcionalidad se caracteriza cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, triple…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también aumenta al doble, triple…, etc., o cuando la cantidad de magnitud a_1 disminuye a la mitad…, etc., la cantidad de magnitud b_1 también disminuye a la mitad

	Resultados	- El por ciento corresponde a una parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje. - Proporción.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - El problema emplea la noción de porcentaje, permitiendo afirmar que en el problema existe una relación proporcionalidad, es decir, el problema se estructura en un sentido proporcional.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relaciona la escritura $n\%$ con la expresión "n por cada 100".
Razonamientos		- Numérico, con base en la regla de correspondencia n por cada 100, emite juicios y argumentos para dar respuesta a los problemas.
Estrategias		- Resuelve problemas de valor faltante empleando reglas sucesivas de correspondencia *n* por cada 100.

- Sistemas de representación

Las preguntas del problema están planteadas con la intención de relacionar la escritura $n\%$ con la expresión "n de cada 100". Es este sentido, el problema favorece la relación de correspondencia entre los valores numéricos del descuento y el precio final del producto, para determinar el descuento de un precio en lista implica emplear los conocimientos de múltiplos, por ejemplo, para calcular el 35% de $400, sabemos que 35% se refiere a $35 por cada $100, como el precio es $400, entonces cabe 4 veces $100, así que serán 4 veces $35, $4 \times \$35 = 140$. Por lo anterior, se emplea la multiplicación con su respectivo algoritmo, las expresiones son en termino numérico y el resultado tiene una interpretación de acuerdo con la situación, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora. En este problema favorece el sistema de representación numérico.

- Fenomenología

El problema se plantea en un contexto de compras y descuentos de diversos artículos de uso común o de entretenimiento, relacionándose con la vida diaria, lo que evidencia una situación personal.

Desafío matemático 96. Recargos

Este desafío está conformado por una consigna, ésta a su vez plantea tres problemas cada uno con sus respectivas preguntas. Cada problema se presenta en las Figuras 35, 36 y 37.

Figura 35

Problema 1 del desafío matemático 96, quinto grado

1. Cuando los almacenes venden productos a plazos, hacen un cargo extra de acuerdo con la cantidad de pagos que haga el comprador.

El empleado de un almacén está calculando los cargos extra que se harán a algunos artículos. Ayúdenlo a completar las siguientes tablas.

Precio base	Cargo extra de 10%
$80	$8
$50	
$800	$80
	$60
	$120

Precio base	Cargo extra de 20%
$50	
$500	
$900	$180
	$200
	$320

Precio base	Cargo extra de 25%
$50	
$180	
$600	$150
	$25
$400	

Precio base	Cargo extra de 50%
$50	
$1800	
$2800	$1400
	$600
	$120

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 36

Problema 2 del desafío matemático 96, quinto grado

2. Si 25% se representa con la fracción $\frac{25}{100}$, o bien, de manera simplificada con $\frac{1}{4}$, completen la tabla.

Porcentajes	n/100	Fracción simplificada
25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{20}{100}$	
		$\frac{1}{2}$
10%		

Nota: Tomado de SEP (2011e).

Figura 37

Problema 3 del desafío matemático 96, quinto grado

3. Si la mitad de una cantidad es 50%, ¿qué parte de la cantidad es 10%, 20%, 25% y 75%?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *a partir de la resolución de problemas, relacionar los porcentajes 50, 25, 20 y 10% con sus representaciones en forma de fracción con denominador 100 y en forma simplificada*. De modo que, analizar en su conjunto a los tres problemas, junto con el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 18).

Tabla 18

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 96, quinto grado.

Campo conceptual			
Hechos	Términos	- Mitad. - Multiplicación. - Fracción.	- Datos conocidos. - Valor faltante. - Múltiplos.

		- Igual. - Por ciento.
	Notaciones	- $+,\ \times,\ \div,\ =$. - $n\%$. - $\frac{n}{m}$. - $\frac{20}{100}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{10}{100}, \$50, \$80, \$800$. - $25\%, 10\%, 75\%$. - n de cada 100.
	Convenios	- Las expresiones $n\%$ se representan en fracción con denominador 100.
	Resultados	- El por ciento corresponde a una parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje. - Proporción. - Fracción.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - El problema emplea la noción de porcentaje, de razón y proporción permitiendo afirmar que en el problema existe una relación proporcionalidad, es decir, el problema se estructura en un sentido proporcional.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes 50, 25, 20 y 10% con sus representaciones en forma de fracción con denominador 100 y en forma simplificada.
Razonamientos		- Numérico, con base en los valores numéricos se deduce que la escritura *n%* se representa con fracciones de denominador 100 o en forma simplificada.
Estrategias		- Resolución de problemas, relacionando los porcentajes 50, 25, 20 y 10% con sus representaciones en forma de fracción con denominador 100 y en forma simplificada.

- Sistemas de representación

Problema 1

En el problema se identifica lo siguiente: se plantea apoyándose de cuatro tablas en las cuales están ordenadas las cantidades de las magnitudes, en cada tabla existe una relación de correspondencia entre las magnitudes precio base y el cargo extra, lo que es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas que permitan calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece el sistema de representación tabular.

Para calcular los valores faltantes en la tabla implica el uso de algoritmos de la multiplicación (múltiplos) y la división (mitades, tercera…, etc.), las operaciones numéricas se realizan con o sin calculadora, en este sentido se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, pero al analizar las cantidades de las cuatro tablas, se determina que $y = \frac{1}{10}x$; $y = \frac{1}{20}x$; $y = \frac{1}{25}x$; $y = \frac{1}{50}x$ son las expresiones algebraicas que representa a cada una. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema 2

Se presenta una tabla con las siguientes columnas: porcentaje, $\frac{n}{100}$ y fracción simplificada. En dicha tabla no existe relación de correspondencia. Su intención se orienta a representar de diferentes expresiones y en términos numéricos el concepto de porcentaje, por tal se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 3

En este problema se pretende identificar la representación fraccionaria de los porcentajes estudiados. Con ello se tendrá un recurso más para realizar los cálculos; por ejemplo, para calcular 25% de una cantidad basta con obtener la cuarta parte de ésta; la décima parte, si se trata de 10%, etcétera. Considerando el uso de la división y la suma así, como sus respectivos algoritmos, se favorece el sistema de representación numérico.

- Fenomenología

Problema 1, solicita ayudar a un empleado de almacén a calcular los cargos extras que se realizarán, contextualizándose en el trabajo del almacenista, por tal, el problema corresponde a una situación laboral.

Problema 2, demanda completar una tabla de modo que se asocie la escritura $n\%$ con las representaciones fraccionarias con denominador 100. El problema no establece una relación o continuidad con la situación del problema 1. Por lo anterior se concluye que este problema no favorece algún tipo de situación.

Problema 3, se deben identificar representaciones fraccionarias de los porcentajes estudiados, no se relaciona ni contextualiza con el problema 1 o con alguna situación, por lo tanto, no se favorece algún tipo de situación.

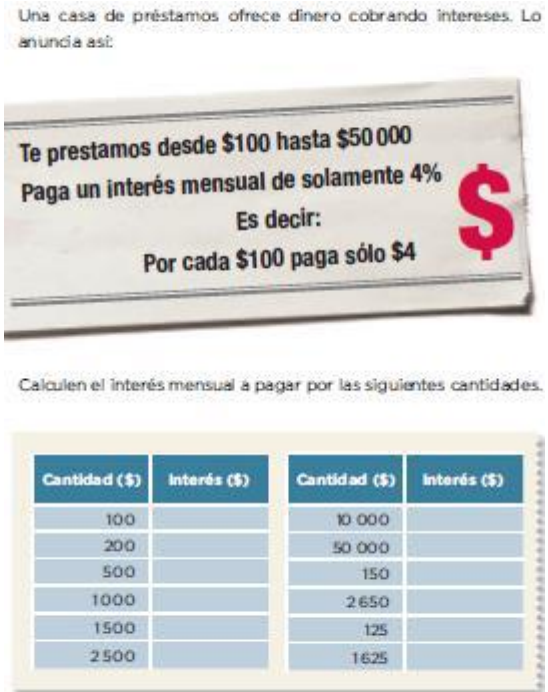
4.1.2. Sexto grado

Desafío matemático 19. Préstamos con intereses

Este desafío está conformado por una consigna, en la que se plantea un problema, así como algunas preguntas. El problema se presenta en la Figura 38.

Figura 38

Problema del desafío matemático 19, sexto grado.


Una casa de préstamos ofrece dinero cobrando intereses. Lo anuncia así:

Te prestamos desde $100 hasta $50 000
Paga un interés mensual de solamente 4%
Es decir:
Por cada $100 paga sólo $4

Calculen el interés mensual a pagar por las siguientes cantidades.

Cantidad ($)	Interés ($)	Cantidad ($)	Interés ($)
100		10 000	
200		50 000	
500		150	
1000		2 650	
1500		125	
2 500		1625	

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *calcular porcentajes aplicando la correspondencia "por cada 100, n"*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 19).

Tabla 19

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 19, sexto grado.

Campo conceptual			
Hechos	Términos	- Intereses. - Por ciento.	- Datos conocidos. - Valor faltante.
	Notaciones	- $n\%$ - $100, $200, $500, $1000, $1500, $2500, $10000 $50000, $150, $2650, $125, $1625. - 4%.	

		- Por cada 100, n.
	Convenios	- La expresión 4% representa "por cada \$100, paga \$4".
	Resultados	- El por cierto corresponde a una parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - La comparación entre magnitudes por cada 100, n, emplea de manera implícita el concepto de razón y proporción, los cuales son propios de las relaciones de proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes de la forma *n%* con la expresión "por cada 100, *n*".
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, empleen procedimientos diversos en el cálculo de porcentajes y no algoritmos convencionales.
Estrategias		- Calcular porcentajes aplicando la correspondencia "por cada 100, *n*".

- Sistemas de representación

La primera representación se refiere al anuncio de la casa de préstamos, en él se hace explícito la relación de $n\%$ con la expresión por cada $100, n$. Es decir, a partir de la imagen y lo que se menciona, reconocer que el interés de 4% corresponde a cuatro pesos de cada \$100 que se pida prestado, bajo esta idea se está representando el concepto de porcentaje, por lo anterior, se favorece el sistema de representación figural – icónico.

En el problema se identifica lo siguiente: se plantea apoyándose de una tabla en la cual están ordenadas las cantidades de las magnitudes, existe una relación de correspondencia entre las magnitudes Cantidad (\$) e Interés (\$), los que son referente y apoyo para realizar operaciones matemáticas que permiten calcular los valores faltantes. Por lo anterior, el problema favorece también el sistema de representación tabular.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de cada magnitud en la tabla se determina que $y = 0.04x$ es la expresión algebraica que representa al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

- Fenomenología

En el problema se favorece una situación personal, se caracteriza por enfocarse en actividades de la vida cotidiana, por ejemplo, la economía personal. Puesto que el problema se contextualiza en la actividad de una casa de préstamos.

Desafío Matemático 20. Mercancía con descuento

Este desafío está conformado por dos consignas, cada una plantea un problema con la intención de completar tablas. Los problemas se presentan en las figuras 39 y 40.

Figura 39

Problema de la consigna 1, desafío matemático 20, sexto grado.

Luis, Ana y Javier venden artesanías, cada quien en su puesto del mercado. Decidieron ofrecer toda su mercancía con 10% de descuento. Completen la tabla.

		Luis	Ana	Javier
Sarape	Precio ($)	100	140	80
	Descuento ($)	10		
	Precio rebajado ($)	90		
Aretes	Precio ($)	50		
	Descuento ($)		6	4
	Precio rebajado ($)			
Blusa	Precio ($)			
	Descuento ($)	8		
	Precio rebajado ($)		45	63

El 10% del precio de un artículo es igual a $13. Completen la siguiente tabla.

Porcentajes	Descuento ($)	Precio con descuento ($)
5%		
10%	13	117
15%		
20%		
25%		
30%		
50%		65
75%		

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 40

Problema de la consigna 2, desafío matemático 20, sexto grado.

En un mercado de artesanías se ofrecen algunos artículos con atractivos descuentos. Completa la tabla a partir de la información disponible en ella.

Artículo	Precio	Descuento	Cantidad a pagar
Collar	$80	10%	
Rebozo	$100		$75
Pulsera	$30	5%	
Camisa de manta	$90		$18
Florero	$140	40%	
Mantel	$120		$60

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *calcular porcentajes tomando como base el cálculo de 10 por ciento.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 20).

Tabla 20

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 20, sexto grado.

Campo conceptual			
	Términos	- Descuento. - Porcentaje.	- Datos conocidos. - Valor faltante.

Hechos	Notaciones	- n%. - Números naturales en pesos.
	Convenios	- La expresión n% de descuento representa “por cada $100, se descuenta $*n*”.
	Resultados	- El por cierto corresponde a una parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - La comparación entre magnitudes por cada 100, n, emplea de manera implícita el concepto de razón y proporción, los cuales son propios de las relaciones de proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes de la forma *n%* con la expresión “por cada 100, *n”*.
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, empleen procedimientos diversos en el cálculo de porcentajes y no algoritmos convencionales.
Estrategias		- Resolver problemas de descuentos calculando porcentajes tomando como base el cálculo de 10 por ciento.

- Sistemas de representación

Problema de la Consigna 1

En el problema de la consigna 1 se presentan dos tablas, la primera está orientada a llevar el registro de precios, descuentos y total a pagar de ciertos productos. Mientras que la segunda tiene las siguientes características: se establece una relación de correspondencia entre las magnitudes Porcentaje – Descuento y Descuento – Precio del total a pagar, es un referente y un apoyo para realizar operaciones matemáticas para calcular los valores faltantes. Por las características descritas, se favorece el sistema de representación tabular.

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas se espera que se identifique que el 10% de un precio corresponde la décima parte del total, de modo que, si se desea saber el 10% de un precio, es necesario dividirlo entre 10 para saber el 10% de descuento en pesos. En el caso que se proporcione el precio final con el 10% de descuento aplicado, es necesario considerar que ese precio corresponde a un 90% del precio real, de modo que, si se desea saber que cantidad en pesos es el 10%, se divide el precio final entre nueve. Por lo anterior, se emplea la división en términos numéricos, se emplea su algoritmo y se establecen relaciones de igualdad en términos numéricos. Por las características mencionadas, se favorece el sistema de representación numérica.

Si bien no es parte de la demanda cognitiva del desafío matemático y del propio contenido del programa de estudios de este grado, al analizar las cantidades de cada magnitud en la tabla se determina que $y = 1.3x$ y $y = 9x$ son las expresiones algebraicas que representan al problema. Esto se menciona para aportar al conocimiento del profesor y no necesariamente para considerar en su planificación didáctica.

Problema de la Consigna 2

En la segunda consigna la representación empleada (una tabla), permite llevar un registro sobre el precio en lista su descuento y precio final de ciertos productos, estableciendo una relación de correspondencia entre las magnitudes, la tabla es referente y apoyo para realizar las operaciones que permitan calcular los valores faltantes. En este sentido no se favorece el sistema de representación tabular.

Para completar la tabla, se emplea la noción de múltiplos lo que implica el uso de la multiplicación con su respectivo algoritmo. De igual manera se aplica la noción de valor intermedio siendo necesario el empleo de la suma, resta y división. Las operaciones numéricas se calculan con o sin calculadora, las relaciones de igualdad se mantienen en un sentido numérico de modo que se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

El problema de la primera consigna esta contextualizado en la venta de artesanías en un mercado, a las que se les aplicará un descuento del 10%. De modo que a partir de dicha situación se plantea la necesidad de emplear el concepto de porcentaje, en este sentido el problema corresponde a una situación laboral. La situación de la consigna dos menciona que se ofrecen ciertos productos, siendo un contexto similar a la primera consigna, en ese sentido la situación que se favorece es del tipo laboral.

Desafío matemático 30. Tantos de cada 100

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea un problema. El problema se presenta en la figura 41.

Figura 41

Desafío matemático 30, sexto grado.


En un almacén hay una promoción de 25% de descuento en todos los artículos, aunque también hay que pagar 16% de IVA.

¿Cuál es el precio final de un refrigerador con un precio de lista de $4 200?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Resolver, con distintos procedimientos, problemas en los que se requiere calcular el porcentaje de una cantidad*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 21).

Tabla 21

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 30, sexto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Descuento.
- Porcentaje.
- Datos conocidos.
- Valor faltante.
- IVA en %.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- n%.
- Números naturales en pesos.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- La expresión n% de descuento representa “por cada $100, se descuenta $n”.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- El por cierto corresponde a un parte de un todo.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Porcentaje.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.
- Aditivas.
Relaciones de proporcionalidad
- La comparación entre magnitudes por cada 100, n, emplea de manera implícita el concepto de razón y proporción, los cuales son propios de las relaciones de</td></tr>
</table>

		proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes de la forma *n%* con la expresión "por cada 100, *n*".
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, empleen procedimientos diversos en el cálculo de porcentajes y no algoritmos convencionales.
Estrategias		- Resolver, con distintos procedimientos, problemas en los que se requiere calcular el porcentaje de una cantidad.

- Sistemas de representación

De acuerdo con el aparatado de consideraciones previas, la finalidad de este desafío es calcular porcentajes menores a 100%, mediante diferentes estrategias. Para calcular 25% de $4,200 se tienen los siguientes procedimientos:

- Con lo realizado en las consignas anteriores se tiene que el 10% es la décima parte de $4,200, entonces se divide $\$4200 \div 10 = \$420$, así que $420 es el 10% de $4200; luego, interesa calcular el 5%, pero el 5% es la mitad del 10%, entonces $420 siendo el 10%, también disminuye a la mitad, de modo que el 5% es $210; por último, como interesa el 25%, se suma porcentajes con sus respectivos valores en pesos ($), en este sentido queda que $10\% + 10\% + 5\% = 25\%$ y $\$420 + \$420 + \$210 = \$1{,}050$.
- La mitad de $4,200 es $2,100, este a la vez representa el 50% de $4,200 y la mitad de $2,100 es $1,050, que a la vez representa el 25% de $4,200.
- Multiplicar $4,200 por $\frac{25}{100}$ ($\$4200 \times \frac{25}{100} = \$1{,}050$) o bien por $\frac{1}{4}$.
- Multiplicar $4200 por 0.25 para calcular el 25% de $4,200. Se debe considerar este procedimiento como uno más y no como el único y obligatorio.

En las anteriores formas de resolución implica el empleo de algoritmos como el de suma, multiplicación o división, siendo posible el uso o no de calculadora, las relaciones de igualdad se encuentran en un sentido numérico. Con base en las características anteriores, el problema favorece el sistema de representación numérico.

- Fenomenología

El problema se contextualiza en un almacén determinando el precio de lista, así que el concepto de porcentaje se emplea bajo la idea de descuento e IVA, por tal razón, el problema se aplica y favorece una situación laboral.

Desafío matemático 31. Ofertas y descuentos

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas. Los problemas se presentan en las figuras 42 y 43.

Figura 42

Problema 1 del desafío matemático 31, sexto grado.

1. Pepe logró ahorrar $500.00 y con ese dinero decidió comprar un reloj que costaba $450.00; al pagarlo, se enteró que tenía un descuento. ¿Qué porcentaje le descontaron, si al salir de la tienda aún tenía $140.00 de sus ahorros?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 43

Problema 2 del desafío matemático 31, sexto grado.

2. En la tienda donde Pepe compró su reloj había otros artículos con descuento, pero la etiqueta sólo indicaba el precio de lista y el precio rebajado. Encuentra los porcentajes de descuento y regístralos en la tabla.

Artículo	Descuento
De $300.00 a $120.00	60%
De $70.00 a $45.50	
De $220.00 a $110.00	
De $145.00 a $123.25	

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Encontrar formas de calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto a otra*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 22).

Tabla 22

Campo conceptual y procedimental de desafío matemático 31, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Descuento. - Porcentaje. - Datos conocidos. - Valor faltante.
	Notaciones	- n%. - Números naturales en pesos.
	Convenios	- La expresión n% de descuento representa “por cada $100, se descuenta $$n$”.
	Resultados	- El por cierto corresponde a un parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - La comparación entre magnitudes por cada 100, n, emplea de manera implícita el concepto de razón y

		proporción, los cuales son propios de las relaciones de proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes de la forma *n%* con la expresión "por cada 100, *n*".
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, empleen procedimientos diversos en el cálculo de porcentajes y no algoritmos convencionales.
Estrategias		- Encontrar formas de calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto a otra.

- Sistemas de representación

Problema 1

El problema menciona que Pepe ahorró \$500, quiere comprar un reloj que cuesta \$450, y resulta que el reloj tiene un descuento, después de comprar el reloj le quedan \$140 pesos. Y la pregunta es ¿cuál es el descuento que tenía el reloj? De acuerdo con las consideraciones previas se menciona que el descuento del reloj es de \$90, es decir, \$50 pesos era lo que iba sobrar en un principio ya que el reloj costaba \$450, si al final le sobro \$140, entonces $\$140 - \$50 = \$90$, así que el descuento es de \$90 pesos, pero el problema solicita el porcentaje que le corresponde a esos \$90 pesos. Para dar respuesta se puede multiplicar $\$90 \times \frac{100\%}{\$450} = 20\%$. Con base en lo anterior, se emplea la multiplicación y la división con sus respectivos algoritmos, es posible realizar los cálculos con o sin calculadora, las relaciones de igualdad se encuentran en un sentido numérico. Con base en las características anteriores, el problema favorece el sistema de representación numérico.

Problema 2

El problema menciona que la tienda donde Pepe compró el reloj hay otros artículos que tienen un precio en lista y un precio rebajado. De modo que el problema solicita determinar el descuento en porcentaje que se aplicó al artículo. La solución consiste en restar al precio de lista el precio rebajado para saber el descuento en pesos (\$), posteriormente realizar $descuento\ en\ \$ \times \frac{100\%}{Precio\ de\ lista} = descuento\ en\ \%$, siendo la forma de determinar el descuento que tiene que cada artículo. Con base en lo anterior, se emplea la multiplicación y la división con sus respectivos algoritmos, es posible realizar los cálculos con o sin calculadora, las relaciones de igualdad se encuentran en un sentido numérico. Con base en las características anteriores, el problema favorece el sistema de representación numérico

- Fenomenología

Los dos problemas se contextualizan en una tienda en la que una persona realiza la compra de un producto, aludiendo a una actividad cotidiana. En este sentido se considera que los problemas se relacionan con una situación personal.

Desafío matemático 32. El IVA

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas, los que se presentan en las figuras 44 y 45.

Figura 44

Problema 1 del desafío matemático 32, sexto grado.

1. El precio de una refacción es de $240.00. A esta cantidad se debe agregar 16% de IVA. ¿Cuál es el precio de la refacción con el IVA incluido?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 45

Problema 2 del desafío matemático 32, sexto grado.

2. Otra refacción cuesta $415.28, con el IVA incluido. ¿Cuál es el precio de la refacción sin el IVA?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Buscar maneras para calcular porcentajes mayores a 100%*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 23).

Tabla 23

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 32, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- IVA. - Porcentaje. - Datos conocidos. - Valor faltante.
	Notaciones	- n%. - Números naturales en pesos.
	Convenios	- La expresión n% de descuento representa “por cada $100, se descuenta $*n*”.
	Resultados	- El por cierto corresponde a un parte de un todo.
Conceptos		- Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. - Aditivas. *Relaciones de proporcionalidad* - La comparación entre magnitudes por cada 100, n, emplea de manera implícita el concepto de razón y proporción, los cuales son propios de las relaciones de

		proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Relacionar los porcentajes de la forma *n%* con la expresión "por cada 100, *n"*.
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, empleen procedimientos diversos en el cálculo de porcentajes y no algoritmos convencionales.
Estrategias		- Resolver problemas de IVA con diferentes maneras para calcular porcentajes mayores a 100%.

- Sistemas de representación

Problema 1

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas, para este problema se consideran tres estrategias de resolución: la primera consiste en calcular el 16% de $240 por medio de la siguiente forma $16\% \times \frac{\$240}{100\%} = \$38.4$ y sumar $\$240 + \$38.4 = \$278.4$, así que el precio de la refacción con el IVA es de $278.4; la segunda, es multiplicar por $\frac{116}{100}$, es decir, multiplicar $240 por 116% y después dividir el resultado entre 100%, con lo que se obtiene $278.40; la tercera, consiste en multiplicar 240 por 1.16, ya que multiplicar por 1 equivale a calcular el 100%, por tanto 1.16 equivale a calcular el 116%.

En las tres estrategias de resolución implica realizar operaciones de suma, multiplicación y división con sus respectivos algoritmos, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora en términos numéricos, las relaciones de igualdad se plantean en un sentido numérico. Con base en lo anterior, se favorece el sistema de representación numérico.

Problema 2

Para el segundo problema se pretende determinar el precio de una refacción, pero sin el IVA, en el apartado de consideraciones previas se considera pensar que $415.28 es el 116% y, a partir de ello, calcular el 100%, lo que implica dividir $415.28 en 116 partes y el resultado (una parte) multiplicarlo por 100 ($\frac{415.28}{116} = 3.58,\ 3.58 \times 100 = 358$).

En la estrategia de resolución implica realizar operaciones de multiplicación y división con sus respectivos algoritmos, las operaciones se pueden realizar con o sin calculadora en términos numéricos, las relaciones de igualdad de plantean en un sentido numérico. Con base en lo anterior, se favorece el sistema de representación numérico.

- Fenomenología

Ambos problemas se contextualizan en la compra de refacciones, se requiere determinar el precio final o precio en lista, lo que se enmarca en una situación cotidiana de un trabajador conllevando al empleo del concepto de porcentaje. De modo que se favorece una situación laboral.

Desafío matemático 49. ¿Cuál es el mejor precio?

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea cuatro problemas. Los problemas se presentan en las figuras 46, 47, 48 y 49.

Figura 46

Problema 1 del desafío matemático 49, sexto grado.

1. El paquete A tiene 5 panes y cuesta $15, el paquete B tiene 6 panes y cuesta $12. ¿En qué paquete el pan es más barato?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 47

Problema 2 del desafío matemático 49, sexto grado.

2. En la papelería, una caja con 15 colores cuesta $30 y en la cooperativa de la escuela, una caja con 12 colores de la misma calidad cuesta $36. ¿En qué lugar es preferible comprar los colores?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 48

Problema 3 del desafío matemático 49, sexto grado.

3. El paquete de galletas A cuesta $6 y contiene 18 piezas. El paquete B contiene 6 galletas y cuesta $3. ¿Qué paquete conviene comprar?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 49

Problema 4 del desafío matemático 49, sexto grado.

4. En el mercado, un kilogramo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta $10. En la huerta de don José, 8 naranjas llegan a pesar un kilogramo y cuestan $8. ¿En dónde conviene comprar las naranjas?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Resolver problemas que impliquen determinar si una razón del tipo "por cada n, m" es mayor o menor que otra sin necesidad de realizar cálculos numéricos*. De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 24).

Tabla 24

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 49, sexto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Razón.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- Por cada n, m.
- Números naturales.</td></tr>
</table>

	Convenios	- La expresión "por cada *n, m*" implica una comparación entre dos magnitudes.
	Resultados	- La expresión "por cada *n, m*" es una forma de escribir de manera verbal una razón.
Conceptos		- Razón como comparador de cantidades. - Proporción.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad* - El problema emplea razones de manera verbal o escrita, y con base en las razones que se interpreten decidir ante la situación del problema, en este sentido las razones son propias de las relaciones de proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*".
Razonamientos		- Deductivo–Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*".
Estrategias		- Resolver problemas que impliquen determinar si una razón del tipo "por cada *n, m*" es mayor o menor que otra, sin necesidad de realizar cálculos numéricos.

- Sistemas de representación

Los cuatro problemas tienen la intención de comparar y determinar si una razón del tipo "por cada *n*, *m*" es mayor o menor que otra sin necesidad de realizar cálculos numéricos. Bajo esta lógica de proceder, no se favorece ningún sistema de representación.

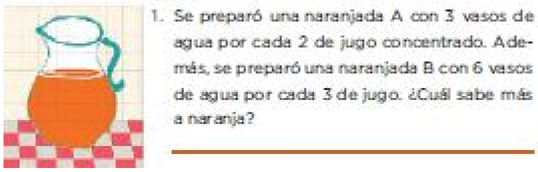
- Fenomenología

Los problemas plantean situaciones en las que se requiere tomar una decisión con la intención de ahorrar al comprar en el lugar que venda más económico, este tipo de situaciones a menudo se presentan en la vida cotidiana, de modo que es necesario el empleo de conocimientos de proporcionalidad, el análisis de cada problema evidencia que corresponden a situaciones personales.

Desafío matemático 50. ¿Cuál está más concentrado?

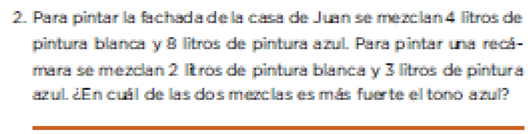
Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas. los problemas se presentan en las figuras 50 y 51.

Figura 50
Problema 1 del desafío matemático 50, sexto grado.


1. Se preparó una naranjada A con 3 vasos de agua por cada 2 de jugo concentrado. Además, se preparó una naranjada B con 6 vasos de agua por cada 3 de jugo. ¿Cuál sabe más a naranja?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 51
Problema 2 del desafío matemático 50, sexto grado.


2. Para pintar la fachada de la casa de Juan se mezclan 4 litros de pintura blanca y 8 litros de pintura azul. Para pintar una recámara se mezclan 2 litros de pintura blanca y 3 litros de pintura azul. ¿En cuál de las dos mezclas es más fuerte el tono azul?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Resolver problemas de comparación entre dos razones igualando un término en ambas, duplicando o triplicando los términos de una de ellas.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 25).

Tabla 25
Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 50, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Razón.
	Notaciones	- Por cada *n, m.* - Números naturales.
	Convenios	- La expresión “por cada *n, m*” implica una comparación entre dos magnitudes.
	Resultados	- La expresión “por cada *n, m*” es una forma de escribir de manera verbal una razón.
Conceptos		- Razón como comparador de cantidades. - Proporción.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad* - El problema emplea razones de manera verbal o escrita, y con base en las razones que se interpreten decidir ante la situación del problema, en este sentido las razones son propias de las relaciones de proporcionalidad, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Aplicar procedimientos para obtener razones equivalentes.

		- Comparar dos razones del tipo “por cada *n, m*”.
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparar dos razones del tipo “por cada *n, m*”.
Estrategias		- Resolver problemas de comparación entre dos razones igualando un término en ambas, duplicando o triplicando los términos de una de ellas.

- Sistemas de representación

Problema 1

De acuerdo con el apartado de consideraciones previas es importante notar que la naranjada A preparada con 6 vasos de agua, le corresponden 4 vasos de jugo concentrado. Entonces, si la naranjada B se prepara con la misma cantidad de vasos de agua (6 vasos) y 3 vasos de jugo, la naranjada A contiene y sabe más a naranja. Para responder es necesario reconocer que ambas naranjadas comparten una misma cantidad, es decir en ambas se agregaron 6 vasos de agua, pero cantidades diferentes de jugo de naranja, siendo posible tener un punto de comparación y notar lo que hace la diferencia entre una naranjada y otra. En este sentido el problema se orienta hacia el análisis, la reflexión, la comparación, más que a la realización de cálculos numéricos, por lo tanto, no se favorece algún tipo de representación.

Problema 2

El problema menciona que se combinan dos pinturas para obtener un tono de color azul, para la fachada se combinan 4 litros de pintura blanca y 8 litros de pintura azul, para el cuarto se combinan 2 litros de pintura blanca y 3 litros de pintura azul, la pregunta es ¿En cuál el tono de color azul es más fuerte?

En las consideraciones previas se menciona que la forma de solucionar este problema es transformando una razón en otra equivalente, pero ésta debe tener una cantidad igual a alguna de la otra razón. La información de partida es mezclar 4 litros de pintura blanca y 8 litros de pintura azul para pintar la fachada (primera razón) y para pintar la recamara mezclar 2 litros de pintura blanca y 3 litros de pintura azul (segunda razón).

Para este proceso hay dos posibilidades: La primera implica duplicar las cantidades de pintura de la recámara, $2\ litros\ de\ pintura\ blanca \times 2 = 4\ litros\ de\ pintura\ blanca$ y $3\ litros\ de\ pintura\ azul \times 2 = 6\ litros\ de\ pintura\ azul$, obteniendo de esta manera 4 litros de pintura blanca como la cantidad común o igual en ambas razones. Por lo que usaran 8 litros de pintura azul para la fachada y 6 litros de pintura azul para el cuarto, de modo que el tono que color azul más fuerte es el de la fachada.

La segunda estrategia es calcular la mitad de las cantidades de pintura de la fachada, $4\ litros\ de\ pintura\ blanca \div 2 = 2\ litros\ de\ pintura\ blanca$ y $8\ litros\ de\ pintura\ azul \div 2 = 4\ litros\ de\ pintura\ azul$ obteniendo de esta manera 2 litros de pintura blanca como la cantidad común o igual, de modo que 4 litros de pintura azul para la fachada y 3 litros de pintura azul para el cuarto son las cantidades diferentes. En ambos casos resulta que el tono de la pintura azul más fuerte es el de la fachada. Con base en las estrategias, se observa el empleo de la noción de duplicar o de mitad, los cuales implican una multiplicación o división con sus respectivos algoritmos, se plantean operaciones en términos numéricos, las operaciones se pueden resolver con o sin calculadora y las relaciones de igualdad se establecen en un sentido numérico. Por lo tanto, se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean dos problemas, el primero refiere a la preparación de jugo y el segundo a la preparación de pintura con cierto tono, estas situaciones forman parte del quehacer diario, teniendo que aplicar de manera consciente o inconsciente los conocimientos de proporcionalidad, el análisis de cada problema evidencia que corresponden a situaciones personales.

Desafío matemático 51. Promociones

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas. Los problemas se presentan en las figuras 52 y 53.

Figura 52
Problema 1 del desafío matemático 51, sexto grado.

1. En la ciudad donde vive Carlos se instaló una feria y en uno de los puestos se ofrece una promoción: ganar 2 regalos si se acumulan 10 puntos. En otro dan 3 regalos por cada 12 puntos. ¿Cuál puesto tiene la mejor promoción?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 53
Problema 2 del desafío matemático 51, sexto grado.

2. En la feria se anunciaron más promociones. En los caballitos, por cada 6 boletos comprados se regalan 2 más. En las sillas voladoras, por cada 9 boletos comprados se regalan 3. ¿En qué juego se puede subir gratis más veces?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Obtener el valor unitario para resolver problemas en los que se comparan razones.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 26).

Tabla 26

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 51, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Razón.
	Notaciones	- Por cada *n, m*. - Números naturales.
	Convenios	- La expresión “por cada *n, m*” implica una comparación entre dos magnitudes.
	Resultados	- La expresión “por cada *n, m*” es una forma de escribir de manera verbal una razón.

Conceptos		- Razón como comparador de cantidades. - Proporción. - Valor unitario.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad* - El valor unitario explícito o implícito establece una relación de proporcionalidad entre las magnitudes heterogéneas mediante el empleo de razones y proporciones. Además, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Determinar el valor unitario en problemas proporcionales. - Comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*"
Razonamientos		- Deductivo–Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*"
Estrategias		- Obtener el valor unitario para resolver problemas en los que se comparan razones.

- Sistema de representación

Problema 1

El problema menciona que en un puesto se ganan 2 regalos si se acumulan 10 puntos y en otro puesto se ganan 3 regalos si se acumulan 12 puntos y la pregunta es ¿Qué puesto tiene la mejor promoción? De acuerdo con el apartado de consideraciones previas el problema se resuelve calculando el valor unitario para cada puesto y con base en este responder la pregunta.

Para el caso del primer puesto: se divide $10 \div 2 = 5$, siendo 5 el valor unitario, es decir, un regalo si acumulas 5 puntos; para el caso del puesto 2 se divide $12 \div 3 = 4$, siendo 4 el valor unitario, es decir, un regalo si acumulas 4 puntos. Por lo que conviene participar en el puesto 2. Como se nota, las operaciones son términos numéricos, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, el valor unitario tiene una interpretación de acuerdo con el problema, es decir, no es un único número para dar respuesta. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 2

En el problema se menciona que en el juego de caballitos la promoción es "en la compra de 6 boletos te obsequian 2", en el juego de las sillas voladoras la promoción es "en la compra de 9 boletos te regalan 3" y la pregunta es ¿En qué juego se puede subir gratis más veces? De acuerdo con el apartado de consideraciones previas el problema se resuelve calculando el valor unitario sobre los boletos de cada puesto y con base en ello este responder la pregunta. Para calcular el valor unitario sobre los boletos del juego de caballitos se divide $6 \div 2 = 3$, siendo 3 el valor unitario, es decir, por cada tres boletos que compres te obsequian 1. Mientras que para el juego de las sillas voladoras se divide $9 \div 3 = 3$, siendo 3 el valor unitario, es decir, por cada tres boletos que compres te obsequian 1. Por lo tanto, la promoción es la misma en los dos juegos. Como se nota, las operaciones se realizan usando términos numéricos, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, el valor unitario tiene una interpretación de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean dos problemas, en cada uno se refiere a la promoción ofertada en una feria, estas situaciones se presentan de manera real de modo que el empleo de los conocimientos de probabilidad permitiría decidir en qué lugar hay una mejor promoción, el análisis de cada uno evidencia que corresponden a situaciones personales.

Desafío matemático 71. ¿Qué música prefieres?

Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas. Los problemas se presentan en las figuras 54 y 55.

Figura 54

Problema 1 del desafío matemático 71, sexto grado.

1. A los alumnos de los grupos de sexto grado de una escuela primaria se les aplicó una encuesta sobre el tipo de música que prefieren. La música de banda fue de las más elegidas; en el grupo A, la seleccionaron 1 de cada 2 alumnos; en el B, 3 de cada 4; y en el C, 7 de cada 10. ¿Qué grupo tiene mayor preferencia por este género de música?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 55

Problema 2 del desafío matemático 71, sexto grado.

2. Con la misma encuesta, en los grupos de quinto grado se obtuvieron los siguientes resultados: en el grupo A, 50% de los estudiantes eligieron el hip hop y una cuarta parte la música de banda. En el B, 2 de cada 5 niños prefirieron la música grupera y 1 de cada 2 eligió el hip hop. ¿En qué grupo hay mayor preferencia por el hip hop?

¿Qué tipo de música, grupera o de banda, gusta más entre los alumnos de quinto grado?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Comparar razones dadas en forma de fracción o como porcentajes y determinen cuál es mayor o menor convirtiéndolas todas a una misma forma.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 27).

Tabla 27

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 71, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Razón. - Fracción. - Porcentaje.
	Notaciones	- Por cada *n, m*. - Números naturales y decimales. - $n\%$. - a/b.
	Convenios	- La expresión "por cada *n, m*" implica una comparación entre dos magnitudes.
	Resultados	- La expresión "por cada *n, m*" es una forma de escribir de manera verbal una razón. - La expresión $n\%$ expresa la parte de un todo.
Conceptos		- Razón como comparador de cantidades. - Proporción. - Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad*
Campo procedimental		
Destrezas		- Comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*", en fracción o porcentaje.
Razonamientos		- Deductivo – Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparando dos razones del tipo "por cada *n, m*".
Estrategias		- Resolver problemas de proporcionalidad comparando razones dadas en forma de fracción o como porcentajes y determinen cuál es mayor o menor convirtiéndolas todas a una misma forma.

- Sistemas de representación

Problema 1

Las expresiones 1 de cada 2 alumnos, 3 de cada 4 y 7 de 10, se pueden escribir como fracciones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ y $\frac{7}{10}$ respectivamente. Lo anterior permite comparar y mencionar qué grupo tiene mayor preferencia por la música de banda. Si no fuera posible comparar por ser fracciones de diferente denominador se sugiere transformar las fracciones a un mismo denominador o bien convertir las fracciones a números decimales. Para lograr lo anterior se procede de la siguiente manera:

Para transformar la fracción $\frac{1}{2}$, multiplicamos el numerador y el denominador por 10 obteniendo lo siguiente $1 \times 10 = 10$ y $2 \times 10 = 20$ así la fracción equivalente o transformada es $\frac{10}{20}$. La fracción $\frac{1}{2}$, para transformarla a porcentaje dividimos uno entre dos y posteriormente el resultado lo multiplicamos por 100, $1 \div 2 = 0.5, 0.5 \times 100 = 50\%$. Por lo que $\frac{1}{2} = \frac{10}{20} = 0.5 = 50\%$

Para transformar la fracción $\frac{3}{4}$, multiplicamos el numerador y el denominador por 5 obteniendo lo siguiente $3 \times 5 = 15$ y $4 \times 5 = 20$ así la fracción equivalente o transformada es $\frac{15}{20}$. La fracción $\frac{3}{4}$, para transformarla a porcentaje dividimos tres entre cuatro y posteriormente el resultado lo multiplicamos por 100, $3 \div 4 = 0.75$, $0.75 \times 100 = 75\%$. De modo que $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = 0.75 = 75\%$

Y para transformar la fracción $\frac{7}{10}$, multiplicamos el numerador y el denominador por dos obteniendo lo siguiente $7 \times 2 = 14$ y $10 \times 2 = 20$ así la fracción equivalente o transformada es $\frac{14}{20}$. La fracción $\frac{7}{10}$, para transformarla a porcentaje dividimos siete entre diez y posteriormente el resultado lo multiplicamos por 100, $7 \div 10 = 0.7$, $0.7 \times 100 = 70\%$. Por lo que $\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = 0.7 = 70\%$

Una vez calculado los porcentajes de cada grupo se obtuvo:
$\frac{1}{2} = \frac{10}{20} = 0.5 = 50\%$; $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = 07.5 = 75\%$; $\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = 0.7 = 70\%$
Por lo tanto, el grupo que tiene mayor preferencia por la música de banda es el grupo donde 3 de cada 4 alumnos la eligieron.

Como se nota, las operaciones son en términos numéricos, se emplean los algoritmos de la multiplicación y la división, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, se emplean representaciones diferentes para los valores ya sea en fracción, decimal o porcentaje, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 2
En 5 ° A, se menciona que 50% de los estudiantes elige hip hop y una cuarta parte elige banda, en 5° B se tienen que 2 de cada 5 estudiantes eligen banda y 1 de cada 2 elige hip hop. La información anterior se puede escribir en fracciones o porcentajes para comparar y responder en cual grupo hay mayor preferencia de hip hop. Si se desea comparar en fracciones entonces tenemos lo siguiente:
En 5°A tenemos que $50\% = \frac{1}{2}$ de hip hop y $\frac{1}{4} =$ 25% de banda.
En 5°B tenemos $\frac{2}{5} = 40\%$ de hip hop y $\frac{1}{2} = 50\%$ de banda.
Si se compara en términos de porcentaje tenemos lo siguiente:
En 5°A tenemos que 50% de alumnos prefieren hip hop y el 25% prefiere banda
En 5°B tenemos el 40% de los estudiantes prefieren hip hop y el 50% prefiere banda.

Para realizar las conversiones de fracción a porcentaje o viceversa se usan operaciones numéricas, es decir los algoritmos de la multiplicación y la división, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, se emplea representaciones diferentes para los valores ya sea en fracción o porcentaje, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean dos problemas donde el interés es el género de música que prefieren los estudiantes de ciertos grupos en sexto grado, el análisis de cada problema evidencia que corresponden a situaciones personales relacionadas con la vida cotidiana.

Desafío matemático 72. ¿Qué conviene comprar?

Este desafío está conformado por dos consignas, las cuales plantean tres problemas, los problemas se presentan en las figuras 56, 57 y 58.

Figura 56

Problema 1 de la consigna 1, desafío matemático 72, sexto grado.

1. En la tienda Todo es más Barato venden dos tipos de jamón de la misma calidad; por 250 gramos de jamón marca San Roque se pagan $25, mientras que 400 gramos de jamón marca El Torito cuestan $32. ¿Cuál jamón conviene comprar?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 57

Problema 2 de la consigna 1, desafío matemático 72, sexto grado.

2. En la paletería San Agustín, el envase con 4 litros de nieve cuesta $140, y en la Santa Mónica, litro y medio de la misma nieve cuesta $54. ¿En cuál paletería es más barato este tipo de nieve?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 58

Problema de la consigna 2, desafío matemático 72, sexto grado.

Individualmente, resuelve el siguiente problema; puedes usar calculadora.

De acuerdo con la información de las tablas, ¿en qué farmacia conviene comprar?

	Medicamento	Precio
Farmacia La Pastilla	Alcohol (500 ml)	$12
	Caja con 20 tabletas de paracetamol	$8

	Medicamento	Precio
Farmacia El Jarabe	Alcohol (350 ml)	$8
	Caja con 24 tabletas de paracetamol	$10

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Transformar razones en otras equivalentes, pero con un término común, con la finalidad de poder compararlas.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 28).

Tabla 28
Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 72, sexto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Razón.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- Por cada n, m.
- Números naturales y decimales.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- La expresión “por cada n, m” implica una comparación entre dos magnitudes.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- La expresión “por cada n, m” es una forma de escribir de manera verbal una razón.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Razón como comparador de cantidades de dos magnitudes diferentes.
- Valor unitario.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales
- Multiplicativas.
Relaciones de proporcionalidad
- El valor unitario explicito o implícito establece una relación de proporcionalidad entre las magnitudes heterogéneas mediante el empleo de razones y proporciones. Además, si el problema no estuviera estructurado en términos de lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Campo procedimental</th></tr>
<tr><td>Destrezas</td><td></td><td>- Comparar dos razones del tipo “por cada n, m”.
- Determinar el valor unitario en problemas que implican comparar razones del tipo “por cada n, m”.</td></tr>
<tr><td>Razonamientos</td><td></td><td>- Deductivo–Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparando dos razones del tipo “por cada n, m”.</td></tr>
<tr><td>Estrategias</td><td></td><td>- Resolver problemas de proporcionalidad transformando razones en otras equivalentes, pero con un término común, con la finalidad de poder compararlas.</td></tr>
</table>

- Sistemas de representación

Problema 1

El problema plantea que en una tienda se tienen dos tipos de jamón, el primero cuesta $25 por 250 gramos y el segundo cuesta $32 por 400 gramos, la pregunta es ¿Qué jamón conviene comprar?

En el apartado de consideraciones previas se mencionan que la estrategia pertinente de acuerdo con la intencionalidad didáctica es transformar las razones a un término en común para compararlas, pero también existe la estrategia de valor unitario que permite comparar dos razones, en este sentido se describen ambas estrategias:

Transformando las razones a un término en común
De los gramos de jamón se determinará el termino en común, sabemos que 250 gramos cuestan \$25, así que dividimos entre 5 tanto los gramos como el precio, $250\ gr \div 5 = 50\ gr$ y $\$25 \div 5 = \$5$, por lo tanto 50 g cuestan \$5. Por otra parte, 400 g cuestan \$32, así que dividimos entre 8 tanto los gramos como el precio, $400\ gr \div 8 = 50\ gr$ y $\$32 \div 8 = \$4$, por lo tanto $50\ gr$ cuestan \$4. El primer jamón $50\ gr$ cuesta \$5 y el segundo jamón $50\ gr$ cuesta \$4. Por lo tanto, conviene comprar el segundo jamón por que cuesta \$1 menos, lo que lo hace el más económico.

Valor unitario para comparar dos razones
Sabemos que 250 gramos cuestan \$25, para saber cuántos gramos nos venden por un peso dividimos 250 entre 25, 250 ÷ 25 = 10, así que 10 gramos cuestan \$1. Por otra parte 400 gramos cuestan \$32, para saber cuántos gramos nos venden por un peso dividimos 400 entre 32, $400\ gr \div 32 = 12.5$, así que 12.5 gramos cuestan \$1. Concluyendo, conviene comparar el segundo jamón porque por un peso nos dan 12.5 gramos de jamón mientras que, del primer jamón, por un peso nos venden 10 gramos.

En ambas estrategias se emplean operaciones numéricas, es decir el algoritmo de la división, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 2
El problema menciona que en la paletería San Martín, se tiene un envase de 4 litros de nieve por \$140 y en la paletería Santa Mónica el envase de litro y medio de nieve cuesta \$54, la pregunta es ¿En cuál es más barato la nieve? En el apartado de consideraciones previas se menciona que la estrategia a usar es transformar las razones a un término común

Para la solución, sabemos que en la primera paletería 4 litros cuesta \$140 y en la segunda 1.5 litros cuesta \$54, si queremos comparar ambas paleterías respecto a 1.5 litros, es decir queremos saber cuánto cuesta 1.5 litros de nieve en ambas paleterías, entonces la razón a transformar es 4 litros por \$140, de modo que ambas cantidades las multiplicamos por $\frac{3}{8}$, $4\ litros \times \frac{3}{8} = 1.5\ litros$ y $\$140 \times \frac{3}{8} = \$52.5$, por lo tanto, un litro y medio en la primera paletería cuesta \$52.5, siendo esta en la que conviene comprar ya que en la segunda paletería por la misma cantidad de nieve cobran \$54.

En la estrategia de resolución del problema, conlleva al empleo del algoritmo de la multiplicación, por lo que para transformar una razón se procura un término en común respecto de alguna de las razones del problema. Como se observa, se emplean las operaciones en términos numéricos, se emplea el algoritmo de la multiplicación, estos se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 3
El problema considera dos farmacias que ofrecen los mismos productos, pero en presentaciones y precios diferentes. La farmacia “La pastilla” vende 500 ml de alcohol a $12 y 20 tabletas de paracetamol a $8, la farmacia “El jarabe” vende 350 ml de alcohol a $8 y 24 pastillas de paracetamol a $10. La pregunta es ¿En cuál farmacia conviene comprar? En el apartado de consideraciones previas sugiere calcular el valor unitario para comparar y responder a la pregunta planteada. En la farmacia La pastilla los valores unitarios son los siguientes: 500 ml de alcohol en $12, si se divide $12 \div 500 = 0.024$, es decir, un mililitro de alcohol por $0.024, 20 pastillas por $8 si se divide $8 \div 20 = 0.4$, es decir, una pastilla por $0.4. En la farmacia El jarabe los valores unitarios son los siguientes: 350 ml por $8, si se divide $8 \div 350 = 0.022$, es decir, un mililitro de alcohol por $0.022, 24 pastillas en $10, si se divide $10 \div 24 = 0.41$. Con base en los valores unitarios conviene comprar el alcohol en la farmacia El jarabe y las pastillas en la farmacia La pastilla.

Como se observa, en la estrategia se emplean las operaciones numéricas, usando los algoritmos de la división, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

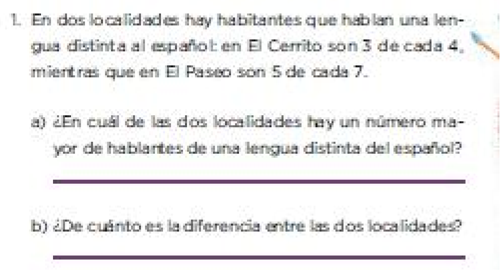
- Fenomenología

Los problemas plantean situaciones en las que se requiere tomar una decisión con la intención de ahorrar al comprar en el lugar que más convenga, este tipo de situaciones a menudo se presentan en la vida cotidiana y de manera real, de modo que es necesario el empleo de conocimientos de proporcionalidad, para la toma de decisiones, el análisis de cada problema evidencia que corresponden a situaciones personales.

Desafío matemático 84.
Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea dos problemas. Los problemas se presentan en las figuras 59 y 60.

Figura 59.

Problema 1 del desafío matemático 84, sexto grado.



1. En dos localidades hay habitantes que hablan una lengua distinta al español: en El Cerrito son 3 de cada 4, mientras que en El Paseo son 5 de cada 7.

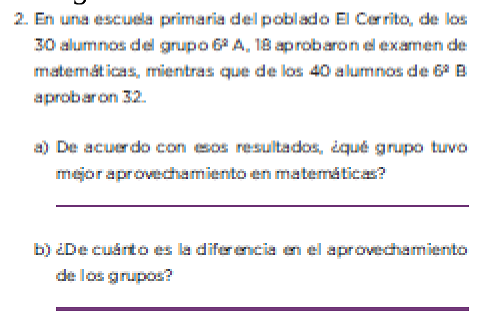
a) ¿En cuál de las dos localidades hay un número mayor de hablantes de una lengua distinta del español?

b) ¿De cuánto es la diferencia entre las dos localidades?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 60

Problema 1 del desafío matemático 84, sexto grado.



2. En una escuela primaria del poblado El Cerrito, de los 30 alumnos del grupo 6º A, 18 aprobaron el examen de matemáticas, mientras que de los 40 alumnos de 6º B aprobaron 32.

a) De acuerdo con esos resultados, ¿qué grupo tuvo mejor aprovechamiento en matemáticas?

b) ¿De cuánto es la diferencia en el aprovechamiento de los grupos?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica *Resolver problemas que implican representar razones mediante una fracción, y compararlas utilizando fracciones equivalentes.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 29).

Tabla 29

Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 84, sexto grado.

Campo conceptual		
Hechos	Términos	- Razón.
	Notaciones	- Por cada *n*, *m*. - Números naturales y decimales. - $n\%$. - a/b.
	Convenios	- La expresión "por cada *n*, *m*" implica una comparación entre dos magnitudes.
	Resultados	- La expresión "por cada *n*, *m*" es una forma de escribir de manera verbal una razón. - La expresión $n\%$ expresa la parte de un todo.
Conceptos		- Razón como comparador de cantidades. - Proporción. - Porcentaje.
Estructuras		*Estructuras de los números naturales* - Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad* - Las razones se establecen para comparar y decidir, al trasformar razones a razones equivalentes con un término en común se emplea de manera implícita el

		concepto de proporción. Tales conceptos están presentes porque el problema está estructurado en lo proporcional.
Campo procedimental		
Destrezas		- Convertir una razón a otra notación. - Comparar dos razones del tipo "por cada *n, m*", en fracción o porcentaje.
Razonamientos		- Deductivo–Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparando dos razones del tipo "por cada *n*, *m*".
Estrategias		- Resolver problemas que implican representar razones mediante una fracción, y compararlas utilizando fracciones equivalentes.

- Sistemas de representación

Problema 1

El problema plantea la situación de dos localidades en las que se habla otra lengua distinta al español. En "El Cerrito" son 3 de cada 4 personas que hablan otra lengua, mientras que en "El Paseo" son 5 de cada 7. Las preguntas son: ¿En cuál localidad hay mayor número de habitantes que habla una lengua distinta al español? ¿Cuál es la diferencia entre las dos localidades? De acuerdo con las consideraciones previas la estrategia más pertinente para responder las preguntas es representar razones mediante una fracción, y compararlas utilizando fracciones equivalentes con base en la información de cada localidad. Así que se procede de la siguiente manera:

- El Cerrito: 3 de cada 4 habitantes hablan otra lengua $= \frac{3}{4}$
- El Paseo: 5 de cada 7 habitantes hablan otra lengua $= \frac{5}{7}$

Ambas fracciones se trasforman a fracciones equivalentes, pero procurando que exista un término en común entre estas:

En la primera razón se multiplica tanto el numerador como el denominador por 7, $3 \times 7 = 21$ y $4 \times 7 = 28$, así que la razón transformada es $\frac{21}{28}$. En la segunda razón se multiplica tanto el numerador como el denominador por 4, $5 \times 4 = 20$ y $7 \times 4 = 28$, así que la razón transformada es $\frac{20}{28}$.

Al comparar las fracciones$\frac{21}{28}$ y $\frac{20}{28}$ se observa que en la localidad de El cerrito tiene más personas que hablan otra lengua distinta al español y la diferencia entre una localidad y otra es de $\frac{1}{28}$.

Como se observa, en la estrategia se emplean las operaciones en términos numéricos, se emplean los algoritmos de la multiplicación, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 2
Para este problema se considera que en una escuela primaria de la localidad de "El cerrito", en 6°A, 18 de 30 alumnos aprobaron el examen de matemáticas y en 6°B, 32 de 40 aprobaron. Las preguntas son: ¿Qué grupo tiene mejor aprovechamiento? ¿De cuánto es la diferencia de aprovechamiento entre los dos grupos? En el apartado de consideraciones previas sugiere que la estrategia más adecuada es representar razones mediante una fracción, y compararlas utilizando fracciones equivalentes con base en la información de cada grupo. Así que se procede de la siguiente manera:

- 6°A: 18 de 30 alumnos aprobaron matemáticas= $\frac{18}{30}$
- 6°B: 32 de 40 alumnos aprobaron matemáticas= $\frac{32}{40}$

Ambas fracciones se trasforman a fracciones equivalentes, pero procurando exista un término en común entre estas:
En la primera razón se divide tanto el numerador como el denominador por 6, $18 \div 6 = 3$ y $30 \div 6 = 5$, así que la razón transformada es $\frac{3}{5}$. En la segunda razón dividimos tanto el numerador como el denominador por 8, $32 \div 8 = 4$ y $40 \div 8 = 5$, así que la razón transformada es $\frac{4}{5}$.

Al comparar las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ se observa que 6°B tiene un mejor aprovechamiento ya que de 5 alumnos 4 aprobaron matemáticas, mientras que en el otro grupo de 5 alumnos 3 aprobaron y la diferencia entre un grupo y otro es de un alumno.

Como se observa, en la estrategia se emplean las operaciones en términos numéricos, se emplean los algoritmos de la división en fracciones, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean dos problemas, en la cual las situaciones mencionan que en una comunidad están presentes un lenguaje indígena y el castellano, algo que hoy se presenta en la vida cotidiana y manera real que forma personal se puede experimentar, el análisis de cada uno evidencia situaciones personales. Por lo tanto, en ambos problemas se favorece situaciones personales.

Desafío matemático 85. Hablemos de nutrición
Este desafío está conformado por una consigna, la cual plantea tres problemas que se apoyan de una tabla para responder las preguntas. Los problemas y la tabla se presentan en las figuras 61, 62, 63 y 64.

Figura 61
Problema 1 del desafío matemático 85, sexto grado.

1. Si comparamos el arroz, los frijoles y las tortillas, ¿cuál alimento es el más rico en carbohidratos?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 62
Problema 2 del desafío matemático 85, sexto grado.

2. Si consideramos el huevo, la carne de res y el pescado, ¿cuál alimento es el más rico en proteínas?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 63.
Problema 3 del desafío matemático 85, sexto grado

3. ¿Cuál es el alimento más rico en lípidos?

Nota: Tomado de SEP (2011f).

Figura 64
Tabla del desafío matemático 85, sexto grado

Alimento	Gramos	Carbohidratos	Proteínas	Lípidos
Arroz	100	80	7	1
Huevo	50	3	11	10
Carne de res	90	0	18	18
Pescado	50	0	12	2
Frijoles	120	60	22	2
Tortillas	25	15	2	1

Nota: Tomado de SEP (2011f).

- Estructura conceptual

El desafío matemático tiene como intencionalidad didáctica que, *A partir de la información explícita contenida en una tabla, resuelvan problemas que implican representar más de dos razones mediante fracciones y compararlas utilizando fracciones equivalentes.* De modo que al analizar en su totalidad el problema, junto con lo descrito en el apartado de consideraciones previas se construye la estructura conceptual que se favorece en el desafío matemático (Véase tabla 30).

Tabla 30
Campo conceptual y procedimental del desafío matemático 85, sexto grado.

<table>
<tr><th colspan="3">Campo conceptual</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hechos</td><td>Términos</td><td>- Razón.</td></tr>
<tr><td>Notaciones</td><td>- Por cada n, m.
- a/b.</td></tr>
<tr><td>Convenios</td><td>- La expresión “por cada n, m” implica una comparación entre dos magnitudes.</td></tr>
<tr><td>Resultados</td><td>- La expresión “por cada n, m” es una forma de escribir de manera verbal una razón.</td></tr>
<tr><td>Conceptos</td><td></td><td>- Razón como comparador de cantidades.
- Proporción.</td></tr>
<tr><td>Estructuras</td><td></td><td>Estructuras de los números naturales</td></tr>
</table>

		- Multiplicativas. *Relaciones de proporcionalidad* - Establecer razones y proporciones entre las magnitudes homogéneas para identificar el factor constante de proporcionalidad. Si el problema no estuviera estructurado en lo proporcional, tales conceptos no tendrían cabida.
Campo procedimental		
Destrezas		- Convertir una razón a otra notación. - Comparar dos razones del tipo “por cada *n, m*”, en fracción.
Razonamientos		- Deductivo–Numérico, decidir ante situaciones proporcionales comparando dos razones del tipo “por cada *n, m*”.
Estrategias		- A partir de la información explícita contenida en una tabla, resolver problemas que implican representar más de dos razones mediante fracciones y compararlas utilizando fracciones equivalentes.

- Sistemas de representación

Problema 1

Se presenta una tabla con diferentes alimentos y sus respectivos aportes nutrimentales, este problema compara el arroz, frijoles y tortillas, la pregunta es ¿Cuál aporta más carbohidratos? De acuerdo con las consideraciones previas se menciona que se representen las razones de cada alimento y posteriormente transformarlas a otras equivalentes con un término en común para comparar y responder a la pregunta. Las razones son las siguientes: arroz $\frac{80}{100}$, frijol $\frac{60}{120}$ y tortilla $\frac{15}{25}$. Transformando las razones a otras razones equivalentes se obtiene lo siguiente:

En la primera razón se divide tanto el numerador como el denominador entre 10, $80 \div 10 = 8$ y $100 \div 10 = 10$, así que la razón transformada es $\frac{8}{10}$. En la segunda razón se divide tanto el numerador como el denominador por 12, $60 \div 12 = 5$ y $120 \div 12 = 10$, así que la razón transformada es $\frac{5}{10}$. La tercera razón dividimos tanto en numerador como el denominador entre 5, $15 \div 5 = 3$ y $25 \div 5 = 5$, así que la razón transformada es $\frac{3}{5}$. Como la intención es que todas las razones tengan el mismo denominador, ahora el denominador y el numerador de $\frac{3}{5}$ se multiplican por 2, $3 \times 2 = 6$ y $5 \times 2 = 10$, por lo que se obtiene la razón $\frac{6}{10}$.

Comparando las fracciones $\frac{8}{10}, \frac{5}{10}$ y $\frac{6}{10}$ se observa que el arroz es el alimento que aporta más carbohidratos respecto de los frijoles y la tortilla.

Con base en la estrategia de solución, se usan operaciones numéricas, se emplea el algoritmo de la división en fracciones, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

Problema 2
En este problema interesa comparar entre el pescado, el huevo y la carne de res para determinar cuál tienen mayor aporte de proteínas. Las razones para cada alimento son: huevo $\frac{11}{50}$, pescado $\frac{12}{50}$ y carne de res $\frac{18}{90}$. Como se observa el huevo y el pescado tienen fracciones con un término común permitiendo comparar entre ellos, pero la carne de res tiene una razón diferente, así que la estrategia es transformar esta, para ello primero se divide tanto en numerador como el denominador por dos, 18$\div 2 = 9$ y $90 \div 2 = 45$, obteniendo como fracción equivalente $\frac{9}{45}$, posteriormente, esta fracción equivalente se divide tanto el numerador como el denominador por 9, $9 \div 9 = 1$ y $45 \div 9 = 5$, obteniendo como fracción equivalente $\frac{1}{5}$. En un tercer momento y último, la fracción $\frac{1}{5}$, la transformamos en fracción equivalente procurando que tenga el término en común denominador 50, así que tanto el numerador como el denominador se multiplican por 10, $1 \times 10 = 10$ y $5 \times 10 = 50$, obteniendo la fracción equivalente $\frac{10}{50}$.

De modo que de las razones a comparar son: huevo $\frac{11}{50}$, pescado $\frac{12}{50}$ y carne de res $\frac{10}{50}$. Las fracciones tienen en común el denominador, así que la comparación se realiza en los numeradores. Por lo que el alimento que tiene mayor aporte de proteínas es el pescado.

Con base en la estrategia de solución, se usan operaciones numéricas, se emplean los algoritmos de la división y la multiplicación en fracciones, las cuales se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, favorece el sistema de representación numérica.

Problema 3
En este problema interesa comparar entre el pescado, el huevo, arroz, frijol, tortillas y carne de res para determinar cuál tiene mayor aporte de lípidos. Las razones de cada alimento son: arroz $\frac{1}{100}$, carne de res $\frac{18}{90}$, frijoles $\frac{2}{120}$, huevo $\frac{10}{50}$, pescado $\frac{2}{50}$, tortilla $\frac{1}{25}$. En el aparatado de consideraciones previas se menciona que conviene transformar las fracciones a fracciones equivalentes de modo que compartan un término en común.
En la primera razón $\frac{1}{100}$, se multiplica tanto el numerador como el denominador por 3, $1 \times 3 = 3$ y $100 \times 3 = 300$, así que la fracción equivalente es $\frac{3}{100}$.

En la segunda razón $\frac{18}{90}$, primero se divide tanto el numerador como el denominador por 3, $18 \div 3 = 6$ y $90 \div 3 = 30$, obteniendo la fracción equivalente es $\frac{6}{30}$. Segundo, la razón $\frac{6}{30}$, se multiplica tanto el numerador y como el denominador por 10, $6 \times 10 = 60$ y $30 \times 10 = 300$, obteniendo la fracción equivalente de $\frac{60}{300}$.

En la tercera razón $\frac{2}{120}$, primero se divide tanto el numerador como el denominador por 2, $2 \div 2 = 1$ y $120 \div 2 = 60$, obteniendo la fracción equivalente de $\frac{1}{60}$. Segundo, en la razón $\frac{1}{60}$, se multiplica tanto el numerador como el denominador por 5, $1 \times 5 = 5$ y $60 \times 5 = 300$, obteniendo la fracción equivalente de $\frac{5}{300}$.

En la cuarta razón $\frac{10}{50}$, se multiplica tanto el numerador como el denominador por 6, $10 \times 6 = 60$ y $50 \times 6 = 300$, obteniendo la fracción equivalente de $\frac{60}{300}$.

En la quinta razón $\frac{2}{50}$, se multiplica el numerador y denominador por 6, $2 \times 6 = 12$ y $50 \times 6 = 300$, obteniendo la fracción equivalente $\frac{12}{300}$.

En la sexta razón $\frac{1}{25}$, se multiplica el numerador y el denominador por 12, $1 \times 12 = 12$ y $251 \times 2 = 300$, obteniendo la fracción equivalente $\frac{12}{300}$.

Ahora que las fracciones se han transformado a fracciones equivalentes procurando tener un término común entre ellas es posible comparar y determinar cuál de los alimentos tiene mayor aporte de lípidos, $\frac{3}{300}, \frac{6}{300}, \frac{5}{300}, \frac{60}{300}, \frac{12}{300}$ y $\frac{12}{300}$, siendo estos el huevo y la carne de res.

Con base en la estrategia de solución, se usan operaciones numéricas, se emplean los algoritmos de la división y la multiplicación en fracciones, se pueden realizar con o sin calculadora, las relaciones de igualdad son en un sentido numérico, los valores numéricos se interpretan de acuerdo con el problema. Por lo anterior, se favorece el sistema de representación numérica.

- Fenomenología

En este desafío se plantean tres problemas sobre situaciones de nutrición, es decir, interesa determinar que alimentos tienen mayor aporte calórico, grasos o proteicos, por lo que el análisis de cada uno evidencia situaciones personales, ya que este tipo de problemas se enfocan sobre actividades cotidianas. En este caso se usa la representación de dos o más razones mediante fracciones y compararlas utilizando fracciones equivalentes.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones con base en los resultados del análisis de contenido de los libros de texto de quinto y sexto grados de la Educación Primaria, organizados en las tres unidades de análisis: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, así como los mapas conceptuales correspondientes. Con ello se evidencian los significados que se favorecen en los textos mencionados. Finalmente, se presenta la discusión del contraste entre los resultados obtenidos y los de la literatura.

5.1. Resultados

5.1.1. Estructura conceptual

Respecto al contenido matemático proporcionalidad presentada en los libros de texto, se enfatiza en el significado de *proporcionalidad directa* en los grados quinto y sexto de la Educación Primaria, lo anterior se identificó al establecer relaciones de proporcionalidad directa con base en la naturaleza de los problemas multiplicativos planteados, los que pueden ser resueltos bajo tres estrategias según sea el caso: Factor constante de proporcionalidad, valor intermedio y factor interno.

Para el empleo de cada una de las estrategias mencionadas, implica el entendimiento y uso de otras ideas matemáticas, que organizadas e integradas son base para otros conceptos matemáticos que permiten construir la red de conceptos y significados matemáticos asociados al contenido de proporcionalidad.

El primer concepto relevante y que guarda una estrecha relación con el contenido de proporcionalidad es el de *razón*, esta evidencia tres usos importantes en los libros de texto: para ampliar figuras, comparar magnitudes y establecer relaciones de equivalencia entre dos o más razones entre magnitudes. Es decir, la ampliación de figuras refiere al empleo de la razón para aumentar las medidas de manera proporcional sin modificar su forma. La comparación de magnitudes está orientada a la comparación del tipo *n* por cada *m* entre magnitudes heterogéneas, con el propósito de identificar el valor unitario explícito o implícito, que permita determinar valores faltantes de un problema o situación; otra forma de comparación de magnitudes es la referida a la parte-todo de magnitudes homogéneas, es decir, del tipo *n* por cada *100*, representando el porcentaje de la forma *n%* o su equivalente a $\frac{n}{100}$ o bien como fracción simplificada.

El establecer equivalencias entre dos o más razones permite identificar un elemento invariante multiplicativo entre las magnitudes heterogéneas u homogéneas de un problema; esta forma de emplear a la razón permite definir un segundo concepto matemático relacionado con la proporcionalidad, que es *proporción*, este dota de sentido y validez el empleo de la regla de tres y las propiedades de las proporciones en problemas aditivos y multiplicativos. Además, los usos de la razón conllevan a determinar una cantidad fija *k* entre las magnitudes, que justo se define como *Factor constante de proporcionalidad*, siendo una estrategia de resolución para los problemas multiplicativos planteados en las consignas.

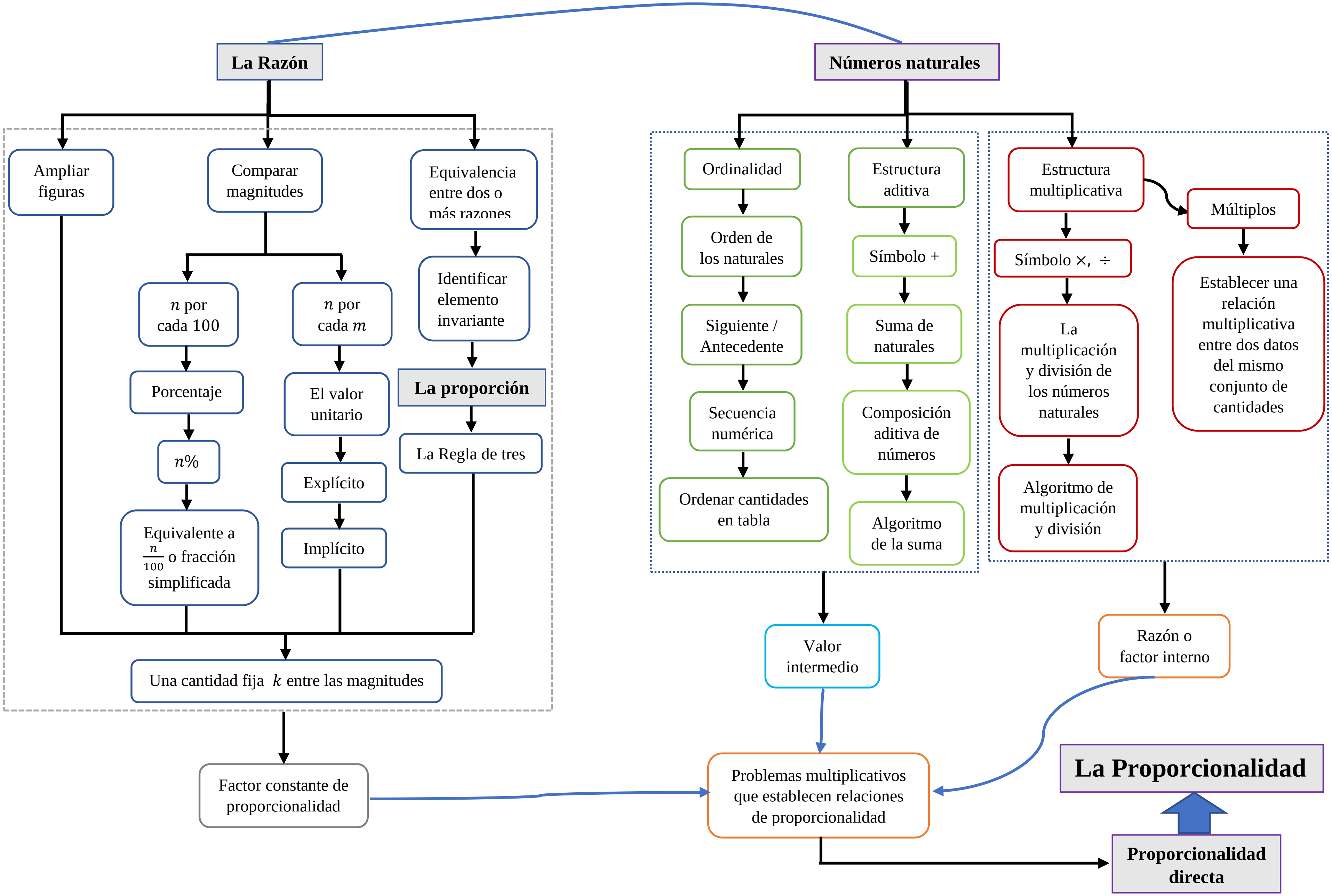
Un último concepto matemático relacionado con el contenido de proporcionalidad es el número *natural*. Este se emplea en la ordinalidad, en las estructuras aditiva y multiplicativa. Es decir, para el primer concepto se considera el orden de los números naturales bajo la idea de siguiente/antecedente, lo que permite generar secuencias numéricas, favoreciendo la habilidad de ordenar cantidades de magnitudes en tablas, respetando la ordinalidad de los números naturales. El segundo, estructura aditiva se caracteriza por el empleo del símbolo "+" para realizar la adición de números naturales, así como la composición aditiva de los mismos, lo que implica el uso del algoritmo de la suma; de manera particular, la composición aditiva de los números permite desarrollar la estrategia *Valor intermedio* para la resolución de problemas multiplicativos de valor faltante.

Y para el tercero, la estructura multiplicativa se caracteriza por el uso de los símbolos "×" y "÷", que representan a la multiplicación y a la división de números naturales, empleando sus respectivos algoritmos para realizar las operaciones necesarias en los problemas; el múltiplo, como noción matemática forma parte de las estructuras multiplicativas y permite establecer una relación del mismo tipo entre dos datos del conjunto de cantidades, definiéndose como *Razón o factor interno*, siendo ésta una estrategia más de resolución para problemas multiplicativos.

Los resultados obtenidos con base en la unidad de análisis *estructura conceptual* del contenido matemático de la proporcionalidad de los grados de quinto y sexto de la Educación Primaria, se presentan en el siguiente Mapa conceptual (Véase figura 65).

Figura 65

Mapa conceptual de la estructura conceptual del contenido matemático proporcionalidad que se favorece en los libros de texto de la Educación Primaria.

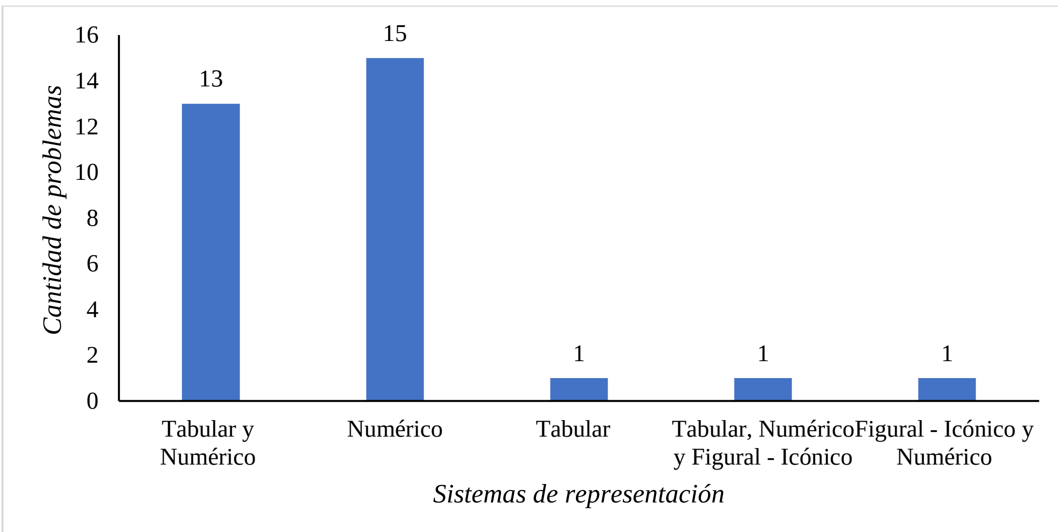


5.1.2. Sistemas de representación

En el libro de texto de quinto grado se contabilizaron 31 problemas para abordar el concepto de proporcionalidad, los sistemas de representación que se favorecen en dichos problemas son los siguientes: en trece se identificaron los sistemas de representación tabular y numérica; en quince el sistema de representación numérico; en un problema el sistema de representación tabular; en otro problema los sistemas de representación tabular, numérico y figural–icónico; por último, en un problema más los sistemas de representación figural-icónico y numérico (Véase figura 66).

Figura 66

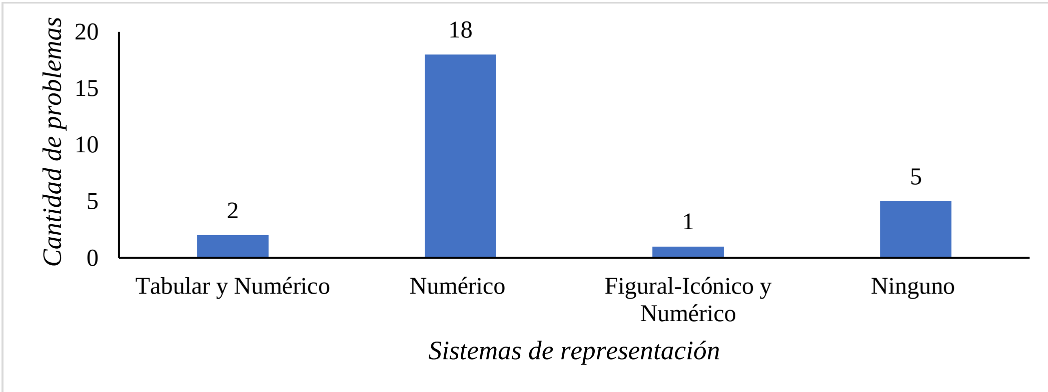
Sistemas de representación favorecidos en el libro de texto de quinto grado sobre el concepto de proporcionalidad.



Por otro lado, en el libro de texto de sexto grado se contabilizaron 26 problemas para el tratamiento del concepto de proporcionalidad, los sistemas de representación que se favorecen en dichos problemas son los siguientes: en dos se identificaron los sistemas de representación tabular y numérico; en dieciocho el sistema de representación numérico; en un problema los sistemas de representación figural-icónico y numérico; por último, en cinco no se identificó el uso de sistemas de representación ya que el interés se centró en el razonamiento para responder satisfactoriamente a los problemas (Véase figura 67).

Figura 67

Sistemas de representación que se favorecen en el libro de texto de sexto grado sobre el concepto de proporcionalidad.

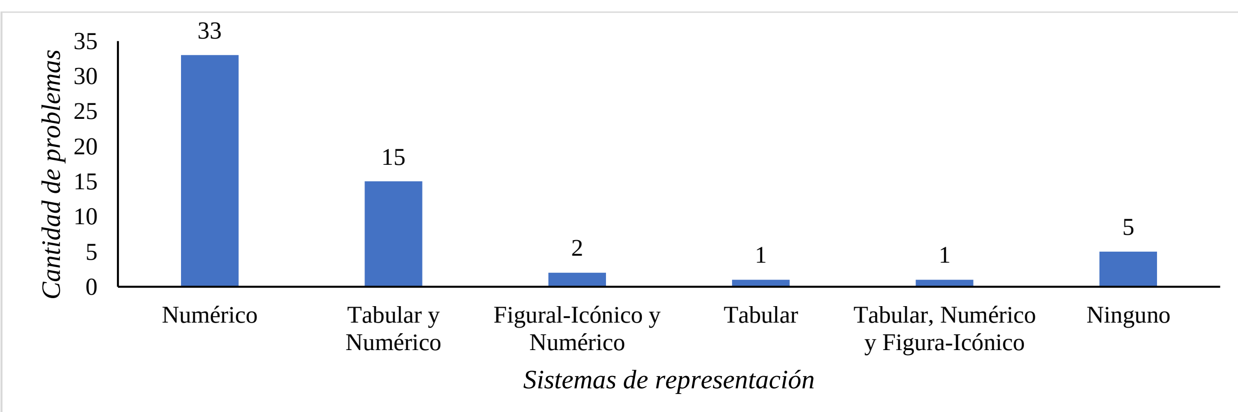


Como se ha mencionado, para la unidad de análisis *Sistemas de Representación* se consideraron como categorías a las representaciones: Numérico, Algebraico, Gráfico, Tabular y Figural-Icónico.

Con base en las categorías mencionadas, en total se revisaron 57 problemas en los cuales se trabaja el contenido de proporcionalidad. Los sistemas de representación favorecidos en los libros de texto de los grados quinto y sexto, estan distribuidos de la siguiente manera: en treinta y tres se identificó el sistema de representación numérico; en quince los sistemas de representación numérico y tabular; en un problema el sistema de representación tabular; en uno más los sistemas de representación tabular, numérico y figural-icónico; en dos los sistemas de representación figural-icónico y numérico; finalmente en cinco problemas se identificó que no se favorece algún sistema de representación (Véase figura 68).

Figura 68

Sistemas de representación que se favorecen en los libros de texto de quinto y sexto grados sobre el concepto de proporcionalidad.



Es importante resaltar que el sistema de representación tabular se favorece en un solo problema, pero en quince problemas se favorecen en conjunto los sistemas de representación tabular y numérico y solo en un problema se favorece además de los sistemas de representación tabular y numérico el sistema de representación figural-Icónico, de modo que en diecisiete problemas se favorece el sistema de representación tabular.

Por su parte el sistema de representación numérico se favorece en treinta y tres problemas, y como ya se mencionó en quince se favorece este sistema de representación, pero en conjunto con el tabular; en dos problemas se favorece los sistemas de representación numérico y figural-Icónico y en uno, se favorecen los sistemas de representación numérico, tabular y figural-Icónico, por tanto, el sistema de representación numérico se favorece en treinta y siete problemas en total.

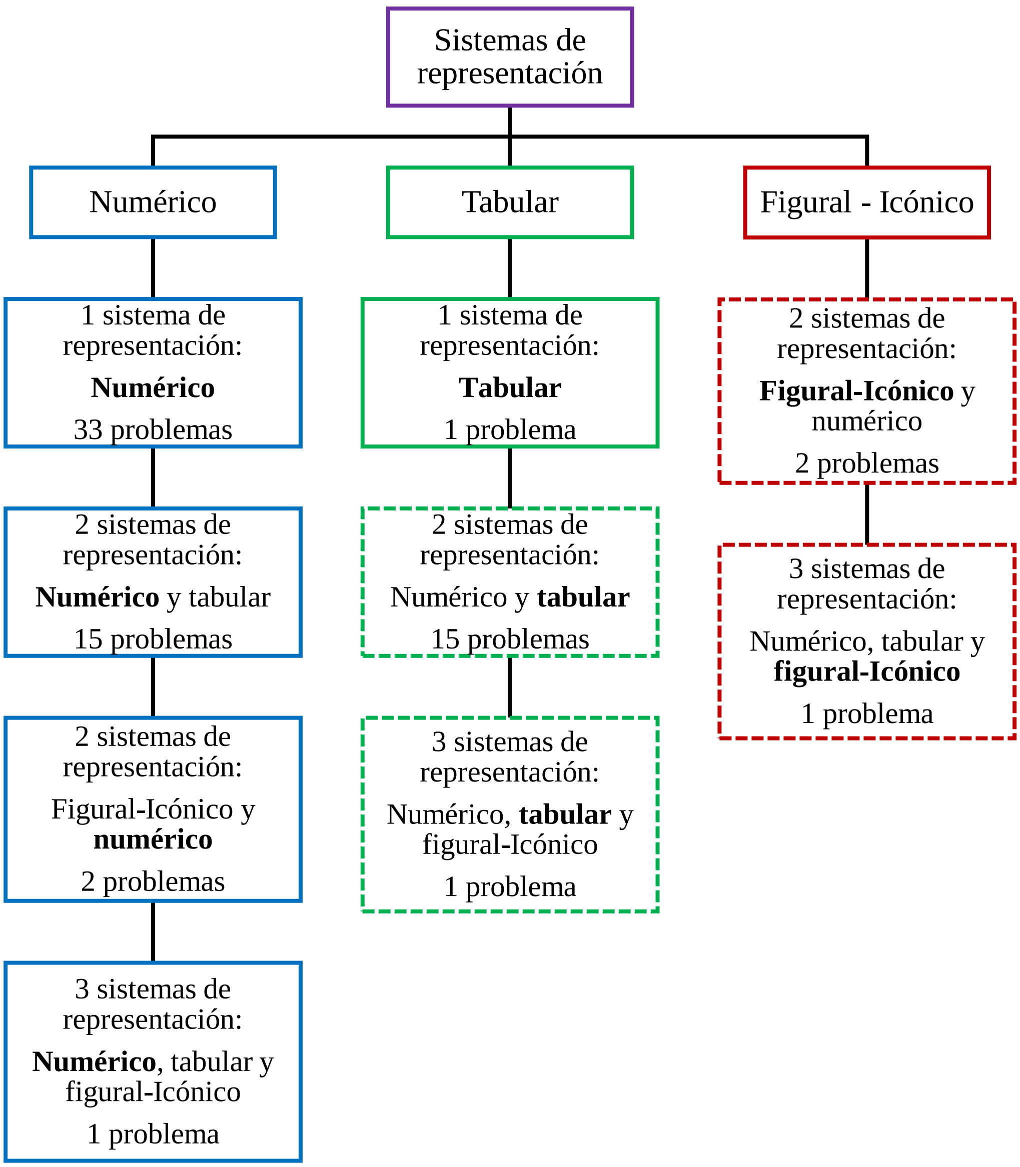
Respecto del sistema de representación figural-Icónico se favorece en tres problemas, pero siempre en conjunto con uno o dos sistemas de representación, ya sea con el sistema de representación numérico o bien con los sistemas de representación numérico y tabular.

Los sistemas de representación que no se consideran o no se favorecen en los mencionados libros de texto son el algebraico y gráfico.

Con base en la información de los programas de estudio de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria, se señala enfatizar en la articulación de la aritmética, la geometría y, el manejo de la información (SEP, 2011c, 2011d). Por otro lado, en el plan de estudio se menciona que, en la Educación Primaria, para el estudio de la matemática se debe considerar el conocimiento y uso del lenguaje algebraico (SEP, 2011, pp. 52-53). En consecuencia, en los libros de texto respectivos, la articulación entre la aritmética, la geometría, el manejo de la información y el uso del lenguaje algebraico debería evidenciarse en los problemas que se plantean. En línea con lo anterior es necesario que el sistema de representación algebraico sea favorecido en los libros de texto, según lo mencionado en los programas de estudio de los grados quinto y sexto y el plan estudios de nivel básico.

El sistema de representación gráfico se refiere al empleo del plano cartesiano para modelar fenómenos de algún tipo de variación, lo cual no está considerado para ser abordado en la Educación Primaria, sino más bien dicho sistema de representación podría relacionarse con el tema de ubicación espacial que pertenece al eje de Forma, espacio y medida (SEP, 2011, pp.76-80). Por lo anterior, es importante mencionar que la ausencia de dichos sistemas de representación puede motivar futuras investigaciones en el diseño de problemas o tareas para la proporcionalidad. Ahora bien, se presenta el Mapa Conceptual de los sistemas de representación que se favorecen en los libros de texto de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria para el concepto de proporcionalidad (Véase figura 69).

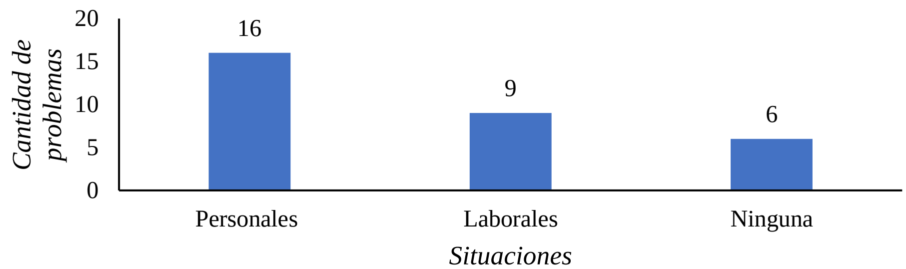
Figura 69
Mapa conceptual de los sistemas de representación para la proporcionalidad que se favorecen en los libros de texto de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria.



5.1.3. Fenomenología

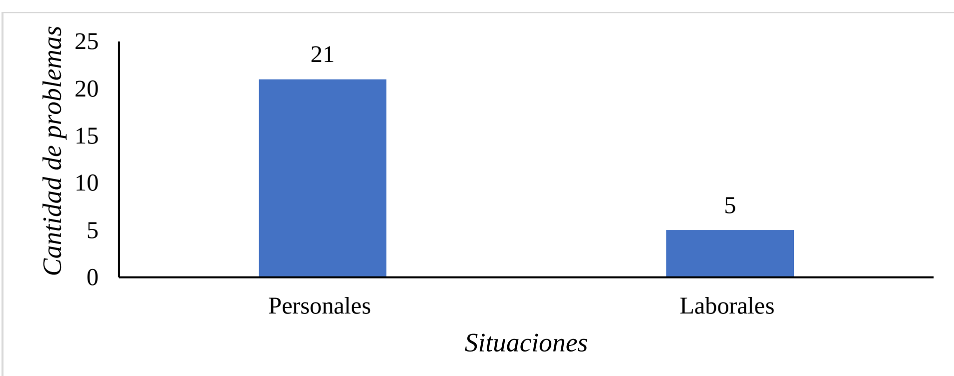
Respecto a las situaciones empleadas en los 31 problemas analizados del libro de texto de quinto grado de la Educación Primaria, relacionados con el contenido proporcionalidad se tiene que: en 16 problemas se plantean situaciones de tipo personal, 9 sobre situaciones de tipo laboral y en 6 no fue posible identificar alguna situación mediante los elementos planteados, en este sentido los problemas únicamente solicitan el cálculo de valores faltantes con base en alguna tabla (Véase figura 70).

Figura 70
Situaciones que se favorecen en el libro de texto de quinto grado sobre el concepto de proporcionalidad.



Mientras que las situaciones empleadas en los 26 problemas presentados, en el libro de texto de sexto grado, se tiene lo siguiente: en veintiún problemas se identificaron situaciones de tipo personal y en cinco, situaciones de tipo laboral (Véase figura 71).

Figura 71
Situaciones que se favorecen en el libro de texto de sexto grado sobre el concepto de proporcionalidad.

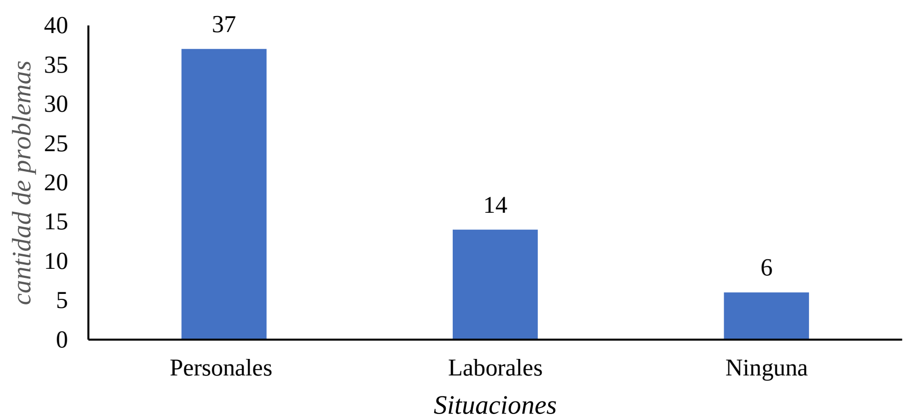


Para la unidad de análisis Fenomenología se consideraron como categorías las siguientes situaciones: Personal, Laboral, Científicas o tecnológicas y Sociales.

Con base en las categorías mencionadas, en total se revisaron 57 problemas de los libros de texto de los grados quinto y sexto de la Educación Primaria, en los cuales se trabaja el contenido de proporcionalidad. Quedando de la siguiente manera: en treinta y siete problemas se favorecen situaciones personales, en catorce, se favorecen situaciones laborales y seis problemas no se favorecen situaciones.

Por tanto, los problemas que aluden a la proporcionalidad se enmarcan en las situaciones personal y laboral, con la intención de proveerles sentido y funcionalidad (Véase figura 72).

Figura 72
Situaciones que se favorecen en los libros de texto de quinto y sexto grados sobre el concepto de Proporcionalidad.



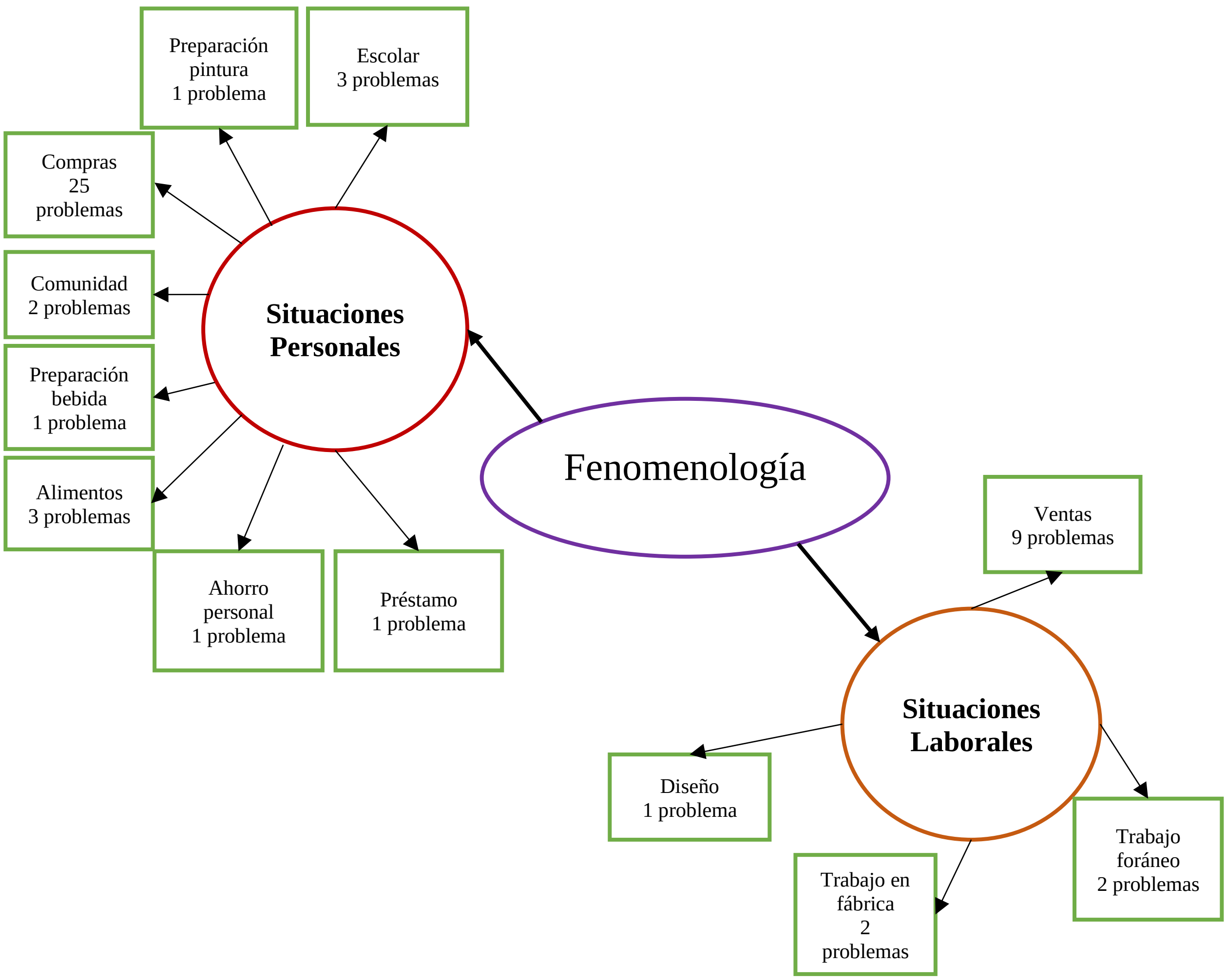
Es importante mencionar que, en los problemas propuestos en los libros de texto mencionados, no se identificó que se favorecieran las situaciones científicas o tecnológicas y las sociales. Respecto a las primeras, éstas se caracterizan por ser abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático, lo que exige un razonamiento superior y de acuerdo con el nivel educativo en que se enmarca esta investigación, los problemas de proporcionalidad estan orientados a calcular porcentajes y utilizar esta información en la resolución de otros problemas, como la comparación de razones, enmarcados en contextos cotidianos. En cuanto a los problemas sociales se requiere activen la comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública o de la sociedad, sin embargo, en la Educación Primaria interesa contextualizar en actividades reales cercanas o inmediatas a la vida diaria o personal de los escolares.

Sin embargo, la ausencia de las mencionadas situaciones puede motivar futuras investigaciones interesadas en el diseño de problemas o tareas sobre proporcionalidad en los que éstas sean consideradas.

Con base en la información, se construye el Mapa Conceptual correspondiente a la unidad de análisis fenomenología, relacionado con las situaciones favorecidas en los libros de texto para el desarrollo de contenido matemático proporcionalidad en la Educación Primaria (Véase figura 73).

Figura 73

Mapa conceptual de la fenomenología en los libros de texto de quinto y sexto grados para dar sentido y funcionalidad al concepto de proporcionalidad.



5.2. Discusión

Una vez que se tienen los resultados, producto del análisis de los libros de texto desafíos matemáticos de quinto y sexto grados, y retomando la pregunta de investigación ¿Qué significados asociados a la proporcionalidad se evidencian en los libros de texto de la Educación Primaria? Se concluye en dos sentidos: sobre la importancia de los significados asociados a la proporcionalidad para el conocimiento del profesor y el contraste entre los resultados obtenidos y lo reportado por la literatura revisada durante el desarrollo de la presente investigación.

5.2.1. De los significados asociados a la proporcionalidad

Como bien se ha mencionado, actualmente el análisis de libros de texto ha tomado relevancia dentro de la investigación en Matemática Educativa. Dado el uso e importancia del libro de texto por los diferentes usuarios, como herramienta para comunicar en el aula los contenidos matemáticos que demanda el currículo y para la planificación y diseño de lo que sucede en el aula, además de ser un mediador en el aprendizaje de los estudiantes (Burgos et al., 2020; Castillo et al., 2022; Pino y Blanco, 2008). Por tal razón en este trabajo de investigación se indagó sobre los significados asociados a la proporcionalidad favorecidos en los libros de texto de la Educación Primaria en México, y en consecuencia conocer la interrelación entre estos y los procedimientos que se involucran.

De acuerdo con Zamora (2015), se esperaría que con investigaciones de este tipo el profesor cambie su forma de pensar acerca del libro de texto, y con ello cuestione la relación de este con el currículo oficial, si existe coherencia entre los temas presentados en los libros de texto, si se consideran o no los diferentes significados asociados a conceptos matemáticos específicos. Y con ello aprender a observar y conocer los significados que se promueven, cómo se promueven, aprovechar las actividades propuestas para favorecer el desarrollo de los aprendizajes esperados, y retomar de cada texto, según la visión del profesor, aquello que sea relevante y que contribuya en el diseño e implementación de las clases al abordar el contenido de interés. Esto a fin de encontrar un balance que permita profundizar en aquellos significados relevantes durante la enseñanza a través de tres dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

Desde la unidad de análisis estructura conceptual, se identificaron los significados asociados a la proporcionalidad, tales como, razón, proporción y números naturales, que en conjunto permiten desarrollar estrategias de resolución como valor unitario, valor intermedio, factor interno y factor constante de proporcionalidad que posteriormente se convierten en un referente para responder problemas que requieren de análisis y comparación, que únicamente la aplicación de un algoritmo.

Desde la unidad de análisis sistemas de representación, se identificó que los sistemas de representación que mayormente se favorecen son el numérico y el tabular, y en menor medida el icónico figural. El hecho de conocer los sistemas de representación favorecidos permite potenciar el logro de los aprendizajes esperados relacionados con la proporcionalidad. Los sistemas de representación que no se identificaron durante el análisis fueron el algebraico y el gráfico, creemos que éstas no aparecieron debido a que no se relacionan con las demandas cognitivas del nivel educativo estudiado.

Respecto de la unidad de análisis fenomenología, se identificó que las situaciones personales y laborales son las mayormente favorecidas para contextualizar el contenido de proporcionalidad. Sin embargo, las situaciones científicas o tecnológicas y sociales no se favorecen, debido a que la primera se relaciona con la aplicación de matemáticas y áreas a fines en el mundo real y la segunda se refiere a la comunidad local, nacional o global, en la que se deben observar determinados aspectos.

5.2.2. Contraste entre la literatura y los resultados obtenidos

5.2.2.1. Razón y proporción

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificó que los libros de texto de la Educación Primaria de México favorecen y enfatizan los conceptos de razón y proporción, puesto que en SEP (2011f), menciona que una *razón* puede entenderse como una relación multiplicativa entre dos cantidades. Mientras que en SEP (2011e), se reconoce a la proporción como un elemento que se conserva entre las cantidades de dos magnitudes. De acuerdo con Modestous y Gagasti (2010), ambos conceptos son fundamentales para el desarrollo del razonamiento proporcional.

En la misma línea, se identificó además el uso de razones y proporciones enteras, de modo que el sistema de los números naturales tiene presencia y relación con el concepto de razón y proporción, que de acuerdo con Reilh y Steinthorsdottir (2017), el empleo de razones y proporciones enteras aumenta la posibilidad de responder correctamente a problemas de valor faltante, sin embargo, es necesario diseñar actividades en las que se aborde el uso de razones y proporciones no enteras dado que estas no se emplean en el las estrategias identificadas. Por ejemplo, si el valor unitario no es entero, para calcular los valores faltantes no se recomienda como estrategia de solución, incluso en las consideraciones previas al encontrarse con un problema de valor unitario no entero se opta por recurrir a otras estrategias que permitan el uso de números naturales.

5.2.2.2. Usos o roles de la Razón

Obando (2015), menciona que la razón tiene tres usos o roles en el tratamiento de la proporcionalidad, siendo la razón como relator, l como operador y como correlator. En los libros de texto se determinó que el concepto de razón se usa: para ampliar figuras, es decir, aumentar las medidas de una figura a la misma proporción conservando su forma; como comparador de dos magnitudes m por cada n, para determinar el valor unitario; y para establecer equivalencias entre dos o más razones, que justo permite identificar el elemento multiplicativo invariante. De modo que la razón como relator se relaciona con la determinación de valor unitario, mientras que la razón como operador se relaciona con la ampliación de figuras a la misma proporción, y finalmente la razón como correlator se relaciona con el elemento multiplicativo invariante (Factor constante de proporcionalidad).

Razón como relator - Valor unitario

Obando (2015) señala que la razón como relator se emplea para expresar la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1 correspondientes a dos magnitudes M_1 y M_2. SEP (2011e), define al valor unitario como aquel valor que corresponde a una unidad o pieza. Para ejemplificar la relación entre estos dos aspectos véase figura 74.

Figura 74.
Problema textual del desafío matemático 17, quinto grado.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

Nota: Tomado de SEP (2011e).

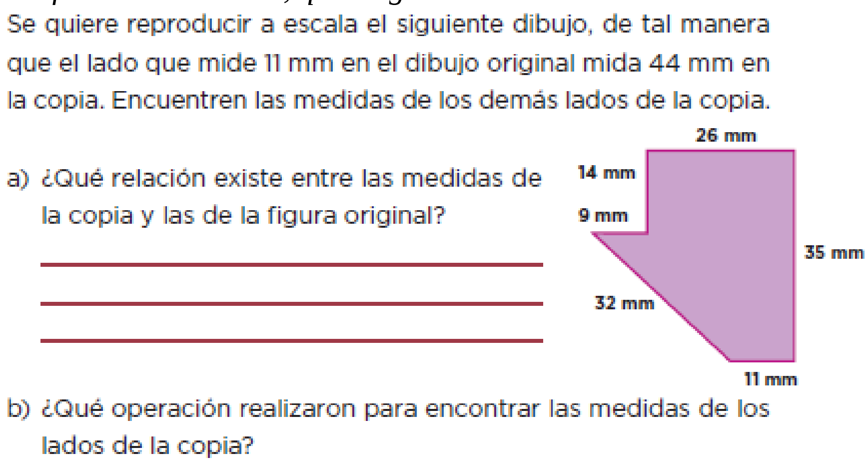
En el problema se identificó el valor unitario al mencionar “Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones”, en términos de Obando (2015), expresa la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1, siendo ésta una comparación entre dos magnitudes.

Aumento de Figuras – Razón como operador

Obando (2015) menciona que la razón como operador se presenta cuando se aplica a magnitudes homogéneas para ampliar o reducir imágenes o dibujos a escala, en este sentido, se representa una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad a_1 de M_1 produce la cantidad b_1 de la magnitud M_2. Para evidenciar esta función en los libros de texto se considera como apoyo el problema del desafío matemático 34 (Véase figura 75).

Figura 75

Problema del desafío matemático 34, quinto grado.


Se quiere reproducir a escala el siguiente dibujo, de tal manera que el lado que mide 11 mm en el dibujo original mida 44 mm en la copia. Encuentren las medidas de los demás lados de la copia.

a) ¿Qué relación existe entre las medidas de la copia y las de la figura original?

b) ¿Qué operación realizaron para encontrar las medidas de los lados de la copia?

Nota: Tomado de SEP (2011e).

El problema solicita que las medidas originales se incrementen a la misma razón teniendo como consecuencia el aumento de la figura, pero conservando su forma. La pregunta del inciso *b* refiere al factor de ampliación que este caso es cuatro. Tanto las medidas originales y las medidas de la nueva figura tienen la misma unidad de medida, siendo estas magnitudes homogéneas. Lo anterior, y de acuerdo con Obando (2015), se refiere al rol o función de la razón como operador.

Razón como correlator - Establecer equivalencia de razones

Obando (2015) señala que en este caso la razón es una cantidad con unidades y se emplea para expresar una propiedad invariante entre M_1 y M_2, satisfaciendo lo siguiente $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = k$, donde *k* es llamado el factor constante de proporcionalidad. Se considera el problema del desafío matemático 35 para ejemplificar la relación (Véase figura 76).

Figura 76

Problema del desafío matemático 34 de quinto grado.

Individualmente, analiza la relación que hay entre los valores de las dos columnas en cada tabla. Determina en cada caso cuál es el número que debes multiplicar por los valores de la columna de la izquierda para obtener los valores de la columna de la derecha. Escríbelo debajo de cada tabla.

1		2		3	
6	30	17	136	7	84
9	45	15	120	15	180
2	10	5	40	8	96
10	50	12	96	3	36
12	60	9	72	11	132

Nota: Tomado de SEP (2011e).

La intención didáctica de este desafío es identificar el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) en una tabla con dos conjuntos de valores que son proporcionales. En la tabla 1 se cumple que $\frac{30}{6}=\frac{45}{9}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10}=\frac{60}{12}=5$ siendo $k=5$ el factor constante de proporcionalidad. En las tablas 2 y 3 ocurre un proceso similar, pero con diferentes factores de proporcionalidad. De este modo, y de acuerdo con Obando (2015), se refiere al rol o función de la razón como correlator.

5.2.2.3. Modelos del pensamiento proporcional y estrategias de resolución

Reyes–Gasperini (2013) reporta que el pensamiento proporcional está conformado por seis modelos y cada uno encierra una estrategia específica para solucionar problemas de proporcionalidad. En los libros de texto de la Educación Primaria se identificó que, para el tratamiento de la proporcionalidad, los problemas de valor faltante planteados en los desafíos matemáticos tienen la intención de desarrollar tres estrategias diferentes: la primera, emplear el valor unitario de manera explícita o implícita y con ello reconocer el factor constante de proporcionalidad entero; la segunda, usar la razón o el factor interno; y la tercera, usar el valor intermedio, compuesto por la suma de parejas de valores correspondientes.

Modelo intra - Valor unitario

Si el valor unitario es explícito para calcular los valores faltantes, se realiza una multiplicación. Por ejemplo, ver la Figura 77.

Figura 77

Problema 1 del desafío matemático 17, quinto grado.

1. Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten las preguntas.

Camisas de adulto					
Cantidad de camisas	1	6	14	75	160
Cantidad de botones	15				

Nota: Tomado de SEP (2011e).

El valor unitario explícito del problema se identifica en "Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones". Para calcular la cantidad de botones de 6, 14, 75 y 160 camisas se realizan las siguientes multiplicaciones: $6 \times 15 = 90,\ 14 \times 15 = 210,\ 75 \times 15 = 1{,}125,\ 160 \times 15 = 2{,}400$. Siendo 15 el elemento invariante por el cual multiplicar las cantidades de camisas para obtener las cantidades de botones. Si el valor unitario es implícito se realiza una división para obtenerlo y a partir de éste calcular los valores faltantes, por ejemplo, ver la Figura 78.

Figura 78

Problema 2 del desafío matemático 17, quinto grado.

2. Luisa utilizó 96 botones en ocho camisas para niño. Ayúdenle a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesten la pregunta.

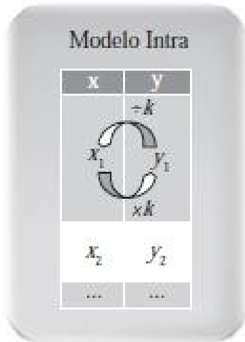
Camisas de niño					
Cantidad de camisas	1	8	10		200
Cantidad de botones		96		1440	

Nota: Tomado de SEP (2011e).

En este problema se calcula el valor unitario realizando la división $96 \div 8 = 12$, donde el valor unitario es *por cada camisa se requieren 12 botones*, siendo 12 el elemento invariante por el cual se multiplica o divide por una determinada cantidad para obtener el número total de botones a utilizar o bien el número de camisas. La forma de emplear el valor unitario (explícito o implícito) corresponde al *Modelo intra* (figura 79).

Figura 79

Modelo intra del razonamiento proporcional.



Nota. Tomado de Reyes–Gasperini (2013).

El modelo intra corresponde a reconocer un elemento invariante k, que al multiplicarlo por una cantidad de la magnitud x se obtiene una cantidad de la magnitud y, o al dividir una cantidad de la magnitud y entre k se obtiene una cantidad de la magnitud x. En el problema 1, el elemento invariante k igual a 15, que al multiplicar por cualquier cantidad de camisas se obtiene la cantidad total de botones, o al dividir cualquier cantidad de botones entre 15 se obtiene la cantidad de camisas. Por lo tanto, existe una relación entre la estrategia de resolución empleando el valor unitario y el modelo intra.

Modelo inter - Razón o factor interno

En esta estrategia se emplea la noción de múltiplo para establecer una relación multiplicativa entre dos cantidades de una misma magnitud. Considere el siguiente ejemplo (figura 80).

Figura 80

Problema del desafío matemático 19, quinto grado.

El dueño de la tienda de abarrotes del pueblo está haciendo una tabla para saber rápidamente el peso de uno o varios costales que contienen azúcar, trigo o maíz palomero. Ayúdenle a completarla y después contesten la pregunta.

	Cantidad de kilogramos de...		
Cantidad de costales	Azúcar	Trigo	Maíz palomero
1	21		
	63		78
5		170	
	420		

Nota: Tomado de SEP (2011e).

De acuerdo con la SEP (2011e) se define lo siguiente: La razón interna es la relación multiplicativa que se establece entre dos datos de un mismo conjunto de cantidades. Por ejemplo, 63 kg es el triple de 21 kg; o bien, cinco costales es cinco veces un costal. La razón o el factor interno entre 21 y 63 kg es 3 (véase figura 81).

Figura 81

Uso del factor interno para calcular valores faltantes.

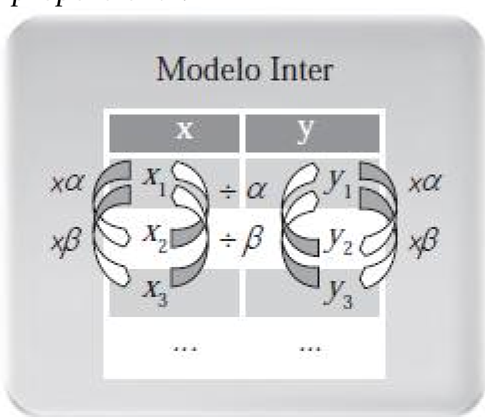
	Cantidad de kilogramos de...		
Cantidad de costales	Azúcar	Trigo	Maíz palomero
1	21		
	63		78
5		170	
	420		

Nota: Adaptación de SEP (2011e).

Esta estrategia de resolución que emplea el factor interno tiene una relación con el *Modelo inter* (véase figura 82).

Figura 82

Modelo inter del pensamiento proporcional.



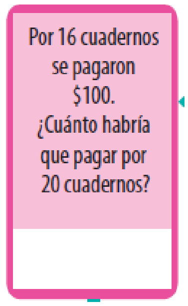
Nota. Tomado de Reyes–Gasperini (2013).

De acuerdo con el modelo, se establece una relación multiplicativa entre dos cantidades de una misma magnitud. Relacionando el modelo de la figura 72 con la estrategia seguida en el problema del desafío 19, $\propto$ y β corresponden al factor interno 3 y 5 respectivamente. Por lo tanto, existe una relación entre la estrategia de resolución usando el factor interno y el modelo inter.

Modelo Aditivo compuesto - Valor intermedio

Cuando en un problema, los valores o cantidades de cada magnitud no son múltiplos y el valor unitario es decimal, se sugiere utilizar un valor intermedio (SEP, 2011e). Considérese el siguiente ejemplo en el que se emplea el valor intermedio (figura 73).

Figura 83
Problema 7 del desafío matemático 57, quinto grado.

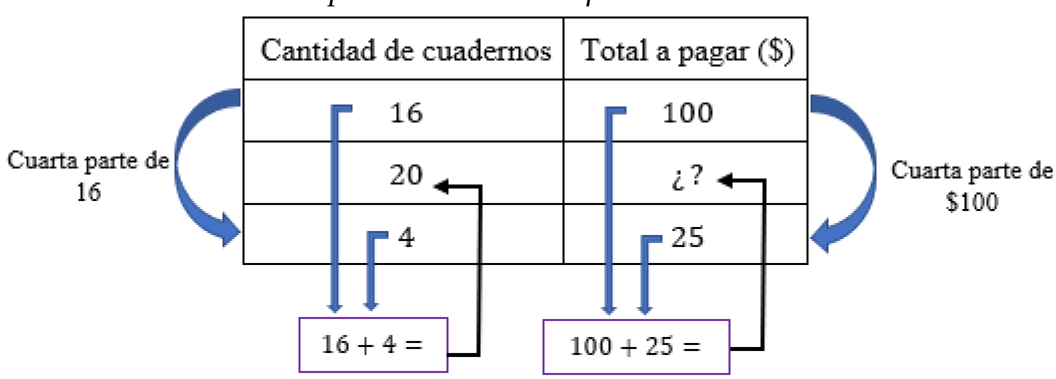


Nota: Tomado de SEP (2011e).

El problema se presenta de manera escrita y se infiere que es un problema de valor faltante. Ahora bien, la resolución se plantea de la siguiente manera:

Las cantidades de cada magnitud no son múltiplos y el valor unitario es decimal, por lo que se sugiere utilizar un valor intermedio; se calcula el costo de 4 cuadernos ($25) y se suma con el de 16 ($100) (figura 84).

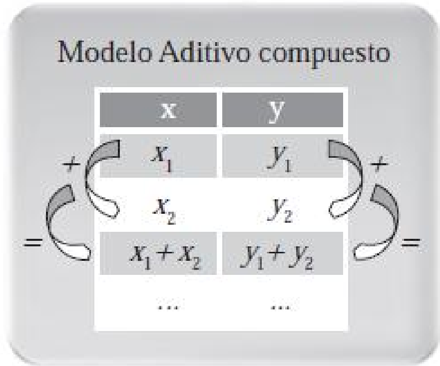
Figura 84
Cálculo del valor intermedio en problemas de valor faltante.



Esta estrategia de resolución permite determinar el valor intermedio en problemas de valor faltante y se relaciona con el *Modelo aditivo compuesto* (figura 85).

Figura 85

Modelo aditivo compuesto del pensamiento proporcional.



Nota. Tomado de Reyes–Gasperini (2013).

Relacionando el problema 7 del desafío 57 y el modelo aditivo compuesto: sea $x_1 = 4$ y $x_2 = 16$ entonces $x_1 + x_2$ =20 dado que existe una relación de correspondencia entre x y y, el valor de correspondencia de $x_1 = 4$ es $y_1 = 25$ y de $x_2 = 16$ es $y_2 = 100$ entonces, el valor de correspondencia de $x_1 + x_2 = 20$ es $y_1 + y_2 = 125$. Con lo cual existe una relación entre la estrategia de resolución por valor intermedio y el modelo aditivo compuesto.

5.3. Limitaciones del trabajo

La Educación Primaria en México se conforma por los niveles educativos preescolar, primaria y secundaria, sin embrago, en este trabajo únicamente se analizaron los libros de texto desafíos matemáticos de los grados quinto y sexto de primaria, siendo los grados y el nivel educativo en los que el plan y programas de estudio se presenta el inicio del tratamiento del contenido de proporcionalidad. Y como lo reporta la literatura, el contenido de la proporcionalidad es longitudinal, es decir, tiene presencia y se relaciona con los demás niveles educativos. En este sentido queda abierto para futuras investigaciones realizar análisis de contenidos de libros de texto de Educación Secundaria y Educación Media Superior para determinar y conocer los significados que se proponen en cada nivel educativo, y en medida de posible articular los significados asociados a la proporcionalidad, de la Educación Primaria, Educación Secundaría y Educación Media Superior.

En conjunto el análisis de los libros de texto de los niveles educativos señalados permitiría conocer de manera general los significados básicos asociados a la proporcionalidad presentes en el Sistema Educativo Nacional Mexicano.

Referencias Bibliográficas

Andonegui, M. (2006). *Razones y Proporciones. Serie Desarrollo del pensamiento matemático N° 11*. Federación Internacional de Fe y Alegría.

Aparicio, E., Sosa, L. y Mukul, M. (2014). *Actividades de aprendizaje para el aula. Primer grado. Bloque 2*. Secretaria de Educación del Gobierno del Estado de Yucatán (SEGEY).

Bardin, L. (2002). *Análisis de contenido* (3.ªed.). Akal.

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. Lucas y A. Noboa (Coords.), *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de datos* (pp. 221-261). http://alejandronoboa.uy/

Buforn, Á. y Fernandez, C. (2014). Conocimiento de Matemáticas Especializado de los Estudiantes para Maestro de Primaria en Relación al Razonamiento Proporcional. *Bolema*, *28*(48), 21-41. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Buforn, Á., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (167-176). Zaragoza, España: SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/11295/1/Buforn2017Conocimiento.pdf

Buforn, A., Llinares, S., y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*(76), 229-251. https://www.comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/article/view/1146/1134

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, e182013. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema, 34*(66), 40 – 68. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Castillo, M., Burgos, M., y Díaz, J. (2022). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-21. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14

Dirección General de Cultura y Educación (DGCyE, 2005). *La proporcionalidad*. DGCyE. http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/proporcionalidad.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143 – 168. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1). 129–142. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/252566/391074

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia Psychologica, 53*(1), 69-81. https://www.studiapsychologica.com/index.php/view-articles/?search=563

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para profesor de secundaria* (pp. 103-117). Pirámide.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). La proporcionalidad para Maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Matemática para maestros* (pp. 163-180). Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Gómez, L. E. (2011). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica*, 1(2). 226-233.

Hernández, R., Fernández, C. y Batista, M. P. (2016). *Metodología de la investigación* (6.ªed.). Mc Graw Hill. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Huircan, M. y Carmona, K. (2013). *Guía de aprendizaje N° 2: Razones y proporciones. Educación Matemática Primer Nivel o Ciclo Educación Media. Educación para Personas Jóvenes y Adultas.* Ministerio de Educación Chileno. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/1981

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica* (1.ªed.). Paidós. http://www.media3turdera.com.ar/mediosyrealidad/Klaus-krippendorff.pdf

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 83-101). Comares.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de Representación. En L. Rico Romero y A. Moreno Verdejo (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para profesor de secundaria* (pp. 119-137). Pirámide.

Martínez, S., Muñoz, J., Oller, A., y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de eso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20* (1), 95-122. http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2014

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 133 – 157. http://somidem.com.mx/descargas/Vol24-1.pdf

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 36-53. http://dx.doi.org/10.1080/10986060903465822

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica* [Tesis Doctoral, Universidad del Valle]. Archivo digital https://doi.org/10.13140/rg.2.1.4538.2249

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. Repositorio Institucional

Universidad Autónoma de Manizales

Representaciones_semiótica_aprendizaje_concepto_funcional_lineal.pdf (autonoma.edu.co)

Pérez-Bueno, B., Liñan-García, M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2018). Conocimiento especializado de los estudiantes para profesor de primaria en la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta basada en las unidades de medida. *EA, Escuela Abierta, 21*, 47-64. https://ea.ceuandalucia.es/index.php/EA/article/view/32/14

Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63-88. https://revistaseug.ugr.es/index.php/publicaciones/article/view/2247

Reid, M., & Reid, S. (2017). Learning to Be a Math Teacher: What Knowledge Is Essential? *International Electronic Journal of Elementary Education, 9*(4), 851-872. https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/289/282

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La trasversalidad de la proporcionalidad*. Secretaría de Educación Pública.

Rico, L. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.

Rico, L. (2016). Matemáticas y Análisis Didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para profesor de secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación [Comunicación]. *VIII Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM*, Aravaca, España. http://funes.uniandes.edu.co/466/

Riehl, S. M. & Steinthorsdottir, O. B. (2017). Missing-value proportion problems: The effects of number structure characteristics. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(1). 56-68. DOI: https://doi.org/10.1080/19477503.2017.1375361

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. In: P. Brosnan, D. B. Erchick & L. Flevares (Ed.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*1055-1061*).* The Ohio State University. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2032%202010%20Proceedings.pdf

Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588. *https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5777*

Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para profesor de secundaria* (pp. 139-174). Pirámide.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria. 1°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación* (1.ªed.). SEP.

https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/index-descargas-LMP-prim-1grado.html

SEP (2017a). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria. 2°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación* (1.ªed.). SEP. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/index-descargas-LMP-prim-2grado.html

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. SEP. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

SEP (2011a). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica primaria. Tercer grado*. SEP.

SEP (2011b). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica primaria. Cuarto grado*. SEP.

SEP (2011c). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica primaria. Quinto grado*. SEP.

SEP (2011d). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica primaria. Sexto grado*. SEP.

SEP (2011e). *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado*. SEP. https://historico.conaliteg.gob.mx/H2014P5DMM.htm

SEP (2011f). *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado*. SEP. https://historico.conaliteg.gob.mx/H2014P6DMM.htm

SEP (2019). *Matemáticas. Libro para el maestro. Primer grado* (2.ª ed.). SEP. https://libros.conaliteg.gob.mx/P1MAM.htm

SEP (2019a). *Matemáticas. Libro para el maestro. Segundo grado* (2.ª ed.). SEP. https://libros.conaliteg.gob.mx/P2MAM.htm

Valverde, G., Castro, E. y Molina, M. (2013). Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de educación primaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (211-229). Comares.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/wilhelmi.pdf

Zamora, R. (2015). *Las competencias matemáticas que se favorecen en los libros de texto para los temas de límite en bachillerato. Estudio comparativo entre currículum oficial y potencial* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. Repositorio Institucional Caxcan http://ricaxcan.uaz.edu.mx/xmlui/bitstream/handle/20.500.11845/1220/2015%20Zamora%2c%20R..pdf?sequence=1&isAllowed=y