Centro de Investigación en

Matemática Educativa

Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

EL PAPEL DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

TESIS

Para obtener el grado de:

Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

Presenta:

Lic. Aline Lizbeth Vargas Ramos

Director de tesis:

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México, Julio 2020.

Agradecimientos

A mi familia por estar siempre presente, a mi pareja por su apoyo incondicional y a todas las personas que participaron en mi formación académica.

Gracias.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción y revisión de la literatura

Introducción

La investigación internacional en el área de matemática educativa recientemente ha reportado acerca de la importancia de desarrollar diferentes tipos de razonamiento en estudiantes de nivel superior, tales como; razonamiento variacional (Castillo-Garsow, 2012), razonamiento cuantitativo (Moore, 2014) y razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002 ; Thompson & Carlson, 2017).

En las últimas décadas se ha demostrado que el razonamiento covariacional como marco cognitivo resulta útil para facilitar el aprendizaje de diversos conceptos en matemática, principalmente se ha reportado que puede coadyuvar en las áreas del cálculo (Villa-Ochoa, 2012; Ferrari-Escolá et al., 2016; Kertil, Erbas, & Cetinkaya, 2019) y la trigonometría (Moore, 2014 ; Molina-Toro, Villa-Ochoa, & Suárez Téllez, 2018) . Además, se ha reportado que el desarrollo del razonamiento covariacional puede ser la base para la comprensión del concepto función y su entendimiento gráfico (Carlson et al., 2002 ; Moore, Paoletti, & Musgrave, 2013), concepto que es considerado de gran importancia para el aprendizaje en matemáticas.

Por tanto, en esta investigación nos interesamos por estudiar el razonamiento covariacional, retomando el supuesto que puede desarrollarse a partir de la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas (Carlson et al., 2002), para lo cual, se propone un modelo teórico de los marcos conceptuales razonamiento covariacional y modelación matemática como sustento de la investigación. A fin de validar dicha propuesta, diseñamos una tarea de modelación que favorezca el desarrollo del razonamiento covariacional, además, los datos obtenidos de la tarea permitieron refinar el modelo teórico sustentado empíricamente.

Revisión de la literatura

A finales de los años ochenta y principios de los noventa el razonamiento covariacional se hizo explicito como una forma de razonar en matemáticas, las primeras ideas fueron presentadas al respecto por Thompson (1988) y Confrey & Smith (1994).

Para Thompson (1988) la covariación se presentaba en términos de la conceptualización de los valores de cantidades individuales como variables y luego de dos o más cantidades como variables de forma simultánea, mientras que para Confrey (1991) se refería a coordinar los valores de dos variables conforme cambian, tiempo después estas ideas se presentarían como base de un constructo teórico.

Por otro lado, Confrey & Smith (1994) reportaron que:

> "Un enfoque de covariación… implica poder moverse operativamente de y_m a y_{m+1} coordinando con el movimiento de x_m a x_{m+1}. Para las tablas, implica la coordinación de la variación en dos o más columnas a medida que una se mueve hacia abajo (o hacia arriba) de la tabla" (p. 137).

Saldanha & Thompson (1998) al igual que Confrey & Smith (1994) también hicieron mención al uso de tablas, pero en un sentido diferente, debido a que para ellos la coordinación encajaba con el empleo de tablas para presentar lo que llamaban estados sucesivos de una variación, dicho en sus propias palabras:

> "Nuestra noción de covariación es de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Implica unir las dos cantidades, de modo que, en la comprensión de uno, se forma un objeto multiplicativo

> de las dos. Como objeto multiplicativo, uno rastrea el valor de la cantidad con la realización inmediata, explícita y persistente de que, en cada momento, la otra cantidad también tiene un valor" (p. 299).

Shaldanha & Thompson fueron quienes presentaron por primera vez el razonamiento covariacional como constructo teórico, reportaron que este tipo de razonamiento era de carácter evolutivo, y para describirlo tomaron un punto de partida y dejaron en evidencia que era posible transitar hacia una covariación un poco más compleja conforme se desarrollaba.

Según Saldanha & Thompson (1998):

> "Al principio del desarrollo, uno coordina los valores de dos cantidades: piensa en uno, luego en el otro, luego en el primero, luego en el segundo, y así sucesivamente. Las imágenes posteriores de la covariacion implican entender el tiempo como una cantidad continua, de modo que, en la imagen de uno, los valores de las dos cantidades persisten. Una imagen operativa de covariación es aquella en la que una persona imagina que ambas cantidades se han rastreado durante algún tiempo, y que la correspondencia es una propiedad emergente de la imagen" (p. 299).

Retomando aspectos de las investigaciones anteriores sobre covariacion y razonamiento covariacional, un grupo de investigadores conformado por Carlson et al. (2002) presentaron el primer marco conceptual sobre el razonamiento covariacional conformado por niveles de desarrollo estructurados de forma escalonada. Carlson et al. (2002) retomaba la investigación de Saldanha & Thompson (1998) al pensar que este tipo de razonamiento era evolutivo, por tanto, extendieron esta idea y presentaron en su investigación el marco conformado por niveles descritos en términos de acciones mentales que un sujeto debe realizar para decir que razona covariacionalmente, mismas que se vuelven cada vez más sofisticadas conforme avanzan los niveles de desarrollo, tal y como se muestra en la Tabla 1.

Carlson et al. (2002) analizaron respuestas de estudiantes en un contexto de tareas de Cálculo, donde un foco de interés fue observar y describir cómo los estudiantes justificaban la concavidad de una gráfica y construían curvas al analizar las resoluciones de las tareas de Cálculo desde el lente del razonamiento covariacional. Reportaron que la mayoría de estudiantes evidenciaban tener un pensamiento estático a pesar de contar con excelente desempeño académico en sus cursos, y por esa razón, no fueron capaces de resolver las tareas tal y como se esperaba. Además, el análisis de las respuestas llevó al consenso de los investigadores que los estudiantes evidenciaban alguno de los niveles de desarrollo de razonamiento covariacional: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, razón de cambio promedio o razón de cambio instantánea.

Tabla 1

Acciones mentales del marco de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002, p.337)

Acción mental y descripción	Nivel de razonamiento covariacional
AM1 Coordinar el valor de una variable con cambios en la otra variable.	Nivel 1 Coordinación
AM2 Coordinar la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.	Nivel 2 Dirección
AM3 Coordinar la cantidad de cambio de una variable con cambios en la otra variable.	Nivel 3 Coordinación cuantitativa
AM4 Coordinar la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.	Nivel 4 Razón de cambio promedio
AM5 Coordinar la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Nivel 5 Razón de cambio instantánea

Se ha demostrado que el desarrollo del razonamiento covariacional resulta útil para facilitar el aprendizaje de conceptos de Cálculo y Trigonometría, tales como la derivada como una función (Oehrtman & Thompson, 2008) y funciones como; función cuadrática, función seno y funciones logaritmo y exponencial.

Villa-Ochoa (2012) reportó como el razonamiento covariacional favorece el aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de variación trabajadas en un contexto tecnológico, uno de los principales aportes de la investigación fue la interpretación gráfica desde una perspectiva covariacional.

Moore (2014) caracterizó los niveles reportados por Carlson et al. (2002) para medir niveles de razonamiento covariacional descritos en términos de acciones mentales caracterizadas para la función seno. Se analizaron casos de estudiantes que resolvían tareas basadas en situaciones reales que permitían estudiar la función seno desde una perspectiva covariacional, el razonamiento cuantitativo era considerado la base para el desarrollo de un razonamiento covariacional sinusoidal.

Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra, & Méndez-Guevara (2016) reportaron un marco para el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, donde describieron las acciones mentales que conformaban los niveles del marco en términos de las funciones logaritmo y exponencial, y retomaron el supuesto que la modelación de fenómenos dinámicos podía favorecer el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002), para evidenciar cómo estudiantes de nivel medio superior razonaban al participar en un experimento de enseñanza mientras resolvían tareas que involucraban a las funciones logaritmo y exponencial.

El marco elaborado por Carlson et al. (2002) fue utilizado por diversos investigadores, debido a que el razonamiento covariacional coadyuvaba al aprendizaje de diferentes funciones y conceptos del Cálculo y la Trigonometría. Posteriormente, Thompson & Carlson (2017) presentaron un nuevo marco para el razonamiento covariacional fundamentado desde la variación (Castillo-Garsow, 2012), los investigadores retomaban gran parte de las ideas de Carlson et al. (2002), pero argumentaban que el marco propuesto en 2002 no era suficiente para analizar y describir las respuestas de estudiantes al resolver situaciones que involucraban la covariación de cantidades.

El marco era conformado por seis niveles: sin coordinación, precoordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, variación continua gruesa y variación continua suave.

Área de oportunidad

En la investigación de Carlson et al. (2002), que presenta por primera vez el marco del razonamiento covariacional, las tareas propuestas se fundamentaban del supuesto que la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas podía favorecer el desarrollo de los niveles del razonamiento, pero no se mostraba con claridad el papel que desempañaba la modelación cuando se trabajaba en conjunto con este tipo de razonamiento, por tanto, la palabra modelación era mencionada dejando a interpretación del lector su significado.

Actualmente no se han realizado investigaciones que reporten con claridad el papel que desempeña la modelación matemática cuando se trabaja en conjunto con el razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017), de modo tal, que el supuesto que menciona que el razonamiento covariacional puede desarrollarse con ayuda de la modelación de fenómenos dinámicos (Carlson et al., 2002), no ha sido explorado desde al marco actual en investigación en matemática educativa.

De ello, nuestro interés por mostrar en esta investigación el papel que tiene la modelación matemática y el razonamiento covariacional como marcos conceptuales que trabajan en conjunto.

Capítulo 2

Referentes teóricos

Los referentes teóricos de los que se sustenta la investigación son el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002) y la modelación matemática (Blum & Borromeo, 2009). En este capítulo se describe la postura que consideramos pertinente sobre los marcos conceptuales mencionados, posteriormente planteamos los objetivos de investigación, y finalmente, se comparte una propuesta de la relación teórica entre la modelación matemática y razonamiento covariacional.

Razonamiento covariacional

Para describir como Thompson & Carlson (2017) conciben el razonamiento covariacional se considera necesario distinguir cómo son entendidos algunos términos desde el punto de vista covariacional, tales como; cantidad, número, símbolo, variable y función.

Cantidad refiere a una conceptualización sobre un objeto de tal manera que este tiene un atributo que podría medirse. Los números pueden ser medidas de cantidades, o bien, pueden extraerse de operaciones de medición. Un símbolo por otra parte, puede ser usado para representar el valor de una cantidad con tres significados diferentes:

Primero, si una persona prevé que la cantidad tiene un valor que no varía nunca, tiene el significado de una constante.

Segundo, si la persona prevé que la cantidad tiene un valor que puede cambiar de una configuración a otra pero que no varía dentro de una configuración, el símbolo, tiene el significado de un parámetro.

Tercero, si la persona prevé que el valor de la cantidad varía dentro de una configuración, el símbolo tiene el significado de una variable.

Además, para afirmar que una variable varía es necesario que una persona visualice que la cantidad cuyo valor representa la variable varía (Castillo-Garsow, 2012).

Desde el punto de vista covariacional una función reside en el pensamiento de alguien, por tanto, la naturaleza de una función concebida es relativa a la persona que la concibe. Algo similar sucede con la noción de covariación, que refiere a tener en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades simultáneamente, en otras palabras, se interpreta como la coordinación de los cambios de dos cantidades (Thompson & Carlson, 2017).

Así, para Thompson & Carlson (2017) el razonamiento covariacional se concibe como la capacidad cognitiva para visualizar dos cantidades variables de forma simultánea.

Para ejemplificar esta concepción mostramos en la Figura 1 cómo una persona conceptualiza la imagen de un corredor, es posible decir que alguien razona covariacionalmente cuando es consciente de que se está midiendo el tiempo en cada momento conforme el corredor se mueve, es decir, conforme cambia su distancia recorrida (Saldanha & Thompson, 1998).

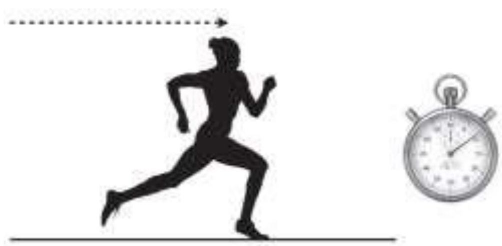


Figura 1. La situación del corredor muestra que cuando una persona razona covariacionalmente une dos variables de la situación al concebir que la distancia de un corredor de un punto de referencia varía y que el tiempo transcurrido medido en un cronómetro varía de forma simultánea, tomada de Thompson & Carlson (2017, p.426).

Thompson & Carlson (2017) realizaron una revisión al marco propuesto por Carlson et al. (2002) y propusieron un marco conformado por niveles de desarrollo; sin coordinación, precoordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, variación continua gruesa y variación continua suave, la base de los niveles es la variación (Castillo-Garsow, 2012) tal y como se muestra en la Tabla 2, para fines de esta investigación los niveles son enumerados del cero al cinco.

Tabla 2

Niveles de desarrollo de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017, p.426)

Niveles de razonamiento covariacional	Descripción
0. Sin coordinación	La persona no tiene imagen de variables que varían juntas. La persona se enfoca en una variación de una u otra variable sin coordinación de valores.
1. Precoordinación de valores	La persona visualiza los valores de dos variables que varían, pero de forma asíncrona: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente.
2. Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de valores de cantidades que varían entre sí, como "esta cantidad aumenta mientras que esa cantidad disminuye". La persona no prevé que los valores individuales de cantidades vayan juntos.
3. Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable con los valores de otra variable, con la anticipación de crear una colección discreta de pares.
4. Variación continua gruesa	La persona prevé que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y prevén que ambas variables varíen con una variación continua gruesa.
5. Variación continua suave	La persona prevé aumentos o disminuciones en el valor de una cantidad o variable, como ocurre simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y prevé que ambas variables varíen de manera suave y continua.

A diferencia del marco propuesto por Carlson et al. (2002), se argumenta que desde el marco de Thompson & Carlson (2017) es posible describir cuando alguien razona covariacionalmente, dejando de lado términos como razón de cambio, dada la complejidad que involucra el desarrollo de los niveles de razonamiento. Sin embargo, el consenso entre investigadores desde esta perspectiva también se considera necesario para afirmar que alguien desarrolla niveles de razonamiento covariacional, debido a que este tipo de razonamiento puede suceder de formas diversas dado su carácter cognitivo.

Los niveles de razonamiento covariacional son descritos por Thompson & Carlson (2017) en términos del problema de la botella discutido en Carlson et al. (2002) y mostrado en la Figura 2. El nivel sin coordinación implica que una persona perciba que el nivel del agua en la botella sube, es decir, la variable “volumen” (del agua) varía en todo momento del llenado de la botella, entendiendo la visualización de la variación en términos del tiempo conceptual, como una variable que cambia en una duración de medida imaginada (Thompson & Carlson, 2017), pero la persona no coordina la altura del agua con el aumento de volumen en la botella.

El nivel precoordinación de valores implica que una persona identifique conceptualmente; primero, que el volumen del agua varía en todo momento y posteriormente que la altura varía en todo momento del llenado de la botella, pero no coordina la variación del volumen con la variación de la altura. El nivel coordinación gruesa de valores implica que por primera vez una persona anticipa que la altura cambia (varía) en función del volumen o viceversa, pero sólo es capaz de percibir esta coordinación de forma general, distinto de como sucedería en el nivel coordinación de valores, donde se coordinan los valores de la variable volumen y altura para crear una colección discreta de pares, es decir, se coordinan valores específicos y de igual medida para el volumen y la altura hasta el nivel 3, denominado coordinación de valores.

Thompson & Carlson (2017) comparten las ideas de Saldanha & Thompson (1998) al considerar que “una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades, cuando une mentalmente sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual que es, simultáneamente, uno y otro” (p. 299), el término cantidad es asignado a una variable cuando se le atribuye la característica de ser medible.

En este sentido, el nivel variación continua gruesa implica que una persona imagine el aumento de volumen por cada incremento de agua agregada o viceversa, coordinando los cambios por intervalos, pero no de forma continua dentro de todo los intervalos, tal y como sucedería en el nivel más sofisticado de razonamiento, variación continua suave, donde una persona debe ser capaz de coordinar los valores de las variables volumen y altura en función del tiempo, es decir, durante todo el llenado de la botella.

Imagina que esta botella se está llenando de agua. Dibuja un gráfico de la altura en función de la cantidad de agua que hay en la botella.

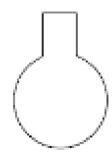


*Figura 2***.** Problema de la botella, tomada de Carlson et al. (2002, p.360)

El marco del razonamiento covariacional resulta de gran utilidad para esta investigación, dado que la descripción de los niveles (Thompson & Carlson, 2017); sin coordinación, precoordinación de valores, coordinación gruesa de valores, variación continua gruesa y variación continua suave, ayudarán a mostrar con claridad el papel del marco cuando se trabaje en conjunto con la modelación matemática, además de facilitar un futuro análisis de datos.

Modelación matemática

Consideramos pertinente abordar la modelación matemática desde la perspectiva realista (Kaiser, 2017), diferenciándola del resto de las perspectivas; epistemológica o teórica, educativa, contextual, sociocrítica y sociocultural y cognitiva como perspectiva (Kaiser & Sriraman, 2006; Kaiser, 2017; Abassian, Safi, Bush & Bostic; 2019). Desde la perspectiva realista, se busca el desarrollo de habilidades que permitan modelar situaciones que son consideradas auténticas, así como desarrollar la capacidad de interpretar modelos matemáticos dados.

La intención principal de sustentar la investigación desde la modelación matemática como proceso cognitivo realista, reside en el interés de buscar comprender el mundo real y la solución de problemas auténticos del mundo real mediante la construcción de modelos matemáticos asociados a una realidad particular, según Kaiser (2017) “una parte importante de esta perspectiva es que los procesos de modelado se llevan a cabo como un todo y no como procesos parciales” (p.272). Citando a Van Den Heuvel-Panhuizen (2003):

> “Por un lado, el adjetivo "realista" está definitivamente en acuerdo con cómo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ve dentro de RME, pero por otro lado este término también es confuso. En neerlandés, el verbo "zich realiseren" significa "imaginar." En otras palabras, el término "realista" se refiere más a la intención de que se les ofrezca a los estudiantes situaciones problemáticas que puedan imaginar. . . que se refiere a la "realidad" o autenticidad de los problemas. Sin embargo, esto último no significa que la conexión con la vida real no sea importante. Solo implica que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones del mundo real. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas e incluso el mundo formal de las matemáticas pueden ser contextos muy adecuados para los problemas, siempre que sean "reales" en la mente de los estudiantes” (pp. 9-10).

Por otra parte, el marco de modelación matemática como sustento teórico de investigaciones (Borromeo, 2006 ; Blum & Borromeo, 2009) ha reportado aportes significativos al evidenciar el vínculo que existe entre la realidad y las matemáticas, tema que resulta de gran importancia para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, de acuerdo con Blum & Borromeo (2009) entendemos la modelación como un proceso cognitivo cíclico donde se transita del mundo real a las matemáticas y de las matemáticas al mundo real, así como se muestra en la Figura 3.

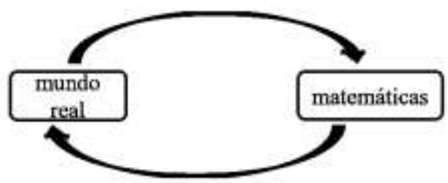


Figura 3. Ciclo de modelación, Autoría propia.

Por "mundo real" se considera al resto del mundo fuera de las matemáticas; incluida la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas (Pollak, 1979). Este proceso cíclico se conforma por siete pasos organizados de forma idealizada, debido a que no suceden en un orden en específico (Blum & Borromeo, 2009; Dede, 2019 ; Hankeln, 2020); construir, simplificar/estructurar, matematizar, trabajar matemáticamente, interpretar, validar y exponer, tal y como se muestra en la Figura 4, la descripción de cada uno de los pasos se comparte en la Tabla 3.

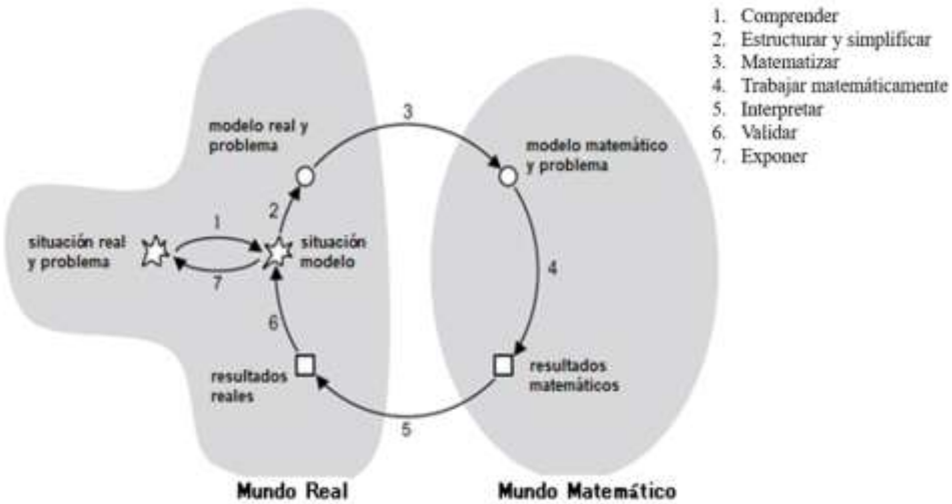


Figura 4. Proceso de modelación, tomada de Blum & Borromeo (2009, p.46)

Tabla 3

Pasos del proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009)

Pasos del proceso de modelación matemática	Descripción
1.Construir	Se debe entender el problema partiendo de la situación real, identificando variables presentes para construir un modelo de la situación.
2. Simplificar	Se debe estructurar la situación poniendo en juego variables que resulten significativas en la situación para construir un modelo real de la situación.
3. Matematizar	Se debe transformar el modelo real en un modelo matemático que puede ser expresado a través de una gráfica, expresión algebraica, tabla, diagrama o figura.
4.Trabajar matemáticamente	Se debe realizar cálculos, procedimientos, etc., de tal manera que se produzcan resultados matemáticos.
5.Interpretar	Se debe traducir los resultados matemáticos en resultados reales.
6.Validar	Se debe mostrar un modelo adecuado de la situación.
7.Exponer	El séptimo y último paso es una explicación de la solución final.

Los pasos del proceso de modelación descritos en la Tabla 3, guían hacia las fases del proceso mostradas en la Figura 4. No existen definiciones dadas para las fases: *situación real, situación modelo, modelo real, modelo matemático, resultados matemáticos* y *resultados reales*, pero desde esta investigación se hace una distinción para entender cada una de ellas.

Situación real y el *modelo de la situación* son fases de comprensión de la tarea, todo el proceso de modelación parte de la *situación real*, que no es más que la situación presentada que puede estar situada en diferentes contextos y que a través del paso 1 guía a la construcción del *modelo de la situación*, es decir, a la construcción de una representación mental de la situación, y es considerada la fase más importante del proceso de modelación (Borromeo, 2006). Las dos fases anteriores guían hacia la fase *modelo real* a través del paso 2, es decir, expresar la *situación real* de forma escrita o verbal de tal modo que el *modelo real* permita construir un *modelo matemático* de la situación a través del paso 3.

La fase llamada *modelo matemático*, es una fase donde se transforma el modelo real en una representación matemática únicamente asociada a la *situación real* de la cual se parte, por tanto, se construye un modelo matemático de la *situación real* de partida. El modelo matemático a través del paso 4 guía a la fase *resultados matemáticos*, donde se deben presentar las soluciones matemáticas al problema, y a través del paso 5, las soluciones deberán traducirse en términos del mundo real, lo que guía a la fase *resultados reales*.

A partir de lo anterior, consideramos los elementos teóricos descritos parte fundamental de la investigación para evidenciar con claridad el papel que tiene la modelación matemática cuando se trabaja en conjunto con el marco del razonamiento covariacional a fin de realizar aportes en investigación en matemática educativa en el área de oportunidad identificada.

Objetivo general de investigación

A partir de lo anterior, en esta investigación nos cuestionamos en un primer momento; ¿Cuál es la relación teórica qué existe entre el razonamiento covariacional y la modelación matemática? Debido a nuestro interés de evidenciar con claridad el papel que tiene la modelación matemática cuando se trabaja en conjunto con el razonamiento covariacional, y planteamos como objetivo general de investigación:

- Generar una propuesta de un modelo teórico de la relación entre el razonamiento covariacional y la modelación matemática.

Relación entre marcos conceptuales

De los marcos cognitivos razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) y modelación matemática (Blum & Borromeo, 2009), proponemos unir los marcos de forma articulada desde una posible relación entre los pasos del proceso de modelación y los niveles de razonamiento covariacional; tal y como se muestra en la Tabla 4, pensamos que es posible trabajar en conjunto con ambos marcos persiguiendo un mismo objetivo.

Para la realización de la propuesta teórica consideramos que los pasos 1, 2, 3 y 4 del proceso de modelación involucran variables presentes en una situación y sus relaciones, además, se trabajó previamente en estudios piloto que incluían tareas de modelación para cursos y talleres a fin de encontrar evidencia empírica de la relación.

Tabla 4

Relación de los marcos cognitivos

Pasos del proceso de modelación matemática	Niveles de razonamiento covariacional
1. Construir	0. Sin coordinación
2. Simplificar	1. Precoordinación de valores.
3. Matematizar	2. Coordinación gruesa de valores 3: Coordinación de valores
4. Trabajar matemáticamente	4.Variación continua gruesa 5.Variación continua suave
5. Interpretar 6. Validar 7. Exponer	

Autoría propia

La base que nos permite relacionar el razonamiento covariacional y la modelación matemática a fin de trabajar en conjunto con ambos marcos, son las variables, mismas que están presentes en los pasos 1, 2, 3 y 4 del proceso de modelación y en todos los niveles de razonamiento covariacional. El punto de partida es el paso 1 de modelación y proponemos que mientras una persona transite por los distintos pasos del proceso (del 1 al 4) se puedan desarrollar diferentes niveles de razonamiento, mientras que los pasos 5, 6 y 7 complementan el ciclo de modelación al regresar los resultados matemáticos al mundo real, de tal modo que el proceso cíclico resulta "contener" los niveles de razonamiento covariacional.

Proponemos que se parta desde la situación modelo dentro del "mundo real" considerando que la base son las variables, a las que se les puede atribuir la característica de ser medibles, y por tanto, concebirlas como cantidades que pueden tener distintos valores, de tal modo que podemos favorecer el nivel cero de razonamiento covariacional, donde es necesario atribuir dicha característica a las variables, para así convertirlas en cantidades.

Las cantidades deben contar con cierta relación, es aquí donde el paso dos del proceso de modelación llamado simplificar, surge mediante la estructuración de dichas cantidades que pueden relacionarse, y de esta manera, podemos favorecer el nivel uno de razonamiento covariacional, donde es posible observar dos cantidades que se relacionan y varían, pero no necesariamente de forma coordinada.

En el paso número tres llamado matematizar se debe construir un modelo matemático de la situación, que puede ser expresado a través de una gráfica, una tabla, alguna expresión algebraica e incluso un diagrama, en estos modelos matemáticos están presentes las variables y las relaciones entre ellas, desde la relación que muestran las construcciones de modelos matemáticos podemos favorecer el desarrollo de los niveles dos y tres de razonamiento covariacional al centrar la atención en dos variables, lo cual puede permitir visualizar una coordinación de cantidades desde el modelo matemático.

El modelo matemático formulado debe permitir el trabajo matemático; con ayuda del modelo es posible realizar procedimientos, cálculos u operaciones que permitan obtener resultados, y es mediante este paso que podemos favorecer el desarrollo de los niveles cuatro y cinco del razonamiento covariacional, es decir, variación continua gruesa y suave.

Finalmente, los pasos del proceso de modelación 5, 6 y 7; interpretar, validar y exponer los resultados, se añaden a forma de complemento. Los resultados matemáticos obtenidos del paso 4, deben interpretarse en términos de la situación real, mostrar que los resultados del modelo construido son adecuados en términos de la situación; de ser así, deberá concluirse el trabajo exponiendo los resultados, de lo contrario, se deberá regresar a los primeros pasos del proceso de modelación y dar una vuelta más al ciclo, a fin de construir un modelo adecuado de la situación, para finalmente compartir los resultados. Proponemos un modelo de la relación de ambos marcos cognitivos mostrado en la Tabla 5.

Tabla 5

Propuesta de Modelo teórico entre la modelación y el razonamiento covariacional

Articulación de los pasos del proceso de modelación con los niveles de razonamiento covariacional
Construir-sin coordinación Se debe entender la situación e identificar variables presentes para construir un modelo de la situación, a las variables identificadas se les debe atribuir la característica de ser medibles, por tanto, deben visualizarse como cantidades, y tener la cualidad de variar.
Simplificar-precoordinación Se debe estructurar la situación en términos de variables que resulten significativas en la situación para construir un modelo real, la variación se debe visualizar de forma separada, es decir, sin coordinar cambios entre variables, además se debe visualizar que una variable cambia primero y posteriormente la otra.
Matematizar-coordinación gruesa de valores y coordinación de valores Se debe transformar el modelo real en un modelo matemático que involucre dos variables en juego. Primero, se debe formar una imagen general de que las dos cantidades varían entre sí y posteriormente coordinar valores particulares de las dos variables hasta poder crear una colección discreta de pares de valores coordinados.
Trabajar matemáticamente-variación continua gruesa y variación continua suave Se debe realizar cálculos, procedimientos u operaciones que produzcan resultados matemáticos, en estos resultados se debe visualizar que los cambios en el valor de una variable suceden de forma simultánea con los cambios de la segunda variable. Primero de forma gruesa, es decir, coordinar cambios iguales por intervalos, y posteriormente, de forma continua suave, durante toda la situación.
Interpretar, validar y exponer Se debe traducir los resultados matemáticos en términos de la situación real, mostrar un modelo adecuado de la situación y presentar sus resultados.

Autoría propia

Objetivo específico

Con la intención de contrastar empíricamente y refinar la propuesta teórica anterior, diseñamos una tarea de modelación dirigida para estudiantes de nivel superior y estructurada de manera que sea posible favorecer los niveles de razonamiento covariacional. Decidimos trabajar en nivel superior debido a la dificultad y exigencias de trabajar con dos marcos cognitivos tan complejos. Planteamos una segunda pregunta de investigación; ¿Qué niveles de razonamiento covariacional desarrollan estudiantes de nivel superior a través de una tarea de modelación? Y fijamos el siguiente objetivo específico de investigación:

- Desarrollar los niveles razonamiento covariacional en estudiantes de nivel superior a través de una tarea de modelación.

Capítulo 3

Aspectos metodológicos

De acuerdo con los objetivos de investigación, realizamos un estudio de casos tipo instrumental. Según Yin (2009), los casos son una herramienta para analizar y comprender una problemática mayor, y como consecuencia de ello puede refinarse o generarse una teoría. Particularmente, usamos el estudio de casos para describir con claridad la relación entre el proceso de modelación matemática y el desarrollo del razonamiento covariacional; en ese sentido, los casos son un medio para fundamentar la relación teórica desde lo empírico; por tanto, consideramos esta metodología adecuada para la investigación.

Población, contexto y recolección de datos

Se realizó una invitación a estudiantes para trabajar de forma voluntaria con una tarea de modelación, con el único requisito de contar con disponibilidad de horario para las sesiones de estudio y la aplicación de entrevistas abiertas posterior a la tarea, y así indagar a profundidad en el razonamiento de los estudiantes de forma individual.

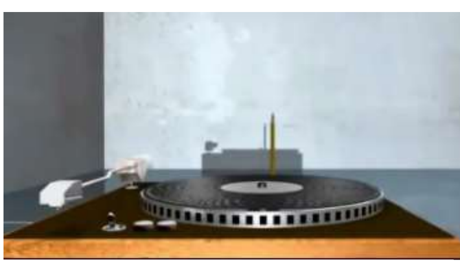
La población que aceptó la invitación para participar en la tarea, fueron seis estudiantes de la facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Guerrero, que cursaban diferentes semestres de las ingenierías; computación, civil y topografía y geomática. La tarea se programó en tres sesiones de trabajo con un tiempo estimado de una hora y treinta minutos para cada sesión, pero por cuestiones de la contingencia sanitaria actual sólo fue posible trabajar en dos sesiones grupales, por lo que el tiempo de trabajo tuvo que reducirse.

Finalmente, para la recolección de datos se usaron cámaras de video, grabadora de voz y la recolección de las producciones escritas por los estudiantes, para analizar transcripciones de audio y gesticulación de los estudiantes, con la intención final de indagar en el razonamiento de los estudiantes y analizar los datos de acuerdo con los objetivos de investigación. Además, la triangulación entre investigadores de un grupo de trabajo de modelación-covariación se consideró parte fundamental para consensar las interpretaciones mostradas en los resultados.

Tarea de modelación

Con la intención de desarrollar niveles de razonamiento covariacional en estudiantes de nivel superior diseñamos una tarea de modelación que permitiera obtener evidencias para contrastar empíricamente el modelo mostrado en la Tabla 5. La situación de la que parte la tarea se muestra en la Figura 5, decidimos trabajar con una situación de naturaleza dinámica, tal como sugería Carlson et al. (2002) basado en el supuesto que la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas puede favorecer el desarrollo del razonamiento covariacional.

Realizamos estudios piloto de la tarea en diferentes contextos; talleres y cursos dirigidos para estudiantes, futuros profesores y profesores en servicio. De las pruebas piloto emergieron algunos modelos construidos, que se relacionaban con la función lineal, seno y coseno en términos de las variables presentes en el modelo.

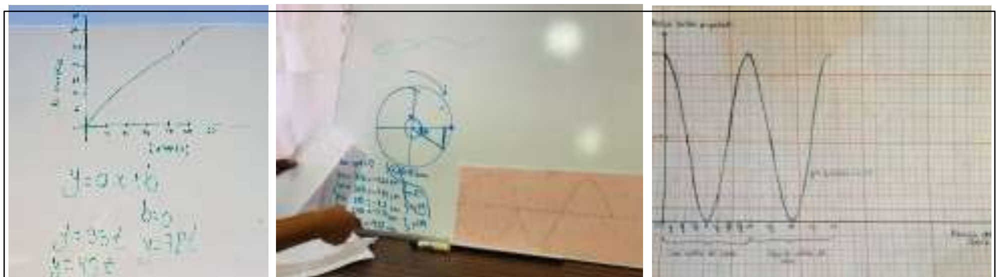


En un tocadiscos que gira a cierto número de revoluciones por minuto: 33, 45 y 78 se coloca un lápiz en la orilla del disco y se coloca una luz fija frente al tocadiscos del tal modo que la sombra del lápiz se proyecta en una pared mientras el disco gira.

- Con ayuda del material de trabajo describe detalladamente el movimiento que observaste.

Figura 5. Situación del tocadiscos

Diseñamos la tarea considerando la diversidad de variables presentes que permitían la construcción de modelos relacionados con funciones matemáticas, tal y como se muestra en la Figura 6. La estructura de la tarea incluía sugerencias y preguntas guía de tal forma que, mientras un estudiante construyera un modelo matemático de la situación se construyera en término de dos variables y su variación, con la intención final de favorecer el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional.



Modelo matemático construido en función de las variables "tiempo" vs "distancia", asociado a un comportamiento lineal.	Modelo matemático construido en función de las variables "ángulo" vs "altura", asociado a un comportamiento sinusoidal.	Modelo matemático construido en términos de la razón coseno de un ángulo asociado a un comportamiento cosenoidal.

Figura 6. Modelos matemáticos emergentes de los estudios piloto.

Durante las pruebas piloto, se construyeron algunos modelos matemáticos, auxiliándonos con la construcción de triángulos rectángulos y del círculo unitario durante la tarea, tal como se sugería en algunas investigaciones (Weber, 2005; Moore, 2014), además, los tipos de movimientos presentes en la situación; movimiento circular uniforme y movimiento armónico simple desempeñaron un papel importante en la construcción de modelos. Pensamos que la diversidad de modelos previamente estudiados que pueden emerger de una tarea de modelación "abierta" es fundamental para obtener y analizar modelos adecuados de la situación, así como se ha mostrado en investigaciones como la realizada por Hankeln (2020). La estructura final por la cual se guio a los estudiantes al trabajar en la tarea de modelación se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6

Trayectoria de la tarea de modelación

Pasos del proceso modelación	Tarea	Niveles razonamiento covariacional que se espera desarrollar
1	Observa el movimiento (*situación del tocadiscos*) ▪ Con ayuda del material de trabajo describe detalladamente el movimiento que observaste.	0
2	¿Qué cambia? ¿Consideras que lo que cambia puede medirse? Justifica tu respuesta	1
3	En binas: Expresen a través de una tabla, gráfica o expresión algebraica el movimiento que observaron. Pueden auxiliarse de un plano cartesiano, círculo unitario o triángulos rectángulos. Del modelo matemático ¿Cómo cambia una variable respecto de la otra?	2 y 3
4	¿Cuánto cambia una variable con respecto de la otra? Menciona ejemplos para valores específicos. ¿De qué forma se puede predecir el movimiento para cualquier momento? ¿Cuánto cambia una variable con respecto de la otra mientras el tocadiscos gira?	4 y 5
5, 6 y 7	En términos de la situación ¿cómo pueden interpretar los resultados obtenidos? Compartan sus resultados con el resto del grupo.	

Autoría propia

La tarea fue diseñada para trabajarse en un contexto de lápiz y papel, consideramos hojas milimétricas, escuadras, transportador, compás y cuerda, material de trabajo fundamental para su resolución, debido a que consideramos que la medición promueve la visualización de la relación entre cantidades (Jin et al., 2019).

Por otra parte, de acuerdo con Blum & Borromeo (2009), una tarea de modelación es una tarea con una demanda cognitiva sustancial. Según el esquema de clasificación para tareas de modelación reportado por Maaß (2010) que se muestra en la Tabla 7, las demandas cognitivas que exige una tarea de modelación se clasifican en: *modelación extramatemática*, *trabajo intramatemático*, "*Grundvor-stellungen*" (ideas básicas), *tratando con textos que* *contienen matemáticas*, *razonando matemáticamente* y *tratando con representaciones matemáticas*. Las demandas cognitivas que exige la tarea diseñada para esta investigación son de *modelación extramatemática*; al requerir que quien modele transite por los diferentes pasos de proceso de modelación sin importar el orden, lo que exige una traducción entre las matemáticas y la realidad.

Asimismo, se exige la demanda de *razonamiento matemático*; debido a la necesidad de que el razonamiento de quien modele se haga explícito al transitar por los pasos del proceso, y que el trabajo no sólo se presente en términos de algoritmos o procedimientos matemáticos, sino que además el significado y la interpretación vayan más allá de trabajar matemáticamente.

La *situación del tocadiscos* que se incluye en la tarea y que se muestra en la Figura 5, es considerada una situación auténtica, al situarse en un contexto extramatemático que involucra fenómenos de movimientos que permiten que emerja el trabajo con el contenido matemático que resulta relevante para los expertos (Maaß, 2010).

Tabla 7

Esquema de clasificación para tareas de modelación (Maaß, 2010, p.296)

Nombre de la clasificación		Categorías de clasificación						
Clasificaciones para tareas de modelación	I. Me centro en la actividad de modelación	Todo el proceso	Entender la situación	Configurando el modelo real	Matematizando	Trabajando matemáticamente	Interpretando	*Validando*
	II. Datos	Superfluos	Faltantes	Superfluos y faltantes	Inconsistentes	Pares		
	III. Naturaleza de la relación con la realidad	Autentica	Cercano de la realidad	Incrustada	Intencionalmente artificial	Fantasía		
	IV. Situación	Situación personal	Situación ocupacional	Situación pública	Situación científica			
	V. Tipo de modelo usado	Descriptivo	Normativo					
	VI. Tipo de representación	Texto	Imagen	Texto e imagen	Material	Situación		
Clasificaci-ones generales	VII. Apertura de la tarea	Ejemplo resuelto	Tarea determinante	Tarea de reversión	Problema complejo	Problema reversible complejo	Encontrando una situación	*Problema abierto*
	VIII. Demanda cognitiva	Modelación extramate-matica	Trabajo extramate-mático	Grundvor-stellungen (ideas básicas)	Manejo con textos que contienen matemáticas	Razonami-ento matemático	Manejo con representaci-ones matemáticas	
	IV. Contenido matemático	Área matemática	Nivel escolar					

Según las clasificaciones de Maaß (2010) en la clasificación I "*me centro en la actividad de modelación*", decidimos situar la tarea en la categoría "*todo el proceso*", debido a nuestro interés por conducir a quienes modelen a transitar por los diferentes pasos del proceso independientemente del orden en que suceda.

Para la clasificación II "*datos*" la tarea se sitúa dentro de la categoría "*datos faltantes y superfluos*" dado que la tarea parte de una situación autentica, es decir, de una situación que contiene mucha información, pero no toda la información es necesaria, y deberán elegirse los datos que resulten importantes para la construcción del modelo.

En la clasificación III *"naturaleza de la relación con la realidad"* la categoría en la que situamos la tarea es *"cercano de la realidad o tareas realistas"* considerada así porque como el nombre lo indica la tarea es cercana con la realidad, que puede o no ser auténtica, debido a que los datos en la tarea pueden tener un significado realista pero también pueden ser construidos dentro de la tarea, es decir, los datos pueden ser auténticos pero no necesariamente el problema que se resuelva con ellos.

En la clasificación IV *"situación"* la tarea se sitúa dentro de la categoría "*situación pública"* debido a la realidad en la que se ubica la situación de la que se parte en la tarea, esta puede categorizarse de diferentes formas dependiendo de la realidad en que se ubique la situación, por ejemplo: personal, ocupacional o científica (Maaß, 2010).

En la clasificación V *"tipo de modelo usado"* la categoría donde se ubica la tarea es *"modelo descriptivo"*, desde este tipo de modelo se intenta explicar y/o predecir la realidad. Para la clasificación VI *"tipo de representación"* en que se presenta la tarea, la categoría donde se ubica es *"situación"* debido a que se parte presentando al modelador una situación para trabajar con la tarea, y no se presenta por ejemplo; de un problema escrito o presentado a través de figuras.

En la clasificación VII *"apertura de la tarea"* la tarea se ubica en la categoría *"problema complejo o determinante"* debido a que se presenta la situación inicial pero la transformación de esta es desconocida y será necesario describirla. Para la clasificación *"contenido matemático"* la tarea se ubica en la categoría *"área matemática"* debido a que el contenido matemático de la tarea no está en función de un nivel escolar sino de una de las áreas de la matemática; Cálculo, particularmente funciones matemáticas tales como función lineal, seno y coseno.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentaremos el análisis de los datos obtenidos a partir de la resolución de la tarea de modelación por parte de 4 estudiantes. De acuerdo con el tipo de estudio que realizamos, reportamos cuatro casos analizados, donde identificamos los pasos del proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009) por los que transitan los participantes y las características de los niveles de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) que evidencian desarrollar mientras trabajan en el proceso de modelación. Ello, por nuestro interés de analizar el papel de la modelación en el razonamiento covariacional de los estudiantes que nos permitirá contrastar empíricamente la propuesta de relación de marcos que hemos presentado.

Análisis de datos

Presentamos el análisis del trabajo de los participantes realizado de forma individual y posteriormente en binas, se muestran los pasos del proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009) en el orden en que se realizaron, y las características asociadas a los niveles de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) desarrollados durante la tarea, acompañado de la evidencia que lo demuestra.

Con la intención de identificar la relación de los pasos del proceso de modelación con los niveles de razonamiento covariacional, nos auxiliamos de las categorías de codificación de Maaß (2006) que mostramos en la Tabla 8, para asegurar que los estudiantes transitaban por alguno de los pasos de modelación, y a su vez, identificamos las características asociadas con los niveles de razonamiento covariacional de acuerdo con las descripciones realizadas por Thompson & Carlson (2017).

Los casos 1, 2, 3 y 4 se atribuyen a los participantes denominados E1, E2, E3 y E4 respectivamente, que trabajaron de forma individual y posteriormente en binas debido a la organización de la tarea.

Tabla 8

Categorías de codificación (Maaß, 2006)

Categoría	El estudiante está…
Construir	*… Leyendo o repitiendo el problema; construir una representación mental de la situación sin simplificarla.*
Simplificar	*... Haciendo suposiciones para el problema y simplificando la situación; reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar variables clave, construir relaciones entre las variables o buscar información disponible o diferenciar entre información relevante e irrelevante.*
Matematizar	… Matematizando cantidades relevantes y sus relaciones; elegir notaciones matemáticas apropiadas y /o representar situaciones gráficamente.
Trabajar matemáticamente	*... Usando estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, estableciendo relaciones con problemas similares o análogos, reformulando el problema, visualizando el problema en una forma diferente, realizando cálculos o procedimientos, etc.; usando conocimiento matemático para resolver el problema.*
Interpretar	*... Interpretando resultados matemáticos en contextos extramatemáticos; ver soluciones a un problema mediante el uso del lenguaje matemático apropiado y/o comunicarse sobre las soluciones.*
Validar y exponer	*... Revisando críticamente y reflexionando sobre las soluciones encontradas; revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado, si las soluciones no se ajustan a la situación; reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente; generalmente cuestionando el modelo. Y, finalmente compartir los resultados.*

Resultados

Se identifica el paso uno del proceso de modelación, E1 y E2 construyeron una situación modelo, mismo que describen desde su percepción. Además, identifican variables o “cosas que varían” en la situación, por ejemplo; un lápiz girando constantemente y un lápiz colocado en el tocadiscos con un movimiento constante oscilatorio, por parte de E1 y E2 respectivamente. Ambos visualizan variables presentes en la situación, sin coordinar cambios de una variable con otra, por lo que identificamos el nivel cero de razonamiento covariacional llamado sin coordinación, E1 y E2 no tienen imagen de variables que varían juntas, y sólo visualizan la variación de una variable, así como se muestra en las Tablas 9 y 10.

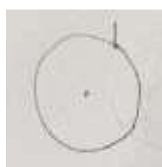
Tabla 9

Evidencia del estudiante 1

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E1	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 1 Construir	“Se puede observar un lápiz girando constantemente, su sombra describe y/o proyecta curvas ondulatorias, pude observar que su velocidad era constante, además que la sombra proyectada describía una elipse”.	Nivel 0 Sin coordinación

Tabla 10

Evidencia del estudiante 2

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E2	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 1 Construir	“Se observa que el movimiento del lápiz colocado en el tocadiscos es un movimiento constante oscilatorio que de acuerdo al tiempo y el espacio del recorrido circular que realiza el tocadiscos representan la siguiente forma geométrica”. 	Nivel 0 Sin coordinación

Identificamos el paso dos llamado simplificar, E1 y E2 parten de la situación modelo, centran su atención en variables que para ellos resultan importantes, descartan otras variables visualizadas anteriormente y describen de forma general un modelo real de la situación, así como se muestra en las Tablas 11 y 12. Los estudiantes mencionan cómo para cada uno de ellos sería posible medir el movimiento. E1 logra un primer acercamiento al modelo matemático de la situación al mencionar que con una ecuación o con la derivada vista por él cómo razón de cambio, puede atender el problema, es decir, puede describir el movimiento de forma general, aunque todavía no es capaz de realizarlo. Por otra parte, E2 decide enfocarse sólo en la posición y la duración del recorrido, y plantea que todo se puede medir en función del tiempo, por tanto, simplifica la situación.

E1 evidencia desarrollar el nivel 0 de razonamiento covariacional, al atribuir la variación solo a la altura del lapicero, y a pesar de que menciona que puede medir con una ecuación o derivada, no es capaz de construirlas, por lo que continúa sin coordinar valores. E2 por otra parte, evidencia desarrollar los niveles 1 y 2 de razonamiento covariacional, debido a que primero visualiza que tanto la posición del lapicero como la duración del recorrido varían, y posteriormente que la posición varía debido a la duración, es decir, visualiza una variación en función de la otra, pero solo de forma general, por lo que logra evidenciar una coordinación gruesa de valores.

Tabla 11

Evidencia 2 del estudiante 1

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E1	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 2 Simplificar	“De todo el movimiento yo puedo identificar que cambia la altura del lapicero debido a la proyección de frente de la luz. Se puede medir el movimiento por medio de una ecuación o dentro de la aplicación de derivada (razón de cambio)”.	Nivel 0 Sin coordinación

Tabla 12

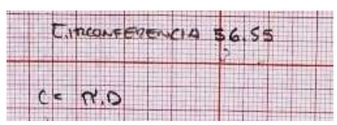
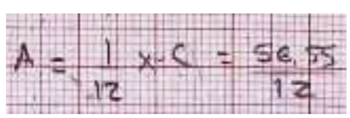
Evidencia 2 del estudiante 2

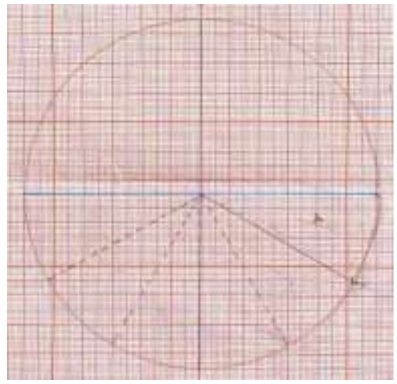
Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E2	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 2 Simplificar	“Me centro en la posición, cambia la posición y la forma que inicialmente representa de acuerdo a la duración del recorrido. Se mediría de acuerdo al tiempo que tarda en hacer el recorrido formado”.	Nivel 1 Precoordinación de valores Nivel 2 Características asociadas a Coordinación gruesa de valores

En la Tabla 13 se muestra el trabajo realizado en binas E1 y E2, quienes compartieron sus respuestas individuales previas, hecho que los llevó a regresar al paso 2 del proceso de modelación llamado simplificar, y posteriormente, matematizar el modelo real transitando así al mundo matemático. Además, el nivel de razonamiento covariacional evidenciado por E1 y E2 fue el nivel 2; coordinación gruesa de valores, al verbalizar de forma general que una cantidad variaba respecto de la otra.

Tabla 13

Evidencia de los estudiantes 1 y 2

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas E1 y E2 Fragmento de conversación donde participa el profesor/investigador (P)	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E1 y E2: Paso 2 Simplificar Paso 3 Matematizar	E1: comenzamos por utilizar el perímetro, sacamos lo que es el perímetro del círculo. que es pi por diámetro. P: Ok, ¿eso es todo lo que mide esto?, la circunferencia. E2: Sí, exacto. P: Y después, ¿qué hicieron?  E1: Lo fuimos dividiendo en 360 grados, o en 12. P: ¿Lo dividieron en 12 partes iguales? E1: Ajá en 12. E2: Ya después ponemos un doceavo por el perímetro.  E1: Y lo dibujamos. E2: Dibujamos la mitad del circulo porque la otra mitad estaría dividida igual.	E1: Nivel 2 Coordinación gruesa de valores E2: Nivel 2 Coordinación gruesa de valores

	 P: ¿Por qué colocaron una letra A en la primera parte dividida del círculo? E1: En esa parte vamos a medir el ángulo que avanza y la posición inicial del lapicero hasta donde termina su recorrido en esa parte. P: ¿Qué medirán primero? E2: Se puede medir primero cualquiera de las dos. P: ¿Por qué? E2: No hay una opción que se mueva primero y otra después, las dos se mueven a la vez. P: ¿A qué te refieres con que se muevan? E2: Lo que trato de decir es que la longitud (señalando el arco) crece desde su punto inicial pero conforme va creciendo el ángulo también crece, no sé si me explico. P: ¿Estás de acuerdo con tu compañero EA? E1: Si, yo pienso que conforme aumenta el ángulo aumenta la longitud y lo mismo pasa al revés.	

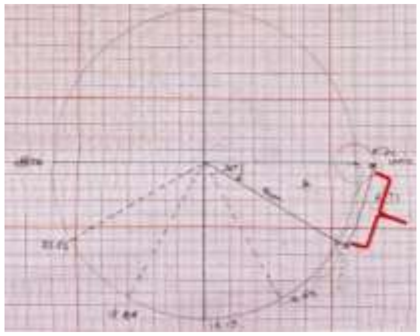
En la Tabla 14 se muestra que durante el trabajo matemático E1 y E2 obtuvieron resultados matemáticos que junto con sus respuestas verbales evidenciaron desarrollar los niveles 3 y 4; coordinación de valores y variación continua gruesa. E1 coordinó los valores del ángulo con la longitud del arco recorrida, y verbalizó una pequeña colección de pares de variables, además describió de forma general la coordinación de cambios entre éstas, visualizando el círculo por partes y haciendo referencia a que la coordinación de la variación de las variables sucedería de igual manera si dividía el círculo en dos, por lo que sus respuestas sólo fueron asociadas al nivel 4, coordinación continua gruesa.

Por su parte E2 también coordinó los valores del ángulo con la longitud del arco recorrida, visualizó el círculo en 4 partes donde sucedía la coordinación de variables, pero hizo referencia a que las dos sucedían al mismo tiempo durante todo el recorrido, por lo que su descripción se asoció a un nivel más avanzado, variación continua suave.

Tabla 14

Evidencia de los estudiante 1 y 2

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas E1 y E2 Fragmento de conversación donde participa el profesor/investigador (P)	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E1 y E2: Paso 4 Trabajar matemáticamente	P: Ok, entonces si uno sobre doce por c es el perímetro, ¿qué obtienen de resultado? E2: 4.71. E1: Es lo que avanzó. $A = \frac{1}{12} x\text{-}C = \frac{56.55}{12} = 4.71$ P: ¿Y eso mismo sería lo que avanzó en la siguiente parte dividida? E1: Si. E2: Así es. P: Ok, ¿y si en la expresión no lo divides en 12 y lo divides en grados? E1: No sería lo mismo 30 por 56.55 E2: Mmm, no pero son 30 grados, solo tendrías que convertirlos. E1: Ah si. E2: Si, porque 30 grados es un doceavo de todo (señalando el circulo). … P: Entonces, ¿cómo serían los cambios?, ¿qué pasa con estas medidas? E2: Van incrementando. P: ¿Cuánto incrementan? E2: 4.71 P: ¿Incrementan lo mismo? E2: Si, eso va constante. P: Ok, ¿entonces a medida que aumenta eso, qué pasa por ejemplo con los grados?	EA: Nivel 3 coordinación de valores Nivel 4 Características asociadas a variación continua gruesa EB: Nivel 3 coordinación de valores Nivel 4 variación continua gruesa Nivel 5 variación continua suave

	E1: Incrementaría también, si, 4.71 va a incrementar, teníamos 30 grados y avanzaba 4.71, va incrementando 4.71, sería 4.71 más 4.71 que nos da 9.42 para 60 grados, ya después tendríamos el de 90 grados con 14.13. P: ¿Y cómo seguiría?  E1: Igual seguiría. P: ¿Y con esto que tienen por ejemplo ya podría utilizarlo para cualquier caso sin importar el número de partes en que dividieran el círculo? E2: Si, se podría. P: ¿En lugar de 12 partes podrían hacerlo en… en cuántas partes se podría dividir? E2: En infinidad. E1: O en ocho también. P: ¿Y si nos fijamos por ejemplo en grados? E1: 360. E2: En 360 grados. P: ¿Podrían saber cuánto avanza el lapicero en cada grado? E2: Si, de la misma manera pero dividiríamos el circulo en grados en lugar de 12 partes. P: ¿necesitarían dividir todo el círculo en 360? E1: No necesitaríamos dividir todo el circulo, por ejemplo podemos dividirlo en 2 partes iguales y lo que pase en una parte será lo mismo que pase en la otra pero como si fuera un reflejo, simétrico. E2: O podemos dividirlo en 4 partes iguales y como dice mi compañero sucederá algo parecido en las otras partes pero tomando en cuenta donde inician los grados y el recorrido del lápiz, porque sabemos que suceden al mismo tiempo durante todo el recorrido.	

En la Tabla 15 se muestra que E1 y E2 interpretan los resultados matemáticos obtenidos anteriormente en términos de resultados reales y finalmente comparten sus respuestas con el resto del grupo, validan sus resultados con sus compañeros y muestran que su modelo era adecuado. Es importante mencionar que en este paso no surge el desarrollo de ningún nivel de razonamiento covariacional a pesar de ser verbalizados, debido a que es en el paso anterior donde previamente se desarrollaron.

Tabla 15

Evidencia de los estudiante 1 y 2

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas Estudiantes 1 y 2	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E1 y E2: Paso 5 Interpretar Paso 6 Validar Paso 7 Exponer	P: De los resultados que obtuvieron, ¿cómo piensan que se ven reflejados en la situación? E2: Yo pienso que conforme el disco gira y se le pone la luz, el lápiz se mueve con una velocidad que tiene valores como los que encontramos. E1: Si tratamos de ver el ángulo está en el centro del disco y la longitud de arco en la orilla del disco, el lapicero se va moviendo con el giro y cuando eso pasa el ángulo crece y la longitud va aumentando. E2: También se ve la velocidad, que es constante, pero el lápiz siempre se mueve (señalando el lápiz), cuando el lápiz se mueve los grados van de 0 a 360 durante el recorrido que hace que va de 0 a 56.55, y como ya lo habíamos dicho los dos suceden al mismo tiempo.	

Por las variables y sus relaciones en el modelo construido por los estudiantes 1 y 2, asociamos el modelo construido por los estudiantes con un comportamiento lineal, lo que permite generalizar el modelo emergente en términos de la función lineal.

Por otra parte, E3 y E4 construyeron un modelo de la situación en términos de lo que ellos observaron, y evidenciaron el nivel cero de razonamiento covariacional al visualizar que una variable presente en la situación varía, debido a que ambos estudiantes percibieron el movimiento que realizaba el lápiz y describieron cómo cambia, así como se muestra en las Tablas 16 y 17.

Tabla 16

Evidencia del estudiante 3

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E3	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 1 Construir	"Se observa en la sombra que forma el lápiz un movimiento ondulatorio que es repetitivo constantemente y mantiene la misma velocidad".	Nivel 0 Sin coordinación

Tabla 17

Evidencia del estudiante 4

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E4	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 1 Construir	"Pude observar que el lápiz en el tocadiscos tuvo un movimiento giratorio u ondulatorio, el cual gira varias veces hacía una cierta distancia y llega en el mismo punto que marca la circunferencia (inicio)".	Nivel 0 Sin coordinación

En las Tablas 18 y 19 se muestra que E3 y E4 respectivamente, parten del modelo de la situación, y estructuran la situación con nuevas variables que visualizan hasta formular un modelo real de la situación, E3 además transforma el modelo real en un modelo matemático de la situación, por lo cual transita hacia la matematización. E3 continúa evidenciando el nivel 0 al atribuir el cambio a una sola variable, mientras que E4 coordina la variable distancia (longitud de arco) que recorre el lápiz en función del ángulo, por tanto, evidencia el desarrollo del nivel 2: coordinación gruesa de valores.

Tabla 18

Evidencia 2 del estudiante 3

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E3	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 2 Simplificar	"Ahora noto que cambia el tamaño de la pluma y pienso que si colocamos medidas donde se proyecta la imagen y observo el punto en donde termina el lapicero, se puede medir".	Nivel 0 Sin coordinación

Tabla 19

Evidencia 2 del estudiante 4

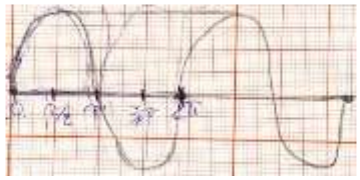
Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo individual E4	Nivel de razonamiento covariacional identificado
Paso 2 Simplificar Paso 3 Matemátizar	"Del movimiento podría encontrar el ángulo recorrido, donde 360 es la circunferencia completa, por ejemplo si localizo un ángulo para medir la distancia que recorre el lapicero, se puede utilizar la fórmula del arco. $L = \theta * r$	Nivel 1 Precoordinación de valores Nivel 2 Cordinación gruesa de valores.

En la Tabla 20 se muestra que E3 y E4 estructuraron la situación desde la perspectiva de ambos, para finalmente expresar el modelo real a través de un bosquejo gráfico de la función seno, es decir, formular un modelo matemático de la situación. Además, evidenciaron coordinar valores de dos variables presentes en su bosquejo gráfico, E3 fue de quien mayor evidencia se obtuvo presentar características asociadas al desarrollo del nivel 3.

Tabla 20

Evidencia de los estudiantes 3 y 4

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas E3 y E4	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E3 y E4: Paso 2 simplificar Paso 3 matemátizar	E3: Cuando compartimos nuestras respuestas y lo analizamos otra vez, ahora lo vimos de otra manera. P: Cuéntenme cómo. E4: Lo miramos como si fuera una onda seno. P: ¿Cómo si fuera una onda seno? E3: Si, una onda de seno	E3: Nivel 3 coordinación de valores

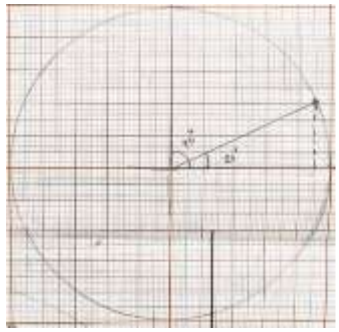
	E4: Si tenemos un movimiento así (rodeando el círculo) al momento de irse proyectando así, se va a proyectar como una onda seno (forma con sus manos una curva con la forma de una función seno). E3: Hicimos una gráfica de cómo sería, sólo un bosquejo.  P: ¿Qué representan los ejes? E3: Radianes por el ángulo y el lugar donde se encuentra el lápiz, hasta 2π es donde se completa un ciclo. P: ¿Comienza hacia arriba? (señalando la curva) E3: Si. P: ¿Y si el movimiento del lápiz sucede hacia bajo? E3: Entonces sería coseno. P: ¿Por qué? E3: Cambia la dirección.	E4: No hay evidencia que muestre el desarrollo de razonamiento covariacional.

En la Tabla 21 se muestra que E3 trabajó matemáticamente, mientras que E4 durante el trabajo matemático necesitó regresar al paso dos de simplificación a fin de reconsiderar el modelo real y posteriormente regresar al trabajo matemático. Ambos estudiantes mostraron durante el trabajo matemático desarrollar un razonamiento covariacional situado en el nivel 4 al coordinar cambios continuos en intervalos.

Tabla 21

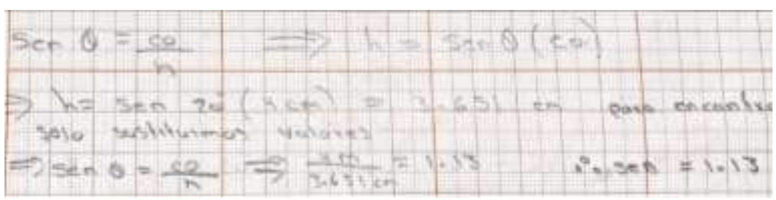
Evidencia de los estudiantes 3 y 4

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas Estudiantes 3 y 4	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E3 Paso 4: trabajar matemáticamente E4 Paso 4: trabajar matemáticamente Paso 2: simplificar Paso 4: trabajar matemáticamente	E4: Se puede medir ángulos, que van proporcionando más información, con un ángulo puedo saber cuánto mide de aquí a acá (señalando un cuarto de vuelta del tocadiscos), por ejemplo de 90°. … E3: Trazamos un circulo y localizamos triángulos que se formaron con el ángulo, por ejemplo 20°.	E3: Nivel 4 variación continua gruesa E4: variación continua gruesa.

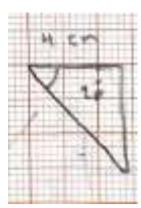


P: Díganme cómo lo hicieron.
E4: Sabemos que cateto opuesto y cateto adyacente son iguales a las medidas que tomamos, para sacar la hipotenusa utilizamos $a^2 + b^2 = h^2$ y sabemos que también podemos usar seno.

P: ¿Están tomando en cuenta la dirección que lleva el movimiento del lápiz?
E3: Primero no y después si, por eso digamos que lo hicimos de 2 formas. Primero, buscamos el seno del ángulo 20, entonces hicimos nada más un triángulo que se forma en el círculo y sus medidas para poder encontrar la hipotenusa utilizamos sen $\theta = \frac{CO}{h}$, despejamos y sustituimos hasta saber el seno.

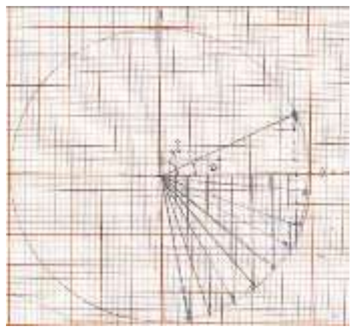


P: Veo que colocaron otra valor para cateto opuesto en lugar del que marca la hoja.
E3: Creo que lo pusimos a escala del doble (1=2), en la hoja son 2cm.
P: ¿Y qué pasó con el coseno?
E4: Hicimos algo parecido, pero el triángulo cambiaba por cómo se mueve el lápiz (señalando con sus manos la trayectoria del lápiz) hicimos lo mismo y sustituimos tomando en cuenta las medidas, sería algo así:



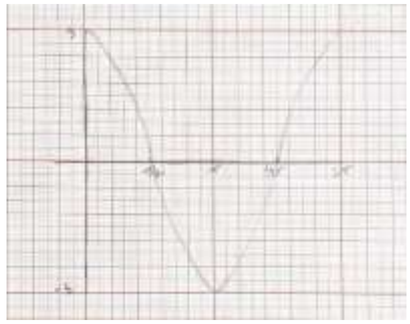
P: ¿Pueden obtener más resultados para triángulos con ángulos diferentes a 20, para poder describir… digamos matemáticamente cómo sucede este movimiento?

E3: Si.
P: ¿Creen que pueden obtener el coseno de un ángulo sin usar calculadora? Por ejemplo con ayuda de las medidas de los triángulos en las hojas milimétricas.
E3: Solo que usemos nada más $\frac{ca}{h}$ midiendo el ca y también la hipotenusa, pero no estoy seguro de que la hipotenusa sea así.
P: Recuerden que lo están haciendo a escala.
…
E4: Dibujamos varios triángulos, medimos sus lados y calculamos el coseno, pero primero cada triangulo iba aumentando 10 grados.
P: ¿Cómo?
E3: Si, medimos los ángulos con el transportador de 10 en 10, y así fuimos dibujando los triángulos, anotamos las medidas en centímetros y así fuimos calculando el coseno de cada triangulo, bueno la razón de cada triangulo por separado. Por decir, para el ángulo de 10 medimos 5cm de cateto adyacente entre 5cm de la hipotenusa y nos dio 1cm.
E3: Bueno la hipotenusa de los triángulos siempre es 5cm porque es como si fuera el radio.



P: ¿Y qué pasó con los triángulos siguientes?
E3: Medimos todos y de los resultados notamos que era cada vez un número más pequeño, cada vez que aumentaba 10 el ángulo de cada triangulo el resultado del coseno era más pequeño.
P: ¿Cómo disminuía?
E3: Pues… anotamos las diferencias, primero pensamos que disminuía cada vez un número mayor.
P: ¿Podríamos decir que disminuía cada vez más?
E3: Es que las diferencias entre una razón y la otra parecía que iban de 2 en 2, pero pensamos que es por las medidas que tomamos, que son aproximaciones, aunque tengamos las hojas milimétricas el ángulo también cuesta trabajo medirse y dibujar los triángulos.
E4: Ajá, en lo que si estamos de acuerdo es que cuando el ángulo aumenta el coseno se hace más pequeño hasta llegar a 90° que se hace cero.
P: Con esos resultados que tienen ¿pueden saber qué pasa en los siguientes cuadrantes o les haría falta tomar algunos datos extra?

E4: Como quedó en cero, ahora iría de menos a más, serían los mismos valores y se recorrerían al revés.
E3: Gráficamente podemos ver los resultados así, hicimos un bosquejo como creemos que es cuando se recorre un ciclo.

	 P: ¿Por qué la curva tiene esa forma en el primero de los intervalos que va a de 0 a π/2? E3: Por los valores que teníamos de coseno, que disminuía y por la forma que sabemos que tiene la curva de la función coseno y se mueve de 0 hasta 5 por la amplitud del radio.	

En la Tabla 22 se muestra que E3 y E4 muestran evidencia de traducir sus resultados matemáticos en términos de la situación real, compartieron sus resultados con el resto de sus compañeros a fin de validar su modelo matemático y llegaron a la conclusión que en su modelo era necesario tener más datos numéricos para poder generalizar y describir con exactitud el movimiento.

Tabla 22

Evidencia de los estudiantes 3 y 4

Paso del proceso de modelación identificado	Evidencia de trabajo en binas E3 y E4	Nivel de razonamiento covariacional identificado
E3 y E4: Paso 5 Interpretar Paso 6 Validar Paso 7 Exponer	… E4: Bueno el ángulo que medimos y los triángulos están presentes en la situación, nada más que a simple vista no se ven, tuvimos que usar material para verlo, en el movimiento cuando el lápiz comienza a moverse es porque el ángulo comienza a aumentar de 0 hasta 360°, el lápiz sigue un movimiento constante y siempre que pasa por algún punto del contorno del disco le corresponde un cateto adyacente y una hipotenusa del triángulo, que ahora sabemos que se forma, entonces allí está presente el coseno, en todos los lugares por donde el lápiz pase. E3: Si, y como el movimiento del lápiz se repite cada vuelta, con los resultado que tenemos podemos decir que así será para todos las vueltas que dé, si tuviéramos una expresión o una ecuación podríamos describir mejor pero nos hacen falta datos para tenerla.	

Por las variables y sus relaciones en el modelo construido por E3 y E4, asociamos el modelo con un comportamiento cosenoidal, lo que permite generalizar el modelo emergente en términos de la función coseno.

Casos reportados

Mostramos en síntesis la relación de los pasos del proceso de modelación y los niveles de razonamiento covariacional desarrollados por los casos reportados. En la Tabla 23, compartimos la relación del caso 1, en la Tabla 24 la relación del caso 2, en la Tabla 25 la relación del caso 3, y finalmente, en la Tabla 26 compartimos la relación del caso 4.

Tabla 23

Caso 1

Paso 1	Nivel 0
Paso 2	Nivel 0
Paso 2 y 3	Nivel 2
Paso 4	Niveles 3, y características asociadas al nivel 4
Pasos 5, 6 y 7	

Tabla 24

Caso 2

Paso 1	Nivel 0
Paso 2	Nivel 1 y características asociadas al nivel 2
Paso 2 y 3	Nivel 3
Paso 4	Niveles 4 y 5
Pasos 5, 6 y 7	

Tabla 16

Caso 3

Paso 1	Nivel 0
Paso 2	Nivel 0
Paso 2 y 3	Nivel 3
Paso 4	Nivel 4
Pasos 5, 6 y 7	

Tabla 17

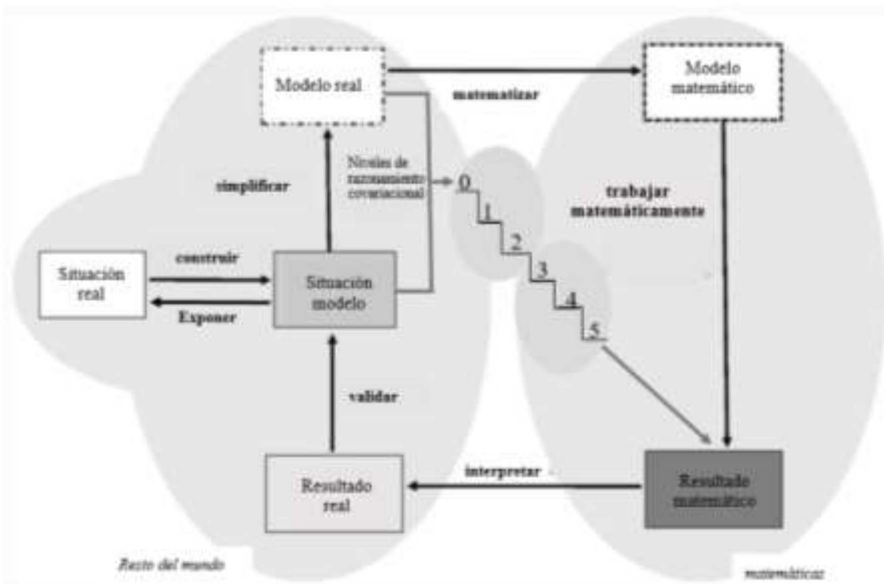
Caso 4

Paso 1	Nivel 0
Paso 2 y 3	Nivel 1 y 2
Paso 2 y 3	Sin evidencia
Paso 4	Niveles 3 y 4
Pasos 5, 6 y 7	

Modelo teórico fundamentado empíricamente

Los resultados anteriores nos permitieron contrastar empíricamente la propuesta del modelo de la relación entre los pasos del proceso de modelación y los niveles de razonamiento covariacional, mostrado en la Figura 7. A partir de los resultados pudimos observar que el desarrollo de los niveles sucede dentro del proceso de modelación; los niveles 1, 2 y 3 se desarrollan tanto en el mundo real como en lo matemático, mientras se trabaja en la construcción, simplificación o incluso en la matematización de la situación en el proceso de modelación, mientras que los niveles 4 y 5 se desarrollan en el paso 4 de modelación, es decir, mientras se trabaja matemáticamente y se obtienen resultados matemáticos.

Además, los pasos 5, 6 y 7 del proceso de modelación se presentan a manera de complemento, cerrando el ciclo de modelación, independientemente del orden en que sucedan los pasos, por ello, decimos que el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017) se encuentra “contenido” en el proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009).



Pasos del proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009):

1. Construir
2. Simplificar/estructurar
3. Matematizar
4. Trabajar matemáticamente
5. Interpretar
6. Validar
7. Exponer

Niveles de razonamiento covariacional (Thompson & Carlson, 2017)

0. Sin coordinación
1. Precoordinación de valores
2. Coordinación gruesa de valores
3. Coordinación de valores
4. Variación continua gruesa
5. Variación continua suave

Figura 7. Modelo teórico sustentado empíricamente

Capítulo 5

Discusión

A partir de lo anterior, observamos que la *situación del tocadiscos* incluida en la tarea de modelación permitió demostrar empíricamente el supuesto que la modelación de fenómenos o situaciones dinámicas facilita el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002) desde el marco actual reportado por Thompson & Carlson (2017), debido a que durante la tarea los participantes desarrollaron en diferente medida los niveles de razonamiento covariacional, y a diferencia de otras investigaciones, en este estudio se muestra con claridad el proceso de modelación (Blum & Borromeo, 2009) que siguen los estudiantes.

De modo similar, consideramos que la noción del concepto función de cada participante al momento de la aplicación de la tarea, y la interacción entre estudiante-profesor influyen de forma positiva en el razonamiento de los estudiantes. Puesto que dan evidencia de no tener un pensamiento estático, por lo que para ellos resulta natural visualizar cambios entre variables.

En ese sentido, demostramos empíricamente como un proceso de modelación permite el desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional, a pesar, que el tránsito de los participantes por los pasos del proceso no resulte de forma consecutiva. Por ello, compartimos la idea que el proceso de modelación no sucede de forma idealizada (Blum & Borromeo, 2009; Dede, 2019; Hankeln, 2020).

Por otra parte, los datos empíricos permitieron refinar el modelo teórico que nos interesaba evidenciar con claridad según nuestro objetivo general, es importante mencionar que el modelo teórico es fundamentado desde los datos que pudimos analizar, hecho que nos hace reflexionar acerca de las limitaciones del estudio. Si bien, la investigación cumple con los objetivos planteados, existen aspectos que pudieran brindar resultados más sólidos, tal como la recolección de datos de forma individual para cada caso, así como un tiempo más prolongado de trabajo con los participantes, de tal modo, que pudiéramos indagar con mayor profundidad en su razonamiento. Además, consideramos que la triangulación por parte de los investigadores es fundamental para dar cuenta de los resultados en este estudio, debido a las características de los marcos cognitivos utilizados en la investigación.

Por tanto, pensamos que desde el modelo teórico propuesto que involucra dos marcos cognitivos sería posible favorecer el aprendizaje de diferentes funciones matemáticas en investigaciones futuras, tal como; las funciones exponenciales y trigonométricas, a las que se asocia una falta de significado y contexto al estudiarlas (Moore, 2014; Ellis, Özgür, Kulow, Williams, & Amidon, 2015), por lo que, sólo son estudiadas de manera procedimental o algorítmica.

Finalmente, argumentamos que la modelación brinda a los estudiantes una visión clara sobre la conexión entre las matemáticas en el mundo real y el desarrollo del razonamiento covariacional ofrece un nuevo significado a los conceptos matemáticos cuando se estudian desde el punto de vista covariacional, tal y como lo es el caso de las funciones (Moore et al., 2013; Kertil, Erbas, & Cetinkaya, 2019), además consideramos que el razonamiento covariacional se considera fundamental para la comprensión de conceptos matemáticos importantes que van desde nivel básico hasta matemáticas avanzadas (Thompson & Carlson, 2017).

Referencias Bibliográficas

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2019). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53–65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context*, 55–73.

Confrey, J. (1991). *The Concept of Exponential Functions: A Student's Perspective* (Steffe L.P). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_8

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 135–164.

Dede, A. T. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 292–314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 135–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). “Multiply by adding”: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 92–108. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2016.03.003

Hankeln, C. (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students’ modeling processes. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 209–229. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09931-5

Jin, H., Delgado, C., Bauer, M. I., Wylie, E. C., Cisterna, D., & Llort, K. F. (2019). A Hypothetical Learning Progression for Quantifying Phenomena in Science. *Science and Education*, *28*(9–10), 1181–1208. https://doi.org/10.1007/s11191-019-00076-8

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 267–291.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers’ covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(3), 207–233. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2010). Klassifikationsschema für Modellierungsaufgaben. *Journal Fur Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Molina-Toro, J., Villa-Ochoa, J., & Suárez Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 87–115.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Oehrtman, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, 27–42. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.004

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjectsn mathematics teaching. In *New trends in mathematics teaching*: *Vol. IV* (pp. 232–248).

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*, *1*(1), 298–304.

Thompson, P. W. (1988). Quantitative concepts as a foundation for algebra. *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*(January 1988), 163–170.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, Covariation and Functions: Foundation ways of thinking mathematically. *Compendium for Research in Mathematics Education*, (January), 421–456.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (31), 1–8. https://doi.org/10.17227/ted.num31-1646

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 91–112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

Yin, R. (2009). Case study research: Design and methods. *The Canadian Journal of Action Research*, *14*(1), 69–71. https://doi.org/10.33524/cjar.v14i1.73