



Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

---

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Fricción fraccionaria en  
ecuaciones de onda no lineales  
con efecto de memoria**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**Maestro en Matemáticas Aplicadas**

PRESENTA:

**Lic. Bricio Cuahutenango Barro**

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Mayo de 2017.

# **Fricción fraccionaria en ecuaciones de onda no lineales con efecto de memoria**

Autor:

Lic. Bricio Cuahutenango Barro

Asesor:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Coasesor:

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Sinodales:

Dra. Tanya Jannette Villalba Vega

Dr. José Eligio De la Paz Méndez

Dra. Anel Esquivel Navarrete

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Campus Chilpancingo.

Universidad Autónoma de Guerrero

Chilpancingo de los Bravo

Mayo 2017

---

## Dedicatoria

---

Dedico esta tesis a todos aquellos que no creyeron en mí, a aquellos que esperaban mi fracaso en cada paso que daba hacia la culminación de mis estudios, a aquellos que nunca esperaban que lograra terminar la maestría, a todos aquellos que apostaban a que me rendiría a medio camino, a todos los que supusieron que no lo lograría, a todos ellos les dedico esta tesis.

---

## Agradecimientos

---

A mi madre, por todos los sacrificios que hizo para darme la oportunidad de estudiar.

A mi padre, por todas sus valiosas enseñanzas.

A mi hermano, por el apoyo brindado en mis años de licenciatura.

A mis hermanas por estar conmigo y brindarme su tiempo.

A mis compañeros de Ala, por haberme brindado su apoyo en los momentos más difíciles.

A mis amigos con los cuales he compartido esta experiencia de conocer la matemática tanto en mis años de licenciatura como de maestría.

A mis asesores, por creer en mi y permitirme trabajar con ellos.

En especial, a quienes me han cerrado las puertas y consecuentemente me han orillado a conocer esta parte de la Matemática que tanto interés tuve en conocer.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de posgrado.

---

## Resumen

---

Las primeras exploraciones que dieron origen al cálculo fraccionario surgen con el nacimiento del cálculo clásico al tratar de averiguar el significado que pudiera tener la derivada fraccionaria de orden no entero de una función. En la actualidad, el cálculo fraccionario es una herramienta importante para modelar fenómenos físicos que presentan dinámicas complejas que el cálculo clásico no suele describir con suficiente precisión, debido a las propiedades de no localidad y memoria presente en las derivadas de orden fraccionario.

En la presente tesis, se estudia el modelo de la ecuación de onda unidimensional, la cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales, lineal y del tipo hiperbólico, tanto en sus versiones clásicas como fraccionarias; nos centramos en el fenómeno físico de incluir la fuerza fricción a la ecuación de onda. Para el caso fraccionario, el estudio se lleva a cabo empleando la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo con respecto a la variable temporal y consideramos de igual forma términos de fricción fraccional representados por la misma derivada de tipo Caputo-Fabrizio.

Por último, se introduce una versión de la ecuación de onda donde el término de fricción o amortiguamiento lo representaremos a través de una expresión integrodiferencial con un kernel del tipo Mittag-Leffler, el cual puede emplearse para modelar efectos de memoria de diversas formas de fricción mediante la manipulación de los parámetros que definen a la función de Mittag-Leffler.

---

## Abstract

---

The first explorations that gave origin to the fractional calculus arise with the birth of the classical calculus, in trying to find out the meaning that might have the non-integer order derivative a function. At present, fractional calculus is an important tool for modeling of physical phenomena, which represents dynamic complexes that classical calculus does not usually describe with sufficient precision, due to the properties of non locality and memory presents in the order fractional derivatives.

In this thesis, we study the one-dimensional wave equation model which is a partial differential equation, linear and hyperbolic type, both in its classical and fractional versions we will focus on the physical phenomenon of including friction force in the wave equation. For the fractional case, the study is carried out using the definition of Caputo-Fabrizio fractional derivative type in the sense of Liouville-Caputo with respect to the temporal variable and we consider the friction terms of represented by the same Caputo-Fabrizio type derivative.

Finally, we introduce a version of the wave equation where the friction term or the damping is represented by an integrodifferential expression with a Mittag-Leffler kernel, which can be used for model different forms of the friction with memory effects manipulating the parameters of the Mittag-Leffler function.

---

# Índice general

---

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Índice general	VII
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	VIII
Introducción	1
Descripción de la Tesis	5
<b>1. Introducción al cálculo fraccionario</b>	<b>7</b>
1.1. Funciones Especiales . . . . .	9
1.1.1. Función Mittag-Leffler . . . . .	9
1.1.2. Función Gamma . . . . .	14
1.1.3. Función Beta . . . . .	14
1.1.4. Función delta de Dirac . . . . .	15
1.1.5. Espacios de funciones . . . . .	15
1.2. Transformada de Laplace y su inversa. . . . .	17
1.3. Operadores de diferenciación e integración fraccionaria . . . . .	22
1.3.1. Derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville . . . . .	22
1.3.2. Derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo . . . . .	36
1.3.3. Derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio . . . . .	38

1.3.4.	Integral asociada a la derivada de Caputo-Fabrizio . . . . .	42
1.3.5.	Operador integral de Srivastava y Tomovski . . . . .	50
<b>2.</b>	<b>Ecuaciones de onda clásicas</b>	<b>52</b>
2.1.	Introducción . . . . .	52
2.1.1.	Ecuación de onda clásica libre . . . . .	52
2.1.2.	Ecuación de onda amortiguada o con término de fricción . . . . .	57
2.1.3.	Ecuación de onda amortiguada con término de fuente . . . . .	62
<b>3.</b>	<b>Ecuaciones de onda de orden fraccionario</b>	<b>67</b>
3.1.	Introducción . . . . .	67
3.1.1.	Ecuación de onda fraccionaria clásica libre . . . . .	68
3.1.2.	Ecuación de onda fraccionaria amortiguada libre . . . . .	74
3.1.3.	Ecuación de onda fraccionaria amortiguada con término de fuente . . . . .	83
3.2.	Ecuación de onda fraccionaria con término de amortiguamiento fraccional y sin fuente . . . . .	93
3.2.1.	Análisis comparativo de las soluciones. . . . .	105
3.3.	Ecuación de onda fraccionaria con término de fricción fraccional y fuente . . . . .	108
3.3.1.	Análisis comparativo de las soluciones. . . . .	118
<b>4.</b>	<b>Ecuación de onda fraccionaria amortiguada con efecto de memoria de tipo Mittag-Leffler</b>	<b>122</b>
4.1.	Introducción . . . . .	122
4.2.	Planteamiento del problema . . . . .	122
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>137</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	137
5.2.	Trabajos futuros . . . . .	138
<b>A.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>139</b>
	<b>Referencias</b>	<b>148</b>

---

## Índice de figuras

---

1.1. Región de integración donde $a < x$ . . . . .	24
1.2. Región de integración. . . . .	47
2.1. Una representación de las condiciones iniciales y de frontera. . . . .	53

---

## Índice de tablas

---

- 3.1. Naturaleza de las raíces de acuerdo al signo de los discriminantes  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ . 106
- 3.2. Naturaleza de las raíces de acuerdo al signo de  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ . . . . . 119
- 3.3. Factores asociados a las soluciones de acuerdo al signo de  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ . . . . 119

---

## Introducción

---

La ecuación de onda unidimensional es una de las ecuaciones en derivadas parciales más importantes dentro de la física-matemática, la cual gobierna las vibraciones transversales de una cuerda tensada, cuya versión más sencilla es de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (0.0.1)$$

en donde, el dominio de la variable  $x$  puede ser acotado o no acotado y el dominio de la variable temporal puede ser todo el conjunto de números reales o reales positivos.

El problema de hallar soluciones a la ecuación de onda fue abordado por los matemáticos más importantes del siglo XVIII, siendo deducida por primera vez por Taylor en 1715 y en 1746 por D'Alembert quien hizo notar que en la solución aparecían funciones arbitrarias. Posteriormente, el problema también fue abordado por Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) y Lagrange (1759).

Actualmente, con el desarrollo del Cálculo Fraccionario la ecuación de onda en conjunto con la ecuación de difusión sigue siendo una de las más estudiadas bajo las diferentes propuestas de derivadas fraccionarias, por ejemplo

- La ecuación de onda fraccionaria en el tiempo del tipo Riemann-Liouville

$${}^{RL}_0 D_t^\alpha u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t > 0. \quad (0.0.2)$$

- La ecuación de onda fraccionaria del tipo Liouville-Caputo

$${}^{LC}_0 D_t^\alpha u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t > 0. \quad (0.0.3)$$

En ambas ecuaciones, si  $0 < \alpha < 1$  nos encontramos con un proceso de subdifusión anómala, mientras que, si  $1 < \alpha < 2$  se tratará de un proceso de superdifusión anómala.

Al resolver una ecuación diferencial fraccionaria se obtiene una familia de soluciones que dependen del orden de diferenciación y como caso especial, poseen la propiedad de coincidir con las soluciones clásicas cuando el orden fraccionario tiende a un valor entero.

Además de las propuestas anteriores, existen versiones de la ecuación de onda fraccionaria un tanto más generales, por ejemplo

- La ecuación general de onda fraccionaria en el tiempo en el sentido de Liouville-Caputo

$$r(x)^{LC}D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right] - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t > 0, \quad (0.0.4)$$

para  $1 < \alpha < 2$ ,  $b > 0$ , con  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $[0, l]$  y  $f(x, t)$  una función suficientemente regular con respecto a ambas variables  $x$  y  $t$  que representa el término de fuente.

- La ecuación de onda fraccionaria con efecto de memoria en su término de amortiguamiento o de fricción de la forma

$$D_t^{\gamma+1} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - b \int_0^t K(t - \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, \xi) d\xi + f(x, t) \quad (0.0.5)$$

en donde,  $D_t^{\gamma+1}$ , es un operador de diferenciación fraccionario,  $0 < \gamma \leq 1$  y  $K(t)$  es una función especial que va a caracterizar el fenómeno de fricción en situaciones donde aparezcan efectos de memoria u otros aspectos complejos.

Es conocido que la fuerza de fricción  $F_{ri}(x, t)$  se modela a través de la expresión

$$F_{ri}(x, t) = bD_t u(x, t).$$

Partiendo de este hecho podemos escribir la ecuación anterior en una forma integral que represente una convolución simple

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_x^\infty \frac{F_{ri}(\xi, t)}{b} d\xi + F_{ri}(\infty, t), \\ &= 1 * \left( \frac{F_{ri}(x, t)}{b} \right), \end{aligned}$$

suponiendo que  $F_{ri}(\infty, t) = 0$ . Esta expresión se puede generalizar para diversos tipos de materiales o sistemas complejos introduciendo un kernel adecuado  $K(x, t)$  en lugar de la función idénticamente 1, es decir,

$$u(x, t) = K(x, t) * \left( \frac{F_{ri}(x, t)}{b} \right).$$

Dependiendo del entorno considerado o de las características de los materiales, podríamos considerar a  $K(x, t) = \frac{x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)}$ , por lo que

$$u(x, t) = \left( \frac{x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)} \right) * \left( \frac{F_{ri}(x, t)}{b} \right) = I_x^\beta \left( \frac{F_{ri}(x, t)}{b} \right) \quad (0.0.6)$$

que es equivalente a

$$F_{ri}(x, t) = b_0^L D_x^\beta u(x, t), \quad (0.0.7)$$

en donde,  ${}_0^L D_x$  es la derivada de orden fraccionaria de tipo Liouville.

De esta manera, el término integrodiferencial que aparece en la ecuación (0.0.5) representa una fricción generalizada, ya que incluirá, como casos particulares, a la fricción fraccionaria y a la fricción clásica.

Dentro de las ecuaciones de onda fraccionarias que son de la forma (0.0.5), recientemente se ha investigado aquella que involucra efectos de memoria en su término de fricción representados por un kernel del tipo Mittag-Leffler de la forma

$${}_0^{LC} D_t^{\gamma+1} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{b}{\tau^{\alpha\delta}} \int_0^t (t - \xi)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\delta \left( -\frac{(t - \xi)^\alpha}{\tau^\alpha} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, \xi) d\xi + f(x, t) \quad (0.0.8)$$

en donde,  ${}_0^{LC} D_t^{\gamma+1}$  es el operador de diferenciación fraccionaria del tipo Liouville-Caputo,  $0 < \gamma < 1$  y  $K(t) = \frac{1}{\tau^{\alpha\delta}} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\delta \left( -\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha} \right)$  es el kernel de memoria, el cual satisface que si  $\tau \rightarrow 0$  y  $\beta = \delta = 1$  entonces  $K(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$  el cual sustituido en la ecuación (0.0.8) con  $0 < \alpha < 1$  se obtiene la ecuación de onda fraccionaria con fricción fraccionaria de la forma

$${}_0^{LC} D_t^{\gamma+1} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - b {}_0^{LC} D_t^\alpha u(x, t) + f(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t > 0, \quad (0.0.9)$$

en donde, si  $\alpha \rightarrow 1$  y  $\gamma \rightarrow 1$ , entonces se obtiene la versión clásica de la ecuación de onda amortiguada con término de fuente.

Considerando los trabajos anteriores, el trabajo a efectuar retomará los estudios de la ecuación de onda unidimensional en sus diferentes versiones clásicas y posteriormente dará solución a los problemas que involucran sus correspondientes versiones fraccionarias en el tiempo, empleando para ello una de las propuestas recientes de derivada fraccionaria la cual es del tipo Caputo-Fabrizio bajo el enfoque de Caputo y establecer una comparación entre ambas soluciones.

Por último, también se plantea el problema de la ecuación de onda fraccionaria con efectos de memoria en su término de fricción, cuyo kernel propuesto también involucra a la función de Mittag-Leffler. Se analiza que bajo ciertas condiciones sobre los parámetros de dicho kernel y de la función de Mittag-Leffler, la expresión integral que representa la fricción con efecto de memoria puede reducirse a un término de fricción fraccionaria representado por una derivada de tipo Caputo-Fabrizio.

La estructura y organización para llevar a cabo esta investigación se muestra a continuación.

---

## Descripción de la tesis

---

### Capítulo 1

Con el desarrollo del Cálculo Fraccionario, surgen diversas propuestas de operadores de diferenciación e integración fraccionarias, y con ellas, diversas condiciones para que dichos operadores se encuentren definidos. Por esta razón, en este primer capítulo se definen un conjunto de funciones y espacios de funciones que suelen surgir de manera natural al emplear dichos operadores fraccionarios. Posteriormente, se define la transformada de Laplace y se demuestran algunas de sus principales propiedades.

Se muestra de manera explícita la deducción de los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville al extender la validez de ciertas propiedades de los operadores de diferenciación e integración de orden entero a un orden arbitrario. Dado que el empleo de este tipo de operadores fraccionarios dentro del modelado de fenómenos físicos involucra condiciones iniciales de orden fraccionario, los cuales no son físicamente interpretables, es necesario presentar la derivada fraccionaria de Liouville-Caputo la cual se caracteriza por involucrar condiciones iniciales de orden entero, y considerando esta propiedad, se da paso a la definición de derivada del tipo Caputo-Fabrizio y al estudio de las diversas propiedades y relaciones con las anteriores definiciones de derivadas fraccionarias.

### Capítulo 2

En este capítulo se presentan las diferentes versiones de la ecuación de onda clásica, tanto libre como amortiguada y con término de fuente definidas en un dominio acotado. Los resultados son conocidos y pueden consultarse en las referencias [18]- [26], pero para hacer más autocontenida la tesis enunciaremos y demostraremos cada uno de ellos. La justificación de incluir estos resultados clásicos se basa en que en el siguiente capítulo se realizará una comparación entre las versiones clásicas y fraccionarias de dichas ecuaciones de onda. Para su estudio se tomaron en cuenta los siguientes aspectos.

- El orden ascendente de dificultad.

- El preservar las condiciones iniciales y de frontera en todas la versiones.
- El emplear la misma metodología de solución, esto es básicamente el empleo del método de separacion de variables y la aplicación del método de la transformada de Laplace.

### **Capítulo 3**

En este capítulo, se presentan las diferentes versiones de la ecuación de onda de orden fraccionario con respecto a la variable temporal, para la cual se considera la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo. En el estudio de este tipo de ecuaciones se toman en cuenta los aspectos del capítulo anterior, así como también, se hace una comparación entre las soluciones encontradas de las ecuaciones de onda en sus versiones clásicas con respecto a las soluciones encontradas de las ecuaciones de onda en sus versiones fraccionarias.

### **Capítulo 4**

En este capítulo, se analiza la ecuación de onda fraccionaria con fuente y como término de fricción con efecto de memoria, se propone una expresión integral especial para tal término, la cual se puede considerar como una convolución entre la velocidad de la cuerda en el punto  $x$  al tiempo  $t$  con un kernel que modela los aspectos del medio y características de los materiales que constituyen la cuerda. Esta versión es una generalización de las versiones de onda clásicas y fraccionarias, puesto que para cierto valores de los parámetros involucrados en la expresión integral y en el orden de diferenciación fraccionaria, es posible obtener cualquier versión de la ecuación de onda estudiada en este trabajo.

### **Capítulo 5**

Por último, en este capítulo se dan a conocer las conclusiones de este trabajo y las aportaciones sobre futuras investigaciones.

## Introducción al cálculo fraccionario

---

El Cálculo Fraccionario es una rama de la Matemática que se encarga del estudio de los operadores de integración y diferenciación de orden arbitrario, dentro de los cuales, no sólo es posible considerar ordenes racionales, sino también, ordenes del tipo real e inclusive de orden complejo. La denominación de Cálculo Fraccionario perdura hasta nuestros días por razones históricas, aunque sería más apropiado denominarlo como Cálculo de Orden Arbitrario [1, 2].

Es posible que el inicio del estudio del cálculo fraccionario se vió motivado debido a la notación empleada por Leibniz para la derivada de orden  $n$ , de una función dada  $f$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad (1.0.1)$$

al ser L'Hôpital quien mediante una carta fechada en el 30 de septiembre del año 1695 cuestiona a Leibniz a cerca del sentido de la expresión (1.0.1), cuando  $n = 1/2$ , a lo que Leibniz responde: “esto conducirá aparentemente a una paradoja de la cual algún día serán extraídas consecuencias útiles”. Dicha carta da testimonio importante a cerca de la motivación para indagar en el significado de una derivada de orden no entero, además de aportar una fecha la cual puede ser considerada como nacimiento de una nueva rama de la matemática [3, 4].

Tras los primeros pasos de Leibniz y L'Hôpital, el Cálculo Fraccionario siguió su desarrollo, destacándose principalmente

- En el siglo XVIII, Euler y Lagrange hicieron los primeros aportes teóricos.
- A mediados del siglo XIX los primeros estudios sistemáticos parecen proceder de Riemann, Liouville, Laplace y Holmgren. Es de destacar que en 1819, la primera discusión de una derivada fraccionaria aparece en el texto de Cálculo de Lacroix quien aparentemente lo consideró como un ejercicio matemático. Por otro lado, en 1823 la primera aplicación vino por parte de Abel en la solución de una ecuación integral para el problema de la tautócrona [5].
- En el siglo XX, los principales aportes al cálculo fraccionario fueron por parte de Hardy, Littlewood, Erédy y Riesz. En 1974, surge el primer libro dedicado exclusivamente al Cálculo Fraccionario, el cual es publicado por Oldham y Spanier [1, 6, 7].

Como puede verse, el Cálculo Fraccionario es una rama de la matemática que se puede considerar tan antigua como el cálculo clásico, sin embargo, tenía la reputación de ser una teoría matemática sin aplicaciones. A partir de la década de los 70's del siglo pasado, el Cálculo Fraccionario ha logrado un considerable desarrollo, el cual se refleja en las grandes cantidades de trabajos publicados respecto a este tema, libros, conferencias internacionales, paquetes de software y grupos de investigación que se refuerzan año con año, generalmente debido a las aplicaciones que encuentra en los diferentes campos de la ciencia, tales como, Física, Biología, Economía, Medicina, entre otras áreas [9]. De esta manera, el Cálculo fraccionario como instrumento de modelación tiene una aparición reciente, por dicha razón, puede decirse que el Cálculo Fraccionario es también una nueva disciplina.

En la actualidad, existen dos principales aplicaciones del Cálculo Fraccionario: aplicaciones de control y aplicaciones de modelado matemático. Dentro del modelado matemático, generalmente se incluyen fenómenos cuyos modelos de orden entero, no suelen satisfacer de manera apropiada los datos experimentales de fenómenos, tales como difusión anómala, super-difusión y viscoelasticidad [4].

Dentro de las ventajas que ofrece el uso de derivadas de orden fraccionario se encuentran las siguientes

- 1 Ofrece la libertad de elegir el orden de diferenciación a fin de ajustar a los datos experimentales o tomar en cuenta la complejidad del entorno o medio y como caso particular, siempre se puede recuperar el orden entero.
- 2 Permite elegir la versión de diferenciación fraccionaria para una mejor optimización.

3 Poseen las propiedades de no-localidad y memoria.

En particular, las propiedades de no-localidad y memoria dentro de los modelos que involucran ecuaciones diferenciales de orden fraccionario suelen representar de mejor manera la dinámica en medios heterogéneos que los de orden entero, en áreas como teoría de materiales, teoría del transporte, electromagnetismo, teoría de señales, teoría del caos o fractales entre otros.

En este capítulo enunciaremos y probaremos los elementos teóricos que se usarán a lo largo de la tesis. Iniciaremos hablando de algunas funciones especiales que son muy comunes y que emplearemos en el presente trabajo.

## 1.1. Funciones Especiales

En este apartado, se presentan la definiciones y propiedades de las funciones más importantes dentro del Cálculo Fraccionario, ya que en las soluciones de las ecuaciones diferenciales orden fraccionarias éstas surgen de manera natural.

### 1.1.1. Función Mittag-Leffler

La función exponencial  $e^z$  es una de las funciones más importante dentro de la teoría de las ecuaciones diferenciales de orden entero. Sin embargo, dicha función no es más que un caso particular de una función más general la cual lleva por nombre función de Mittag-Leffler, la cual toma diferentes formas dependiendo del número de parámetros para los cuales se defina dicha función.

La función de Mittag-Leffler en un parámetro  $E_\alpha(z)$  se define como

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad (1.1.1)$$

de donde, se deduce que  $e^z = E_1(z)$ .

La función del tipo Mittag-Leffler en dos parámetros se define mediante el desarrollo en serie como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad y \quad \Re(\beta) > 0. \quad (1.1.2)$$

De la definición anterior, se deducen las siguientes identidades

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (1.1.3)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (1.1.4)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (1.1.5)$$

y de manera general se tiene lo siguiente

**Teorema 1.1.1** *Dada la función de Mittag-Leffler como se define en (1.1.2) se tiene que*

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (1.1.6)$$

**Demostración.** Para  $m = 1$  ya se ha verificado. Supóngase que la propiedad es válida para  $m = n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ , es decir, se cumple

$$E_{1,n}(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{z^k}{k!} \right\}.$$

Ahora mostremos que la propiedad es válida para  $m = n + 1$ . Por definición se tiene

$$\begin{aligned} E_{1,n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+n+1)} \\ &= \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{(n+k)!} \\ &= \frac{1}{z^n} \left\{ \left[ \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right] + \left[ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{z^n} \left[ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\ &= \frac{1}{z^n} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right\}. \end{aligned}$$

De lo cual se concluye que

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\},$$

es válida para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ .

*Q.E.D.*

El seno y coseno hiperbólico son casos particulares de la función Mittag-Leffler de dos parámetros, puesto que

$$\begin{aligned} E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\ E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \end{aligned}$$

Las funciones hiperbólicas de orden  $n$ , las cuales son generalizaciones del seno y coseno hiperbólico, pueden ser expresadas en términos de la función Mittag-Leffler. En efecto,

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.7)$$

ya que

$$h_1(z, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad \text{y} \quad h_1(-z, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!} = e^{-z},$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [h_1(z, 1) + h_1(-z, 1)] &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(z), \\ \frac{1}{2} [h_1(z, 1) - h_1(-z, 1)] &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh(z). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} h_1(z, 2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1-1}}{(2k+1-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = E_{(2,1)}(z^2) = \cosh(z), \\ h_1(-z, 2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2k+1-1}}{(2k+1-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = E_{(2,1)}(z^2) = \cosh(z). \end{aligned}$$

Lo cual es una forma de ver que la función  $\cosh(z)$  es una función par. Por otro lado se

tiene

$$h_2(z, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2-1}}{(2k+2-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z),$$

$$h_2(-z, 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2k+2-1}}{(2k+2-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sinh(z).$$

Lo cual es una forma de verificar que la función  $\sinh(z)$  es una función impar. También se tiene que para las funciones trigonométricas de orden  $n$ , las cuales son generalizaciones de las funciones seno y coseno pueden ser expresadas en términos de la función Mittag-Leffler

$$k_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n), \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.8)$$

Ya que

$$k_1(z, 2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} = E_{2,1}(-z^2) = \cos(z),$$

$$k_2(z, 2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = E_{2,2}(-z^2) = \sin(z).$$

De la fórmula (1.1.2) se obtiene

$$E_{1/2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad (1.1.9)$$

en donde,  $\operatorname{erfc}(z)$  es la función error complementaria definida por

$$\operatorname{erfc}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Para  $\beta = 1$  obtenemos la función Mittag-Leffler en un parámetro:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z). \quad (1.1.10)$$

La función de Miller-Ross  $E_t(\nu, a)$  es introducida para resolver ecuaciones diferenciales de orden racional, es un caso particular de la función Mittag-Leffler (1.1.2)

$$E_t(\nu, a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)} = t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at). \quad (1.1.11)$$

La función de Yu. N. Rabotnov  $E_\alpha(\beta, t)$  [11], la cual es una función del tiempo, dependiente de dos parámetros y también es un caso particular de la función Mittag-Leffler

$$E_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{k\alpha+1}}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} = t^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\beta t^{\alpha+1}). \quad (1.1.12)$$

Se sigue de las expresiones (1.1.11) y (1.1.12) que las propiedades de la función de Miller-Ross y la función de Rabotnov pueden ser deducidas a través de las propiedades de la función Mittag-Leffler en dos parámetros.

Plotnikov and Tseytlin [11], utilizan en sus investigaciones dos funciones  $Sc_\alpha(z)$  y  $Cs_\alpha(z)$ , que llamaron seno y coseno fraccional. Estas funciones también son un caso especial de la función de Mittag-Leffler en dos parámetros

$$Sc_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n+1}}{\Gamma((\alpha-2)n+2)} = z E_{2-\alpha, 2}(-z^{2-\alpha}), \quad (1.1.13)$$

$$Cs_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n}}{\Gamma((2-\alpha)n+1)} = E_{2-\alpha, 1}(-z^{2-\alpha}). \quad (1.1.14)$$

Otra “fraccionalización” de las funciones seno y coseno, que también pueden ser expresadas en términos de la función Mittag-Leffler ha sido propuesto por Luchko y Srivastava [11]

$$\text{sen}_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\mu k + 2\mu - \lambda + 1)} = z E_{2\mu, 2\mu - \lambda + 1}, \quad (1.1.15)$$

$$\text{cos}_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\mu k + \mu - \lambda + 1)} = E_{2\mu, \mu - \lambda + 1}(-z^2). \quad (1.1.16)$$

Notemos que las propiedades de las versiones de las funciones seno y coseno fraccionarios se siguen de las propiedades de la función Mittag-Leffler.

La función de Mittag-Leffler de tres parámetros introducida por Prabhakar [12] esta dada por la expresión

$$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad (1.1.17)$$

en donde,  $\beta, \gamma, z \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $(\gamma)_n := \frac{\Gamma(\gamma+\nu)}{\Gamma(\nu)}$  es el símbolo de Pochhammer, tal que

$(\gamma)_0 = 1$ , y  $(\gamma)_\nu = \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + k - 1)$  para  $\nu = k \in \mathbb{N}$ .

Es fácil ver que

$$E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z). \quad (1.1.18)$$

### 1.1.2. Función Gamma

La función Gamma  $\Gamma(z)$  se encuentra definida por la integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1.19)$$

en donde,  $z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\Re(z) > 0$ .

Una de las propiedades importantes de esta función Gamma viene dada por la siguiente ecuación

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.1.20)$$

Como caso particular de la ecuación anterior, si  $z = n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!. \quad (1.1.21)$$

Del resultado anterior, se tiene que la función Gamma es una generalización de la función factorial.

### 1.1.3. Función Beta

La función Beta, es denotada por  $B(x, y)$  y se define mediante la integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (1.1.22)$$

en donde,  $\Re(x) > 0$  y  $\Re(y) > 0$ .

Algunas propiedades importantes de la función Beta son las siguientes

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad (1.1.23)$$

$$B(x, y) = \left(\frac{x-1}{x+y-1}\right) B(x-1, y), \quad (1.1.24)$$

$$B\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \pi \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right). \quad (1.1.25)$$

#### 1.1.4. Función delta de Dirac

En el sentido estricto, no es en si una función, más bien, es un ejemplo de lo que se llama función generalizada o distribución. La función  $\delta$  de Dirac se caracteriza por las siguientes dos propiedades

1)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (1.1.26)$$

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0), \quad (1.1.27)$$

para cualquier función  $f(t)$  que sea continua en un intervalo abierto que contiene a  $t = 0$ .

Por otro lado, al recorrer el argumento de la función  $\delta(t)$ , se deduce que  $\delta(t-a) = 0$ , para  $t \neq a$  y de esta observación se tiene el siguiente resultado.

3) Sea  $f$  una función continua en algún intervalo abierto que contenga a  $t = a$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a). \quad (1.1.28)$$

#### 1.1.5. Espacios de funciones

En este apartado, se dan a conocer algunos conjuntos de funciones importantes, los cuales serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis.

**Definición 1.1.1** Sea  $\Omega := [a, b] \subset \mathbb{R}$  tal que  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ , se denotará por  $L_p(a, b)$  al conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles para las cuales

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \quad (1.1.29)$$

en donde,  $1 \leq p < \infty$ .

**Definición 1.1.2** Se denotará por  $C(a, b)$  al conjunto de todas las funciones continuas en  $(a, b)$  y por  $C^n(a, b)$  al conjunto de todas las funciones que admiten derivadas continuas hasta el orden  $n$  sobre  $(a, b)$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.1.3** Se denotará por  $AC[a, b]$ , como el conjunto de todas las funciones que son absolutamente continuas en el intervalo  $[a, b]$ .

**Definición 1.1.4** El símbolo  $AC^{[n]}[a, b]$ , en donde  $n \in \mathbb{N}$ , denotará al conjunto de funciones  $f(x)$  con derivadas continuas hasta el orden  $n - 1$  en  $[a, b]$  y tal que  $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ .

**Definición 1.1.5** Se dice que una función  $f$  es de orden exponencial conforme  $t \rightarrow \infty$  si existen constantes no negativas  $M, c$  y  $T$  tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct}. \quad (1.1.30)$$

**Definición 1.1.6** Se denotará por  $\mathcal{L}_t(\mathbb{R}^+)$  al espacio de funciones continuas de orden exponencial  $\nu$ , definidas en  $\mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$  para las cuales existe su transformada de Laplace.

**Definición 1.1.7** Sea  $m$  un entero positivo con  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \quad (1.1.31)$$

donde  $D^\alpha u$  es la derivada parcial débil o distributiva.

**Definición 1.1.8** Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un dominio, entonces

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)\}, \quad (1.1.32)$$

en otras palabras, si  $u \in H^1(\Omega)$ , cada derivada parcial  $\partial_{x_i} u$  es una función  $u_i \in L^2(\Omega)$ , que de manera explícita se debe satisfacer

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (1.1.33)$$

en donde,  $\mathcal{D}(\Omega)$  es el espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto. En particular, si  $n = 1$  y  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , se tiene el siguiente resultado [22], el cual sirve para caracterizar a las funciones  $u \in H^1(a, b)$ .

**Teorema 1.1.2** Sea  $u \in L^2(a, b)$ . Entonces  $u \in H^1(a, b)$  si y sólo si  $u$  es continua en  $[a, b]$  y existe  $w \in L^2(a, b)$  tal que

$$u(y) = u(x) + \int_x^y w(s) ds, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad (1.1.34)$$

además,  $u' = w$  (tanto en el sentido casi todas partes como en el sentido de distribución).

## 1.2. Transformada de Laplace y su inversa.

En esta sección, se abordan algunas propiedades de la transformada de Laplace, la cual es una herramienta importante en la solución de ecuaciones diferenciales lineales y sistemas lineales de ecuaciones, ya que al emplearlo, transforma las derivadas en las ecuaciones diferenciales por expresiones algebraicas en una nueva variable, por lo cual, el problema dado en términos de funciones y sus respectivas derivadas se transforma en un problema algebraico.

**Definición 1.2.1** Sea  $f$  una función continua por tramos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\nu$ , entonces la transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  existe para  $\Re(s) > \nu$  y esta dada por la expresión

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (1.2.1)$$

Obsérvese que después de integrar con respecto a  $t$ , esta integral es una función del parámetro  $s$ , por lo que podemos escribir  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \equiv F(s)$ .

**Teorema 1.2.1** Sean  $f$ ,  $f_1$  y  $f_2$  funciones cuyas transformadas de Laplace existen para

$s > \nu$ , y sea  $c$  una constante. Entonces, para cada  $s > \nu$ ,

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) = \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s), \quad (1.2.2)$$

$$\mathcal{L}\{cf\}(s) = c\mathcal{L}\{f\}(s). \quad (1.2.3)$$

**Demostración.** Usando las propiedades de linealidad del operador integral, para  $s > \nu$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}f_1(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-st}f_2(t)dt, \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface la ecuación (1.2.2). Análogamente para la ecuación (1.2.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{cf\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}[cf(t)]dt, \\ &= c \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \\ &= c\mathcal{L}\{f\}(s). \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Teorema 1.2.2** Sea  $f(t)$  continua en  $[0, \infty)$  y  $f'(t)$  continua a trozos en  $[0, \infty)$ , ambas de orden exponencial  $\nu$ . Entonces, para  $s > \nu$  se tiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0). \quad (1.2.4)$$

**Demostración.** Como  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  existe, al aplicar el método de integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st}f'(t)dt, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ e^{-st}f(t) \Big|_0^N + s \int_0^N e^{-st}f(t)dt \right], \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st}f(t)dt, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\mathcal{L}\{f\}(s). \end{aligned}$$

Para evaluar  $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N)$ , considérese la hipótesis de ser  $f(t)$  de orden exponencial  $\nu$ , por lo que existe un constante  $M$  tal que para  $N$  grande,

$$|e^{-sN} f(N)| \leq e^{-sN} M e^{\nu N} = M e^{-(s-\nu)N}.$$

Por lo tanto, para  $s > \nu$ ,

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |e^{-sN} f(N)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} M e^{-(s-\nu)N} = 0.$$

De está manera  $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) = 0$  para  $s > \nu$  obteniéndose el resultado

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0).$$

*Q.E.D.*

El resultado anterior se extiende para la derivada de orden  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.2.3** Sean  $f(t)$ ,  $f'(t)$ , ...,  $f^{(n-1)}(t)$  continuas en  $[0, \infty)$  y sea  $f^{(n)}(t)$  continua por trozos en  $[0, \infty)$ , con todas estas funciones de orden exponencial  $\nu$ . Entonces, para  $s > \nu$  se tiene que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right). \quad (1.2.5)$$

**Demostración.** Al usar inducción sobre  $n$ , se tiene que  $n = 1$  ya se probó. Supongamos ahora que la igualdad es válida para  $n = k$ , es decir,

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j+1}} \right).$$

Ahora debe probarse que se cumple para  $n = k + 1$ , decir,

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) = s^{k+1} \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j+1}} \right).$$

Al considerar que

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} (f^{(k)}(t))\right\}(s) = -f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}.$$

Entonces, al usar la hipótesis de inducción se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) &= -f^{(k)}(0) + s \left( s^k \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j+1}} \right) \right), \\
&= s^{k+1} \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j+1}} + \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right) \right), \\
&= s^{k+1} \left( \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{s^{j+1}} \right).
\end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Definición 1.2.2** La convolución  $f * g$  de funciones continuas por tramos  $f(t)$  y  $g(t)$  es la función definida por

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (1.2.6)$$

A partir de esta definición se tiene el siguiente resultado

**Teorema 1.2.4** Supongamos que  $f(t)$  y  $g(t)$  son continuas por tramos para  $t \geq 0$ , de orden exponencial  $\nu$ , tal que  $\mathcal{L}f(t) = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ . Entonces

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s), \quad s > \nu. \quad (1.2.7)$$

**Demostración.** Al emplear la definición de transformada de Laplace junto con el cambio de variable  $u = t - \tau$  se tiene

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su}g(u)du = \int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}g(t - \tau)dt. \quad (1.2.8)$$

Dado que, las funciones  $f$  y  $g$  pueden redefinirse como

$$f(t) = g(t) = 0, \quad \forall t < 0, \quad (1.2.9)$$

entonces, la ecuación (1.2.8) se puede escribir como

$$G(s) = e^{s\tau} \int_0^\infty e^{-st}g(t - \tau)dt. \quad (1.2.10)$$

Así,

$$\begin{aligned}
G(s)F(s) &= G(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau, \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) G(s) d\tau, \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \left( e^{s\tau} \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau) dt \right) d\tau, \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) dt d\tau.
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Al ser  $f$  y  $g$  funciones continuas por partes y de orden exponencial  $\nu$ , es posible invertir el orden de integración en virtud del teorema de Fubini. Por lo tanto, la ecuación (1.2.11) se transforma en

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt. \tag{1.2.12}$$

Dado que  $g(t-\tau) = 0$  para  $\tau > t$  (ver ecuación (1.2.9)), la ecuación (1.2.12) se transforma en

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt, \tag{1.2.13}$$

$$= \mathcal{L}\{f * g\}(s). \tag{1.2.14}$$

De esta manera, se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

Una vez aplicada la transformada de Laplace a alguna función  $f(t) \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^+)$ , es posible recuperar dicha función al emplear la transformada de Laplace inversa, esto es

### Definición 1.2.3

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) ds, \quad \gamma = \Re(s) > \nu. \tag{1.2.15}$$

Dentro del conjunto de transformadas inversas de Laplace que comúnmente se ha de usar reiteradamente en este trabajo, se encuentran las siguientes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t) &= t^n e^{at}, \quad n \in \mathbb{N}, \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(t) &= e^{at}, \quad n = 0,
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

la cuales son muy usuales de emplear cuando previamente se hace uso del método de fracciones parciales.

La transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler dada en (1.1.17) esta dada por la siguiente expresión [12], [13]

$$\mathcal{L} \{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega t^{\alpha})\} (s) = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} - \omega)^{\gamma}}. \quad (1.2.17)$$

### 1.3. Operadores de diferenciación e integración fraccionaria

En esta sección, se presentan las definiciones y propiedades de los operadores integrales y diferenciales de orden fraccionario. Actualmente, existen diferentes propuestas de operadores diferenciales e integrales fraccionarios, los cuales presentan la importante propiedad de coincidir con los operadores de diferenciación e integración clásicos, cuando el orden fraccionario toma un valor entero.

#### 1.3.1. Derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville

Para definir los operadores fraccionarios del tipo Riemann-Liouville, se empezará por denotar los operadores de integración y diferenciación clásicos.

1. Por  $D$  denotaremos al operador de diferenciación, es decir,

$$Df(x) = f'(x).$$

2. Por  ${}_a I$  se denotará al operador de integración, es decir,

$${}_a I f(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

para  $a \leq x \leq b$ , y  $f$  es una función Riemann integrable.

3. Para  $n \in \mathbb{N}$  se usarán los símbolos  ${}_a I^n$  y  $D^n$ , para denotar la  $n$ -ésima aplicación de  ${}_a I$  y  $D$  respectivamente, es decir,

$${}_a I^n f(x) = {}_a I^{(n-1)} {}_a I f(x), \quad (1.3.1)$$

$$D^n f(x) = D^{(n-1)} D f(x). \quad (1.3.2)$$

Ahora, en las definiciones que siguen, asumiremos las siguientes hipótesis:  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que  $n = \lceil \alpha \rceil$ , es decir, es la parte entera superior de  $n$ .

Para definir la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, primero se ha de considerar el caso de integrar reiteradamente una función Riemann integrable. Por lo cual consideremos el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.1** *Sea  $f$  una función Riemann integrable en el intervalo  $[a, b]$ , entonces*

$${}_a I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.3)$$

**Demostración.** Mediante el empleo de inducción matemática se tiene que para el caso  $n = 1$  la propiedad es evidente. Supóngase que la propiedad es válida para  $n = k$ , es decir,

$${}_a I^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t) dt.$$

Mostremos que la propiedad también es válida para  $n = k + 1$ . A partir de la definición (1.3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} {}_a I^{k+1} f(x) &= {}_a I {}_a I^k f(x), \\ &= {}_a I \left( \frac{1}{(k-1)!} \int_a^s (s-t)^{k-1} f(t) dt \right), \\ &= \int_a^x \frac{1}{(k-1)!} \int_a^s (s-t)^{k-1} f(t) dt ds. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Dada la existencia de la integral, al aplicar el teorema de Fubini [29] para intercambiar el orden de integración en la ecuación (1.3.4) conforme puede verse en la Figura 1.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \int_t^x (s-t)^{k-1} f(t) ds dt &= \frac{1}{k!} \int_a^x f(t) \left[ (s-t)^k \Big|_{s=t}^{s=x} \right] dt, \\ &= \frac{1}{k!} \int_a^x (x-t)^k f(t) dt. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

De esta manera, queda demostrado el teorema.

*Q.E.D.*

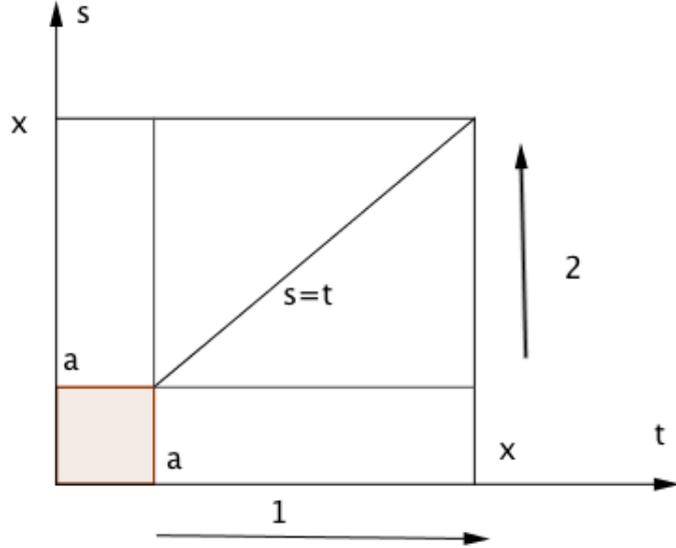


Figura 1.1: Región de integración donde  $a < x$ .

**Ejemplo 1.3.1** Sea  $f(x) = x$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $a < x$  entonces

$${}_a I^n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} t dt.$$

Integrado por partes

$$\begin{aligned} {}_a I^n(x) &= \frac{a(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt, \\ &= \frac{a(x-a)^n}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

En particular, si  $a = 0$  se tiene que  ${}_0 I^n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ .

Dado que la función Gamma es una generalización de la función factorial que satisface  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para  $n \in \mathbb{N}$ , es posible extender la validez del Teorema 1.3.1 de la siguiente manera

**Definición 1.3.1** Sea  $f \in L_1(a, b)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  entonces

$$({}^{RL}I_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x, \quad (1.3.7)$$

$$({}^{RL}I_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b, \quad (1.3.8)$$

son las integrales fraccionarias de orden  $\alpha$  del tipo Riemann-Liouville por la izquierda y derecha respectivamente indicado por el superíndice RL. Los subíndices  $a+$  y  $b-$  indican

los límites de integración inferior y superior del operador  $I^\alpha$ , el subíndice  $x$  indica la variable respecto a la cual se debe aplicar el operador, el cual, por practicidad se omitirá en esta sección.

**Ejemplo 1.3.2** De forma análoga al Ejemplo 1.3.1, sea  $f(x) = x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y  $a < x$  entonces

$${}^{RL}I_{a+}^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t)dt.$$

Al integrar por partes se tiene

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a+}^\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ -\frac{t(x-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_a^x (x-t)^\alpha dt \right], \\ &= \frac{a(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

**Observación 1.3.1** Si en la ecuación (1.3.9)  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , entonces se obtiene el resultado clásico (1.3.6). Por otro lado, si  $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $a = 0$  entonces

$${}^{RL}I_0^{\frac{1}{2}}x = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}. \quad (1.3.10)$$

**Teorema 1.3.2 (Semigrupo o ley de los exponentes.)** Para funciones  $f \in L_1(a, b)$ , se tiene que

$$({}^{RL}I_{a+}^\beta {}^{RL}I_{a+}^\alpha f)(x) = ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (1.3.11)$$

para casi todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** Por definición de integral fraccionaria del tipo Riemann-Liouville se tiene

$$\begin{aligned} ({}^{RL}I_{a+}^\beta {}^{RL}I_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} f(r) dr dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \int_r^x (x-t)^{\beta-1} (t-r)^{\alpha-1} f(r) dt dr, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(r) \int_r^x (x-t)^{\beta-1} (t-r)^{\alpha-1} dt dr. \end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de variable  $t = r + u(x - r)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left( {}^{RL}I_{a+}^{\beta} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) \\
&= \int_a^x \frac{f(r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (x - (r + u(x - r)))^{\beta-1} (r + u(x - r) - r)^{\alpha-1} (x - r) du dr, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(r) \int_0^1 (x - r - ux + ur)^{\beta-1} (ux - ur)^{\alpha-1} (x - r) du dr, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(r) \int_0^1 [(x - r)(1 - u)]^{\beta-1} [u(x - r)]^{\alpha-1} du dr, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(r) (x - r)^{\beta-1} (x - r)^{\alpha} \int_0^1 (1 - u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du dr, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(r) (x - r)^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 (1 - u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du dr. \tag{1.3.12}
\end{aligned}$$

Nótese que la segunda integral es la función  $B(\alpha, \beta)$ , tal como se define en la ecuación (1.1.22), por lo que la igualdad anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
\left( {}^{RL}I_{a+}^{\beta} {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(r) (x - r)^{\beta+\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} dr, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x (x - r)^{\beta+\alpha-1} f(r) dr, \\
&= \left( {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x).
\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

Una vez presentada la deducción de la integral fraccionaria del tipo Riemann-Liouville, consideremos deducir la derivada fraccionaria asociada a esta integral. De forma análoga, requerimos algunos resultados previos.

**Definición 1.3.2** *Para  $n \in \mathbb{N}$  se tiene*

$$I^{-n} := D^n, \tag{1.3.13}$$

*es decir, se entenderá al operador  $I$  con exponente  $-n$  como el operador de diferenciación de orden  $n$ .*

**Lema 1** *Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , tal que  $m > n$ , y sea  $f$  una función con  $n$  derivadas en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces,*

$$D^n f(x) = D^m {}_{a+}I^{m-n} f(x). \tag{1.3.14}$$

**Demostración.** Dado de que  $D^n D^{m-n} f(x) = D^m f(x)$  y  $D^{m-n} {}_{a+}I^{m-n} f(x) = f(x)$ , en-

tonces

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= (D^n D^{m-n} {}_{a+}I^{m-n} f)(x), \\ &= D^m {}_{a+}I^{m-n} f(x). \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

En el lema anterior, se ha considerado el operador de diferenciación de orden entero, sin embargo, es posible extender el resultado de la forma siguiente.

**Lema 2** Sea  $r \in \mathbb{R}^+$  y  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq [r]$ , entonces

$$D^r = D^m {}_{a+}^{RL}I^{m-r}. \quad (1.3.15)$$

**Demostración.** Al considerar la propiedad de semigrupo del operador  $I$  dada en (1.3.11) y puesto que  $m \geq [r]$ , se tiene

$$\begin{aligned} D^r &= D^{[r]} {}_{a+}^{RL}I^{[r]-r}, \\ &= D^m {}_{a+}I^{m-[r]} {}_{a+}^{RL}I^{[r]-r}, \\ &= D^m {}_{a+}^{RL}I^{m-r}. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Teorema 1.3.3** Sea  $f \in L_1(a, b)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , entonces para casi todo  $x \in [a, b]$  se satisface

$$(D^\alpha {}_{a+}^{RL}I^\alpha f)(x) = f(x). \quad (1.3.16)$$

**Demostración.** Si  $a \in \mathbb{N}$ , la igualdad es evidente. Al considerar el resultado del Lema 2 y a  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  se tiene

$$D^\alpha {}_{a+}^{RL}I^\alpha f(x) = D^{[\alpha]} {}_{a+}^{RL}I^{[\alpha]-\alpha} {}_{a+}^{RL}I^\alpha f(x) = D^{[\alpha]} {}_{a+}^{RL}I^{[\alpha]} {}_{a+}^{RL}I^{\alpha-\alpha} f(x) = f(x).$$

*Q.E.D.*

**Observación 1.3.2** El resultado anterior nos dice que el operador  $D^\alpha$  para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  es el operador inverso por la izquierda del operador  ${}^{RL}I^\alpha$ , con lo cual, se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.3** Sea  $f \in AC^{[\alpha]}[a, b]$ , donde  $[\alpha] = n \in \mathbb{R}^+$ , entonces

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(x) := D^n {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(x), \quad (1.3.17)$$

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(x) := -(D^n) {}^{RL}I_{b-}^{n-\alpha} f(x), \quad (1.3.18)$$

representan las derivadas fraccionarias del tipo Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  por la izquierda y derecha respectivamente. Los subíndices  $a_+$  y  $b_-$  son los límites de integración inferior y superior del operador integral  $I^{n-\alpha}$  respectivamente y el subíndice  $x$  indica la variable respecto a la cual se debe aplicar el operador, el cual se omitirá en esta sección.

**Ejemplo 1.3.3** Consideremos la función constante  $f(x) = c$  tal que  $c \neq 0$ ,  $a < x$ , entonces el Lema 2 y una integración por partes implican

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}(c) &= {}^{RL}D_{a+}^1 {}^{RL}I_{a+}^{1-1/2}(c), \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x c(x-t)^{-1/2} dt \right], \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_a^x (x-t)^{-1/2} dt \right], \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left( -2(x-t)^{1/2} \Big|_a^x \right) \right], \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{2c}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{1/2} \right), \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi(x-a)}}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Del ejemplo anterior se deduce que la derivada fraccionaria del tipo Riemann-Liouville de una función constante no nula, es diferente de cero, a diferencia del caso clásico.

**Ejemplo 1.3.4** Sea  $f(x) = cx^n$ , donde  $c \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , encontraremos quién es  ${}^{RL}D_{a+}^{1/2}(cx^n)$  y usaremos el resultado para calcular  ${}^{RL}D_a^{1/2}(cx^2)$ .

Por definición de derivada fraccionaria del tipo Riemann-Liouville se tiene

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}(cx^n) &= \frac{d}{dx} \left( I_{a+}^{1/2}(cx^n) \right), \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-1/2} t^n dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}(cx^n) &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ -2t^n(x-t)^{1/2} \Big|_a^x + 2n \int_a^x (x-t)^{1/2} t^{n-1} dt \right], \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ -2a^n(x-a)^{1/2} + 2n \int_a^x (x-t)^{1/2} t^{n-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Nuevamente integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}(cx^n) &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ -2a^n(x-a)^{1/2} + 2n \left( -\frac{2}{3} t^{n-1}(x-t)^{3/2} \Big|_a^x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2(n-1)}{1 \cdot 3} \int_a^x (x-t)^{3/2} t^{n-2} dt \right) \right], \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ 2a^n(x-a)^{1/2} + \frac{2^2 n}{1 \cdot 3} a^{n-1}(x-a)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^2(n)(n-1)}{1 \cdot 3} \int_a^x (x-t)^{3/2} t^{n-2} dt \right]. \end{aligned}$$

Continuando con la integración por partes

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}(cx^n) &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ 2a^n(x-a)^{1/2} + \frac{2^3 n}{1 \cdot 3} a^{n-1}(x-a)^{3/2} + \frac{2^3(n)(n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5} a^{n-2}(x-a)^{5/2} \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{2^n(n)(n-1) \cdots (2)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} a(x-a)^{\frac{2n-1}{2}} \frac{2^{n+1}n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} (x-a)^{\frac{2n+1}{2}} \right], \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sum_{i=0}^n 2^{i+1} a^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!} (x-a)^{i+\frac{1}{2}}}{\prod_{i=0}^n (2i+1)} \right], \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sum_{i=0}^n 2^{i+1} a^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!} (i+\frac{1}{2}) (x-a)^{i-\frac{1}{2}}}{\prod_{i=0}^n (2i+1)} \right]. \end{aligned}$$

Ahora, al considerar  $n = 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{a+}^{1/2}cx^2 &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{2a^2(x-a)^{-1/2}(1/2)}{1} + \frac{2^2 a(2)(x-a)^{1/2}(3/2)}{1 \cdot 3} + \frac{2^3(2)(x-a)^{3/2}(5/2)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \right], \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left[ a^2(x-a)^{-1/2} + 2^2 a(x-a)^{1/2} + \frac{2^3}{3} (x-a)^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.4** Sea  $f \in L_1(a, b)$ , entonces se verifica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x), \quad (1.3.20)$$

para casi todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** Dado que  $\alpha \rightarrow +0$  se tiene que  $[\alpha] = 1$ . Considerando  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}I^{\alpha} f)(x)$  de la igualdad a probar y aplicando la definición de integral fraccionaria dada en (1.3.7), se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}I^{\alpha} f)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Aplicando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}I^{\alpha} f)(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ -\frac{f(t)(x-t)^{\alpha}}{\alpha} \Big|_a^x + \frac{1}{\alpha} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt \right], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ f(a)(x-a)^{\alpha} + \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt \right], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(a)(x-a)^{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t) dt, \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, al considerar  $\lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}D^{\alpha} f)(x)$  y aplicar la definición dada en (1.3.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}D^{\alpha} f)(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} (D {}^{RL}I^{1-\alpha} f)(x), \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Luego, la regla de Leibniz aplicada a la última igualdad implica

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}D^{\alpha} f)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-1-\alpha} f(t) dt.$$

Nuevamente, integrando por partes resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} ({}^{RL}D^{\alpha} f)(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(t)(x-t)^{-\alpha}}{\alpha} \Big|_a^x + \frac{1}{\alpha} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{f(a)(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt, \\ &= f(x). \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Teorema 1.3.5** Sea  $f \in L_1(a, b)$ , entonces para casi todo  $x \in [a, b]$  se verifica que

$$(i) \quad ({}^{RL}D^\beta {}^{RL}I^\alpha f)(x) = ({}^{RL}I^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \alpha \geq \beta, \quad (1.3.21)$$

$$(ii) \quad ({}^{RL}D^\beta {}^{RL}I^\alpha f)(x) = ({}^{RL}D^{\beta-\alpha} f)(x), \quad \beta \geq \alpha. \quad (1.3.22)$$

**Demostración.** Nótese que si  $\alpha = \beta$  entonces se tiene el operador identidad. Considerando el caso  $\alpha > \beta$  se tiene que existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\alpha = \beta + r$ , o bien  $r = \alpha - \beta$ . Al usar (1.3.11) y (1.3.16) se tiene

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D^\beta {}^{RL}I^\alpha f)(x) &= ({}^{RL}D^\beta {}^{RL}I^\beta {}^{RL}I^r f)(x), \\ &= ({}^{RL}I^r f)(x), \\ &= ({}^{RL}I^{\alpha-\beta} f)(x). \end{aligned}$$

Con esto se prueba (i). Para probar (ii), al ser  $\alpha < \beta$ , existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\beta = \alpha + r$ , o bien  $r = \beta - \alpha$ . Al aplicar la definición dada en (1.3.13) y usando (1.3.11) se tiene

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D^\beta {}^{RL}I^\alpha f)(x) &= ({}^{RL}I^{-\beta} {}^{RL}I^\alpha f)(x), \\ &= ({}^{RL}I^{-r-\alpha} {}^{RL}I^\alpha f)(x), \\ &= ({}^{RL}I^{-r} f)(x), \\ &= ({}^{RL}D^r f)(x), \\ &= ({}^{RL}D^{\beta-\alpha} f)(x). \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado. *Q.E.D.*

Como se demostró en el Teorema 1.3.3, el operador  $D^\alpha$  es el operador inverso por la izquierda del operador  $I^\alpha$ , tanto para  $\alpha \in \mathbb{N}$ , como para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , pero en general no es el operador inverso por la derecha, como muestran los siguientes resultados.

**Teorema 1.3.6** Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in L_1(a, b)$  y  $({}^{RL}I^n f)(x) \in AC^n[a, b]$  entonces

$$({}_{a+}I^n D^n f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n (D^{n-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}, \quad (1.3.23)$$

para casi todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** Al emplear la ecuación (1.3.3) en el operador  $D^n f(x)$  se obtiene

$$({}_{a+}I^n D^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} D^n f(t) dt.$$

Integrando por partes tenemos

$$({}_{a+}I^n D^n f)(x) = -\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a+) + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} D^{n-1} f(t) dt.$$

Continuando el proceso de integración por partes  $(n-1)$  veces se tiene

$$\begin{aligned} {}_{a+}I^n D^n f(x) &= -\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a+) \\ &+ \frac{1}{(n-2)!} \left[ (x-t)^{n-2} D^{n-2} f(t) \Big|_a^x + (n-2) \int_a^x (x-t)^{n-3} D^{n-2} f(t) dt \right], \\ &= -\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a+) - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{n-2}(a+) \\ &+ \frac{1}{(n-3)!} \int_a^x (x-t)^{n-3} D^{n-2} f(t) dt, \\ &\vdots \\ &= -\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a+) - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} D^{(n-2)} f(a+) - \dots - (x-a) D f(a+) \\ &+ \int_a^x D f(t) dt, \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a+) \frac{(x-a)^k}{k!}, \\ &= f(x) - \sum_{j=1}^n (D^{n-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

El siguiente resultado generaliza el teorema anterior para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

**Teorema 1.3.7** *Sea  $f \in L_1(a, b)$  y  $({}^{RL}I^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b]$  tal que  $n-1 \leq \alpha \leq n$ , entonces*

$$({}^{RL}I^\alpha {}^{RL}D^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n ({}^{RL}D^{\alpha-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad (1.3.24)$$

para casi todo  $x \in [a, b]$ .

La condición  $({}^{RL}I^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b]$  equivale a imponer que  $f$  tenga derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  sumable. El teorema anterior nos dice que el operador de integración de

Riemann-Liouville, de modo análogo al caso entero, no es en general el inverso izquierdo de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

**Demostración. (Teorema 1.3.7).** Al aplicar el operador de integración fraccionaria del tipo Riemann-Liouville dada en (1.3.7) a la derivada de orden  $\alpha$  de  $f$  se tiene

$$\begin{aligned} ({}^{RL}I_{a+}^{\alpha} {}^{RL}D^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} ({}^{RL}D^{\alpha} f(t)) dt, \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} ({}^{RL}D^{\alpha} f(t)) dt \right]. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Luego, al usar la propiedad de semigrupo (1.3.11) del operador  ${}^{RL}I_{a+}^{\alpha}$  y aplicando integración por partes en la expresión encerrada entre corchetes de la última igualdad obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} ({}^{RL}D^{\alpha} f(t)) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} \frac{d^n}{dt^n} [({}^{RL}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f(t))] dt.$$

Otra integración por partes a la integral del lado derecho de la igualdad anterior nos lleva a que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} \frac{d^n}{dt^n} [({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f)(t)] dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ (x-t)^{\alpha} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} [({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f)(t)] \Big|_a^x \right. \\ &+ \left. \alpha \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f)(t)] dt \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ \alpha \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f)(t)] dt \right. \\ &- \left. (x-a)^{\alpha} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} ({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f(a+)) \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [({}_{a+}I_{a+}^n D^{\alpha} f)(t)] dt - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} ({}_{a+}I_{a+}^n {}^{RL}D^{\alpha} f)(a+). \end{aligned}$$

Integrando por partes nuevamente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^x (x - t)^\alpha \frac{d^n}{dt^n} [(a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(t)] dt, \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(t)] dt \\
& - \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (a_+ I^k {}^{RL}D^\alpha f)(a_+), \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ (x - t)^{\alpha-1} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} [(a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(t)] \Big|_a^x \right. \\
& + (\alpha - 1) \int_a^x (x - t)^{\alpha-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} [(a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(t)] dt \Big] \\
& - \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (a_+ I^k {}^{RL}D^\alpha f)(a_+), \\
= & - \left[ \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(a_+) + \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(a_+ I^k {}^{RL}D^\alpha f)(a_+)] \right] \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} [(a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(t)] dt.
\end{aligned}$$

De esta forma e integrando sucesivamente por partes la última integral obtenemos

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-n} {}_{a_+}I^n {}^{RL}D^\alpha f(t) dt}_{\text{definición de integral fraccionaria}} - \sum_{j=1}^n \frac{(x - a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha + 2 - j)} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} (a_+ I^n {}^{RL}D^\alpha f)(a_+), \\
= & {}_{a_+}^{RL}I^{\alpha-n+1} [({}_{a_+}^{RL}I^{n-\alpha} f)(x)] - \sum_{j=1}^n \frac{(x - a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha + 2 - j)} ({}_{a_+}^{RL}D^{\alpha-j} f)(a_+), \\
= & {}_{a_+}I f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(x - a)^{\alpha+1-j}}{\Gamma(\alpha + 2 - j)} ({}_{a_+}^{RL}D^{\alpha-j} f)(a_+).
\end{aligned}$$

Sustituyendo éste último valor en la ecuación (1.3.25) se tiene

$$\begin{aligned}
({}_{a_+}^{RL}I^\alpha {}_{a_+}^{RL}D^\alpha f)(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^x (x - t)^\alpha ({}_{a_+}^{RL}D^\alpha f(t)) dt \right], \\
&= \frac{d}{dx} \left[ {}_{a_+}I f(x) - \sum_{j=1}^n \left[ {}_{a_+}^{RL}D^{\alpha-j} f(x) \Big|_{x=a} \right] \frac{(x - a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2 + \alpha - j)} \right], \\
&= f(x) - \sum_{j=1}^n \left[ {}_{a_+}^{RL}D^{\alpha-j} f(x) \Big|_{x=a} \right] \frac{(x - a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}, \\
&= f(x) - \sum_{j=1}^n ({}_{a_+}^{RL}D^{\alpha-j} f)(a_+) \frac{(x - a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha - j + 1)}.
\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

Dada la importancia que juega el empleo del método de la transformada de Laplace

en la determinación de soluciones dentro de las ecuaciones diferenciales, presentamos los siguientes resultados correspondientes a transformada de Laplace de los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville.

**Teorema 1.3.8** *Sea  $f \in L_1(a, b)$  tal que  $-\infty < a < b < \infty$ , entonces la transformada de Laplace del operador integral fraccionario de Riemann-Liouville de orden  $\alpha > 0$  está dada por la expresión*

$$\mathcal{L} \left\{ {}_0^{RL}I^\alpha f(t) \right\} (s) = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \{ f(t) \} (s). \quad (1.3.26)$$

**Demostración.** Notemos que el operador integral fraccionario de Riemann-Liouville  ${}_0^{RL}I^\alpha$ , se puede escribir como una convolución de funciones de la forma

$${}_0^{RL}I^\alpha f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \quad (1.3.27)$$

Luego

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} (s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-st} dt, \quad (1.3.28)$$

al considerar el cambio de variable  $u = st$  en la ecuación anterior, se tiene

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} (s) = \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{1}{s^\alpha}, \quad (1.3.29)$$

debido a que, por definición, la integral resultante es igual a  $\Gamma(\alpha)$ . Así, del resultado anterior y el empleo del teorema de convolución dado en (1.2.7) en la ecuación (1.3.28) se obtiene

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \right\} (s) = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \{ f(t) \} (s).$$

*Q.E.D.*

Análogamente, para la transformada de Laplace del operador de diferenciación fraccionario de Riemann-Liouville, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.9** *Sea  $f \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^+)$ , tal que  $\alpha > 0$  y  $\alpha = [n]$ ,  $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}^+)$  y suponiendo*

que  $({}^RLD^{\alpha-k-1})(t)$  es exponencial de orden  $\nu_k > 0$  para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , entonces

$$\mathcal{L} \{ ({}^RLD^{\alpha-k-1} f)(t) \} (s) = s^\alpha \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^RLD^{\alpha-k-1} f)(0), \quad (1.3.30)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$  y  $\Re(s) > 0$ , donde  $m = \text{máx} \{ \nu_k | k = 0, 1, \dots, n-1 \}$ .

**Demostración.** A partir la definición de transformada de Laplace aplicada a la derivada fraccionaria de tipo Riemann-Liouville y empleando el resultado del Teorema 1.2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}^RLD^\alpha f(t) \} (s) &= \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} f(t) \right\} (s), \\ &= s^n \mathcal{L} \{ I^{n-\alpha} f(t) \} (s) - s^{n-1} (I^{n-\alpha} f)(0) - \dots - (D^{n-1} I^{n-\alpha} f)(0). \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Del Teorema 1.3.9 se deduce que

$$\mathcal{L} \{ I^{n-\alpha} f(t) \} (s) = \frac{\mathcal{L} \{ f(t) \} (s)}{s^{n-\alpha}}. \quad (1.3.32)$$

Al emplear el resultado anterior en la ecuación (1.3.31) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}^RLD^\alpha f(t) \} (s) &= s^\alpha \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - s^{n-1} ({}^RLD^{\alpha-n} f)(0) - s^{n-2} ({}^RLD^{\alpha-n+1} f)(0) \\ &\quad - s^{n-3} ({}^RLD^{\alpha-n+2} f)(0) - \dots - ({}^RLD^{\alpha-1} f)(0), \\ &= s^\alpha \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^RLD^{\alpha-k-1} f)(0). \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

*Q.E.D.*

Es de notar que, la aplicación del método de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales que involucran derivadas fraccionarias del tipo Riemann-Liouville involucran a la función  $f(t)$  y sus respectivas derivadas de orden fraccionario evaluadas en algún punto. Esto nos lleva a la búsqueda de interpretar o dar ejemplos, en donde aparezcan condiciones iniciales de orden fraccionario (ver [32] para una posible interpretación).

### 1.3.2. Derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo

La definición de derivada fraccionaria del tipo Riemann-Liouville, ha sido una apertura hacia nuevos descubrimientos matemáticos y novedosos aportes a la teoría de las ecua-

ciones diferenciales, ofreciendo la opción de preservar el orden entero de los operadores diferenciales e integrales o elegir un orden fraccionario de los mismos, en dependencia de la optimización de los fenómenos físicos a modelar.

Sin embargo, el empleo de los operadores fraccionarios del tipo Riemann-Liouville dentro de las ecuaciones diferenciales, necesitan condiciones iniciales que involucran a las derivadas fraccionarias de la función, las cuales, aún no cuentan con una interpretación física consensuada [2], [32]. Un enfoque mediante el cual puede saldarse dicha cuestión es la definición del operador de diferenciación fraccionario propuesta por el Físico-Matemático Michele Caputo en el año de 1969 como se mostrará a continuación [5, 10].

**Definición 1.3.4** Sea  $f \in L_1(a, b)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que  $n = \lceil \alpha \rceil$  entonces la derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo se define como

$${}^{LC}D^\alpha f(t) := {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx, \quad (1.3.34)$$

en donde,  $f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ . Además, se satisface

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^{LC}D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad (1.3.35)$$

siempre que  $D^{(n)}f \in L_1(a, b)$ .

Es de notar que la diferencias entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Liouville-Caputo radica en el orden del operador de diferenciación clásica y el operador de integración fraccionario de Riemann-Liouville: para el primero, la derivada clásica de orden  $n = \lceil \alpha \rceil$  se aplica a la integral fraccionaria de Riemann Liouville de orden  $n - \alpha$  de la función considerada, mientras que, para la segunda definición, la integral fraccionaria de orden  $n - \alpha$  se aplica a la derivada de clásica de orden  $n = \lceil \alpha \rceil$  de la función considerada, esto es

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= D^n {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \right], \\ {}^{LC}D^\alpha f(t) &= {}^{RL}I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Otra diferencia importante es el hecho que bajo este nuevo enfoque, la derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo para cualquier función constante es cero, a diferencia de la derivada fraccionaria del tipo Riemann- Liouville, tal como se puede ver en el Ejemplo

1.3.3, ecuación (1.3.19).

Otra propiedad importante que resulta útil en la solución de ecuaciones diferenciales que involucran derivadas fraccionarias del tipo Liouville-Caputo es la siguiente

**Teorema 1.3.10** *Sea  $f^{(n)}(t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  tal que  $f^{(k)}(t)$  es de orden exponencial  $\nu_k > 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , entonces*

$$\mathcal{L} \{ {}_0^{LC} D^\alpha f(t) \} (s) = s^\alpha \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (1.3.37)$$

siempre que  $\Re(s) > m$ , donde  $m = \max\{\nu_k | k = 0, 1, \dots, n - 1\}$ .

**Demostración.** A partir de la definición de derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo en términos de los operadores y aplicando la transformada de Laplace obtenemos, en virtud del Teorema 1.3.9

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ {}_0^{LC} D^\alpha f(t) \} (s) &= \mathcal{L} \{ {}_0^{RL} I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \} (s), \\ &= \frac{\mathcal{L} \{ f^{(n)}(t) \} (s)}{s^{n-\alpha}}, \\ &= s^\alpha \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

*Q.E.D.*

La expresión (1.3.37) nos hace ver que, al emplear la técnica de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales que involucren derivadas fraccionarias del tipo Liouville-Caputo, las condiciones iniciales deben estar en términos de la función solución y sus respectivas derivadas de orden entero, lo cual, no sucede para el caso de las derivadas fraccionarias de Riemman-Liouville como se vió en la ecuación (1.3.30).

### 1.3.3. Derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio

Las derivadas fraccionarias del tipo Riemann-Liouville y Liouville-Caputo son operadores no locales debido a que están definidos mediante integrales, razón por la cual, contienen información sobre la función en puntos anteriores. Si dichas derivadas fraccionarias son respecto al tiempo, entonces poseen un efecto de memoria, el cual es descrito por el kernel asociado a dichas definiciones. De la consideración anterior, es claro que las definiciones propuestas por Riemann-Liouville y Liouville-Caputo no pueden describir con plena precisión los efectos de memoria debido a que presentan una singularidad en el extremo

superior de integración [16, 17].

Una propuesta hecha por Caputo y Fabrizio [9] para saldar dicho problema de singularidad consiste en modificar el kernel de la derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo de orden  $\alpha$ , dada por

$${}^{LC}D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi, \quad (1.3.39)$$

en donde,  $\alpha \in [0, 1]$  y  $a \in [-\infty, t)$ ,  $f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$ . Al modificar el kernel  $(t-\xi)^{-\alpha}$  por la función  $e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)}$  y  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  por el factor  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  en la definición (1.3.39) se obtiene la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio dada por la expresión

$${}^{CF}D_a^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \quad (1.3.40)$$

en donde,  $M(\alpha)$  es una constante de normalización dependiente de  $\alpha$ , la cual satisface que  $M(0) = M(1) = 1$ .

Es de notar que en ambas definiciones de derivadas fraccionarias, se tiene que si  $f$  es una función constante, entonces su derivada fraccionaria es cero. La diferencia entre ambas definiciones de derivadas fraccionarias consiste principalmente en que la definición de derivada dada en (1.3.40) es no singular para  $t = \xi$ .

Esta nueva definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio, también puede extenderse para funciones que no pertenecen a  $H^1(a, b)$ . La ecuación (1.3.40) se puede reformular para  $f \in L^1(-\infty, b)$  y  $\alpha \in [0, 1]$  como sigue

$${}^{CF}D_{-\infty}^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\xi)) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi. \quad (1.3.41)$$

Si se considera el cambio de variable

$$\alpha = \frac{1}{1+\sigma}, \quad \text{o bien} \quad \sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad (1.3.42)$$

se deduce que, para  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\sigma \in [0, \infty)$  y la ecuación (1.3.40) se transforma en

$${}^{CF}\tilde{D}_a^\sigma f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{t-\xi}{\sigma}} d\xi, \quad (1.3.43)$$

en donde,  $N(\sigma)$  es el correspondiente término de normalización, tal que,

$$N(0) = N(\infty) = 1.$$

La anterior definición se puede reescribir en la nueva forma como

$${}_a^{CF}\tilde{D}^\nu f(t) = V(\nu) \int_a^t f'(\xi) e^{-\nu(t-\xi)} d\xi, \quad (1.3.44)$$

la cual se obtiene a partir de la ecuación (1.3.41) o (1.3.43) tomando  $\nu = \frac{1}{\sigma}$ , donde  $V(\nu) = \nu N(1/\nu)$ . Con lo anterior se tiene

**Lema 3** *Si la función  $f \in W^{1,1}(a,b)$ , entonces la integral dada en (1.3.44) existe para  $t \in [a,b]$  y  ${}_a^{CF}\tilde{D}^\nu f(t) \in L^1[a,b]$ .*

**Demostración.** Primero escribimos

$$\begin{aligned} {}_a^{CF}\tilde{D}^\nu f(t) &= V(\nu) \int_a^t f'(\xi) e^{-\nu(t-\xi)} d\xi, \\ &= V(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(t-s) q(s) ds, \end{aligned}$$

en donde,  $p_\nu = e^{-\nu y}$ , cuando  $0 < y < b - a$ , con  $p(y) = 0$  cuando  $y < 0$  o  $y > b - a$ ,  $q(y) = f'(y)$  cuando  $a \leq y \leq b$  y  $q(y) = 0$  cuando  $y < a$  y  $y > b$ . Con las hipótesis del teorema, las funciones  $p_\nu, q \in L^1(a,b)$ . Entonces, usando uno de los resultados clásicos de las integrales de Lebesgue, la integral dada en (1.3.44) existe casi en todas partes en  $t \in [a,b]$  y  ${}_a^{CF}\tilde{D}^\nu f(t) \in L^1[a,b]$ .

*Q.E.D.*

Dada la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio de orden  $\alpha \in [0,1]$ , es de esperar que cuando  $\alpha \rightarrow 1$ , se obtiene la definición de derivada clásica, mientras que si  $\alpha \rightarrow 0$  se recupere a la función  $f$  considerada. Debido a las consideraciones anteriores se tiene lo siguiente.

**Teorema 1.3.11** *Para  $f \in H^1(a,b)$  se satisface que*

$$i) \lim_{\alpha \rightarrow 1} {}_a^{CF}D^\alpha f(t) = f'(t), \quad (1.3.45)$$

$$ii) \lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a^{CF}D^\alpha f(t) = f(t) - f(a). \quad (1.3.46)$$

**Demostración.** Al considerar el caso *i)*, y tomando en cuenta la ecuación (1.3.43) junto

con la propiedad (1.1.28) de la función  $\delta$  de Dirac se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 1} {}^{CF}D_a^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \\
&= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{t-\xi}{\sigma}} d\xi, \\
&= \int_a^t f'(\xi) \delta(t-\xi) d\xi, \\
&= f'(t).
\end{aligned} \tag{1.3.47}$$

Con lo cual, el caso *i*) queda probado. Al considerar el caso *ii*), usando la definición dada en (1.3.40) y posteriormente la definición dada en (1.3.43) se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}^{CF}D_a^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \\
&= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{t-\xi}{\sigma}} d\xi \\
&= f(t) - f(a).
\end{aligned} \tag{1.3.48}$$

De está manera, queda probado el teorema. *Q.E.D.*

Por otro lado, Lozada y Nieto en [10], retoman la definición de derivada fraccionaria del tipo Liouville-Caputo, consideran la modificación del kernel  $(t-\xi)^{-\alpha}$  por la función  $e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)}$  y el factor  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  por el factor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha^2)}}$  para  $0 < \alpha < 1$ , de esta forma, la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio se transforma en

$${}^{CF}D_a^\alpha f(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \tag{1.3.49}$$

en donde,  $M(\alpha)$  es una constante de normalización dependiente de  $\alpha$ .

Dado que el método de la transformada de Laplace es una herramienta importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.12** *Dada  $f \in H^1(a, b)$  y  $0 < \alpha < 1$ , entonces*

$$\mathcal{L} \{ {}^{CF}D_0^\alpha f(t) \} (s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-\alpha))} (s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)), \quad s > 0. \tag{1.3.50}$$

**Demostración.** A partir de la definición (1.3.49) y al tener en cuenta el teorema de

convolución se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \{ {}^{CF}_0 D^\alpha f(t) \} (s) &= \mathcal{L} \left\{ \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right\} (s), \\
&= \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} (s\mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - f(0)), \\
&= \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s + \alpha(1-s))} (s\mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - f(0)).
\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

### 1.3.4. Integral asociada a la derivada de Caputo-Fabrizio

Una vez definida la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio de orden  $0 < \alpha < 1$ , surge de manera natural pensar en la integral asociada a la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio, tal como en el caso clásico. Para tal fin, consideremos la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario

$${}^{CF}_0 D^\alpha f(t) = u(t), \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad t \geq 0. \quad (1.3.51)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (1.3.51) se tiene

$$\mathcal{L} \{ u(t) \} (s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s + \alpha(1-\alpha))} (s\mathcal{L} \{ f(t) \} (s) - f(0)),$$

de donde, se deduce que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \{ f(t) \} (s) &= \frac{2(s(1-\alpha) + \alpha)}{s(2-\alpha)M(\alpha)} \mathcal{L} \{ u(t) \} (s) + \frac{f(0)}{s}, \\
&= \frac{f(0)}{s} + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \mathcal{L} \{ u(t) \} (s) + \frac{2\alpha}{s(2-\alpha)M(\alpha)} \mathcal{L} \{ u(t) \} (s).
\end{aligned}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a esta última ecuación se tiene

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + f(0),$$

en donde, se ha usado que  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} (t) = 1$ . Así, la función definida como

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + c, \quad (1.3.52)$$

en donde,  $c \in \mathbb{R}$  es una constante que es también solución de la ecuación (1.3.51).

Por otro lado, al emplear la definición dada en la ecuación (1.3.49), se tiene que la ecuación diferencial (1.3.51) también se puede escribir como

$$\frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t f'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds = u(t),$$

de donde, se deduce que

$$\int_0^t f'(s) e^{\frac{\alpha s}{1-\alpha}} ds = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} e^{\frac{\alpha t}{1-\alpha}} u(t). \quad (1.3.53)$$

Al derivar con respecto de  $t$  en ambos miembros de la igualdad anterior se tiene

$$f'(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \left[ u'(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} u(t) \right].$$

Al integrar esta última igualdad de 0 a  $t$  se obtiene

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} [u(t) - u(0)] + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + f(0), \quad t \geq 0. \quad (1.3.54)$$

Como consecuencia de los resultados (1.3.52) y (1.3.54) se obtiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.5** Sea  $0 < \alpha < 1$ , la integral fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio de orden  $\alpha$  de una función  $f$  es definida como

$${}^{CF}I^\alpha f(t) := \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(\xi) d\xi, \quad t \geq 0. \quad (1.3.55)$$

**Observación 1.3.3** Al tener en cuenta que, de acuerdo a la definición anterior, la integral fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio de una función de orden  $0 < \alpha < 1$  es un promedio entre la función  $f$  y su integral de orden 1, al imponer que

$$\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} = 1,$$

se tiene un fórmula explícita para  $M(\alpha)$ ,

$$M(\alpha) = \frac{2}{2-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Al considerar este valor encontrado de  $M(\alpha)$  en las ecuaciones (1.3.49) y (1.3.55), las definiciones de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio y su respectiva integral

fraccionaria asociada se pueden escribir como

$${}^{CF}_0 D^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha} \xi} d\xi, \quad (1.3.56)$$

$${}^{CF}_0 I^\alpha f(t) = (1-\alpha) u(t) + \alpha \int_0^t u(\xi) d\xi. \quad (1.3.57)$$

Hasta ahora, se ha atendido a propiedades correspondientes a la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio de orden  $0 < \alpha < 1$ , pero no hay razón por la cual limitarse a no considerar derivadas fraccionarias de orden superior para este caso. Por lo cual, se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.6** Si  $n \geq 1$ , y  $\alpha \in [0, 1]$  la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio  $D_t^{(\alpha+n)} f(t)$  de orden  $(n + \alpha)$  es definida como

$${}^{CF}_a D^{\alpha+n} f(t) := {}^{CF}_a D^\alpha (D^n f(t)). \quad (1.3.58)$$

A partir de la definición anterior se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.13** Para la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio, definida en (1.3.56), si la función  $f$  es tal que

$$f^{(s)}(a) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

entonces

$$D^n ({}^{CF}_a D^\alpha f(t)) = {}^{CF}_a D^\alpha (D^n f(t)). \quad (1.3.59)$$

**Demostración.** Al aplicar inducción sobre  $n$ , si  $n = 1$  del lado izquierdo de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned} {}^{CF}_a D^{\alpha+1}(f(t)) &= {}^{CF}_a D^\alpha D^1(f(t)), \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f^{(2)}(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} d(f'(\xi)), \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[ e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) \Big|_a^t - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) d\xi \right], \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

Por el lado derecho de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned}
D^1({}^{CF}D^\alpha f(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) d\xi \right), \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f'(t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) \right) d\xi \right], \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f'(\xi) d\xi \right]. \quad (1.3.61)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.3.60) y (1.3.61) se obtiene la igualdad. Ahora, supongamos que la proposición dada es válida para  $n = k$ , es decir,

$$\begin{aligned}
{}^{CF}D^\alpha(D^k f(t)) &= \frac{1}{\alpha-1} \int_a^t f^{(k+1)}(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi, \\
&= \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right), \\
&= D^k({}^{CF}D^\alpha f(t)).
\end{aligned}$$

Ahora, se debe demostrar que la proposición es válida para  $n = k + 1$ . A partir de la definición (1.3.56) y el empleo de la hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned}
D^{(k+1)}({}^{CF}D^\alpha f(t)) &= \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \left[ \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right], \\
&= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right) \right], \\
&= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f^{(k+1)}(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right], \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f^{(k+1)}(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} \Big|_a^t \right] \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \left[ \int_a^t f^{(k+1)}(\xi) \frac{d}{dt} \left( e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} \right) d\xi \right], \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d(f^{(k+1)}(\xi)), \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} f^{(k+2)}(\xi) d\xi, \\
&= {}^{CF}D^\alpha(D^{(k+1)}(t)).
\end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado. Q.E.D.

De la definición (1.3.58), también surge considerar el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.14** Sean  $f^{(n)}$  funciones continuas para  $k = 0, 1, \dots, n$  y  $f^{(n+1)} \in H^1[0, \infty)$ ,

todas de orden exponencial  $\nu > 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$ , entonces se tiene que

$$\mathcal{L}\{ {}^C_0 D^{\alpha+n} f(t) \}(s) = \frac{s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^n f(0) - \dots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)}. \quad (1.3.62)$$

**Demostración.** Al considerar la expresión (1.3.58) y el teorema de convolución se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^C_0 D^{n+\alpha} f(t) \}(s) &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f^{(n+1)}(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \right\}(s), \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}\}(s) \cdot \mathcal{L}\left\{ e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \right\}(s), \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} (s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^n f(0) - \dots - f^{(n)}(0)), \\ &= \frac{s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^n f(0) - \dots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)}. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

El resultado anterior nos dice que, sin importar el orden de diferenciación fraccionaria, la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio siempre preserva el factor  $\frac{1}{s + \alpha(1-s)}$ .

A continuación, se consideran algunos resultados que involucran los operadores de diferenciación e integración fraccionario del tipo Caputo-Fabrizio.

**Teorema 1.3.15** Sean  $f \in H^1(a, b)$  y  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces

$${}^C_0 I^\alpha {}^C_0 D^\alpha f(t) = u(t) - u(0), \quad (1.3.63)$$

en donde,  ${}^C_0 D^\alpha f(t) := u(t)$ .

**Demostración.** Al ser  ${}^C_0 D^\alpha f(t) := u(t)$ , entonces

$$\begin{aligned} {}^C_0 I^\alpha {}^C_0 D^\alpha f(t) &= {}^C_0 I^\alpha u(t), \\ &= (1-\alpha)\varphi(t) + \alpha \int_0^t \varphi(s) ds, \end{aligned} \quad (1.3.64)$$

en donde,  ${}^C_0 D^\alpha u(t) = \varphi(t)$ , por tanto, la ecuación (1.3.64) se transforma en

$${}^C_0 I^\alpha {}^C_0 D^\alpha f(t) = (1-\alpha) {}^C_0 D^\alpha u(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^t \int_0^s u'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(s-\xi)} d\xi ds, \quad (1.3.65)$$

la cual, al considerar el cambio en el orden de integración usando el teorema de Fubini [29]

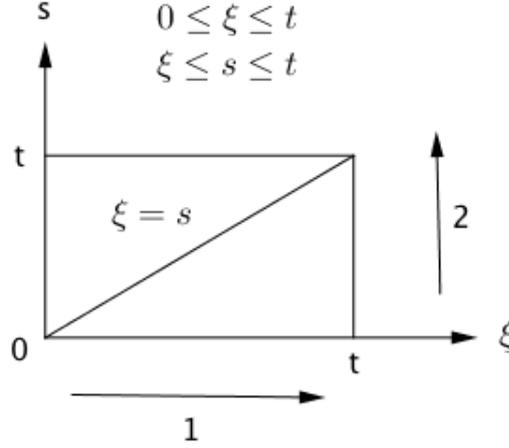


Figura 1.2: Región de integración.

y considerando la Figura 1.2, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
{}^{CF}_0 I^\alpha {}^{CF}_0 D^\alpha f(t) &= (1 - \alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^t u'(\xi) e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\xi} \int_\xi^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}s} ds d\xi, \\
&= (1 - \alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^t u'(\xi) e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}\xi} \left[ -\frac{1 - \alpha}{\alpha} \left( e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\xi} \right) \right] d\xi, \\
&= (1 - \alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) - \int_0^t u'(\xi) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi + \int_0^t u'(\xi) d\xi, \\
&= u(t) - u(0).
\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Teorema 1.3.16** Sean  $f \in H^1(a, b)$  y  $0 < \alpha \leq 1$  entonces

$${}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha f(t) = u(t) - u(0) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (1.3.66)$$

en donde,  ${}^{CF}_0 D^\alpha f(t) := u(t)$ .

**Demostración.** Sea  ${}^{CF}_0 D^\alpha f(t) := u(t)$ , entonces

$${}^{CF}_0 I^\alpha f(t) = (1 - \alpha)u(t) + \alpha \int_0^t u(s) ds,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
{}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha f(t) &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left[ (1-\alpha)u(s) + \alpha \int_0^s u(\xi) d\xi \right] e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \\
&= \int_0^t u'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^t u(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \\
&= (1-\alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^t u(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds. \quad (1.3.67)
\end{aligned}$$

Al considerar el método de integración por partes en la integral de la ecuación anterior, la expresión (1.3.67) se transforma en

$$\begin{aligned}
{}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha f(t) &= (1-\alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) + \left[ u(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t u'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \right] \\
&= (1-\alpha) {}^{CF}_0 D^\alpha u(t) + u(t) - u(0) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} - (1-\alpha) {}^{CF}_0 D^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} D^\alpha u(t), \\
&= u(t) - u(0) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}.
\end{aligned}$$

*Q.E.D.*

**Corolario 1.3.17** *Bajo las mismas condiciones del Teorema 1.3.16, si  $u(0) = 0$ , entonces*

$${}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha f(t) = {}^{CF}_0 I^\alpha {}^{CF}_0 D^\alpha f(t) = {}^{CF}_0 D^\alpha f(t) = u(t). \quad (1.3.68)$$

**Demostración.** Se sigue inmediatamente de los Teoremas 1.3.15 y 1.3.16. *Q.E.D.*

Del Corolario anterior, se deduce que si  $u(0) = 0$ , entonces el operador fraccionario integral del tipo Caputo-Fabrizio al aplicarse a su correspondiente derivada fraccionaria de una función  $f$ , la deja invariante, sin importar el orden de aplicación.

**Ejemplo 1.3.5** *Determinar  ${}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha t$  y  ${}^{CF}_0 I^\alpha {}^{CF}_0 D^\alpha t$ .*

Al calcular la derivada fraccionaria de la función identidad se tiene

$$\begin{aligned}
{}^{CF}_0 D^\alpha t &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \\
&= \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \right), \\
&:= u(t). \quad (1.3.69)
\end{aligned}$$

De la ecuación (1.3.69) se deduce que  $u(0) = 0$ . Por lo tanto, al aplicar el Corolario 1.3.17

se obtiene la solución

$${}^{CF}_0 D^\alpha {}^{CF}_0 I^\alpha t = {}^{CF}_0 I^\alpha {}^{CF}_0 D^\alpha t = \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}\right).$$

Al retomar las definiciones de derivadas fraccionarias de Riemman-Liouville y Liouville-Caputo dadas en la ecuación (1.3.36), se observó que una diferencia entre ellas consistía en el orden de la aplicación de la derivada clásica. Al extender esta diferencia en la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio, dada en la ecuación (1.3.56) se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.7** *Sea  $f \in H^1(a, b)$ ,  $a < b$  y  $\alpha$  un número real tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , entonces la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio en el sentido Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  está dada por la expresión*

$${}^{CFR}_a D^\alpha := \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \quad (1.3.70)$$

y por tanto, la definición de derivada fraccionaria de tipo Caputo-Fabrizio, dada en la ecuación (1.3.56) se entenderá como en el sentido de Liouville-Caputo, cuya notación se preservara a lo largo de este trabajo.

**Teorema 1.3.18** *Sea  $f \in H^1(a, b)$ ,  $a < b$  y  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces la relación entre la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo y en el sentido de Riemann-Liouville está dada por la igualdad*

$${}^{CF}_a D^\alpha f(t) = {}^{CFR}_a D^\alpha f(t) - \frac{1}{1-\alpha} f(a) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-a)}. \quad (1.3.71)$$

**Demostración.** Al considerar el lado izquierdo de la igualdad se tiene

$${}^{CF}_a D^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds. \quad (1.3.72)$$

Al aplicar el método de integración por partes en la ecuación (1.3.72) se obtiene

$$\begin{aligned} {}^{CF}_a D^\alpha f(t) &= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} \Big|_{s=a}^{s=t} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_a^t f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds \right], \\ &= \frac{1}{1-\alpha} f(t) - \frac{1}{1-\alpha} f(a) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-a)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^t f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds. \end{aligned} \quad (1.3.73)$$

Por otro lado, al considerar el lado derecho de la igualdad (1.3.71) y usando la regla de Leibniz para derivar integrales se tiene

$$\begin{aligned}
{}^{CFR}_a D^\alpha f(t) &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds, \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[ f(t) + \int_a^t \left( \frac{\partial}{\partial t} f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} \right) ds \right], \\
&= \frac{1}{1-\alpha} f(t) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \int_a^t f(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)} ds.
\end{aligned} \tag{1.3.74}$$

Al comparar las ecuaciones (1.3.73) y (1.3.74) se deduce el resultado. *Q.E.D.*

Por último, se tiene la siguiente definición

**Definición 1.3.8** *La derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo de orden  $\alpha$  para una función  $u(x, t)$  respecto a la variable temporal viene dada por*

$$({}^{CF}_0 D_t^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, \xi) \right) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)} d\xi \tag{1.3.75}$$

en donde,  $t \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  y  $u \in H^1((a, b) \times (a, b))$ , con respecto a la variable temporal  $t$ .

### 1.3.5. Operador integral de Srivastava y Tomovski

El operador de Srivastava y Tomovski [15] es un operador integral que es de gran utilidad para expresar soluciones de manera compacta, las cuales suelen aparecer dentro de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Dicho operador se define por la siguiente expresión

$$\left( \varepsilon_{a+; \alpha, \beta}^{\omega; \gamma, \delta} \varphi \right) (t) := \int_a^t (t-x)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta}(\omega(t-x)^\alpha) \varphi(x) dx. \tag{1.3.76}$$

**Observación 1.3.4** *Si  $a = 0$ , entonces la expresión (1.3.76) es una convolucion de funciones de la forma*

$$\left( \varepsilon_{0; \alpha, \beta}^{\omega; \gamma, \delta} \varphi \right) (t) = \int_0^t (t-x)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta}(\omega(t-x)^\alpha) \varphi(x) dx. \tag{1.3.77}$$

*Si  $a = 0$  y  $\omega = 0$ , entonces la ecuación (1.3.76) coincide con el operador integral fraccio-*

nario de Riemann-Liouville de orden  $\beta$ , esto es

$$\left( \varepsilon_{0;\alpha,\beta}^{0;\gamma,\delta} \varphi \right) (t) = {}_0^{RL} I^\beta \varphi(t). \quad (1.3.78)$$

### Ecuaciones de onda clásicas

---

#### 2.1. Introducción

La ecuación de onda, es uno de los modelos más importantes dentro de la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, dicha ecuación es lineal, del tipo hiperbólico y en dimensión espacial 1 describe las vibraciones verticales de una cuerda flexible, tal como puede ser, las cuerdas de un violín.

Algunas versiones o generalizaciones de este tipo de ecuación suelen aparecer dentro de los estudios asociados a la propagación de ondas en un medio continuo, como por ejemplo, ondas acústicas, ondas en el agua y ondas electromagnéticas [18]. En las secciones siguientes se mostrarán algunas de estas versiones.

##### 2.1.1. Ecuación de onda clásica libre

Esta es una de las versiones más sencillas que puede encontrarse dentro de la literatura [18]- [26]. En dicha versión, el objetivo es determinar la función  $u(x, t)$  que represente el movimiento de una cuerda cuando se hace vibrar, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones

1. Se considera que la cuerda es homogénea, perfectamente elástica y no ofrece resistencia a la flexión.
2. Las vibraciones de la cuerda tienen una amplitud pequeña.
3. Cada punto de la cuerda presenta sólo desplazamientos verticales.

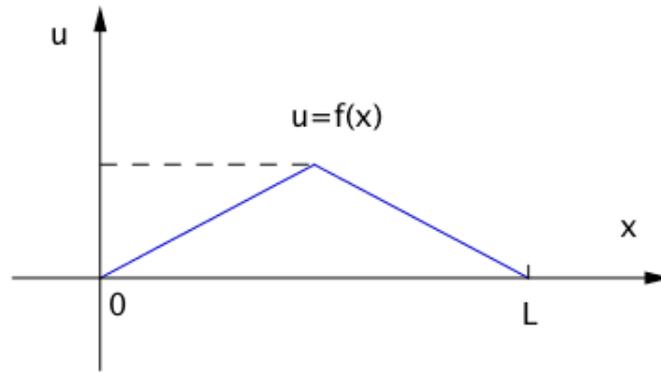


Figura 2.1: Una representación de las condiciones iniciales y de frontera.

4. El desplazamiento vertical de un punto depende del tiempo y de su posición en la cuerda.
5. La fricción es despreciable y no existe fuerza externa que interfiera en el movimiento.
6. La cuerda esta fija en sus puntos extremos.

De esta manera, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la cuerda es de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (2.1.1)$$

en donde, el coeficiente  $a$  es la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de la cuerda y depende de la densidad lineal y la tensión de la cuerda. Si suponemos que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, entonces se tiene la siguiente condición de frontera (ver Figura (2.1)).

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Considerando que la configuración de la cuerda en el momento inicial sólo depende de la posición y que su velocidad es nula, entonces se obtienen las siguientes condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.1.4)$$

en donde, la función  $\varphi(x)$  nos indica el desplazamiento inicial. Con las consideraciones

anteriores se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.1** *Dado el problema de valor inicial y de frontera (2.1.1)-(2.1.4) y  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$  y  $\varphi' \in L_2[0, L]$ , entonces la solución esta dada por la expresión*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.5)$$

en donde,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.1.6)$$

**Demostración.** Para resolver el problema (2.1.1)-(2.1.4), se hará uso del método de separación de variables. Sea

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0, \quad (2.1.7)$$

solución de la ecuación (2.1.1) de modo que  $X(x)$  es una función que depende sólo de  $x$  y  $T(t)$  es una función que depende sólo de  $t$ . Al sustituir dicha solución en (2.1.1) se deduce

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}. \quad (2.1.8)$$

Dado que el lado izquierdo de la igualdad anterior es una función que depende sólo de  $x$  y el lado derecho es una función que sólo depende de  $t$ , se tiene que la igualdad (2.1.8) se satisface solamente si ambas funciones son iguales a una constante  $\lambda$ , por lo que dicha ecuación (2.1.8) se puede escribir como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda, \quad (2.1.9)$$

en donde  $\lambda$  es la llamada constante de separación. A partir de la ecuación anterior se deduce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad (2.1.10)$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.1.11)$$

al usar las condiciones de fronteras (2.1.2) para resolver este par de ecuaciones se obtienen las siguiente expresiones para el valor de  $u(x, t)$  en sus extremos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (2.1.12)$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (2.1.13)$$

las cuales se satisfacen si  $T(t) \equiv 0$  de donde se deduce la solución trivial  $u(x, t) \equiv 0$ , o bien descartando dicha solución con  $T(t) \neq 0 \forall t > 0$ , se tiene que

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (2.1.14)$$

con lo que se obtiene un problema de Sturm-Liouville definido por

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.1.15)$$

Al resolver dicho problema, la ecuación diferencial tiene por ecuación característica

$$m_n^2 - \lambda = 0, \quad (2.1.16)$$

cuya solución da lugar a tres posibles casos.

Caso (i)  $\lambda > 0$ , sea  $\lambda = \alpha^2$ , entonces la solución de la ecuación diferencial (2.1.10) es de la forma

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}, \quad (2.1.17)$$

que junto con las condiciones de frontera (2.1.14) se deduce que  $A = B = 0$ , por lo que se obtiene una solución trivial para  $X(x)$ .

Caso (ii)  $\lambda = 0$ , se obtiene la solución

$$X(x) = Ax + B, \quad (2.1.18)$$

que junto con las condiciones de frontera (2.1.14) se deduce que  $A = B = 0$ , obteniéndose una solución trivial para  $X(x)$ .

Caso (iii)  $\lambda < 0$ , sea  $\lambda = -\alpha^2$  entonces la solución está dada por

$$X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x), \quad (2.1.19)$$

que junto con las condiciones de frontera conducen a que

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{y} \quad X(L) = 0 \Rightarrow B \operatorname{sen}(\alpha L) = 0. \quad (2.1.20)$$

Al considerar el caso  $B = 0$  en la última ecuación de (2.1.20) obtenemos nuevamente una solución trivial. En cambio si en la última ecuación de (2.1.20) se tiene que

$$\operatorname{sen}(\alpha L) = 0,$$

entonces obtenemos que la solución a dicha ecuación trascendente esta dado por

$$\alpha(n) = \alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.21)$$

**Observación 2.1.1** *Si  $n = 0$  se deduce que  $\lambda = 0$  cuyo caso ya se ha analizado.*

A partir de la ecuación (2.1.21) se deduce que existe un conjunto infinito de valores discretos de  $\alpha$  para el cual el problema (2.1.15) presenta solución no trivial. Estos valores son los llamados valores propios  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , o modos de vibración de la cuerda y sus soluciones correspondientes son las funciones propias las cuales están dadas por

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.1.22)$$

Consideremos ahora el  $n$ -ésimo valor propio en la ecuación (2.1.11), entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la función  $T(t)$

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 T_n(t), \quad t > 0, \quad (2.1.23)$$

cuya solución es de la forma

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t\right), \quad (2.1.24)$$

en donde,  $C_n$  y  $D_n$  son constantes de integración. Usando las soluciones encontradas (2.1.22) y (2.1.24) se determina la solución (2.1.7) como

$$u_n(x, t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.25)$$

en donde,  $a_n = B_n C_n$  y  $b_n = B_n D_n$  son las nuevas constantes arbitrarias y  $n \in \mathbb{N}$ . Finalmente, dado que el problema es lineal la solución más general se obtiene mediante el principio de superposición por lo que se tiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.26)$$

siempre que la serie converja y sea dos veces continuamente diferenciable con respecto a  $x$  y  $t$ . Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se determinan mediante las condiciones iniciales (2.1.3) y (2.1.4) resultando

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.1.27)$$

Dado que,  $\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto completo ortogonal de funciones se deduce que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (2.1.28)$$

mientras que de

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an\pi}{L}\right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.29)$$

se deduce que  $b_n = 0$ .

Por lo tanto, con los valores de  $a_n$  y  $b_n$  sustituidos en la solución (2.1.26) se obtiene la solución (2.1.5), cuya convergencia se puede consultar en [18] y [19]. De esta manera se obtiene el resultado. *Q.E.D.*

## 2.1.2. Ecuación de onda amortiguada o con término de fricción

Supongamos que en la deducción de la ecuación de onda (2.1.1) no se omite la resistencia del medio, por ejemplo el aire, entonces existe una fuerza de fricción que se opone al movimiento y que generalmente se considera que es proporcional a la velocidad [30], [25]. Con estas consideraciones, la ecuación diferencial resultante es llamada ecuación de ondas amortiguada y la expresión (2.1.1) se transforma en

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 2b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0 \quad (2.1.30)$$

en donde,  $2b$  es el coeficiente de fricción tal que  $b > 0$  y  $a > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.1.31)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.1.33)$$

De esta manera se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.2** *Dado el problema de valor inicial y de frontera (2.1.30)-(2.1.33) con  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$  y  $\varphi' \in L_2[0, L]$ , entonces la solución está dada por la expresión*

$u(x, t)$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-bt} \left[ \cosh(t\sqrt{b^2 - k_n}) + \frac{b \cdot \sinh(t\sqrt{b^2 - k_n})}{\sqrt{b^2 - k_n}} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & D_n > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-bt} [1 + bt] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & D_n = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-bt} \left[ \cos(t\sqrt{k_n - b^2}) + \frac{b \cdot \operatorname{sen}(t\sqrt{k_n - b^2})}{\sqrt{k_n - b^2}} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & D_n < 0. \end{cases} \quad (2.1.34)$$

en donde,  $D_n$  es el discriminante dado por  $D_n = b^2 - k_n$ ,  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  para  $n \in \mathbb{N}$  y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$A_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.1.35)$$

**Demostración.** Para resolver el problema (2.1.30)-(2.1.33), nuevamente aplicamos el método de separación de variables. Sea

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.1.36)$$

Entonces la ecuación (2.1.30) se transforma en

$$T''(t)X(x) + 2bT'(t)X(x) = a^2X''(x)T(t), \quad (2.1.37)$$

de donde se deducen las siguiente ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T''(t) + 2bT'(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \quad (2.1.38)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (2.1.39)$$

Al considerar las condiciones de frontera (2.1.31), la solución de la ecuación (2.1.39) satisface la condición

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (2.1.40)$$

con lo cual, la ecuación (2.1.39) sujeta a la condición (2.1.40) tiene solución de la forma

$$X_n(x) = C_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (2.1.41)$$

en donde,  $\lambda_n = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$ . Al considerar el  $n$ -ésimo valor propio  $\lambda_n$ , para la ecuación (2.1.38) esta se transforma en

$$T_n''(t) + 2bT_n'(t) + k_n T_n(t) = 0, \quad (2.1.42)$$

en donde,  $k_n = \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Al aplicar la transformada de Laplace (ver Capítulo 1, sección 1.2 expresión (1.2.5)) a la ecuación anterior se obtiene

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{s + 2b}{s^2 + 2bs + k_n} \right). \quad (2.1.43)$$

Para usar el método de fracciones parciales y determinar la transformada inversa de Laplace de la ecuación (2.1.43), debe considerarse el signo del discriminante  $D_n := b^2 - k_n$ , asociado a el polinomio

$$p_2(s) = s^2 + 2bs + k_n, \quad (2.1.44)$$

con lo cual se obtienen tres casos a analizar.

**Caso 1:**  $D_n > 0$ . Las raíces de  $p_2(s)$  son reales y diferentes, y estan dadas por

$$m_{1n} = -b + \sqrt{b^2 - k_n}, \quad m_{2n} = -b - \sqrt{b^2 - k_n}, \quad (2.1.45)$$

así, la ecuación (2.1.43) se transforma en

$$\begin{aligned} T_n(s) &= T_n(0) \left( \frac{s+2b}{(s-m_{1n})(s-m_{2n})} \right), \\ &= T_n(0) \left( \frac{A_n}{s-m_{1n}} + \frac{B_n}{s-m_{2n}} \right), \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

en donde

$$A_n = \frac{m_{2n}}{m_{2n} - m_{1n}}, \quad B_n = -\frac{m_{1n}}{m_{2n} - m_{1n}}. \quad (2.1.47)$$

Con los valores de  $A_n$  y  $B_n$  empleados en la ecuación (2.1.46) se tiene que  $T_n(s)$  se reescribe como

$$T_n(s) = \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} \left( \frac{m_{2n}}{s - m_{1n}} - \frac{m_{1n}}{s - m_{2n}} \right). \quad (2.1.48)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} (m_{2n}e^{m_{1n}t} - m_{1n}e^{m_{2n}t}), \\ &= T_n(0)e^{-bt} \left[ \cosh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) + \frac{b}{\sqrt{b^2 - k_n}} \sinh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

**Caso 2:**  $D_n = 0$ . Las raíces de  $p_2(s)$  son repetidas de la forma

$$m_n = -b, \quad (2.1.50)$$

y la ecuación (2.1.43) toma la forma

$$\begin{aligned} T_n(s) &= T_n(0) \frac{s+2b}{(s+b)^2}, \\ &= T_n(0) \left( \frac{A_n}{s+b} + \frac{B_n}{(s+b)^2} \right), \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

en donde,

$$A_n = 1, \quad B_n = b; \quad (2.1.52)$$

así, la ecuación (2.1.51) se transforma en

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{1}{s+b} + \frac{b}{(s+b)^2} \right). \quad (2.1.53)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior, se obtiene el resultado

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-bt} (1 + bt). \quad (2.1.54)$$

**Caso 3:**  $D_n < 0$ . Las raíces de  $p_2(s)$  son complejas conjugadas dadas por

$$m_{1n} = -b + i\sqrt{k_n - b^2}, \quad m_{2n} = -b - i\sqrt{k_n - b^2}. \quad (2.1.55)$$

Con lo cual, la ecuación (2.1.43) toma la forma

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{A_n}{s - m_{1n}} + \frac{B_n}{s - m_{2n}} \right), \quad (2.1.56)$$

en donde,

$$A_n = \frac{m_{2n}}{m_{2n} - m_{1n}}, \quad B_n = -\frac{m_{1n}}{m_{2n} - m_{1n}}. \quad (2.1.57)$$

Con estos valores de  $A_n$  y  $B_n$ , la ecuación (2.1.56) toma la forma

$$T_n(s) = \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} \left( \frac{m_{2n}}{s - m_{1n}} - \frac{m_{1n}}{s - m_{2n}} \right). \quad (2.1.58)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} (m_{2n}e^{m_{1n}t} - m_{1n}e^{m_{2n}t}), \\ &= T_n(0)e^{-bt} \left[ \cos \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) + \frac{b}{\sqrt{k_n - b^2}} \operatorname{sen} \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.1.36), (2.1.41), (2.1.49), (2.1.54), (2.1.59) y empleando el principio de superposición se tiene el resultado para  $u(x, t)$  de acuerdo al signo de  $D_n$ , dado en (3.1.132).

De la solución (3.1.132) y la condición inicial (2.1.32) se deduce que el coeficiente de

Fourier es tal como se muestra en (2.1.64). La convergencia de la solución encontrada puede consultarse en [25]. De esta forma se obtiene el resultado.  $\mathcal{Q.E.D.}$

### 2.1.3. Ecuación de onda amortiguada con término de fuente

Consideremos ahora que para el problema asociado a la ecuación de onda, se toma en cuenta el término de fricción junto con una fuente que puede representar alguna fuerza externa que afecta al sistema. Dicha ecuación junto con las condiciones iniciales y de frontera presenta la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) + 2b\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (2.1.60)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.1.61)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.1.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (2.1.63)$$

en donde  $a, b > 0$ . De esta manera se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.3** *Dado el problema de valor inicial y de frontera (2.1.60)-(2.1.63) con  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$ ,  $\varphi' \in L_2[0, L]$ ,  $f \in C([0, L] \times \overline{\mathbb{R}^+})$ ,  $f(0, t) = f(L, t) = 0$  para  $t \geq 0$ ,  $f(x, 0) = 0$  para  $x \in [0, L]$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}f(x, t) \in C[0, L]$  y  $\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ , entonces la solución esta dada por la expresión*

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n(0)e^{-bt} \left( \cosh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) + \frac{b}{\sqrt{b^2 - k_n}} \sinh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) \right) \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-b(t-\xi)}}{\sqrt{b^2 - k_n}} \sinh \left( (t - \xi)\sqrt{b^2 - k_n} \right) d\xi \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & D_n > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n(0)e^{-bt} (1 + bt) + \int_0^t (t - \xi) e^{-b(t-\xi)} f_n(\xi) d\xi \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & D_n = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n(0)e^{-bt} \left( \cos \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) + \frac{b}{\sqrt{k_n - b^2}} \operatorname{sen} \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) \right) \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-b(t-\xi)}}{\sqrt{k_n - b^2}} \operatorname{sen} \left( (t - \xi)\sqrt{k_n - b^2} \right) d\xi \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & D_n < 0, \end{cases} \quad (2.1.64)$$

en donde,  $D_n$  es el discriminante dado por  $D_n = b^2 - k_n$ ,  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  para  $n \in \mathbb{N}$  y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$A_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (2.1.65)$$

**Demostración:** Supongamos que la solución involucra las funciones propias  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , asociados a los valores propios  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.66)$$

en donde,  $u_n(t)$  son funciones a determinar. Notemos que, dicha solución (2.1.66) cumple con las condiciones de frontera (2.1.61). Análogamente, supongamos que la fuente  $f(x, t)$  se puede escribir por medio de las funciones propias de la siguiente manera

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.67)$$

para lo cual

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.1.68)$$

A partir de la ecuación (2.1.66) se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.69)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.1.70)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.1.71)$$

Al sustituir las expresiones (2.1.70) y (2.1.71), junto con (2.1.66) y (2.1.67) en la ecuación (2.1.60), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ u''_n(t) + 2bu'_n(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 u_n(t) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.1.72)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  en donde  $m = 1, 2, \dots$ , integrando de  $x = 0$  a  $x = L$  y usando la ortogonalidad de las funciones propias, la ecuación (2.1.72) se transforma en

$$u''_n(t) + 2bu'_n(t) + k_n u_n(t) = f_n(t), \quad (2.1.73)$$

con  $k_n := \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  y cuya solución es de la forma

$$u_n(t) = u_{nh}(t) + u_{np}(t), \quad (2.1.74)$$

en donde,  $u_{nh}(t)$  es la solución homogénea de la ecuación (2.1.73) y  $u_{np}(t)$  su correspondiente solución particular.

Es de notar que la solución homogénea ya se ha determinado en la sección 2.1.2, ya que la ecuación (2.1.42) y (2.1.73) en el caso homogéneo tienen la misma forma. De esta manera la solución  $u_n(t)$  depende del signo del discriminante  $D_n = b^2 - k_n$ ; con lo cual, para la solución particular  $u_{np}(t)$  se tienen los siguientes casos.

**Caso 1:**  $D_n > 0$ . Entonces la solución homogénea de (2.1.73) es de la forma

$$u_{nh}(t) = T_n(0)A_n e^{m_{1n}t} + T_n(0)B_n e^{m_{2n}t},$$

en donde,  $A_n$  y  $B_n$  son constantes determinadas por las ecuaciones (2.1.47) respectivamente con  $m_{1n} = -b + \sqrt{b^2 - k_n}$  y  $m_{2n} = -b - \sqrt{b^2 - k_n}$ . Así, la solución particular es de la forma

$$u_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{m_{1n}t} + T_{2n}(t)e^{m_{2n}t}, \quad (2.1.75)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  satisfacen

$$e^{m_{1n}t}T'_{1n}(t) + e^{m_{2n}t}T'_{2n}(t) = 0, \quad (2.1.76)$$

$$m_{1n}e^{m_{1n}t}T'_{1n}(t) + m_{2n}e^{m_{2n}t}T'_{2n}(t) = f_n(t) \quad (2.1.77)$$

y por consiguiente, se deduce que

$$T_{1n}(t) = - \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-m_{1n}\xi}}{m_{2n} - m_{1n}} d\xi, \quad (2.1.78)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-m_{2n}\xi}}{m_{2n} - m_{1n}} d\xi. \quad (2.1.79)$$

Sustituyendo los valores de  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$ ,  $m_{1n}$  y  $m_{2n}$  en la ecuación (2.1.75) se obtiene el resultado

$$u_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-b(t-\xi)}}{\sqrt{b^2 - k_n}} \sinh\left((t-\xi)\sqrt{b^2 - k_n}\right) d\xi, \quad t \geq 0. \quad (2.1.80)$$

**Caso 2:**  $D_n = 0$ . Entonces la solución homogénea de (2.1.73) es de la forma

$$u_{nh}(t) = T_n(0)A_n e^{-bt} + T_n(0)B_n t e^{-bt}, \quad (2.1.81)$$

con  $A_n = 1$  y  $B_n = b$ . Luego, la solución particular es de la forma

$$u_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{-bt} + T_{2n}(t)te^{-bt}, \quad (2.1.82)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  satisfacen las ecuaciones

$$e^{-bt}T'_{1n}(t) + te^{-bt}T'_{2n}(t) = 0, \quad (2.1.83)$$

$$-be^{-bt}T'_{1n}(t) + (-bte^{-bt} + e^{-bt})T'_{2n}(t) = f_n(t), \quad (2.1.84)$$

de las cuales se deduce que

$$T_{1n}(t) = -\int_0^t \xi f_n(\xi) e^{b\xi} d\xi, \quad (2.1.85)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t f_n(\xi) e^{b\xi} d\xi. \quad (2.1.86)$$

Al considerar los resultados de las ecuaciones (2.1.85) y (2.1.86) en la ecuación (2.1.82) se obtiene el resultado

$$u_{np}(t) = \int_0^t (t - \xi) e^{-b(t-\xi)} f_n(\xi) d\xi, \quad t \geq 0. \quad (2.1.87)$$

**Caso 3:**  $D_n < 0$ . Entonces, la solución homogénea de (2.1.73) es de la forma

$$u_{nh}(t) = T_n(0)A_n e^{m_{1n}t} + T_n(0)B_n e^{m_{2n}t}, \quad (2.1.88)$$

en donde,

$$m_{1n} = -b + i\sqrt{k_n - b^2}, \quad m_{2n} = -b - i\sqrt{k_n - b^2}, \quad (2.1.89)$$

$A_n$  y  $B_n$  son constantes determinadas en las ecuaciones (2.1.57). Luego, la solución particular es de la forma

$$u_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{m_{1n}t} + T_{2n}(t)e^{m_{2n}t}, \quad (2.1.90)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  satisfacen las condiciones

$$e^{m_{1n}t}T'_{1n}(t) + e^{m_{2n}t}T'_{2n}(t) = 0, \quad (2.1.91)$$

$$m_{1n}e^{m_{1n}t}T'_{1n}(t) + m_{2n}e^{m_{2n}t}T'_{2n}(t) = f_n(t), \quad (2.1.92)$$

de las cuales se obtiene

$$T_{1n}(t) = \frac{1}{2i\sqrt{k_n - b^2}} \int_0^t f_n(\xi) e^{b\xi - \sqrt{k_n - b^2}i\xi} d\xi, \quad (2.1.93)$$

$$T_{2n}(t) = -\frac{1}{2i\sqrt{k_n - b^2}} \int_0^t f_n(\xi) e^{b\xi + \sqrt{k_n - b^2}i\xi} d\xi. \quad (2.1.94)$$

Sustituyendo los valores encontrados de  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  en la ecuación (2.1.90), se obtiene el resultado

$$u_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-b(t-\xi)}}{\sqrt{k_n - b^2}} \operatorname{sen} \left( (t - \xi) \sqrt{k_n - b^2} \right) d\xi, \quad t \geq 0. \quad (2.1.95)$$

Por lo tanto, de los resultados (2.1.80), (2.1.87), (2.1.95), el principio de superposición y la solución homogénea (3.1.132), se deduce la solución de la ecuación diferencial (2.1.60), tal como se muestra en (2.1.64).

A partir de la solución (2.1.64) y la condición inicial (2.1.62) se deduce el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (2.1.65). De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

### Ecuaciones de onda de orden fraccionario

---

#### 3.1. Introducción

El cálculo fraccionario con las propiedades de no-localidad y memoria, es una herramienta útil para mejorar los modelos clásicos que describen la evolución temporal de muchos procesos físicos y la dinámica de sistemas complejos, como por ejemplo la viscoelasticidad. Las derivadas fraccionarias son operadores con memoria que suelen representar disipación de energía o daños en el medio [6], [9], las cuales presentan la cualidad de recuperar los casos clásicos cuando el orden de diferenciación toma un valor entero.

En este capítulo se formulan problemas de valores iniciales y de frontera específicos que involucran diferentes versiones de la ecuación de onda de orden fraccionario, con respecto a la variable temporal, usando la derivada fraccionaria propuesta por Caputo y Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo (ver sección 1.3.3 del capítulo 1 para definición). La justificación del por qué emplear este tipo de derivada fraccionaria, se fundamenta básicamente en proponer modelos matemáticos para fenómenos de propagación de ondas en medios heterogéneos donde se toman en cuenta factores que los modelos clásicos no consideran, tales como la disipación de energía o daño en el medio o diversos tipos de fricción.

Las ecuaciones de onda que se investigarán en este capítulo son las siguientes:

- 1) Ecuación de onda fraccionaria clásica libre, es decir, sin término de fuente.
- 2) Ecuación de onda fraccionaria amortiguada libre, es decir, que incluye término de fricción clásico.

- 3) Ecuación de onda amortiguada con fuente.
- 4) Ecuación de onda fraccionaria con término de amortiguamiento fraccional y sin fuente y
- 5) Ecuación de onda fraccionaria con término de amortiguamiento fraccional y con fuente.

Es pertinente volver a remarcar que estamos interesados en proponer expresiones suficientemente generales que modelen de forma más realista la inclusión de la fuerza de fricción en los procesos ondulatorios que estamos estudiando en esta tesis. Es por ello que en el Capítulo 4 se propondrá una expresión más general que modele la fuerza de fricción en nuestras ecuaciones de onda, que bajo ciertas condiciones se recuperan los resultados de los problemas analizados en el presente capítulo.

Finalmente se realizarán comparaciones entre los modelos de ecuaciones estudiadas y se describirán sus consecuencias.

Los resultados de este capítulo, hasta donde sabemos son inéditos, usando la derivada de Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo.

### 3.1.1. Ecuación de onda fraccionaria clásica libre

Consideremos la ecuación

$${}^CF_0D_t^{\gamma+1}u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (3.1.1)$$

en donde,  $0 < \gamma \leq 1$  y  $a > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (3.1.4)$$

Con las consideraciones anteriores se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1** *Sea  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$  y  $\varphi'(x) \in L_2[0, L]$ , entonces la solución  $u(x,t) \in C([0, L] \times \mathbb{R}^+) \cap C^2[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  del problema*

de valor inicial y de frontera (3.1.1)-(3.1.4) esta dada por la fórmula

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & \Delta_{1n} > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} (1 - \mu_n t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & \Delta_{1n} = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cos(\nu_n t) - \frac{\mu_n}{\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), & \Delta_{1n} < 0, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

en donde,  $\Delta_{1n} = [k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma$ ,  $\eta_n = \sqrt{\Delta_{1n}}$ ,  $\nu_n = \sqrt{-\Delta_{1n}}$ ,  $\mu_n = \frac{k_n(1-\gamma)}{2}$ ,  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  para  $n \in \mathbb{N}$  y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$A_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.1.6)$$

**Demostración:** Aplicando el método de separación de variables, sea

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.1.7)$$

entonces

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^{\gamma+1} u(x, t) &= X(x) {}^C_0 D_t^{\gamma} T'(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= X''(x)T(t). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (3.1.1) se obtiene

$$X(x) {}^C_0 D_t^{\gamma} T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

así

$$\frac{{}^C_0 D_t^{\gamma} T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

de donde se deducen las siguientes ecuaciones

$${}^C_0 D_t^{\gamma} T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (3.1.8)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (3.1.9)$$

Al considerar la ecuación (3.1.9) y dado que se debe satisfacer la condición de frontera (3.1.2), se deduce que la ecuación (3.1.9) debe satisfacer la condición

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.1.10)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.1.9) sujeta a las condiciones (3.1.10) tiene solución de la forma

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.11)$$

para  $n = 1, 2, \dots$ , en donde  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , es el conjunto de eigenvalores asociados al conjunto de eigenfunciones  $X_n(x)$ , el cual es una base ortonormal y completa para el espacio  $L^2[0, L]$ . Al considerar el  $n$ -ésimo valor  $\lambda_n$  y sustituirlo en la ecuación (3.1.8) se obtiene

$${}^CF D_t^\gamma T_n'(t) + k_n T_n(t) = 0, \quad (3.1.12)$$

en donde,  $k_n := \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$ . Resolveremos esta ecuación diferencial usando el Teorema 1.3.14. Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación anterior y usando que  $T_n(0) = 0$ , en virtud de (3.1.4) y (3.1.7) se obtiene

$$\frac{s^2 T_n(s) - sT_n(0) - T_n'(0)}{(1 - \gamma)s + \gamma} + k_n T_n(s) = 0, \quad (3.1.13)$$

de donde, se deduce que

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{s}{s^2 + k_n(1 - \gamma)s + k_n\gamma} \right]. \quad (3.1.14)$$

Para aplicar el método de la transformada inversa de Laplace en la ecuación (3.1.14), se empleará el método de fracciones parciales, por lo cual es necesario determinar la naturaleza de las raíces del polinomio del denominador de la ecuación (3.1.14)

$$p_{2,\gamma}(s) := s^2 + k_n(1 - \gamma)s + k_n\gamma, \quad (3.1.15)$$

de donde, se obtienen 3 casos al considerar el signo de su discriminante

$$\Delta_{1n} := [k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma. \quad (3.1.16)$$

**Caso 1:**  $\Delta_{1n} > 0$ . Las raíces del polinomio  $p_{2,\gamma}(s)$  son reales distintas y están dadas por

$$m_{1n} = -\mu_n + \eta_n, \quad (3.1.17)$$

$$m_{2n} = -\mu_n - \eta_n, \quad (3.1.18)$$

en donde,

$$\mu_n := \frac{k_n(1-\gamma)}{2}, \quad \eta_n := \frac{1}{2}\sqrt{[k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma}. \quad (3.1.19)$$

Luego al aplicar el método de fracciones parciales a la ecuación (3.1.14) se tiene

$$T_n(s) = \frac{T_n(0)s}{s^2 + k_n(1-\gamma)s + k_n\gamma} = \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} \left[ \frac{m_{2n}}{s - m_{2n}} - \frac{m_{1n}}{s - m_{1n}} \right]. \quad (3.1.20)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{T_n(0)}{m_{1n} - m_{2n}} [m_{2n}e^{m_{2n}t} - m_{1n}e^{m_{1n}t}], \\ &= -\frac{T_n(0)}{2\eta_n} [(-\mu_n - \eta_n)e^{(-\mu_n - \eta_n)t} - (-\mu_n + \eta_n)e^{(-\mu_n + \eta_n)t}], \\ &= T_n(0)\frac{e^{-\mu_n t}}{\eta_n} \left[ -\mu_n \left( \frac{e^{\eta_n t} - e^{-\eta_n t}}{2} \right) + \eta_n \left( \frac{e^{\eta_n t} + e^{-\eta_n t}}{2} \right) \right], \\ &= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.7), (3.1.11), (3.1.21) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.1.22)$$

**Caso 2:**  $\Delta_{1n} = 0$ . Se tiene sólo una raíz repetida para el polinomio  $p_{2,\gamma}(s)$  de la forma  $-\mu_n = -\frac{k_n(1-\gamma)}{2}$ , por lo que la ecuación (3.1.14) se transforma en

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{s}{(s + \mu_n)^2} T_n(0), \\ &= \left( \frac{1}{s + \mu_n} - \frac{\mu_n}{(s + \mu_n)^2} \right) T_n(0). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior se obtiene

$$T_n(t) = e^{-\mu_n t} (1 - \mu_n t). \quad (3.1.24)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.7), (3.1.11), (3.1.24) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} (1 - \mu_n t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.25)$$

**Caso 3:**  $\Delta_{1n} < 0$ . Las raíces del polinomio  $p_{2,\gamma}(s)$  son complejas conjugadas de la forma

$$m_{1n} = -\mu_n + i\nu_n \quad \text{y} \quad m_{2n} = -\mu_n - i\nu_n, \quad (3.1.26)$$

en donde,  $\mu_n$  es como en (3.1.19) y

$$\nu_n := \frac{1}{2} \sqrt{4k_n \gamma - [k_n(1 - \gamma)]^2}. \quad (3.1.27)$$

Al usar la metodología empleada en el Caso 1, se tiene que

$$\begin{aligned} T_n(t) &= -\frac{T_n(0)e^{-\mu_n t}}{i\nu_n} \left( \frac{-\mu_n}{2} (e^{-i\nu_n t} - e^{i\nu_n t}) - \frac{i\nu_n}{2} (e^{i\nu_n t} + e^{-i\nu_n t}) \right), \\ &= \frac{T_n(0)e^{-\mu_n t}}{i\nu_n} (-i\mu_n \operatorname{sen}(\nu_n t) + i\nu_n \operatorname{cos}(\nu_n t)), \\ &= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left( \operatorname{cos}(\nu_n t) - \frac{\mu_n}{\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Así, de las ecuaciones (3.1.7), (3.1.11), (3.1.28) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \operatorname{cos}(\nu_n t) - \frac{\mu_n}{\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.29)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.22), (3.1.25) y (3.1.29) se obtiene la solución para  $u(x, t)$  tal como se muestra en (3.1.5).

Al considerar la condición inicial (3.1.3) en la solución encontrada (3.1.5), se deduce el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (3.1.6). La convergencia de la solución encontrada puede consultarse en el Apéndice. De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Observación 3.1.1** *Al considerar la solución (3.1.5), se muestra el papel que representa la derivada fraccionaria como disipación de energía. Dicha solución presenta similitud con la solución de la ecuación de onda amortiguada clásica (3.1.132), debido a que también presenta un factor de decrecimiento exponencial para cada uno de los posibles valores del discriminante asociado a sus respectivas soluciones, siendo dicho término para el presente caso, de la forma*

$$\mu_n = \frac{k_n(1 - \gamma)}{2},$$

*con lo cual, se puede decir que dicha versión de ecuación de onda fraccionaria puede utilizarse para modelar fenómenos en donde se use la ecuación de onda clásica amortiguada. La ventaja del modelo que usa la ecuación de onda fraccionaria es que tenemos la libertad de elegir el orden de diferenciación que más realístamente modele el fenómeno en cuestión.*

El siguiente resultado nos permite aclarar lo que precisamente hemos venido mencionando como característica importante de las derivadas de orden fraccionario, el hecho de poder recuperar los resultados clásicos, cuando el orden de la derivada fraccionaria tiende a un valor entero.

**Proposición 3.1.1** *Si en la solución (3.1.5),  $\gamma \rightarrow 1$ , entonces la solución encontrada coincide con la solución de la ecuación de onda clásica (2.1.5).*

**Demostración.** Para demostrar la afirmación anterior, consideremos los siguientes límites

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \mu_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{k_n(1 - \gamma)}{2} = 0, \quad (3.1.30)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \eta_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1}{2} \sqrt{[k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma} = \sqrt{-k_n} = \frac{an\pi}{L}i, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.1.31)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \nu_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1}{2} \sqrt{4k_n\gamma - [k_n(1 - \gamma)]^2} = \sqrt{k_n} = \frac{an\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1.32)$$

Al considerar el signo del discriminante  $\Delta_{1n}$  (ver expresión (3.1.16)), se tienen los siguientes casos.

**Caso 1:**  $\Delta_{1n} > 0$ . A partir de la solución (3.1.5) y de las ecuaciones (3.1.30) y (3.1.31) se obtiene que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) \cosh\left(\frac{an\pi}{L}it\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

**Caso 2:**  $\Delta_{1n} = 0$ . A partir de la solución (3.1.5) y de la ecuación (3.1.30) se obtiene que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.34)$$

**Caso 3:**  $\Delta_{1n} < 0$ . A partir de la solución (3.1.5) y de las ecuaciones (3.1.30) y (3.1.32) se obtiene que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) \cos \left( \frac{an\pi}{L} t \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.35)$$

Por lo tanto, de las soluciones (3.1.33), (3.1.34) y (3.1.35) se deduce que, cuando  $\gamma \rightarrow 1$  la solución a la ecuación de onda clásica fraccionaria (3.1.5) coincide con la solución de la ecuación de onda clásica (2.1.5), con lo cual se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

### 3.1.2. Ecuación de onda fraccionaria amortiguada libre

Ahora, consideremos que en la ecuación de onda fraccionaria (3.1.1), se toma en cuenta el término de fricción clásico, entonces la nueva versión presenta la siguiente forma

$${}^C_0 D_t^{\gamma+1} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (3.1.36)$$

en donde,  $0 < \gamma \leq 1$  y  $a, b > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.37)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.1.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (3.1.39)$$

Con dichas consideraciones se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.2** *Sea  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$  y  $\varphi'(x) \in L_2[0, L]$  entonces la solución  $u(x, t) \in C([0, L] \times \mathbb{R}^+) \cap C^2[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  del problema*

de valor inicial y de frontera (3.1.36)-(3.1.39) esta dado por la fórmula

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} t \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} < 0, \end{cases} \quad (3.1.40)$$

en donde,  $\Delta_{2n} = [b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma$ ,  $\eta_n = \frac{\sqrt{\Delta_{2n}}}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $\nu_n = \frac{\sqrt{-\Delta_{2n}}}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $\mu_n = \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  para  $n \in \mathbb{N}$  y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$A_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.1.41)$$

**Demostración:** Al aplicar el método de separación de variables, sea

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.1.42)$$

entonces

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\gamma+1} u(x, t) &= X(x) {}^C D_t^{\gamma} T'(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= X(x) T'(t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= X''(x) T(t). \end{aligned}$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación (3.1.36) se obtiene

$$X(x) {}^C D_t^{\gamma} T'(t) = a^2 X''(x) T(t) - bX(x) T'(t). \quad (3.1.43)$$

De donde se deducen las siguientes ecuaciones

$${}^C D_t^{\gamma} T'(t) + bT'(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.1.44)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (3.1.45)$$

Puesto que la condición de frontera (3.1.37) debe cumplirse, se deduce que la ecuación (3.1.45) debe satisfacer la condición

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.1.46)$$

Así, la solución a la ecuación (3.1.45) sujeta a la condición (3.1.46) tiene la forma

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.47)$$

en donde,  $\lambda_n = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$ , con  $n = 1, 2, \dots$  y  $A_n$  una constante. Al considerar el  $n$ -ésimo eigenvalor  $\lambda_n$  y sustituir este valor en la ecuación (3.1.44), ésta se transforma en

$${}^C D_t^\gamma T_n'(t) + bT_n'(t) + k_n T_n(t) = 0, \quad (3.1.48)$$

en donde,  $k_n := \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Al aplicar el método de la transformada de Laplace a la ecuación (3.1.48) se obtiene

$$\frac{s^2 T_n(s) - sT_n(0)}{(1-\gamma)s + \gamma} + bsT_n(s) - bT_n(0) + k_n T_n(s) = 0, \quad (3.1.49)$$

de donde se deduce que

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{s + \frac{b\gamma}{1+b(1-\gamma)}}{s^2 + \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{1+b(1-\gamma)}s + \frac{k_n\gamma}{1+b(1-\gamma)}} \right), \quad (3.1.50)$$

Para aplicar el método de la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, se hará uso del método de fracciones parciales, por lo cual, es necesario conocer primero la naturaleza de las raíces del denominador de la ecuación (3.1.50)

$$p_{2,\gamma}(s) := s^2 + \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{1+b(1-\gamma)}s + \frac{k_n\gamma}{1+b(1-\gamma)}, \quad (3.1.51)$$

cuyo discriminante puede escribirse como

$$\Delta_{2n} := [b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma. \quad (3.1.52)$$

Por lo tanto, se tienen los siguientes casos.

**Caso 1:**  $\Delta_{2n} > 0$ . Entonces las raíces son reales, diferentes y la ecuación (3.1.50) se puede

escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{s + \frac{b\gamma}{1+b(1-\gamma)}}{(s - m_{1n})(s - m_{2n})} \right), \quad (3.1.53)$$

en donde, ahora

$$m_{1n} = -\mu_n + \eta_n, \quad (3.1.54)$$

$$m_{2n} = -\mu_n - \eta_n, \quad (3.1.55)$$

con

$$\mu_n := \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]}, \quad \eta_n := \frac{\sqrt{[b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma}}{2[1+b(1-\gamma)]}. \quad (3.1.56)$$

Por el método de fracciones parciales se tiene que

$$\frac{s}{(s - m_{1n})(s - m_{2n})} = \frac{1}{m_{2n} - m_{1n}} \left( \frac{m_{2n}}{s - m_{2n}} - \frac{m_{1n}}{s - m_{1n}} \right) \quad (3.1.57)$$

y

$$\frac{1}{(s - m_{1n})(s - m_{2n})} = \frac{1}{m_{2n} - m_{1n}} \left( \frac{1}{s - m_{2n}} - \frac{1}{s - m_{1n}} \right). \quad (3.1.58)$$

Al aplicar lo anterior la ecuación (3.1.53) se obtiene

$$T_n(s) = \frac{T_n(0)}{m_{2n} - m_{1n}} \left[ \frac{m_{2n}}{s - m_{2n}} - \frac{m_{1n}}{s - m_{1n}} + \frac{b\gamma}{1+b(1-\gamma)} \left( \frac{1}{s - m_{2n}} - \frac{1}{s - m_{1n}} \right) \right],$$

el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{T_n(0) [b\gamma - k_n(1-\gamma)]}{4[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \left( \frac{1}{s + (\mu_n - \eta_n)} - \frac{1}{s + (\mu_n + \eta_n)} \right) \\ &+ \frac{T_n(0)}{2} \left( \frac{1}{s + \mu_n + \eta_n} + \frac{1}{s + \mu_n - \eta_n} \right). \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior se obtiene

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \left( \frac{e^{\eta_n t} - e^{-\eta_n t}}{2} \right) + \frac{e^{\eta_n t} + e^{-\eta_n t}}{2} \right], \quad (3.1.60)$$

$$= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left( \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right). \quad (3.1.61)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.42), (3.1.47), (3.1.61) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) + \cosh(\eta_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.62)$$

**Caso 2:**  $\Delta_{2n} = 0$ . En este caso se cuenta sólo con una raíz repetida de la forma

$$m_n = -\frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} = -\mu_n, \quad (3.1.63)$$

por lo cual, la ecuación (3.1.50) se puede escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \frac{s + \frac{b\gamma}{1+b(1-\gamma)}}{(s + \mu_n)^2},$$

que mediante el empleo del método de fracciones parciales se puede expresar como

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{1}{s + \mu_n} + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} \frac{1}{(s + \mu_n)^2} \right). \quad (3.1.64)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace (1.2.16) a la ecuación anterior se obtiene

$$T_n(t) = T_n(0) e^{-\mu_n t} \left( 1 + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} t \right). \quad (3.1.65)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.42), (3.1.47), (3.1.65) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se obtiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} t \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.66)$$

**Caso 3:**  $\Delta_{2n} < 0$ . En este caso se tienen dos raíces complejas conjugadas y la ecuación

(3.1.50) se puede escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \left( \frac{s + \frac{b\gamma}{1+b(1-\gamma)}}{(s - m_{1n})(s - m_{2n})} \right), \quad (3.1.67)$$

en donde,

$$m_{1n} = -\mu_n + i\nu_n, \quad (3.1.68)$$

$$m_{2n} = -\mu_n - i\nu_n. \quad (3.1.69)$$

con  $\mu_n$  como en (3.1.56) y

$$\nu_n = \frac{\sqrt{4k_n\gamma - [b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2}}{2[1+b(1-\gamma)]}. \quad (3.1.70)$$

Luego, al aplicar la metodología del Caso 1 anterior, teniendo en cuenta los resultados (3.1.57)-(3.1.59) se tiene que

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]i\nu_n} \left( \frac{e^{i\nu_n t} - e^{-i\nu_n t}}{2} \right) + \frac{e^{i\nu_n t} + e^{-i\nu_n t}}{2} \right], \quad (3.1.71)$$

$$= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left( \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right). \quad (3.1.72)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.42), (3.1.47), (3.1.72) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene que la solución es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.73)$$

Por consiguiente, de las ecuaciones (3.1.42), (3.1.47) (3.1.62), (3.1.66) y (3.1.73) se tiene la solución  $u(x, t)$  tal como se muestra en (3.1.40). Por otro lado, al considerar la condición inicial (3.1.38) se obtiene el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (3.1.41). La convergencia de la solución obtenida puede consultarse en el Apéndice. De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Observación 3.1.2** *Al considerar la solución (3.1.40), se tiene que ésta presenta la misma estructura que la solución de la ecuación de onda amortiguada clásica (3.1.132), en*

donde, ambas soluciones presentan un factor de decrecimiento del tipo exponencial para cada uno de los valores posibles del discriminante asociado a sus respectivas soluciones. La diferencia radica en que dicho factor de decrecimiento exponencial se diferencia en sus respectivas dependencias. Para el caso clásico sólo depende del coeficiente de fricción  $2b$ , mientras que, para el caso fraccionario no sólo depende del coeficiente de fricción  $b$ , si no también del orden de diferenciación fraccionaria  $\gamma$  y del valor de  $k_n$ , siendo este valor dado por la expresión

$$\mu_n = \frac{b\gamma + k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]}, \quad (3.1.74)$$

con lo cual se puede decir que dicha versión de ecuación de onda fraccionaria con amortiguamiento generaliza a la ecuación de onda amortiguada clásica.

Análogamente al resultado obtenido en la Proposición 3.1.1, el resultado del Teorema 3.1.2 nos permite mostrar una de las propiedades que poseen las derivadas fraccionarias, la cual consiste en recuperar las soluciones clásicas cuando el orden de diferenciación tiende a un valor entero, tal como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.2** *Si consideramos como coeficiente de fricción a  $2b$  en la ecuación (3.1.36) y si  $\gamma \rightarrow 1$ , entonces la solución (3.1.40) coincide con la solución de la ecuación de onda amortiguada clásica (3.1.132).*

**Demostración.** Al considerar como coeficiente de fricción a  $2b$ , se tiene que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \mu_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{2b\gamma + k_n(1 - \gamma)}{2[1 + 2b(1 - \gamma)]} = b, \quad (3.1.75)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \eta_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\sqrt{[2b\gamma - k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma}}{2[1 + 2b(1 - \gamma)]} = \frac{\sqrt{4b^2 - 4k_n}}{2} = \sqrt{b^2 - k_n}, \quad (3.1.76)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \nu_n = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4k_n\gamma - [2b\gamma - k_n(1 - \gamma)]^2}}{2[1 + 2b(1 - \gamma)]} = \frac{\sqrt{4k_n - 4b^2}}{2} = \sqrt{k_n - b^2}, \quad (3.1.77)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{2b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + 2b(1 - \gamma)]\eta_n} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - k_n}}, \quad (3.1.78)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{2b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + 2b(1 - \gamma)]\nu_n} = \frac{b}{\sqrt{k_n - b^2}}. \quad (3.1.79)$$

Al considerar el signo del discriminante  $\Delta_{2n}$  (ver expresión (3.1.52)), se tienen los siguiente casos.

**Caso 1:**  $\Delta_{2n} > 0$ . A partir de la solución (3.1.40) y de las ecuaciones (3.1.75), (3.1.76) y (3.1.78) se obtiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-bt} \left[ \cosh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) + \frac{b}{\sqrt{b^2 - k_n}} \sinh \left( t\sqrt{b^2 - k_n} \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.80)$$

la cual corresponde a la solución clásica encontrada en la ecuación (3.1.132) cuando  $D_n > 0$ .

**Caso 2:**  $\Delta_{2n} = 0$ . A partir de la solución (3.1.40) y de la ecuación (3.1.75) se obtiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-bt} (1 + bt) \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.81)$$

la cual corresponde a la solución clásica encontrada en la ecuación (3.1.132) cuando  $D_n = 0$ .

**Caso 3:**  $\Delta_{2n} < 0$ . De las ecuaciones (3.1.75), (3.1.77) y (3.1.79) se obtiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt} \left[ \cos \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) + \frac{b}{\sqrt{k_n - b^2}} \sin \left( t\sqrt{k_n - b^2} \right) \right] \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.82)$$

la cual se corresponde con la solución clásica encontrada en la ecuación (3.1.132) cuando  $D_n < 0$ .

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.80), (3.1.81) y (3.1.82) se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Corolario 3.1.3** *La ecuación de onda fraccionaria en el tiempo*

$${}^C F_0 D_t^{\gamma+1} u(x, t) = 9 \frac{\partial}{\partial x^2} u(x, t) - 4 \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0, \quad (3.1.83)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.84)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \text{sen}^2(x), \quad x \in [0, \pi], \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (3.1.85)$$

tiene por solución

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\left(\frac{4\gamma+9(1-\gamma)n^2}{10-8\gamma}\right)t} \left[ \cosh\left(\frac{\sqrt{[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2-36\gamma n^2}}{10-8\gamma} t\right) \right. \\ \left. + \frac{4\gamma-9(1-\gamma)n^2}{\sqrt{[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2-36\gamma n^2}} \text{senh}\left(\frac{\sqrt{[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2-36\gamma n^2}}{10-8\gamma} t\right) \right] \text{sen}(nx), & \Delta_{2n} > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\left(\frac{4\gamma+9(1-\gamma)n^2}{10-8\gamma}\right)t} \left[ 1 + \frac{4\gamma-9(1-\gamma)n^2}{10-8\gamma} t \right] \text{sen}(nx), & \Delta_{2n} = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\left(\frac{4\gamma+9(1-\gamma)n^2}{10-8\gamma}\right)t} \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{36\gamma n^2-[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2}}{10-8\gamma} t\right) \right. \\ \left. + \frac{4\gamma-9(1-\gamma)n^2}{\sqrt{36\gamma n^2-[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2}} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{36\gamma n^2-[4\gamma-9(1-\gamma)n^2]^2}}{10-8\gamma} t\right) \right] \text{sen}(nx), & \Delta_{2n} < 0, \end{cases} \quad (3.1.86)$$

en donde, el coeficiente de Fourier es de la forma

$$D_2 T_2(0) = 0, \quad (3.1.87)$$

$$D_n T_n(0) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^3 - 4n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \neq 2. \quad (3.1.88)$$

**Demostración.** La ecuación (3.1.83) es un caso particular de la ecuación (3.1.36) con  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $L = \pi$ , así

$$k_n = 9n^2, \quad \mu_n = \frac{4\gamma + 9(1-\gamma)n^2}{10-8\gamma}, \quad \eta_n = \frac{\sqrt{[4\gamma - 9(1-\gamma)n^2]^2 - 36\gamma n^2}}{10-8\gamma}, \quad (3.1.89)$$

$$\nu_n = \frac{\sqrt{36\gamma n^2 - [4\gamma - 9(1-\gamma)n^2]^2}}{10-8\gamma}, \quad (3.1.90)$$

y

$$\frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} = \frac{4\gamma - 9(1 - \gamma)n^2}{\sqrt{[4\gamma - 9(1 - \gamma)n^2]^2 - 36\gamma n^2}}, \quad (3.1.91)$$

$$\frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]\nu_n} = \frac{4\gamma - 9(1 - \gamma)n^2}{\sqrt{36\gamma n^2 - [4\gamma - 9(1 - \gamma)n^2]^2}}. \quad (3.1.92)$$

Por otro lado, de la ecuación (3.1.41) se tiene que el coeficiente de Fourier es de la forma

$$\begin{aligned} A_n T_n(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2(x) \text{sen}(nx) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n^3 - 4n} \right) \forall n \in \mathbb{N} : n \neq 2, \end{aligned} \quad (3.1.93)$$

si  $n = 2$ , al integrar por un cambio de variable se tiene que

$$\begin{aligned} A_n T_n(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2(x) \text{sen}(2x) dx, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.94)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.89)-(3.1.94) se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

### 3.1.3. Ecuación de onda fraccionaria amortiguada con término de fuente

Consideremos ahora que en la versión de la ecuación de onda fraccionaria anterior (3.1.36) se le agrega un término de fuente, dependiente del espacio y el tiempo, entonces la ecuación presenta la siguiente forma

$${}^C D_t^{\gamma+1} u(x, t) + b \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (3.1.95)$$

en donde  $0 < \gamma \leq 1$ , con  $a, b > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.96)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.1.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (3.1.98)$$

Con las consideraciones anteriores se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.4** *Sea  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$ ,  $\varphi'(x) \in L_2[0, L]$ ,  $f \in C([0, L] \times \overline{\mathbb{R}^+})$ ,  $f(0, t) = f(L, t) = 0$  para  $t \geq 0$ ,  $f(x, 0) = 0$  para  $x \in [0, L]$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \in C[0, L]$  y  $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ , entonces la solución  $u(x, t) \in C([0, L] \times \mathbb{R}^+) \cap C^2[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  del problema de valor inicial y de frontera (3.1.95)-(3.1.98) está dada por la fórmula*

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} \frac{\sinh(\eta_n t)}{\eta_n} \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\eta_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} \sinh(\eta_n(t-\xi)) d\xi \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} t \right] \right. \\ \quad \left. + \int_0^t (t-\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} f_n(\xi) d\xi \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]} \frac{\sin(\nu_n t)}{\nu_n} \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} \sin(\nu_n(t-\xi)) d\xi \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{2n} < 0, \end{cases} \quad (3.1.99)$$

en donde,  $\Delta_{2n} = [b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma$ ,  $\eta_n = \frac{\sqrt{\Delta_{2n}}}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $\nu_n = \frac{\sqrt{-\Delta_{2n}}}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $\mu_n = \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]}$ ,  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  para  $n \in \mathbb{N}$  y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.1.100)$$

**Demostración.** Consideremos que la solución  $u(x, t)$  y el término de fuente  $f(x, t)$  tienen desarrollo en serie de Fourier como sigue

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.1.101)$$

la cual, claramente satisface la condiciones de frontera (3.1.96) y

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.102)$$

de donde, se deduce que

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.1.103)$$

De la ecuación (3.1.101) también se deduce que

$${}^C D_t^{\gamma+1} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^{\gamma} T'_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.1.105)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.1.106)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.1.102), (3.1.104), (3.1.105) y (3.1.106) en la ecuación (3.1.95) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ {}^C D_t^{\gamma} T'_n(t) + bT'_n(t) + k_n T_n(t) - f_n(t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = 0, \quad (3.1.107)$$

en donde,  $k_n = \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Dado que la ecuación (3.1.107) debe satisfacerse para cada valor  $n$ , entonces se debe cumplir que

$${}^C D_t^{\gamma} T'_n(t) + bT'_n(t) + k_n T_n(t) = f_n(t), \quad (3.1.108)$$

cuya solución es de la forma

$$T_n(t) = T_{nh}(t) + T_{np}(t), \quad (3.1.109)$$

en donde,  $T_{nh}(t)$  es la solución homogénea ya calculada en la sección anterior y  $T_{np}$  la correspondiente solución particular. Por tanto, para determinar la solución particular  $T_{np}(t)$  se considerará el signo del discriminante  $\Delta_{2n}$ , el cual está dado por la ecuación (3.1.52).

**Caso 1:**  $\Delta_{2n} > 0$ . A partir de la ecuación (3.1.60), se deduce que la solución homogénea

también se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_{nh}(t) &= T_n(0) \left( \frac{1}{2} + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{4[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \right) e^{(-\mu_n+\eta_n)t} \\ &+ T_n(0) \left( \frac{1}{2} - \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{4[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \right) e^{(-\mu_n-\eta_n)t}, \end{aligned} \quad (3.1.110)$$

en donde,  $\mu_n$  y  $\eta_n$  son tal como se muestran en las ecuación (3.1.56). Por tanto, la solución particular es de la forma

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{(-\mu_n+\eta_n)t} + T_{2n}(t)e^{(-\mu_n-\eta_n)t}, \quad (3.1.111)$$

en donde,  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  son funciones que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{(-\mu_n+\eta_n)t}T'_{1n}(t) + e^{(-\mu_n-\eta_n)t}T'_{2n}(t) &= 0, \\ (-\mu_n + \eta_n)e^{(-\mu_n+\eta_n)t}T'_{1n}(t) + (-\mu_n - \eta_n)e^{(-\mu_n-\eta_n)t}T'_{2n}(t) &= f_n(t), \end{aligned}$$

en virtud del método de variación de parámetros. De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$T_{1n}(t) = \frac{1}{2\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{(\mu_n-\eta_n)\xi}d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.1.112)$$

$$T_{2n}(t) = -\frac{1}{2\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{(\mu_n+\eta_n)\xi}d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.1.113)$$

Por tanto, al sustituir los resultados encontrados en las ecuaciones (3.1.112) y (3.1.113) en la ecuación (3.1.111) se tiene

$$\begin{aligned} T_{np}(t) &= \frac{1}{2\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{(\mu_n-\eta_n)\xi}d\xi \cdot e^{(-\mu_n+\eta_n)t} - \frac{1}{2\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{(\mu_n+\eta_n)\xi}d\xi \cdot e^{(-\mu_n-\eta_n)t}, \\ &= \frac{1}{\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \sinh(\eta_n(t-\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.114)$$

Luego, de la ecuación (3.1.114) y de solución homogénea (3.1.61) cuando  $\Delta_{2n} > 0$  se tiene

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \\ &+ \frac{1}{\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \sinh(\eta_n(t-\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.115)$$

**Caso 2:**  $\Delta_{2n} = 0$ . A partir de la ecuación (3.1.65), se tiene que la solución homogénea puede escribirse como

$$T_{nh}(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} + T_n(0) \left( \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]} \right) te^{-\mu_n t}, \quad (3.1.116)$$

en donde,  $\mu_n$  es tal como se define en la ecuación (3.1.56) por tanto, la solución particular puede escribirse como

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{-\mu_n t} + T_{2n}(t)te^{-\mu_n t}, \quad (3.1.117)$$

con  $T_1(t)$  y  $T_2(t)$  funciones que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{-\mu_n t} T'_{1n}(t) + te^{-\mu_n t} T'_{2n}(t) &= 0, \\ -\mu_n e^{-\mu_n t} T'_{1n}(t) + (-\mu_n te^{-\mu_n t} + e^{-\mu_n t}) T'_{2n}(t) &= f_n(t). \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$T_{1n}(t) = - \int_0^t f_n(\xi) \xi e^{\mu_n \xi} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.1.118)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t f_n(\xi) e^{\mu_n \xi} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.1.119)$$

Al usar los resultados de las ecuaciones de (3.1.118) y (3.1.119) en la ecuación (3.1.117) se obtiene que la solución particular tiene la forma

$$\begin{aligned} T_{np}(t) &= - \int_0^t f_n(\xi) \xi e^{\mu_n \xi} d\xi \cdot e^{-\mu_n t} + \int_0^t f_n(\xi) e^{\mu_n \xi} d\xi \cdot te^{-\mu_n t}, \\ &= \int_0^t f_n(\xi) (t - \xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.120)$$

Por tanto, de la ecuación (3.1.120) y de la solución homogénea (3.1.65) se tiene que la solución se escribe como

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} \left( 1 + \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]} t \right) + \int_0^t f_n(\xi) (t - \xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} d\xi. \quad (3.1.121)$$

**Caso 3:**  $\Delta_{2n} < 0$ . A partir de la ecuación (3.1.71), se tiene que la solución homogénea también se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_{nh}(t) &= T_n(0) \left( \frac{1}{2} + \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{4[1+b(1-\gamma)]\nu_n i} \right) e^{-\mu_n t + i\nu_n t} \\ &+ T_n(0) \left( \frac{1}{2} + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{4[1+b(1-\gamma)]\nu_n i} \right) e^{-\mu_n t - i\nu_n t}, \end{aligned} \quad (3.1.122)$$

por tanto, la solución particular se puede expresar como

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{-\mu_n t + i\nu_n t} + T_{2n}(t)e^{-\mu_n t - i\nu_n t}, \quad (3.1.123)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$  y  $T_{2n}(t)$  satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} e^{-\mu_n t + i\nu_n t} T'_{1n}(t) + e^{-\mu_n t - i\nu_n t} T'_{2n}(t) &= 0, \\ (-\mu_n + i\nu_n) e^{-\mu_n t + i\nu_n t} T'_{1n}(t) + (-\mu_n - i\nu_n) e^{-\mu_n t - i\nu_n t} T'_{2n}(t) &= f_n(t), \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$T_{1n}(t) = \frac{1}{2i\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{(\mu_n - i\nu_n)\xi} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.1.124)$$

$$T_{2n}(t) = -\frac{1}{2i\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{(\mu_n + i\nu_n)\xi} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.1.125)$$

Al usar los resultados de las ecuaciones (3.1.124) y (3.1.125) en la ecuación (3.1.123) se obtiene que la solución particular tiene la forma

$$\begin{aligned} T_{np}(t) &= \frac{1}{2i\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{(\mu_n - i\nu_n)\xi} d\xi \cdot e^{(-\mu_n + i\nu_n)t} - \frac{1}{2i\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{(\mu_n + i\nu_n)\xi} d\xi \cdot e^{(-\mu_n - i\nu_n)t}, \\ &= \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} \operatorname{sen}(\nu_n(t-\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.126)$$

Así, al emplear la ecuación (3.1.126) y la solución homogénea (3.1.72) cuando  $\Delta_{2n} < 0$  se tiene la solución

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0) e^{-\mu_n t} \left( \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\nu_n} \operatorname{sen}(\nu_n t) \right) \\ &+ \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} \operatorname{sen}(\nu_n(t-\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.127)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.1.115), (3.1.121) y (3.1.127) aplicadas a la ecuación

(3.1.101) se obtiene la solución  $u(x, t)$  tal como se muestra en (3.1.99). A partir de la condición inicial (3.1.97) se deduce el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (3.1.100). De esta manera se obtiene el resultado. *Q.E.D.*

**Observación 3.1.3** En cada una de las soluciones particulares, dentro de la integral, se encuentra presente el término

$$f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \quad (3.1.128)$$

salvo un factor constante.

Por otro lado, si en la ecuación (3.1.95) se toma  $a = 2b$  como coeficiente de fricción y si se consideran los límites encontrados en las ecuaciones (3.1.75)-(3.1.79), esto es, cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , en la solución encontrada (3.1.99), entonces se recupera la solución de la ecuación de onda clásica amortiguada con término de fuente (2.1.64).

**Corolario 3.1.5** Sea la siguiente ecuación de onda fraccionaria amortiguada con término de fuente

$${}_0^{CF}D_t^{\gamma+1}u(x, t) + 2\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - 4\frac{\partial}{\partial x^2}u(x, t) = x \operatorname{sen}(t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3.1.129)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.130)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = 1 - \cos(2x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (3.1.131)$$

Entonces la solución está dado por



**Demostración.** La ecuación (3.1.129), es un caso particular de la ecuación (3.1.95), en donde  $a = 2$ ,  $b = 2$  y  $L = \pi$ . Con dichos valores, se tiene que

$$k_n = 4n^2, \quad \mu_n = \frac{\gamma + 2(1 - \gamma)n^2}{3 - 2\gamma}, \quad \eta_n = \frac{\sqrt{[\gamma - 2(1 - \gamma)n^2]^2 - 4\gamma n^2}}{3 - 2\gamma}, \quad (3.1.133)$$

$$\nu_n = \frac{\sqrt{4\gamma n^2 - [\gamma - 2(1 - \gamma)n^2]^2}}{3 - 2\gamma}, \quad \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]} = \frac{\gamma - 2(1 - \gamma)}{3 - 2\gamma}, \quad (3.1.134)$$

$$\frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} = \frac{\gamma - 2(1 - \gamma)n^2}{\sqrt{[\gamma - 2(1 - \gamma)n^2]^2 - 4\gamma n^2}} \quad (3.1.135)$$

$$\text{y} \quad \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]\nu_n} = \frac{\gamma - 2(1 - \gamma)n^2}{\sqrt{4\gamma n^2 - [\gamma - 2(1 - \gamma)n^2]^2}}. \quad (3.1.136)$$

De la ecuación (3.1.100) se tiene que

$$T_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{8[(-1)^n - 1]}{\pi(n^3 - 4n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \neq 2. \quad (3.1.137)$$

En caso de ser  $n = 2$  se tiene que

$$T_2(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) \operatorname{sen}(2x) dx = 0. \quad (3.1.138)$$

y la ecuación (3.1.103), se tiene que

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t x \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(nx) dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(t). \quad (3.1.139)$$

Por lo tanto, al emplear las ecuaciones (3.1.133)-(3.1.139) en la solución general (3.1.99), se obtiene la solución al problema de valor inicial y de frontera (3.1.129)-(3.1.131) tal como se muestra en (3.1.132). *Q.E.D.*

### 3.2. Ecuación de onda fraccionaria con término de amortiguamiento fraccional y sin fuente

Consideremos ahora que en la versión de la ecuación de onda fraccionaria (3.1.1) se toma en consideración el término de fricción representado por una derivada de orden fraccional del tipo Caputo-Fabrizio, entonces la ecuación presenta la siguiente forma

$${}^{CF}D_t^{\gamma+1}u(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - b {}^{CF}D_t^\beta u(x,t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (3.2.1)$$

en donde  $0 < \gamma, \beta \leq 1$ , y  $a, b > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.2.2)$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0. \quad (3.2.4)$$

Con las consideraciones anteriores se tiene el siguiente teorema. bbb

**Teorema 3.2.1** *Dado el problema de valor inicial y de frontera (3.2.1)-(3.2.4) con  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$  y  $\varphi'(x) \in L_2[0, L]$ , entonces la solución  $u(x,t) \in L_1[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  esta dada por*

$u(x,t)$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sin(\theta_n t))] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{3n} > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[1 + W_n t + \frac{Y_n t^2}{2}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{3n} = p_n = q_n = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t})\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{3n} = 0, \quad p_n q_n \neq 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[-\xi_n Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - \psi_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t})\right. \\ \left. + e^{2\sigma_n t} + Y_n (e^{-(\sigma_n + \theta_n)t} - e^{2\sigma_n t})\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & \Delta_{3n} < 0, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

en donde,  $\Delta_{3n} = \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_n}{3}\right)^3$ ,  $p_n = \frac{B_n}{1-\beta} - \frac{A_n^2}{3(1-\beta)^2}$ ,  $q_n = \frac{1}{27} \left(\frac{2A_n^3}{(1-\beta)^3} - \frac{9A_n B_n}{(1-\beta)^2} + \frac{27C_n}{1-\beta}\right)$ ,

con  $A_n = \beta + b(1 - \gamma) + k_n(1 - \gamma)(1 - \beta)$ ,  $B_n = \gamma b + k_n\gamma(1 - \beta) + k_n\beta(1 - \gamma)$ ,  $C_n = k_n\beta\gamma$  y  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  y  $\mu_n = \frac{A_n}{3(1-\beta)}$ . Además,  $\sigma_n$ ,  $\theta_n$ ,  $V_n$ ,  $W_n$ ,  $Y_n$ ,  $\psi_n$  y  $\xi_n$  son constantes que van a depender del valor de  $\Delta_{3n}$ . El coeficiente de Fourier esta dado por

$$D_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.2.6)$$

**Demostración:** Mediante el método de separación de variables, sea

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.2.7)$$

entonces se deducen las siguientes ecuaciones

$${}^{CF}D_t^{\gamma+1}u(x, t) = X(x){}^{CF}D_t^\gamma T'(t), \quad (3.2.8)$$

$${}^{CF}D_t^\beta u(x, t) = X(x){}^{CF}D_t^\beta T(t), \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = X''(x)T(t), \quad (3.2.10)$$

que al sustituir en la ecuación (3.2.1), ésta se convierte en

$$X(x){}^{CF}D_t^\gamma T'(t) = a^2 X''(x)T(t) - bX(x){}^{CF}D_t^\beta T(t),$$

de donde se tienen las siguientes ecuaciones

$${}^{CF}D_t^\gamma T'(t) + b{}^{CF}D_t^\beta T(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.2.11)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (3.2.12)$$

A partir de la ecuación (3.2.12) y de las condiciones de frontera (3.2.2), se tiene que la ecuación (3.2.12) debe satisfacer la condición

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.2.13)$$

Por tanto, la solución a la ecuación diferencial (3.2.12) con condiciones (3.2.13) tiene solución de la forma

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \text{ para } n = 1, 2, \dots, \quad (3.2.14)$$

en donde  $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  son los eigenvalores asociados a las eigenfunciones  $X_n(x)$ , los cuales forman una base ortogonal completa para  $L^2([0, L])$ . Al considerar el valor  $n$ -ésimo de  $\lambda_n$  y sustituirlo en la ecuación (3.2.11) se obtiene

$${}^{CF}D_t^\gamma T_n'(t) + b {}^{CF}D_t^\beta T_n(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad (3.2.15)$$

en la cual, definiendo  $k_n := \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$ , la ecuación anterior se transforma en

$${}^{CF}D_t^\gamma T_n'(t) + b {}^{CF}D_t^\beta T_n(t) + k_n T_n(t) = 0. \quad (3.2.16)$$

Ahora resolveremos esta ecuación diferencial ordinaria de orden fraccionario usando el Teorema 1.3.14. Al aplicar el método de la transformada de Laplace a la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{s^2 T_n(s) - s T_n(0) - T_n'(0)}{(1-\gamma)s + \gamma} + b \frac{s T_n(s) - T_n(0)}{(1-\beta)s + \beta} + k_n T_n(s) = 0, \quad (3.2.17)$$

que al despejar  $T_n(s)$  y usando que  $T_n'(0) = 0$ , en virtud de (3.2.4) y (3.2.7) nos conduce a

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{s^2 + \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta}s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{s^3 + \left(\frac{\beta+b(1-\gamma)+k_n(1-\gamma)(1-\beta)}{1-\beta}\right)s^2 + \left(\frac{\gamma b+k_n[\gamma(1-\beta)+\beta(1-\gamma)]}{1-\beta}\right)s + \frac{k_n\beta\gamma}{1-\beta}} \right]. \quad (3.2.18)$$

Antes de emplear el método de la transformada inversa de Laplace en la ecuación (3.2.18), se hará uso del método de fracciones parciales, con lo cual, se hace necesario conocer primero la naturaleza de las raíces del denominador de la ecuación anterior, es decir, debemos analizar las raíces de  $p_{3,\gamma,\beta}(s)$ , en donde

$$p_{3,\gamma,\beta}(s) := s^3 + \frac{\beta + b(1-\gamma) + k_n(1-\gamma)(1-\beta)}{1-\beta} s^2 + \frac{\gamma b + k_n[\gamma(1-\beta) + \beta(1-\gamma)]}{1-\beta} s + \frac{k_n\beta\gamma}{1-\beta} \quad (3.2.19)$$

Para hacer dicho análisis, se hará uso de las fórmulas de Cardano para la ecuación cúbica [27] y el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} A_n &= \beta + b(1 - \gamma) + k_n(1 - \gamma)(1 - \beta), \\ B_n &= \gamma b + k_n\gamma(1 - \beta) + k_n\beta(1 - \gamma), \\ C_n &= k_n\beta\gamma. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

De esta forma, la ecuación (3.2.19) se transforma en

$$s^3 + \frac{A_n}{1 - \beta}s^2 + \frac{B_n}{1 - \beta}s + \frac{C_n}{1 - \beta} = 0, \tag{3.2.21}$$

la cual es de forma

$$s^3 + a_ns^2 + b_ns + c_n = 0, \tag{3.2.22}$$

en donde

$$a_n = \frac{A_n}{1 - \beta}, \quad b_n = \frac{B_n}{1 - \beta}, \quad c_n = \frac{C_n}{1 - \beta}. \tag{3.2.23}$$

Los cambios de variable dados en la relación (3.2.20), son sólo para facilitar el cálculo de las cantidades asociadas a la ecuación cúbica (3.2.19), mientras que los de las ecuaciones (3.2.23) son para definir dichas cantidades, de acuerdo a las fórmulas de Cardano, esto es

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{3b_n - a_n^2}{3}, \\ q_n &= \frac{2a_n^3 - 9a_nb_n + 27c_n}{27}, \end{aligned}$$

y a su vez, al discriminante asociado a la ecuación cúbica, el cual está definido por

$$\Delta_{3n} := \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_n}{3}\right)^3,$$

que para nuestro caso se tiene

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{B_n}{1-\beta} - \frac{A_n^2}{3(1-\beta)^2}, \\
q_n &= \frac{1}{27} \left( \frac{2A_n^3}{(1-\beta)^3} - \frac{9A_n B_n}{(1-\beta)^2} + \frac{27C_n}{1-\beta} \right), \\
\Delta_{3n} &= -\frac{A_n^2 B_n^2}{108(1-\beta)^4} + \frac{B_n^3}{27(1-\beta)^3} + \frac{A_n^3 C_n}{27(1-\beta)^4} - \frac{A_n B_n C_n}{6(1-\beta)^3} + \frac{C_n^2}{4(1-\beta)^2}.
\end{aligned}$$

Debido a que los coeficientes de la ecuación (3.2.19) son reales, los casos a analizar son las siguientes

$$\text{Caso 1: } \Delta_{3n} > 0;$$

$$\text{Caso 2: } \Delta_{3n} = p_n = q_n = 0;$$

$$\text{Caso 3: } \Delta_{3n} = 0, p_n q_n \neq 0;$$

$$\text{Caso 4: } \Delta_{3n} < 0.$$

### Caso 1: $\Delta_{3n} > 0$ .

Entonces la ecuación (3.2.21) tiene una raíz real dada por la siguiente igualdad

$$\eta_{1n} := u_n + v_n - \frac{A_n}{3(1-\beta)}, \quad (3.2.24)$$

en donde,

$$u_n = \sqrt[3]{-\frac{q_n}{2} + \sqrt{\Delta_{3n}}} \quad \text{y} \quad v_n = \sqrt[3]{-\frac{q_n}{2} - \sqrt{\Delta_{3n}}},$$

son raíces cúbicas reales, mientras que las otras dos raíces son complejas conjugadas dadas por

$$\eta_{2n} := -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n - v_n)i, \quad (3.2.25)$$

$$\eta_{3n} := -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n - v_n)i. \quad (3.2.26)$$

Al usar los resultados de las ecuaciones (3.2.24), (3.2.25) y (3.2.26) en la ecuación (3.2.18), se obtiene

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{s^2 + \left( \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta} \right) s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})(s - \eta_{2n})(s - \eta_{3n})} \right]. \quad (3.2.27)$$

Al aplicar el método de fracciones parciales al cociente de la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{s^2 + \left( \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta} \right) s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})(s - \eta_{2n})(s - \eta_{3n})} = \frac{V_n}{s - \eta_{1n}} + \frac{W_n}{s - \eta_{2n}} + \frac{Y_n}{s - \eta_{3n}}, \quad (3.2.28)$$

de donde se deduce que

$$Y_n = \frac{b\gamma + [\beta + b(1 - \gamma)] \eta_{3n} + (1 - \beta) \eta_{3n}^2}{(1 - \beta)(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})}, \quad (3.2.29)$$

$$W_n = \frac{b\gamma + [\beta + b(1 - \gamma)] \eta_{2n} + (1 - \beta) \eta_{2n}^2}{(1 - \beta)(\eta_{2n} - \eta_{1n})(\eta_{2n} - \eta_{3n})}, \quad (3.2.30)$$

$$V_n = 1 - (W_n + Y_n). \quad (3.2.31)$$

Al usar los valores  $V_n$ ,  $W_n$  y  $Y_n$  encontrados en las ecuaciones (3.2.29)-(3.2.31), la ecuación (3.2.27) se transforma en

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{1 - (W_n + Y_n)}{s - \eta_{1n}} + \frac{W_n}{s - \eta_{2n}} + \frac{Y_n}{s - \eta_{3n}} \right]. \quad (3.2.32)$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace usando las fórmulas (1.2.16), la ecuación anterior se transforma en

$$T_n(t) = T_n(0) \left[ (1 - (W_n + Y_n)) e^{\eta_{1n}t} + W_n e^{\eta_{2n}t} + Y_n e^{\eta_{3n}t} \right]. \quad (3.2.33)$$

Para reescribir la solución encontrada en la ecuación (3.2.33), consideremos el siguiente cambio de variable

$$\eta_{1n} = -\mu_n + 2\sigma_n, \quad (3.2.34)$$

$$\eta_{2n} = -\mu_n - \sigma_n + \theta_n i, \quad (3.2.35)$$

$$\eta_{3n} = -\mu_n - \sigma_n - \theta_n i, \quad (3.2.36)$$

en donde

$$\mu_n = \frac{A_n}{3(1-\beta)}, \quad (3.2.37)$$

$$\sigma_n = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad (3.2.38)$$

$$\theta_n = \frac{\sqrt{3}}{2}(u_n - v_n); \quad (3.2.39)$$

de las cuales, se deduce

$$\begin{aligned} W_n + Y_n &= \frac{[\beta + b(1-\gamma)]\eta_{1n} + (1-\beta)[\eta_{1n}(\eta_{2n} + \eta_{3n}) - \eta_{2n}\eta_{3n}] + b\gamma}{(1-\beta)(\eta_{2n} - \eta_{1n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})}, \\ &= \frac{[-\mu_n + 2\sigma_n][\beta + b(1-\gamma)] + (1-\beta)[-4\mu_n\sigma_n - 5\sigma_n^2 + \mu_n^2 - \theta_n^2] + b\gamma}{(1-\beta)(9\sigma_n^2 + \theta_n^2)}, \end{aligned}$$

la cual es una cantidad real, que por simplicidad se definirá como

$$W_n + Y_n =: -\psi_n, \quad (3.2.40)$$

y

$$\begin{aligned} W_n - Y_n &= \frac{b\gamma + [\beta + b(1-\gamma)]\eta_{2n} + (1-\beta)\eta_{2n}^2}{(1-\beta)(\eta_{2n} - \eta_{1n})(\eta_{2n} - \eta_{3n})} - \frac{b\gamma + [\beta + b(1-\gamma)]\eta_{3n} + (1-\beta)\eta_{3n}^2}{(1-\beta)(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})}, \\ &= \frac{i}{(1-\beta)(9\sigma_n^2 + \theta_n^2)} \left\{ \frac{3\sigma_n}{\theta_n} [b\gamma - (\mu_n + \sigma_n)[\beta + b(1-\gamma)] \right. \\ &\quad \left. + (1-\beta)[(\mu_n + \sigma_n)^2 - \theta_n^2] - \theta_n[\beta + b(1-\gamma) - 2(1-\beta)(\mu_n + \sigma_n)] \right\}, \end{aligned}$$

la cual es una cantidad imaginaria pura, que por simplicidad se definirá como

$$W_n - Y_n =: i\xi_n. \quad (3.2.41)$$

Por lo tanto, al emplear las ecuaciones (3.2.34)-(3.2.36) y posteriormente las ecuaciones (3.2.40) y (3.2.41) junto con (3.2.31), en la ecuación (3.2.33), esta se transforma en

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0) [(1 - (W_n + Y_n))e^{(-\mu_n + 2\sigma_n)t} + W_n e^{(-\mu_n - \sigma_n)t} \cdot e^{i\theta_n t} + Y_n e^{(-\mu_n - \sigma_n)t} \cdot e^{-i\theta_n t}], \\ &= T_n(0) [(1 - (W_n + Y_n))e^{(-\mu_n + 2\sigma_n)t} + (W_n + Y_n)e^{(-\mu_n - \sigma_n)t} \cos(\theta_n t)] \\ &\quad + T_n(0) [i(W_n - Y_n)e^{(-\mu_n - \sigma_n)t} \sen(\theta_n t)], \\ &= T_n(0)e^{-\mu_n t} [V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sen(\theta_n t))]. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Luego, empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]), la solución a la ecuación (3.2.1) cuando  $\Delta_{3n} > 0$  es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sin(\theta_n t))] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.2.43)$$

## Caso 2: $\Delta_{3n} = \mathbf{p}_n = \mathbf{q}_n = \mathbf{0}$ .

En esta situación la ecuación (3.2.21) posee una raíz triple de la forma

$$\eta_n = -\frac{A_n}{3(1-\beta)} = -\mu_n, \quad (3.2.44)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.2.18) se puede escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{s^2 + \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta}s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s + \mu_n)^3} \right]. \quad (3.2.45)$$

Al usar el método de fracciones parciales, se tiene que

$$\frac{s^2 + \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta}s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s + \mu_n)^3} = \frac{V_n}{s + \mu_n} + \frac{W_n}{(s + \mu_n)^2} + \frac{Y_n}{(s + \mu_n)^3}. \quad (3.2.46)$$

De la ecuación (3.2.46) se deduce que

$$V_n = 1, \quad (3.2.47)$$

$$W_n = \frac{\beta + b(1-\gamma) - 2(1-\beta)\mu_n}{1-\beta}, \quad (3.2.48)$$

$$Y_n = \frac{b\gamma - \mu_n[\beta + b(1-\gamma)] + (1-\beta)\mu_n^2}{1-\beta}. \quad (3.2.49)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.2.45) se puede escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{1}{s + \mu_n} + \frac{W_n}{(s + \mu_n)^2} + \frac{Y_n}{(s + \mu_n)^3} \right]. \quad (3.2.50)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace, usando las fórmulas (1.2.16), la ecuación anterior se transforma en

$$T_n(t) = T_n(0) \left[ e^{-\mu_n t} + W_n t e^{-\mu_n t} + \frac{Y_n t^2}{2} e^{-\mu_n t} \right]. \quad (3.2.51)$$

De esta manera, empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]), la solución a la ecuación (3.2.1) se puede escribir en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + W_n t + \frac{Y_n t^2}{2} \right] \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.2.52)$$

**Caso 3:**  $\Delta_{3n} = 0$ ,  $p_n q_n \neq 0$ .

Para esta condición, las raíces son reales. Una raíz doble dada por

$$\eta_{1n} = -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{3}{2} \left( \frac{p_n}{q_n} \right), \quad (3.2.53)$$

y una raíz simple de la forma

$$\eta_{2n} = -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{4}{9} \left( \frac{p_n^2}{q_n} \right). \quad (3.2.54)$$

De esta manera, la ecuación (3.2.18) se transforma en

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{s^2 + \left( \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta} \right) s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})^2 (s - \eta_{2n})} \right]. \quad (3.2.55)$$

Al aplicar el método de fracciones parciales al cociente de la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{s^2 + \left( \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta} \right) s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})^2 (s - \eta_{2n})} = \frac{V_n}{s - \eta_{1n}} + \frac{W_n}{(s - \eta_{1n})^2} + \frac{Y_n}{s - \eta_{2n}}, \quad (3.2.56)$$

en donde,

$$W_n = \frac{b\gamma + [\beta + b(1-\gamma)] \eta_{1n} + (1-\beta) \eta_{1n}^2}{(1-\beta)(\eta_{1n} - \eta_{2n})}, \quad (3.2.57)$$

$$Y_n = \frac{b\gamma + [\beta + b(1-\gamma)] \eta_{2n} + (1-\beta) \eta_{2n}^2}{(1-\beta)(\eta_{1n} - \eta_{2n})^2}, \quad (3.2.58)$$

$$V_n = 1 - Y_n. \quad (3.2.59)$$

Con los valores encontrados de  $V_n$ ,  $W_n$  y  $Y_n$ , la ecuación (3.2.18) se transforma en

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{V_n}{s - \eta_{1n}} + \frac{W_n}{(s - \eta_{1n})^2} + \frac{Y_n}{s - \eta_{2n}} \right]. \quad (3.2.60)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace usando las fórmulas (1.2.16), la ecuación anterior se transforma en

$$T_n(t) = T_n(0) [V_n e^{\eta_{1n}t} + W_n t e^{\eta_{1n}t} + Y_n e^{\eta_{2n}t}], \quad (3.2.61)$$

que de manera equivalente se puede escribir como

$$T_n(t) = T_n(0) [e^{\eta_{1n}t} (1 - Y_n + W_n t) + Y_n e^{\eta_{2n}t}]. \quad (3.2.62)$$

Introduciendo el cambio de variable en las raíces

$$\eta_{1n} = -\mu_n - \sigma_n, \quad (3.2.63)$$

$$\eta_{2n} = -\mu_n - \theta_n, \quad (3.2.64)$$

en donde,

$$\mu_n = \frac{A_n}{3(1-\beta)}, \quad (3.2.65)$$

$$\sigma_n = \frac{3}{2} \left( \frac{p_n}{q_n} \right), \quad (3.2.66)$$

$$\theta_n = \frac{4}{9} \left( \frac{p_n^2}{q_n} \right), \quad (3.2.67)$$

y aplicarlas en la ecuación (3.2.62), esta toma la forma

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0) [e^{(-\mu_n - \sigma_n)t} (1 - Y_n + W_n t) + Y_n e^{(-\mu_n - \theta_n)t}], \\ &= T_n(0) e^{-\mu_n t} [e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t})]. \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

**Observación 3.2.1** *Es de notar que no puede darse el caso de  $\sigma_n = \theta_n$ , ya que esto implica que sólo se tiene una raíz de orden 3, con lo cual  $\sigma_n = \theta_n = 0$ , y por tanto la raíz triple es de la forma  $\eta_n = -\mu_n$ , cuyo caso ya se analizó.*

Por lo tanto, en virtud del principio de superposición generalizado (véase [33]), la solución correspondiente para este caso es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t})] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.2.69)$$

**Caso 4:  $\Delta_{3n} < 0$ .**

Para esta condición, se tiene que la ecuación cúbica posee tres raíces reales simples, las cuales vienen dadas por la siguiente relación

$$s = -\frac{A_n}{3(1-\beta)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p_n} \cos\left(\frac{\rho_n + 2m\pi}{3}\right), \quad (3.2.70)$$

en donde  $m = 0, 1, 2$ , y el ángulo  $\rho_n \in (0, \pi)$  está determinado por la relación

$$\cos(\rho_n) = \frac{-q_n/2}{\sqrt{-(p_n/3)^3}}. \quad (3.2.71)$$

De la relación anterior se tiene que las raíces de la ecuación (3.2.21) son de la forma

$$\begin{aligned} \eta_{1n} &= -\frac{A_n}{3(1-\beta)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p_n} \cos\left(\frac{\rho_n}{3}\right), \\ \eta_{2n} &= -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{\sqrt{-p_n}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\rho_n}{3}\right) - \sqrt{-p_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\rho_n}{3}\right), \\ \eta_{3n} &= -\frac{A_n}{3(1-\beta)} - \frac{\sqrt{-p_n}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\rho_n}{3}\right) + \sqrt{-p_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\rho_n}{3}\right), \end{aligned}$$

con las cuales, la ecuación (3.2.18) se puede escribir como

$$T_n(t) = T_n(0) \left[ \frac{s^2 + \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta}s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})(s - \eta_{2n})(s - \eta_{3n})} \right]. \quad (3.2.72)$$

Aplicando el método de fracciones parciales al cociente de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{s^2 + \frac{\beta+b(1-\gamma)}{1-\beta}s + \frac{b\gamma}{1-\beta}}{(s - \eta_{1n})(s - \eta_{2n})(s - \eta_{3n})} = \frac{V_n}{s - \eta_{1n}} + \frac{W_n}{s - \eta_{2n}} + \frac{Y_n}{s - \eta_{3n}},$$

en donde

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{(1-\beta)\eta_{3n}^2 + [\beta + b(1-\gamma)]\eta_{3n} + b\gamma}{(1-\beta)(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})}, \\ W_n &= \psi_n + \xi_n Y_n, \\ V_n &= 1 - \psi_n - \xi_n Y_n - Y_n, \end{aligned}$$

y

$$\psi_n = \frac{\beta + b(1 - \gamma) + (1 - \beta)(\eta_{2n} + \eta_{3n})}{(1 - \beta)(\eta_{2n} - \eta_{1n})}, \quad (3.2.73)$$

$$\xi_n = \frac{\eta_{1n} - \eta_{3n}}{\eta_{2n} - \eta_{1n}}. \quad (3.2.74)$$

Con estos valores encontrados de  $V_n$ ,  $W_n$  y  $Y_n$ , la ecuación (3.2.72) se puede escribir como

$$T_n(s) = T_n(0) \left[ \frac{1 - \psi_n - \xi_n Y_n - Y_n}{s - \eta_{1n}} + \frac{\psi_n + \xi_n Y_n}{s - \eta_{2n}} + \frac{Y_n}{s - \eta_{3n}} \right]. \quad (3.2.75)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, usando las fórmulas (1.2.16), la ecuación anterior se transforma en

$$T_n(t) = T_n(0) \left[ (1 - \psi_n - \xi_n Y_n - Y_n) e^{\eta_{1n} t} + (\psi_n + \xi_n Y_n) e^{\eta_{2n} t} + Y_n e^{\eta_{3n} t} \right]. \quad (3.2.76)$$

Al definir

$$\mu_n = \frac{A_n}{3(1 - \beta)}, \quad (3.2.77)$$

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{-p_n}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\rho_n}{3}\right), \quad (3.2.78)$$

$$\theta_n = \sqrt{-p_n} \operatorname{sen}\left(\frac{\rho_n}{3}\right), \quad (3.2.79)$$

las raíces se pueden escribir como

$$\eta_{1n} = -\mu_n + 2\sigma_n, \quad (3.2.80)$$

$$\eta_{2n} = -\mu_n - \sigma_n - \theta_n, \quad (3.2.81)$$

$$\eta_{3n} = -\mu_n - \sigma_n + \theta_n, \quad (3.2.82)$$

con lo cual, la ecuación (3.2.76) se puede escribir como

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0) \left[ (1 - \psi_n - \xi_n Y_n - Y_n) e^{(-\mu_n + 2\sigma_n)t} + (\psi_n + \xi_n Y_n) e^{(-\mu_n - \sigma_n - \theta_n)t} \right. \\ &\quad \left. + Y_n e^{(-\mu_n - \sigma_n + \theta_n)t} \right], \\ &= T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\sigma_n t} - \psi_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - \xi_n Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) \right. \\ &\quad \left. - Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{(-\sigma_n + \theta_n)t}) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.83)$$

De esta manera, por el principio de superposición generalizado (véase [33]), la solución a la ecuación (3.2.1) es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\sigma_n t} - \psi_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - \xi_n Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.2.84)$$

**Observación 3.2.2** Si en la solución anterior  $\theta_n = \sigma_n$ , entonces las raíces siguen siendo reales y distintas y dicha solución se puede escribir como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\theta_n t} - 2\psi_n \operatorname{senh}(2\theta_n t) - 2\xi_n Y_n \operatorname{senh}(2\theta_n t) + Y_n (1 - e^{2\theta_n t}) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\theta_n t} - 2W_n \operatorname{senh}(2\theta_n t) - 2Y_n e^{\theta_n t} \operatorname{senh}(\theta_n t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.2.43), (3.2.52), (3.2.69) y (3.2.84) se obtiene la solución  $u(x, t)$  tal como se muestra en (3.2.5). Al emplear la condición inicial (3.2.3) en la solución encontrada (3.2.5), se deduce el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (3.2.6). De esta manera se obtiene el resultado. *Q.E.D.*

### 3.2.1. Análisis comparativo de las soluciones.

Dada la complejidad que resulta analizar el hecho de que cuando  $\gamma \rightarrow 1$  y  $\beta \rightarrow 1$  se recupera la solución a la ecuación de onda amortiguada (3.1.132), o bien, la solución a la ecuación de onda fraccionaria con fricción clásica (3.1.5) si sólo  $\beta \rightarrow 1$ . En este apartado se comparará la solución encontrada (3.2.5) junto con la solución (3.1.5) debido a la similitud que presentan ambas soluciones y en especial debido a que a partir de dicha solución se obtiene la solución clásica cuando  $\gamma \rightarrow 1$ . Para dicho análisis, se considerará la naturaleza de las raíces en cada caso, tal como se muestra en la siguiente tabla.

**Observación 3.2.3** En ambas soluciones (3.1.40) y (3.2.5), se presentan una estructura similar debido a que están escritas como el producto de dos factores, destacándose principalmente el factor de decrecimiento exponencial presente en ambas soluciones:

Para el caso de la ecuación de onda con amortiguamiento fraccional o ecuación de onda bifraccional, este factor de decrecimiento exponencial depende del coeficiente de fricción  $b$ ,

Ecuación de onda fraccionaria con amortiguamiento fraccionario.	Ecuación de onda con fraccionaria con amortiguamiento clásico.
$\Delta_{3n} > 0$ : una raíz real y dos complejas conjugadas.	$\Delta_{2n} < 0$ : dos raíces complejas conjugadas.
$\Delta_{3n} = p_n = q_n = 0$ : se tiene una raíz real de orden 3.	$\Delta_{2n} = 0$ : se tiene una raíz real de orden 2.
$\Delta_{3n} = 0$ y $p_n \cdot q_n \neq 0$ : una raíz real simple y una raíz real doble.	$\Delta_{2n} = 0$ : se tiene una raíz real de orden 2.
$\Delta_{3n} < 0$ : se tienen 3 raíces reales distintas.	$\Delta_{2n} > 0$ : se tienen 2 raíces reales distintas.

Tabla 3.1: Naturaleza de las raíces de acuerdo al signo de los discriminantes  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ .

ambos órdenes de diferenciación fraccionaria  $\gamma$  y  $\beta$  y del parámetro  $k_n$ , siendo la expresión

$$\mu_n = \frac{\beta + b(1 - \gamma) + k_n(1 - \gamma)(1 - \beta)}{3(1 - \beta)},$$

mientras que, para el caso correspondiente con amortiguamiento clásico, el factor de decrecimiento exponencial depende del coeficiente de fricción  $b$ , el orden de diferenciación fraccionaria  $\gamma$  y el parámetro  $k_n$ , cuya expresión es

$$\mu_n = \frac{b\gamma + k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]}.$$

Debido a la presencia de este factor de decrecimiento exponencial en ambas soluciones, el análisis de las soluciones (3.1.40) y (3.2.5) se centrará sólo en el segundo factor de ambas soluciones de acuerdo a la Tabla 3.1.

**Caso 1.** De acuerdo a la Tabla 3.1 cuando  $\Delta_{3n} > 0$  tenemos por (3.2.5) que la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sin(\theta_n t))] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

para la versión bifraccionaria y para la versión con amortiguamiento clásico, de acuerdo a (3.1.40), cuando  $\Delta_{2n} < 0$  que la solución esta dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cos(\nu_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]} \nu_n \sin(\nu_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La diferencia en ambas soluciones se presenta en la cantidad de términos en su segundo factor; para el caso bifraccionario, este presenta la diferencia entre un término exponencial y un término que involucra un factor exponencial por una combinación de las funciones

trigonométricas seno y coseno, siendo este segundo término, coincidente con la versión con amortiguamiento clásico, ya que también presenta una combinación de las funciones trigonométricas seno y coseno salvo el factor exponencial.

**Caso 2.** La expresión (3.2.5) cuando  $\Delta_{3n} = q_n = p_n = 0$ , implican que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + W_n t + \frac{Y_n t^2}{2} \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

para la solución bifraccionaria, mientras que para la solución con fricción clásica, de acuerdo a (3.1.40), cuando  $\Delta_{2n} = 0$ , se tiene que la solución esta dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [1 + \xi_n t] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

en donde,

$$\xi_n = \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]}.$$

Es muy notable la similaridad de ambas soluciones, pero, debido a que en el caso bifraccionario se tiene asociada una ecuación cúbica para su solución, y por tanto, una raíz más que en el caso con amortiguamiento clásico o fricción clásica, las soluciones se diferencian en que para el caso bifraccionario se tiene una ecuación de segundo grado en la variable temporal, mientras que, para el caso con fricción clásica se tiene un término lineal.

**Caso 3.** La expresión (3.2.5) cuando  $\Delta_{3n} = 0$  y  $p_n \cdot q_n \neq 0$  implican que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t})] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

para el caso bifraccionario, mientras que para el caso con fricción clásica, en virtud de (3.1.40), cuando  $\Delta_{2n} = 0$ , se tiene que la solución es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} [1 + \xi_n t] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Para este caso, el segundo factor de ambas soluciones se distingue por el número de términos que contienen, siendo el caso bifraccionario el que presenta mayor número: una diferencia de exponenciales y un factor exponencial por un término lineal, siendo este

término coincidente con el segundo factor de la versión con fricción clásica salvo el factor exponencial tal como en el Caso 1.

**Caso 4.** De acuerdo a (3.2.5), cuando  $\Delta_{3n} < 0$  tenemos que la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\sigma_n t} + \xi_n Y_n \left( e^{-(\sigma_n + \theta_n)t} - e^{2\sigma_n t} \right) + \psi_n \left( e^{-(\sigma_n + \theta_n)t} - e^{2\sigma_n t} \right) + Y_n \left( e^{-(\sigma_n + \theta_n)t} - e^{2\sigma_n t} \right) \right] \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

para el caso bifraccionario, mientras que para el caso con amortiguamiento clásico, de acuerdo a (3.1.40), cuando  $\Delta_{2n} > 0$ , se tiene que la solución es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Debido a que el caso bifraccionario requirió de tres raíces distintas para su solución, el segundo factor de esta solución resulta ser una combinación de funciones exponenciales no siendo posible recuperar la solución en términos de suma de las funciones hiperbólicas seno y coseno, a no ser que  $\theta_n = \sigma_n$ , en tal caso se tiene la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\theta_n t} - 2W_n \sinh(2\theta_n) - 2Y_n e^{\theta_n t} \sinh(\theta_n t) \right] \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

la cual permite expresar la solución en términos de funciones exponenciales y del seno hiperbólico, más no de manera explícita al coseno hiperbólico como en la versión con fricción clásica.

### 3.3. Ecuación de onda fraccionaria con término de fricción fraccional y fuente

Consideremos ahora que en la ecuación de onda (3.2.1) se toma en cuenta un fuerza externa que depende del tiempo y el espacio, entonces la ecuación presenta la siguiente forma

$${}^C D_t^{\gamma+1} u(x, t) + b {}^C D_t^{\beta} u(x, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = f(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (3.3.1)$$

en donde,  $0 < \gamma$ ,  $\beta \leq 1$  y  $a$ ,  $b > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3.2)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (3.3.4)$$

Con las consideraciones anteriores se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1** Dado el problema de valor inicial y de frontera (3.3.1)-(3.3.4) con  $\varphi \in C^3[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0$ ,  $\varphi'(x) \in L_2[0, L]$ ,  $f \in C([0, L] \times \mathbb{R}^+)$ ,  $f(0, t) = f(L, t) = 0$  para  $t \geq 0$ ,  $f(x, 0) = 0$  para  $x \in [0, L]$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \in C[0, L]$  y  $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  entonces la solución  $u(x, t) \in L_1[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  esta dada por

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sin(\theta_n t)) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \right] \left( \cos(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sin(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \\
 & \quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ 1 + W_n t + \frac{Y_n t^2}{2} \right] + \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) (t-\xi)^2 e^{-\mu_n(t-\xi)} d\xi \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \right. \\
 & \quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t}) \right] \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \left[ (t-\xi) e^{-\sigma_n(t-\xi)} + \frac{e^{-\theta_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \right] d\xi \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \right. \\
 & \quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\sigma_n t} - \psi_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - \xi_n Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) \right] \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \right] \left( \cosh(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \operatorname{senh}(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi \right\} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \right. \\
 & \quad \left. \Delta_{3n} > 0, \right. \\
 & \quad \left. \Delta_{3n} = p_n = q_n = 0, \right. \\
 & \quad \left. \Delta_{3n} = 0, p_n q_n \neq 0, \right. \\
 & \quad \left. \Delta_{3n} < 0. \right. \\
 & \left. \right\} \quad (3.3.5)
 \end{aligned}$$

en donde,  $\Delta_{3n} = \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_n}{3}\right)^3$ ,  $p_n = \frac{B_n}{1-\beta} - \frac{A_n^2}{3(1-\beta)^2}$ ,  $q_n = \frac{1}{27} \left( \frac{2A_n^3}{(1-\beta)^3} - \frac{9A_n B_n}{(1-\beta)^2} + \frac{27C_n}{1-\beta} \right)$ , con  $A_n = \beta + b(1-\gamma) + k_n(1-\gamma)(1-\beta)$ ,  $B_n = \gamma b + k_n \gamma(1-\beta) + k_n \beta(1-\gamma)$ ,  $C_n = k_n \beta \gamma$  y  $k_n = \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2$  y  $\mu_n = \frac{A_n}{3(1-\beta)}$ . Además,  $\sigma_n$ ,  $\theta_n$ ,  $W_n$ ,  $V_n$ ,  $Y_n$ ,  $\psi_n$  y  $\xi_n$  son constantes que dependerán del valor de  $\Delta_{3n}$ . El coeficiente de Fourier esta dado por

$$T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.3.6)$$

**Demostración.** La solución de la ecuación (3.3.1) se puede encontrar usando la expansión de Fourier en términos de las eigenfunciones  $X_n(x)$ .

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.3.7)$$

Esta suma converge absoluta y uniformemente en el intervalo  $[0, L]$  a la función  $u(x, t)$  siempre y cuando se suponga que  $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \in C[0, L]$ , además  $u(x, t)$  satisface las mismas condiciones de frontera que las eigenfunciones  $X_n(x)$ .

Supongamos también que la fuente tiene expansión de Fourier en términos de las eigenfunciones, es decir,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.3.8)$$

de donde se deduce

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.3.9)$$

A partir de la ecuación (3.3.7) se deduce que

$${}^C D_t^{\gamma+1} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^{\gamma} T_n'(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.3.10)$$

$${}^C D_t^{\beta} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^{\beta} T_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.3.12)$$

Aplicando los resultados de las ecuaciones (3.3.10), (3.3.11) y (3.3.12) en la ecuación (3.3.1) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ {}^C D_t^{\gamma} T_n'(t) + {}^C D_t^{\beta} T_n(t) + k_n T_n(t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right),$$

en donde,  $k_n = \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Al considerar el  $n$ -ésimo término de la ecuación diferencial anterior y debido a que se debe verificar dicha igualdad, se tiene

$${}^C D_t^{\gamma} T_n'(t) + b {}^C D_t^{\beta} T_n(t) + k_n T_n(t) = f_n(t), \quad (3.3.13)$$

cuya solución proponemos que sea de la forma

$$T_n(t) = T_{nh}(t) + T_{np}(t), \quad (3.3.14)$$

en donde,  $T_{nh}(t)$  es la solución homogénea y  $T_{np}(t)$  la solución particular asociadas a la ecuación diferencial (3.3.13). Debido a que la solución  $T_{nh}(t)$  es la solución de la ecuación (3.2.16), para determinar la solución particular  $T_{np}(t)$  se considerará los diferentes casos de la solución homogénea.

### Caso 1: $\Delta_{3n} > 0$ .

Al emplear la igualdad (3.2.33) se obtiene la solución

$$T_{nh}(t) = T_n(0)V_n e^{\eta_{1n}t} + T_n(0)W_n e^{\eta_{2n}t} + T_n(0)Y_n e^{\eta_{3n}t}, \quad (3.3.15)$$

en donde, las constantes  $V_n$ ,  $W_n$ ,  $Y_n$  y las raíces  $\eta_{1n}$ ,  $\eta_{2n}$  y  $\eta_{3n}$ , están dadas por las expresiones (3.2.29), (3.2.30), (3.2.31), (3.2.34), (3.2.35) y (3.2.36) respectivamente. Por tanto, la solución particular se puede escribir como

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{\eta_{1n}t} + T_{2n}(t)e^{\eta_{2n}t} + T_{3n}(t)e^{\eta_{3n}t}, \quad (3.3.16)$$

en donde,  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$  y  $T_{3n}(t)$  son funciones a determinar. Mediante el empleo del método de variación de parámetros, dichas funciones deben satisfacer

$$\begin{aligned} e^{\eta_{1n}t}T'_{1n}(t) + e^{\eta_{2n}t}T'_{2n}(t) + e^{\eta_{3n}t}T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n}e^{\eta_{1n}t}T'_{1n}(t) + \eta_{2n}e^{\eta_{2n}t}T'_{2n}(t) + \eta_{3n}e^{\eta_{3n}t}T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n}^2e^{\eta_{1n}t}T'_{1n}(t) + \eta_{2n}^2e^{\eta_{2n}t}T'_{2n}(t) + \eta_{3n}^2e^{\eta_{3n}t}T'_{3n}(t) &= f_n(t). \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones diferenciales anterior se deduce que

$$T_{1n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{1n}\xi}}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.17)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{2n}\xi}}{(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{2n} - \eta_{1n})} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.18)$$

$$T_{3n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{3n}\xi}}{(\eta_{3n} - \eta_{1n})(\eta_{3n} - \eta_{2n})} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.3.19)$$

Al emplear las ecuaciones (3.3.17)-(3.3.19) en la ecuación (3.3.16) se obtiene la solución particular de la forma

$$\begin{aligned} T_{np}(t) &= \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{1n}(t-\xi)}}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})} d\xi + \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{2n}(t-\xi)}}{(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{2n} - \eta_{1n})} d\xi \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{3n}(t-\xi)}}{(\eta_{3n} - \eta_{1n})(\eta_{3n} - \eta_{2n})} d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Al emplear el cambio de variable para las raíces  $\eta_{1n}$ ,  $\eta_{2n}$  y  $\eta_{3n}$  tal como se muestran en las ecuaciones (3.2.34)-(3.2.36), con  $\mu_n$ ,  $\sigma_n$  y  $\theta_n$  tal como se definen en las ecuaciones (3.2.37)-(3.2.39) respectivamente, se tiene que la primera integral de la ecuación (3.3.20) se puede escribir como

$$\int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(\eta_{1n})(t-\xi)}}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})(\eta_{1n} - \eta_{3n})} d\xi = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(2\sigma_n - \mu_n)(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} d\xi, \quad (3.3.21)$$

mientras que, la suma de la segunda integral con la tercera de la ecuación (3.3.20) se escribe como

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n - \sigma_n)(t-\xi)}}{2i\theta_n} \left[ \frac{e^{i\theta_n(t-\xi)}}{-3\sigma_n + i\theta_n} + \frac{e^{-i\theta_n(t-\xi)}}{3\sigma_n + i\theta_n} \right] d\xi \\ &= - \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n - \sigma_n)(t-\xi)}}{2i\theta_n(9\sigma_n^2 + \theta_n^2)} \left[ 3\sigma_n (e^{i\theta_n(t-\xi)} - e^{-i\theta_n(t-\xi)}) + i\theta_n (e^{i\theta_n(t-\xi)} + e^{-i\theta_n(t-\xi)}) \right] d\xi, \\ &= - \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n - \sigma_n)(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} \left[ \cos(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sin(\theta_n(t-\xi)) \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Así, de las ecuaciones (3.3.21) y (3.3.22), se tiene que la solución particular  $T_{np}(t)$  dada en la ecuación (3.3.20) se transforma en

$$\int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cos(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sin(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi. \quad (3.3.23)$$

Por lo tanto, al considerar la solución homogénea dada en la ecuación (3.2.42) y la solución particular (3.3.23), se tiene que para el caso  $\Delta_{3n} > 0$ , la solución  $T_n(t)$  es de la forma

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ V_n e^{2\sigma_n t} - e^{-\sigma_n t} (\psi_n \cos(\theta_n t) + \xi_n \sin(\theta_n t)) \right] \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cos(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sin(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

en donde,  $\psi_n$  y  $\xi_n$  son tal como se definen en las ecuaciones (3.2.40) y (3.2.41) respectivamente.

**Caso 2:  $\Delta_{3n} = \mathbf{p}_n = \mathbf{q}_n = \mathbf{0}$ .**

Para este caso, al emplear el resultado de la ecuación (3.2.51) se tiene que la solución homogénea es de la forma

$$T_{nh}(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} + T_n(0)W_n t e^{-\mu_n t} + T_n(0)\frac{Y_n t^2}{2}e^{-\mu_n t}, \quad (3.3.25)$$

en donde,  $W_n$ ,  $Y_n$  y la raíz  $\mu_n$  son como se definen en las ecuaciones (3.2.48), (3.2.49) y (3.2.44) respectivamente. Por lo tanto, se propone que la solución particular es de la forma

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{-\mu_n t} + T_{2n}(t)t e^{-\mu_n t} + T_{3n}(t)t^2 e^{-\mu_n t}, \quad (3.3.26)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$  y  $T_{3n}(t)$  son funciones a determinar, las cuales en virtud del método de variación de parámetros deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{-\mu_n t} T'_{1n}(t) + t e^{-\mu_n t} T'_{2n}(t) + t^2 e^{-\mu_n t} T'_{3n}(t) &= 0, \\ -\mu_n T'_{1n}(t) + (1 - \mu_n t) T'_{2n}(t) + (2t - \mu_n t^2) T'_{3n}(t) &= 0, \\ \mu_n^2 T'_{1n}(t) + (\mu_n^2 t - 2\mu_n) T'_{2n}(t) + (\mu_n^2 t^2 - 4\mu_n t + 2) T'_{3n}(t) &= e^{\mu_n t} f_n(t), \end{aligned}$$

de donde, se deduce que

$$T_{1n}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) \xi^2 e^{\mu_n \xi} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.27)$$

$$T_{2n}(t) = - \int_0^t f_n(\xi) \xi e^{\mu_n \xi} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.28)$$

$$T_{3n}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) e^{\mu_n \xi} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.3.29)$$

Así, al aplicar las ecuaciones (3.3.27)-(3.3.29) en la ecuación (3.3.26), se tiene que la solución particular  $T_{np}(t)$  se escribe como

$$T_{np}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) (t - \xi)^2 e^{-\mu_n(t-\xi)} d\xi. \quad (3.3.30)$$

Por lo tanto, cuando  $\Delta_{3n} = p_n = q_n = 0$ , la solución a la ecuación (3.3.13) es de la forma

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ 1 + W_n t + \frac{Y_n t^2}{2} \right] + \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) (t - \xi)^2 e^{-\mu_n(t-\xi)} d\xi. \quad (3.3.31)$$

### Caso 3: $\Delta_{3n} = 0$ , $p_n q_n \neq 0$ .

Para este caso, al emplear el resultado de la ecuación (3.2.62) se tiene que la solución homogénea es

$$T_{nh}(t) = T_n(0)(1 - Y_n)e^{\eta_{1n}t} + T_n(0)W_n t e^{\eta_{1n}t} + T_n(0)Y_n e^{\eta_{2n}t}, \quad (3.3.32)$$

donde las cantidades  $W_n$ ,  $Y_n$  y las raíces  $\eta_{1n}$  y  $\eta_{2n}$  son tal como se definen en las ecuaciones (3.2.57), (3.2.58), (3.2.53) y (3.2.54) respectivamente. Por lo tanto, la solución particular es de la forma

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{\eta_{1n}t} + T_{2n}(t)t e^{\eta_{1n}t} + T_{3n}(t)e^{\eta_{2n}t}, \quad (3.3.33)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$  y  $T_{3n}(t)$  son funciones a determinar, las cuales en virtud del método de variación de parámetros satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{\eta_{1n}t} T'_{1n}(t) + t e^{\eta_{1n}t} T'_{2n}(t) + e^{\eta_{2n}t} T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n} T'_{1n}(t) + (1 + \eta_{1n}t) T'_{2n}(t) + \eta_{2n} e^{(\eta_{2n} - \eta_{1n})t} T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n}^2 e^{\eta_{1n}t} T'_{1n}(t) + (\eta_{1n}^2 t + 2\eta_{1n}) e^{\eta_{1n}t} T'_{2n}(t) + \eta_{2n}^2 e^{\eta_{2n}t} T'_{3n}(t) &= f_n(t) \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$T_{1n}(t) = - \int_0^t \frac{\xi f_n(\xi) e^{-\eta_{1n}\xi}}{\eta_{1n} - \eta_{2n}} d\xi - \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\eta_{1n}\xi}}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})^2} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.34)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\eta_{1n}\xi}}{\eta_{1n} - \eta_{2n}} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.35)$$

$$T_{3n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\eta_{2n}\xi}}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})^2} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.3.36)$$

Al emplear los resultados (3.3.34)-(3.3.36) en la ecuación (3.3.33), se obtiene la solución particular

$$T_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi) (t - \xi) e^{\eta_{1n}(t-\xi)}}{\eta_{1n} - \eta_{2n}} d\xi + \int_0^t \frac{f_n(\xi) (e^{\eta_{2n}(t-\xi)} - e^{\eta_{1n}(t-\xi)})}{(\eta_{1n} - \eta_{2n})^2} d\xi. \quad (3.3.37)$$

Al emplear el cambio de variable para las raíces  $\eta_{1n}$  y  $\eta_{2n}$  tal como se muestran en las ecuaciones (3.2.63) y (3.2.64), la solución anterior se puede escribir como

$$T_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \left[ (t - \xi)e^{-\sigma_n(t-\xi)} + \frac{e^{-\theta_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \right] d\xi. \quad (3.3.38)$$

Por lo tanto, para el caso  $\Delta_{3n} = 0$ ,  $p_n q_n \neq 0$ , se tiene que la solución a la ecuación (3.3.13) es de la forma

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0)e^{-\mu_n t} [e^{-\sigma_n t} (1 + W_n t) + Y_n (e^{-\theta_n t} - e^{-\sigma_n t})] \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \left[ (t - \xi)e^{-\sigma_n(t-\xi)} + \frac{e^{-\theta_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

#### Caso 4: $\Delta_{3n} < 0$ .

Al emplear el resultado de la ecuación (3.2.76) se tiene que la solución homogénea es de la forma

$$T_{nh}(t) = T_n(0) (1 - \psi_n - \xi_n Y_n - Y_n) e^{\eta_{1n} t} + T_n(0) (\psi_n + \xi_n Y_n) e^{\eta_{2n} t} + T_n(0) Y_n e^{\eta_{3n} t},$$

en donde, las constantes  $Y_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\xi_n$ , y las raíces  $\eta_{1n}$ ,  $\eta_{2n}$  y  $\eta_{3n}$  son como se definen en las ecuaciones (3.2.73), (3.2.73), (3.2.74), (3.2.80), (3.2.81) y (3.2.82) respectivamente. A partir de la ecuación anterior se tiene que la solución particular es de la forma

$$T_{np}(t) = T_{1n}(t)e^{\eta_{1n} t} + T_{2n}(t)e^{\eta_{2n} t} + T_{3n}(t)e^{\eta_{3n} t}, \quad (3.3.40)$$

en donde, las funciones  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$  y  $T_{3n}(t)$  son funciones a determinar, las cuales en virtud del método de variación de parámetros satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{\eta_{1n} t} T'_{1n}(t) + e^{\eta_{2n} t} T'_{2n}(t) + e^{\eta_{3n} t} T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n} e^{\eta_{1n} t} T'_{1n}(t) + \eta_{2n} e^{\eta_{2n} t} T'_{2n}(t) + \eta_{3n} e^{\eta_{3n} t} T'_{3n}(t) &= 0, \\ \eta_{1n}^2 e^{\eta_{1n} t} T'_{1n}(t) + \eta_{2n}^2 e^{\eta_{2n} t} T'_{2n}(t) + \eta_{3n}^2 e^{\eta_{3n} t} T'_{3n}(t) &= f_n(t), \end{aligned}$$

de las cuales se deduce que

$$T_{1n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{1n}\xi}}{(\eta_{1n} - \eta_{3n})(\eta_{1n} - \eta_{2n})} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.41)$$

$$T_{2n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{2n}\xi}}{(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{2n} - \eta_{1n})} d\xi, \quad t \geq 0, \quad (3.3.42)$$

$$T_{3n}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\eta_{3n}\xi}}{(\eta_{3n} - \eta_{2n})(\eta_{3n} - \eta_{1n})} d\xi, \quad t \geq 0. \quad (3.3.43)$$

Al emplear los resultados de las ecuaciones (3.3.41)-(3.3.43) en la ecuación (3.3.40), se tiene que la solución particular se escribe como

$$\begin{aligned} T_{np}(t) &= \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{1n}(t-\xi)}}{(\eta_{1n} - \eta_{3n})(\eta_{1n} - \eta_{2n})} d\xi + \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{2n}(t-\xi)}}{(\eta_{2n} - \eta_{3n})(\eta_{2n} - \eta_{1n})} d\xi \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{\eta_{3n}(t-\xi)}}{(\eta_{3n} - \eta_{2n})(\eta_{3n} - \eta_{1n})} d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Al reescribir las raíces  $\eta_{1n}$ ,  $\eta_{2n}$  y  $\eta_{3n}$  en donde,  $\mu_n$ ,  $\theta_n$  y  $\sigma_n$  son tal como se definen en las ecuaciones (3.2.77), (3.2.78) y (3.2.79) respectivamente y usarlas en la ecuación (3.3.44), esta se transforma en

$$\begin{aligned} &\int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \left[ \frac{e^{2\sigma_n(t-\xi)}}{(3\sigma_n - \theta_n)(3\sigma_n + \theta_n)} + \frac{e^{(-\sigma_n - \theta_n)(t-\xi)}}{2\theta_n(3\sigma_n + \theta_n)} - \frac{e^{(-\sigma_n + \theta_n)(t-\xi)}}{2\theta_n(3\sigma_n - \theta_n)} \right] d\xi, \\ &= \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n + 2\sigma_n)(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} d\xi + \frac{1}{2\theta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \left[ \frac{e^{(-\sigma_n - \theta_n)(t-\xi)}}{3\sigma_n + \theta_n} - \frac{e^{(-\sigma_n + \theta_n)(t-\xi)}}{3\sigma_n - \theta_n} \right] d\xi, \\ &= - \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n - \sigma_n)(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} \left[ \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sinh(\theta_n(t-\xi)) + \cosh(\theta_n(t-\xi)) \right] d\xi \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{(-\mu_n + 2\sigma_n)(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} d\xi, \\ &= \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cosh(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sinh(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Por tanto, de (3.2.83) y de (3.3.45) se tiene que la solución a la ecuación (3.3.13) se escribe como

$$\begin{aligned} T_n(t) &= T_n(0)e^{-\mu_n t} \left[ e^{2\sigma_n t} - \psi_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) - \xi_n Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) \right. \\ &- \left. Y_n (e^{2\sigma_n t} - e^{-(\sigma_n + \theta_n)t}) \right] \\ &+ \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cosh(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sinh(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Por lo tanto, aplicando los resultados (3.3.24), (3.3.31), (3.3.39) y (3.3.46) aplicados a la ecuación (3.3.7), se obtiene la solución  $u(x, t)$  tal como se muestra en (3.3.5). Al emplear la condición inicial (3.3.3) en la solución (3.3.5) se deduce el coeficiente de Fourier tal como se muestra en (3.3.6). De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Observación 3.3.1** *Es interesante considerar las soluciones particulares cuando  $\Delta_{3n} > 0$  y  $\Delta_{3n} < 0$ , debido a la similitud de su estructura: en ambos casos se preservan las funciones  $f_n(\xi)$  y  $e^{-\mu_n(t-\xi)}$  como primer factor, diferenciándose en su respectivo denominador: para el caso  $\Delta_{3n} > 0$  es una suma de cuadrados, los cuales surgen del producto de  $3\sigma_n - i\theta_n$  por su complejo conjugado, mientras que para el caso  $\Delta_{3n} < 0$  es una diferencia de cuadrados que surge del producto de los factores reales  $3\theta_n + \sigma_n$  por su conjugado.*

*Al considerar el segundo factor en ambas soluciones particulares, estas presentan prácticamente la misma estructura, salvo que, para el caso  $\Delta_{3n} > 0$ , se ven involucradas a las funciones trigonométricas seno y coseno mientras que para el caso  $\Delta_{3n} < 0$  sus correspondientes seno y coseno hiperbólicos, presentando de esta manera, un cierto tipo de simetría en ambas soluciones particulares.*

### 3.3.1. Análisis comparativo de las soluciones.

Debido a que en la sección anterior se encontraron las soluciones de las ecuaciones de onda fraccionarias homogéneas en sus versiones con fricción clásica y fraccionaria; en este apartado se analizarán las respectivas soluciones cuando en ambas versiones se considera el mismo término de fuente. Es de notar, que en dicho análisis sólo es necesario considerar a las soluciones particulares ya que las soluciones homogéneas se analizaron en el apartado anterior. Al considerar la naturaleza de las raíces asociadas en la solución de ambas versiones, se tienen los siguientes casos a analizar

**Observación 3.3.2** *En ambas soluciones se presenta una estructura muy parecida debido a que se pueden escribir como el producto de dos factores, presentando una similitud en uno de sus factores, el cual involucra a las funciones  $f_n(\xi)$  y la función exponencial  $e^{\mu_n(t-\xi)}$  dentro del kernel de la integral asociada a la solución particular. Sin embargo, la similitud anterior presenta dos diferencias: una de ella se corresponde con el valor de  $\mu_n$  tal como se vió en el análisis de la sección 3.2.1, Observación 3.2.3 y la otra diferencia tiene que ver con el factor constante de las funciones anteriores, el cual depende del valor*

Ecuación de onda fraccionaria con fricción fraccionaria.	Ecuación de onda con fraccionaria con fricción clásica.
$\Delta_{3n} > 0$ : se tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.	$\Delta_{2n} < 0$ : se tiene dos raíces complejas conjugadas.
$\Delta_{3n} = p_n = q_n = 0$ : se tiene una raíz real de orden 3.	$\Delta_{2n} = 0$ : se tiene una raíz de orden 2.
$\Delta_{3n} = 0$ y $p_n \cdot q_n \neq 0$ : se tiene una raíz real simple y una raíz real doble.	$\Delta_{2n} = 0$ : se tiene una raíz de orden 2.
$\Delta_{3n} < 0$ : se tienen 3 raíces reales distintas.	$\Delta_{2n} > 0$ : se tienen 2 raíces reales distintas.

Tabla 3.2: Naturaleza de las raíces de acuerdo al signo de  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ .

del discriminante asociado a la solución de ambas ecuaciones diferenciales, los cuales se muestran en la Tabla 3.3.

Ecuación de onda fraccionaria con amortiguamiento fraccionario.	Ecuación de onda con fraccionaria con amortiguamiento clásico.
$\Delta_{3n} > 0$ : Factor $\frac{1}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2}$ .	$\Delta_{2n} < 0$ : Factor $\frac{1}{\nu_n}$ .
$\Delta_{3n} = p_n = q_n = 0$ : Factor $\frac{1}{2}$ .	$\Delta_{2n} = 0$ : Factor 1.
$\Delta_{3n} = 0$ y $p_n \cdot q_n \neq 0$ : Factor $\frac{1}{\theta_n - \sigma_n}$ .	$\Delta_{2n} = 0$ : Factor 1.
$\Delta_{3n} < 0$ : Factor $\frac{1}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2}$ .	$\Delta_{2n} > 0$ : $\frac{1}{\eta_n}$ .

Tabla 3.3: Factores asociados a las soluciones de acuerdo al signo de  $\Delta_{3n}$  y  $\Delta_{2n}$ .

Por lo cual, el análisis a efectuar se hará en función del segundo factor asociado a la solución particular, considerando la Tabla 3.2

**Caso 1.** La solución particular a la ecuación bifraccionaria para  $\Delta_{3n} > 0$  viene dada por

$$T_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 + \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cos(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sin(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi,$$

y la solución particular a la ecuación de onda con amortiguamiento clásico cuando  $\Delta_{2n} < 0$  viene dada por

$$T_{np}(t) = \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \sin(\nu_n(t-\xi)) d\xi.$$

Es de notar, que para el caso con amortiguamiento clásico sólo presenta como segundo factor a la función trigonométrica seno, mientras que la versión bifraccionaria, debido a que necesita de una raíz más para su solución particular, esto se traduce en una mayor cantidad de términos en su segundo factor: no sólo se recupera a la función trigonométrica seno, si no, más bien, se obtiene una diferencia entre un término exponencial y un término

exponencial por una combinación de las funciones trigonométricas coseno y seno, donde esta función seno se diferencia del caso con fricción clásica por un factor.

**Caso 2.** La solución particular para el caso bifraccionario cuando  $\Delta_{3n} = p_n = q_n = 0$  viene dada por

$$T_{np}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} (t - \xi)^2 d\xi,$$

mientras que para el caso con amortiguamiento clásico cuando  $\Delta_{2n} = 0$ , la solución es de la forma

$$T_{np}(t) = \int_0^t f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)} f_n(\xi) (t - \xi) d\xi.$$

Es de apreciar la similitud de las soluciones particulares para este caso, debido a que la única diferencia entre ambas soluciones radica en la potencia del segundo factor. Para el caso bifraccionario, dicho factor es de orden 2, mientras que para el caso con amortiguamiento clásico es lineal.

**Caso 3.** La solución particular para el caso bifraccionario cuando  $\Delta_{3n} = 0$ ,  $p_n q_n \neq 0$  esta dada por

$$T_{np}(t) = \int_0^t \frac{f_n(\xi) e^{-\mu_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \left[ (t - \xi) e^{-\sigma_n(t-\xi)} + \frac{e^{-\theta_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)}}{\theta_n - \sigma_n} \right] d\xi,$$

y para el caso con amortiguamiento clásico cuando  $\Delta_{2n} = 0$ , se retoma la solución

$$T_{np}(t) = \int_0^t e^{-\mu_n(t-\xi)} f_n(\xi) (t - \xi) d\xi.$$

En el caso bifraccionario, el hecho de requerir una raíz más que el caso con amortiguamiento clásico se traduce en una mayor cantidad de términos para su segundo factor: se tiene una diferencia de funciones exponenciales más el producto de una función exponencial por un factor lineal. Es de notar que dicho factor lineal coincide con el segundo factor de la solución particular de la versión con fricción clásica, salvo el factor exponencial.

**Caso 4.** La solución particular para el caso bifraccionario cuando  $\Delta_{3n} < 0$  es de la

forma

$$\int_0^t \frac{f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)}}{9\sigma_n^2 - \theta_n^2} \left[ e^{2\sigma_n(t-\xi)} - e^{-\sigma_n(t-\xi)} \left( \cosh(\theta_n(t-\xi)) + \frac{3\sigma_n}{\theta_n} \sinh(\theta_n(t-\xi)) \right) \right] d\xi,$$

mientras que, para el caso con amortiguamiento clásico cuando  $\Delta_{2n} > 0$  es de la forma

$$\frac{1}{\eta_n} \int_0^t f_n(\xi)e^{-\mu_n(t-\xi)} \sinh(\eta_n(t-\xi)) d\xi.$$

Dado que el caso bifraccionario necesita de una raíz más que el caso con amortiguamiento clásico para su solución, esto se ve reflejado en una mayor cantidad de términos en su solución particular respecto al caso con fricción clásica: para el segundo factor de este caso bifraccionario se tiene una diferencia entre un término exponencial y un término que involucra a un factor exponencial por un combinación de las funciones hiperbólicas coseno y seno, siendo la función hiperbólica seno, el factor que coincide con el segundo factor de la solución particular del caso con amortiguamiento clásico, salvo el factor exponencial.

# Ecuación de onda fraccionaria amortiguada con efecto de memoria de tipo Mittag-Leffler

---

## 4.1. Introducción

En este capítulo presentaremos una ecuación de onda fraccional con un término de amortiguamiento especial que sirve como modelo para investigar fenómenos ondulatorios en donde se encuentran presentes procesos de relajación y oscilación con efectos de memoria producto de las condiciones del medio heterogéneo en donde evolucionan. Existen diversas aproximaciones para modelar los fenómenos antes mencionados, dentro de las cuales podemos citar, las ecuaciones de difusión-onda fraccional, ecuaciones generalizadas de Langevin, ecuaciones de Fokker-Planck, entre otros.

Para la versión de la ecuación de onda del presente capítulo, se toma en consideración un término de fuente y como término de amortiguamiento se emplea una expresión integral que involucra un kernel especial.

## 4.2. Planteamiento del problema

Para la siguiente versión de la ecuación de onda usaremos una expresión integrodiferencial para modelar diversos tipos de fricción usando un kernel de tipo Mittag-Leffler, tal expresión representa los efectos de memoria en la dinámica del fenómeno.

Con estas consideraciones, la ecuación resultante es la siguiente.

$$\begin{aligned}
{}^CF_0 D_t^{\gamma+1} u(x, t) & - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\
& + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} u(x, \xi) d\xi = f(x, t),
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

donde,  $0 < \gamma, \beta \leq 1, x \in [0, L], t > 0$  y los parámetros  $a, b, \theta, \delta$  y  $\eta > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.2.2}$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, L], \tag{4.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{4.2.4}$$

Cabe mencionar que la expresión integro-diferencial para el término de fricción de la ecuación (4.2.1) incorpora efectos de memoria, los cuales están representados por el kernel  $K(t, \xi) := (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right)$ , en donde  $E_{\theta, \delta}^{\eta}(z)$  es la función de tipo Mittag-Leffler de tres parámetros (ver sección 1.1.1 Capítulo 1). Puede apreciarse que  $K(t, \xi)$  tiene varios parámetros, a saber  $\delta, \theta, \eta, \beta$ , razón por la cual, diversas formas de fricción con efectos de memoria pueden ser modelados por  $K(t, \xi)$ , dependiendo de las propiedades del entorno en donde se desarrolle el fenómeno ondulatorio.

**Observación 4.2.1** Si  $\theta, \delta$  y  $\eta$  tienden a 1, la ecuación (4.2.1) se transforma en la ecuación bifraccionaria (3.3.1) y si además,  $\beta \rightarrow 1$  la ecuación (4.2.1) se transforma en la ecuación (3.1.95).

La ecuación (4.2.1) con  $b = 0$  y  $f(x, t) = 0$  fue considerada por Liang et. al. [34–36] como un modelo matemático para describir las oscilaciones de un cable hecho con materiales inteligentes. En la presente tesis incluimos la fricción debido a la interacción del cable con el entorno heterogéneo dado e incluimos una fuerza externa que afecta al cable mismo. Con las consideraciones anteriores se tiene el siguiente teorema

**Teorema 4.2.1** Dado el problema de valor inicial y de frontera (4.2.1)-(4.2.4), con  $\varphi \in C[0, L]$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(L) = 0, \varphi'(x) \in L_2[0, L], f \in C([0, L] \times \overline{\mathbb{R}^+})$ ,

$f(0, t) = f(L, t) = 0$  para  $t \geq 0$ ,  $f(x, 0) = 0$  para  $x \in [0, L]$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \in C[0, L]$  y  $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  entonces la solución  $u(x, t) \in L_1[0, L] \cap H^1(\mathbb{R}^+)$  esta dada por

$$u(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t), \quad (4.2.5)$$

en donde,

$$\begin{aligned} U_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) \left\{ E_{\theta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^{\theta} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \right. \\ &\times \left[ \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^{i+1} t^{2i+2-j} E_{\theta, 2i+3-j} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^{\theta} \right) + \sum_{h=1}^i \binom{i}{h-1} \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \right. \\ &\times \left. \left. t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^{\theta} \right) \right] \right\} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} U_2(x, t) &= \left( \frac{\beta-1}{b} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \\ &\times \left( \varepsilon_{0+; \theta, \delta(i-h)+i+h+2-j}^{-\frac{\beta}{1-\beta}; \eta(i-h), 1} f_n \right) (t) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

y el coeficiente de Fourier es de la forma

$$D_n T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (4.2.8)$$

**Demostración.** Supongamos que la solución a la ecuación (4.2.1) se escribe como

$$u(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t). \quad (4.2.9)$$

Al emplear la igualdad anterior en la ecuación (4.2.1) se obtiene

$$\begin{aligned} & {}^C D_0^{\gamma+1} [U_1(x, t) + U_2(x, t)] - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [U_1(x, t) + U_2(x, t)] \\ & + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} [U_1(x, \xi) + U_2(x, \xi)] d\xi = f(x, t), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Donde las funciones  $U_1(x, t)$  y  $U_2(x, t)$  se puede separar como sigue

$${}^C D_t^{\gamma+1} U_1(x, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1(x, t) \quad (4.2.11)$$

$$+ \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} U_1(x, \xi) d\xi = 0,$$

$$U_1(0, t) = U_1(L, t) = 0, \quad (4.2.12)$$

$$U_1(x, 0) = \varphi(x), \quad (4.2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_1(x, 0) = 0, \quad (4.2.14)$$

y

$${}^C D_t^{\gamma+1} U_2(x, t) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_2(x, t) \quad (4.2.15)$$

$$+ \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} U_2(x, \xi) d\xi = f(x, t),$$

$$U_2(0, t) = U_2(L, t) = 0, \quad (4.2.16)$$

$$U_2(x, 0) = 0, \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_2(x, 0) = 0. \quad (4.2.18)$$

De esta manera, se han obtenido dos problemas asociados a la ecuación de onda (4.2.1), de tal forma que la suma de estas dos soluciones dan lugar a la solución buscada.

Al resolver primero el problema dado en (4.2.12), mediante el empleo del método de separación de variables, sea

$$U_1(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.2.19)$$

entonces, se deduce la ecuación

$${}^C D_t^{\gamma+1} T(t) + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) T'(\xi) d\xi - a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (4.2.20)$$

y la ecuación

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad (4.2.21)$$

la cual, al considerar la condición (4.2.12) debe satisfacer que

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (4.2.22)$$

Por tanto, la solución a la ecuación (4.2.21), sujeta a la condición (4.2.22) tiene soluciones de la forma

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.2.23)$$

en donde,  $\lambda_n = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Al considerar el  $n$ -ésimo valor propio en la ecuación (4.2.20), esta se transforma en

$${}^C D_0^\gamma D_t^\gamma T_n'(t) + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta,\delta}^\eta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^\theta \right) T_n'(\xi) d\xi + k_n T_n(t) = 0, \quad (4.2.24)$$

en donde,  $k_n = \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Resolveremos esta ecuación usando el Teorema 1.3.14, el Teorema de convolución 1.2.4 para la expresión integral considerando (1.2.2) y (1.2.17) a través de la transformada de Laplace obtenemos

$$T_n(s) = \frac{T_n(0) \left[ \frac{1}{1-\gamma} \frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} \right]}{\frac{1}{1-\gamma} \frac{s^2}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta+1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} + k_n} + \frac{T_n(0) \left[ \frac{1}{1-\gamma} \frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} \right]}{\frac{1}{1-\gamma} \frac{s^2}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta+1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} + k_n}, \quad (4.2.25)$$

$$=: T_{1n}(s) + T_{2n}(s). \quad (4.2.26)$$

Ahora determinemos la transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior. Al reescribir el primer término de la ecuación anterior se tiene

$$T_{1n}(s) = \frac{\frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} T_n(0)}{\frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} \left[ s + \frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \frac{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}}{s} \frac{s^{\theta\eta-\delta+1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} + k_n(1-\gamma) \frac{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}}{s} \right]}$$

$$T_{1n}(s) = \frac{s^{-1}T_n(0)}{1 + (1-\gamma) \left(s + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \left[ \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} + k_n s^{-2} \right]}.$$

Usando el teorema de la serie geométrica obtenemos

$$T_{1n}(s) = T_n(0) s^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^i \left(s + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^i \left( \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} + k_n s^{-2} \right)^i, \quad (4.2.27)$$

siempre que

$$\left| \left(s + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \left[ \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} + k_n s^{-2} \right] \right| < \frac{1}{1-\gamma}. \quad (4.2.28)$$

Al usar el teorema del binomio de Newton en la ecuación (4.2.27), se obtiene

$$\begin{aligned} T_{1n}(t) &= T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^i \binom{i}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{i-j} k_n^h \left(\frac{b}{1-\beta}\right)^{i-h} \frac{s^{(\theta\eta-\delta-1)(i-h)+j-2h-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h)}}, \\ &= T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^i \binom{i}{j} \binom{i}{h} \frac{(1-\gamma)^j \gamma^{i-j}}{(1-\gamma)^i} k_n^h \left(\frac{b}{1-\beta}\right)^{i-h} \frac{s^{\theta\eta(i-h)-\delta i-i+\delta h-h+j-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h)}} \end{aligned}$$

y reorganizando los términos tenemos

$$\begin{aligned} T_{1n}(t) &= T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma b}{1-\beta}\right)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^i \binom{i}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^j \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h \frac{s^{\theta\eta(i-h)-(\delta(i-h)+i+h+1-j)}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h)}}. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior considerando la ecuación (1.2.17), se obtiene

$$T_{1n}(t) = T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{-\gamma b}{1-\beta} \right)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^j \binom{i}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h)+i+h-j} \times E_{\theta, \delta(i-h)+i+h+1-j}^{\eta} \left( \frac{-\beta}{1-\beta} t^{\theta} \right), \quad (4.2.30)$$

siempre que  $\left| \frac{-\beta/1-\beta}{t^{\theta}} \right| < 1$ .

Ahora, para el segundo término de la ecuación (4.2.25), después de reescribirlo se tiene

$$\begin{aligned} T_{2n}(s) &= \frac{\frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \left[ \frac{s^{\theta\eta-\delta}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} \right] T_n(0)}{s \left[ \frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} + \frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} + \frac{k_n(1-\gamma)}{s} \right]}, \\ &= \frac{\frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \left[ \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} \right] T_n(0)}{\frac{s}{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}} \left[ 1 + \frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \left( \frac{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}}{s} \right) \left[ \frac{s^{\theta\eta-\delta}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} \right] + \left( \frac{s + \frac{\gamma}{1-\gamma}}{s} \right) \left( \frac{k_n(1-\gamma)}{s} \right) \right]}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$T_{2n}(s) = \frac{T_n(0) \left[ \frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \frac{s^{\theta\eta-\delta-2}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} \right]}{1 + (1-\gamma) \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left[ \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} + k_n s^{-2} \right]}.$$

Suponiendo que la condición (4.2.28) se cumple, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} T_{2n}(s) &= T_n(0) = \frac{b(1-\gamma)}{1-\beta} \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \frac{s^{\theta\eta-\delta-2}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ (-1)^i (1-\gamma)^i \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^i \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^{\theta} + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta}} + k_n s^{-2} \right)^i \right], \end{aligned}$$

la cual reorganizando términos se reescribe como

$$\begin{aligned}
& T_{2n}(s) \\
&= T_n(0) \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-2}}{\left(s^\theta - \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \left(s + \frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{i+1} \left(\frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} + k_n s^{-2}\right)^i, \\
&= T_n(0) \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-2}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^\eta} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} s^j \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{i+1-j} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} k_n^h s^{-2h} \\
&\times \left(\frac{b}{1-\beta}\right)^{i-h} \frac{s^{(\theta\eta-\delta-1)(i-h)}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h)}},
\end{aligned}$$

o en forma equivalente

$$\begin{aligned}
& T_n(s) \\
&= T_n(0) \frac{b}{1-\beta} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \frac{(1-\gamma)^j \gamma^{i+1-j}}{(1-\gamma)^{i+1}} \left(\frac{b}{1-\beta}\right)^i \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h \\
&\times \frac{s^{\theta\eta(i-h+1)-\delta(i-j+1)-i-h+j-2}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h+1)}}, \\
&= -T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b\gamma}{1-\beta}\right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^j \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h \\
&\times \frac{s^{\theta\eta(i-h+1)-(\delta(i-h+1)+i+h+2-j)}}{\left(s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^{\eta(i-h+1)}}.
\end{aligned}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace y la fórmula (1.2.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
& T_n(t) \\
&= -T_n(0) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b\gamma}{1-\beta}\right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^j \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} \\
&\times E_{\theta,\delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left(-\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta\right).
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Por lo tanto de las ecuaciones (4.2.30) y (4.2.31) se tiene

$$\begin{aligned}
T_n(t) &= T_{1n}(t) + T_{2n}(t) \\
&= T_n(0) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{-\gamma b}{1-\beta} \right)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^i \binom{i}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h)+i+h-j} \right. \\
&\times E_{\theta, \delta(i-h)+i+h+1-j}^{\eta(i-h)} \left( \frac{-\beta}{1-\beta} t^\theta \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \\
&\times \left. \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right],
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
T_n(t) &= T_n(0) \left[ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^i \sum_{j=0}^i \sum_{h=0}^i \binom{i}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \right. \\
&\times E_{\theta, \delta(i-h)+i+h+1-j}^{\eta(i-h)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \\
&\times \left. \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right]. \quad (4.2.32)
\end{aligned}$$

Al considerar un cambio de variable en el segundo término de la ecuación anterior, sea  $i = l + 1$ , si  $i = 1$  entonces  $l = 0$ , por lo cual, la ecuación (4.2.32) toma la forma

$$\begin{aligned}
T_n(t) &= T_n(0) \left[ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{l+1} \sum_{j=0}^{l+1} \sum_{h=0}^{l+1} \binom{l+1}{j} \binom{l+1}{h} \left( \frac{k_n(1-\gamma)}{\gamma} \right)^j \right. \\
&\times \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(l-h+1)+l+h+1-j} E_{\theta, \delta(l-h+1)+l+h+2-j}^{\eta(l-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \\
&\times \left. \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+1+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right],
\end{aligned}$$

al sustituir el contador  $l$  por  $i$  en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
&T_n(t) \\
&= T_n(0) \left\{ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left[ \sum_{h=0}^{i+1} \binom{i+1}{h} \right. \right. \\
&\times \left. \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right. \\
&\left. \left. - \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
& T_n(t) \\
= & T_n(0) \left\{ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left[ \sum_{h=0}^i \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \right. \right. \\
& \times \left. \left( \binom{i+1}{h} - \binom{i}{h} \right) t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^{i+1} \binom{i+1}{i+1} t^{\delta(i-(i+1)+1)+i+(i+1)+1-j} \right. \right. \\
& \times \left. \left. E_{\theta, \delta(i-(i+1)+1)+i+(i+1)+2-j}^{\eta(i-(i+1)+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right] \right\}. \tag{4.2.33}
\end{aligned}$$

Ahora como  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\forall n \geq 0$ , se tiene que  $\binom{i+1}{h} - \binom{i}{h} = 0$ , siempre que  $h = 0$ , por lo cual el índice  $h$  puede empezar en  $h = 1$ . Por otro lado, fórmula de Stifel aplicado a nuestro caso, implica que  $\binom{i+1}{h} = \binom{i}{h-1} + \binom{i}{h}$ . Con estas consideraciones, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
& T_n(t) \\
= & T_n(0) \left\{ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left[ \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^{i+1} \right. \right. \\
& \times t^{2i+2-j} E_{\theta, 2i+3-j} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{h=1}^i \left( \binom{i}{h-1} + \binom{i}{h} - \binom{i}{h} \right) \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \\
& \times \left. \left. t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right] \right\}, \\
= & T_n(0) \left\{ E_\theta \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left[ \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^{i+1} \right. \right. \\
& \times t^{2i+2-j} E_{\theta, 2i+3-j} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) + \sum_{h=1}^i \binom{i}{h-1} \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} \\
& \times \left. \left. E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} t^\theta \right) \right] \right\}. \tag{4.2.34}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.2.19), (4.2.23), (4.2.34) y empleando el principio de superposición generalizado (véase [33]) se tiene que la solución para  $U_1(x, t)$  cuya forma es tal como se muestra en la ecuación (4.2.6). Al considerar la condición inicial (4.2.14) en la solución encontrada para  $U_1(x, t)$  se deduce el coeficiente de Fourier cuya forma es tal como se muestra en la ecuación (4.2.8).

Ahora dirijamonos a resolver el problema asociado a la función  $U_2(x, t)$ . Para tal fin

supongamos que  $\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) \in C[0, L]$ , entonces posee un desarrollo en serie de Fourier

$$U_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.2.35)$$

Además supongamos que

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.2.36)$$

de donde, se deduce que

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (4.2.37)$$

mientras que, de la ecuación (4.2.35) se deducen las siguientes igualdades

$${}^{CF}_0 D_t^{\gamma+1} U_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{CF}_0 D_t^{\gamma} u'_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.2.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 u_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.2.40)$$

Al usar las ecuaciones (4.2.35)-(4.2.40) en la ecuación (4.2.15), esta toma la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ {}^{CF}_0 D_t^{\gamma} u'_n(t) + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) u'_n(\xi) d\xi + k_n u_n(t) - f_n(t) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = 0, \quad (4.2.41)$$

en donde,  $k_n = \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2$ . Dado que la ecuación anterior se debe satisfacer para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se debe cumplir que

$${}^{CF}_0 D_t^{\gamma} u'_n(t) + \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left( -\frac{\beta}{1-\beta} (t-\xi)^{\theta} \right) u'_n(\xi) d\xi + k_n u_n(t) = f_n(t).$$

Resolveremos esta ecuación usando la transformada de Laplace y considerando las condiciones iniciales (4.2.17) y (4.2.18). Así en virtud del Teorema 1.3.14, el Teorema de

convolución 1.2.4 para la expresión integral considerando (1.2.2) y (1.2.17) obtenemos

$$u_n(s) = \frac{1}{\frac{1}{1-\gamma} \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) + \frac{b}{1-\beta} \left( \frac{s^{\theta\eta-\delta+1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} \right) + k_n} \cdot f_n(s). \quad (4.2.42)$$

Al reescribir el cociente en la ecuación anterior usando la condición (4.2.28) y los teoremas de la serie geométrica y del binomio Newton se tiene

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \frac{(1-\gamma) \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) s^{-2}}{1 + (1-\gamma) \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left( \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} + k_n s^{-2} \right)} \cdot f_n(s) \\ &= (1-\gamma) \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) s^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^i \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^i \\ &\quad \times \left( \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} + k_n s^{-2} \right)^i \cdot f_n(s), \\ &= s^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \left( s + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{i+1} \left( \frac{b}{1-\beta} \frac{s^{\theta\eta-\delta-1}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^\eta} + k_n s^{-2} \right)^i \cdot f_n(s), \\ &= s^{-2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} s^j \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{i+1-j} \sum_{h=0}^i \binom{i}{h} k_n^h s^{-2h} \left( \frac{b}{1-\beta} \right)^{i-h} \\ &\quad \times \frac{s^{(\theta\eta-\delta-1)(i-h)}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta(i-h)}} \cdot f_n(s). \end{aligned}$$

Reorganizando términos obtenemos

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (1-\gamma)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \frac{(1-\gamma)^j \gamma^{i+1}}{(1-\gamma)^{i+1} \gamma^j} \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \left( \frac{b}{1-\beta} \right)^i \\ &\quad \times \frac{s^{\theta\eta(i-h)-\delta(i-h)-i+h-2h+j-2}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta(i-h)}} \cdot f_n(s), \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} u_n(s) &= - \left( \frac{1-\beta}{b} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{k_n(1-\beta)}{b} \right)^h \\ &\quad \times \frac{s^{\theta\eta(i-j)-(\delta(i-h)+i+h+2-j)}}{\left( s^\theta + \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{\eta(i-h)}} \cdot f_n(s). \quad (4.2.43) \end{aligned}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace considerando la ecuación (1.2.17) y el teorema de convolución a la ecuación (4.2.43) se obtiene la solución para  $u_n(t)$  en la forma

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= \left(\frac{\beta-1}{b}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b\gamma}{1-\beta}\right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^j \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h \\
&\times \int_0^t (t-\xi)^{\delta(i-h)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h)+i+h+2-j}^{-\eta(i-h)} \left(\frac{\beta}{1-\beta}(t-\xi)^\theta\right) f_n(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{4.2.44}$$

Al emplear el operador de Srivastava y Tomovsky dada en la ecuación (1.3.76), la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= \left(\frac{\beta-1}{b}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{b\gamma}{1-\beta}\right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^j \left(\frac{k_n(1-\beta)}{b}\right)^h \\
&\times \left(\varepsilon_{0+; \theta, \delta(i-h)+i+h+2-j}^{-\frac{\beta}{1-\beta}; \eta(i-h), 1} f_n\right)(t).
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

Así, de las ecuaciones (4.2.35) y (4.2.45) se obtiene la solución  $U_2(x, t)$  tal como se muestra en (4.2.7). De esta manera se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

**Observación 4.2.2** *La convergencia de las series que representan las funciones  $U_1(x, t)$  y  $U_2(x, t)$  se pueden probar usando los argumentos de [37]. También pueden adaptarse las ideas de [38, 39] en donde se trato con mucho detalle la convergencia de series que involucran funciones de Mittag-Leffler de tres parámetros en el plano complejo.*

A manera de ejemplo presentamos el siguiente problema del tipo estudiado en el teorema anterior.

**Corolario 4.2.2** *La ecuación diferencial parcial fraccionaria en el tiempo*

$$\begin{aligned}
&{}^{CFC}D_t^{\gamma+1}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x^2}u(x, t) \\
&+ \frac{b}{1-\beta} \int_0^t (t-\xi)^{\delta-1} E_{\theta, \delta}^{\eta} \left(-\frac{\beta}{1-\beta}(t-\xi)^\theta\right) \frac{\partial}{\partial \xi}u(x, \xi) d\xi = e^{-t} \cos(x), \tag{4.2.46}
\end{aligned}$$

en donde,  $0 < \gamma, \beta \leq 1$ ,  $b, \theta, \delta, \eta > 0$ ,  $x \in [0, \pi]$  y  $t > 0$ . Con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.2.47}$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi], \quad (4.2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (4.2.49)$$

tiene por solución

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n T_n(0) \left\{ E_{\theta} \left( -\frac{\beta t^{\theta}}{1-\beta} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{-b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \right. \\ &\times \left[ \left( \frac{(1-\beta)n^2}{b} \right)^{i+1} t^{2i+2-j} E_{\theta, 2i+3-j} \left( \frac{-\beta t^{\theta}}{1-\beta} \right) + \sum_{h=1}^i \binom{i}{h-1} \left( \frac{(1-\beta)n^2}{b} \right)^h \right. \\ &\times \left. \left. t^{\delta(i-h+1)+i+h+1-j} E_{\theta, \delta(i-h+1)+i+h+2-j}^{\eta(i-h+1)} \left( \frac{-\beta t^{\theta}}{1-\beta} \right) \right] \right\} \text{sen}(nx) \\ &+ \left( \frac{\beta-1}{b} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{b\gamma}{1-\beta} \right)^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{h=0}^i \binom{i+1}{j} \binom{i}{h} \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^j \left( \frac{(1-\beta)n^2}{b} \right)^h \\ &\times \left( \varepsilon_{0; \theta, \delta(i-h)+i+h+2-j}^{\frac{-\beta}{1-\beta}; \eta(i-h), 1} \right) (t) \text{sen}(nx) \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

en donde el coeficiente de Fourier es de la forma

$$D_n T_n(0) = \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n), \quad (4.2.51)$$

y

$$f_1(t) = 0, \quad f_n(t) = \frac{2ne^{-t}}{(n^2-1)\pi} (1 + (-1)^n), \quad n \geq 2. \quad (4.2.52)$$

**Demostración.** La ecuación (4.2.46) es un caso particular de la ecuación (4.2.1), en donde,  $a = 1$ ,  $b > 0$ ,  $L = \pi$  y  $k_n = n^2$  los cuales al sustituirlos en la solución general dada en las ecuaciones (4.2.6) y (4.2.32) se obtiene la solución tal como se muestra en (4.2.50). De la ecuación (4.2.8) y de la condición inicial (4.2.48) se obtiene el coeficiente de Fourier de la forma

$$\begin{aligned} D_n T_n(0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \text{sen}(nx) dx, \\ &= \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n). \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

Por otro lado, al emplear la ecuación (4.2.37) con  $f(x, t) = e^{-t} \cos(x)$  se obtiene

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2e^{-t}}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2ne^{-t}}{\pi} \left( \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} \right), \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Si  $n = 1$ , se tiene que

$$f_1(t) = \frac{2\pi e^{-t}}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \operatorname{sen}(x) dx = 0. \quad (4.2.55)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.2.53), (4.2.54) y (4.2.55) se obtiene el resultado.

*Q.E.D.*

### Conclusiones y trabajos futuros

---

A continuación se presentan las conclusiones y las recomendaciones para la elaboración de futuras investigaciones.

#### 5.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudiaron diferentes variantes de la ecuación de onda, tanto en sus versiones clásicas como en sus versiones fraccionarias, empleando para tal caso, la definición de derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo para la variable temporal. En todas la versiones de la ecuación de onda se preservaron las condiciones iniciales y de frontera con la finalidad de hacer un análisis comparativo entre las versiones de las ecuaciones de onda clásicas y las versiones de las ecuaciones de onda fraccionarias. Dentro de los resultados obtenidos se tienen los siguientes.

- El papel que suelen representar las derivadas fraccionarias como disipación de energía, puede apreciarse claramente en las soluciones encontradas de las diferentes versiones de la ecuación de onda de orden fraccionario, en especial, cuando se comparan las soluciones de la ecuación de onda clásica junto con la ecuación de onda clásica fraccionaria, cuya versión, puede emplearse como una alternativa a la ecuación de onda clásica amortiguada.
- El empleo de la derivada fraccionaria del tipo Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo ofrece la libertad de elegir el orden de diferenciación que mejor se adapte a la situación física a optimizar, incluyendo el orden de diferenciación entero como caso particular.

- El empleo de la expresión integral para modelar el término de amortiguamiento en la ecuación de onda fraccionaria, es una expresión muy general para modelar diferentes tipos de fricción ya que como casos particulares, dicha expresión integral puede reducirse al término de fricción clásica o al término de fricción fraccionaria, al modificar los parámetros de la función de Mittag-Leffler de tres parámetros.
- Se obtuvieron soluciones en forma cerrada a problemas de valores iniciales y de frontera de orden fraccionario en un dominio acotado para la variable espacial  $x$  y para todo tiempo  $t \geq 0$ .
- En todas las variantes de la ecuación de onda, tanto clásicas como de orden fraccionario, el coeficiente de Fourier siempre preservó la misma estructura.

## 5.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros con respecto a la investigación llevada a cabo en esta tesis se pueden mencionar los siguientes tópicos:

- Extender la investigación considerando condiciones iniciales y de frontera más generales, como condiciones de frontera de tipo Robin a dominios de dimensión  $n > 1$ .
- Al retomar la solución de la ecuación de onda bifraccionaria, verificar si es posible que a partir de dicha solución se puede obtener la solución a la ecuación de onda fraccionaria amortiguada cuando  $\beta \rightarrow 1$  y, a su vez, comprobar si es posible obtener la solución a la ecuación de onda clásica amortiguada cuando  $\beta \rightarrow 1$  y  $\gamma \rightarrow 1$ .
- Dar solución a las diferentes versiones de la ecuación de onda fraccionaria empleando la nueva definición de derivada fraccionaria propuesta por Atangana-Baleanu.

## Apéndice

### Teorema de convergencia de series

**Teorema A.0.1** [40] Dadas dos series de términos positivos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad c \neq 0, \quad c \neq \infty, \quad (\text{A.0.1})$$

entonces las dos series convergen o ambas divergen. En el caso de ser  $c = 0$ , entonces la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , y la divergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  implica la divergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Demostración.** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N, \quad (\text{A.0.2})$$

o equivalentemente

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N. \quad (\text{A.0.3})$$

Multiplicando por  $b_n$  a la ecuación anterior se obtiene

$$(c - \epsilon) b_n < a_n < (c + \epsilon) b_n, \quad (\text{A.0.4})$$

de donde, se deduce que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} (c + \epsilon) b_n = (c + \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n. \quad (\text{A.0.5})$$

De la ecuación (A.0.5) se deduce que si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también converge. Por otro lado, si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  también diverge. *Q.E.D.*

## Convergencia de la solución de la ecuación de onda clásica fraccionaria

Para que la solución a la ecuación de onda fraccionaria clásica (3.1.5) sea convergente, además de satisfacer la condición inicial (3.1.3), se debe demostrar convergencia uniforme de la serie para  $T_n(t)$  en  $n$ . Notemos que a partir de cierto valor suficientemente grande de  $n$ , se tiene que  $k_n = \left(\frac{a\pi}{L}n\right)^2 > 1$  de tal manera que el discriminante  $\Delta_{1n} := [k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma > 0$ , con lo cual la solución a la ecuación de onda clásica fraccionaria es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{A.0.6})$$

en donde,

$$k_n = \left(\frac{a n \pi}{L}\right)^2, \quad \eta_n = \frac{1}{2} \sqrt{[k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma}, \quad \mu_n = \frac{k_n(1 - \gamma)}{2} \quad (\text{A.0.7})$$

y

$$T_n(t) := e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right]. \quad (\text{A.0.8})$$

Para demostrar la convergencia de la solución (A.0.6) y por consecuencia la solución (3.1.5), sólo basta probar la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right]. \quad (\text{A.0.9})$$

Primero reescribamos la función  $T_n(t)$  como

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) - \frac{\mu_n}{\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right], \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} e^{(\eta_n - \mu_n)t} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n + \mu_n}{\eta_n} e^{-(\eta_n + \mu_n)t} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.0.10})$$

de donde, es fácil ver que la serie conformada por el segundo término de la ecuación anterior

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n + \mu_n}{\eta_n} e^{-(\eta_n + \mu_n)t} \right) \quad (\text{A.0.11})$$

converge uniformemente empleando el criterio de Weierstrass. Para demostrar la que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} e^{(\eta_n - \mu_n)t} \right) := \sum_{n=1}^{\infty} s_n, \quad (\text{A.0.12})$$

converge uniformemente, notemos que el exponente de la función exponencial, usando (A.0.7) se escribe como

$$\begin{aligned} (-\mu_n + \eta_n) t &= \left[ -\frac{k_n(1-\gamma)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{[k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma} \right] t, \\ &= \frac{(1-\gamma)(a\pi)^2 n^2}{2L^2} \left[ \sqrt{1 - \frac{4\gamma L^2}{(1-\gamma)^2 (a\pi)^2 n^2}} - 1 \right] t, \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

de donde claramente se observa que es una sucesión creciente de términos negativos, debido al signo del factor entre corchetes, a partir de cierto valor de  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande y  $t > 0$ . De esta forma se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\mu_n + \eta_n = 0, \quad (\text{A.0.14})$$

con lo cual

$$e^{(\eta_n - \mu_n)t} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.0.15})$$

Por lo tanto,

$$|s_n| = \left| \frac{\eta_n - \mu_n}{2\eta_n} \right| e^{(\mu_n - \eta_n)t} \leq \frac{\mu_n - \eta_n}{2\eta_n} := a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \leq 0. \quad (\text{A.0.16})$$

De esta manera, si la serie asociada a  $a_n$  converge uniforme y absolutamente, entonces la serie asociada a  $s_n$  converge uniformemente y absolutamente. Para probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge uniforme y absolutamente, se empleará el Teorema A.0.1 con  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . Así

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (\mu_n - \eta_n)}{2\eta_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2} \left( k_n(1 - \gamma) - \sqrt{[k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma} \right)}{\sqrt{[k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma}} \\
&= \frac{\frac{n^2}{2} \left[ (1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 - \sqrt{(1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 - 4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2} \right]}{\sqrt{(1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 - 4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^4}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2}{(1 - \gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 n^4}} \right)}{(1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 \sqrt{1 - \frac{4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2}{(1 - \gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 n^4}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (a\pi)^2 n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{4\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (a\pi)^2 n^2}}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (a\pi)^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (a\pi)^2 n^2}} + 1 - \frac{4\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (a\pi)^2 n^2}} \\
&= \frac{\gamma L^2}{(1 - \gamma)^2 (1 - \pi)^2}. \tag{A.0.17}
\end{aligned}$$

De esta manera, la serie asociada a  $a_n$  es convergente, con lo cual, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$  converge uniformemente. Por lo tanto, la serie asociada a  $T_n(t)$  converge uniformemente y la solución (3.1.5) converge.

*Q.E.D.*

## Convergencia de la solución de la ecuación de onda clásica fraccionaria amortiguada

Para la convergencia de la solución de la ecuación de onda fraccionaria amortiguada (3.1.40), además de las condiciones que debe satisfacer el dato inicial, se debe demostrar convergencia uniforme de la serie para  $T_n(t)$  en  $n$ . Notemos que a partir de cierto valor suficientemente grande de  $n$ , la solución a la ecuación de onda fraccionaria amortiguada es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(0) e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{A.0.18})$$

en donde,

$$\mu_n = \frac{b\gamma + k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]}, \quad \eta_n = \frac{\sqrt{[b\gamma - k_n(1-\gamma)]^2 - 4k_n\gamma}}{2[1+b(1-\gamma)]}, \quad k_n = \left(\frac{a\pi}{L}\right)n. \quad (\text{A.0.19})$$

y

$$T_n(t) = e^{-\mu_n t} \left[ \cosh(\eta_n t) + \frac{b\gamma - k_n(1-\gamma)}{2[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \sinh(\eta_n t) \right]. \quad (\text{A.0.20})$$

De acuerdo a la ecuación (3.1.60), la ecuación anterior se puede escribir como

$$T_n(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_n + \eta_n}{\eta_n} - \frac{b\gamma}{[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \right) e^{-(\eta_n + \mu_n)t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} + \frac{b\gamma}{[1+b(1-\gamma)]\eta_n} \right) e^{(\eta_n - \mu_n)t}. \quad (\text{A.0.21})$$

De la ecuación anterior, es fácil ver que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_n + \eta_n}{\eta_n} - \frac{b\gamma}{[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \right) e^{-(\eta_n + \mu_n)t}, \quad (\text{A.0.22})$$

converge uniformemente. Sólo queda por demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} + \frac{b\gamma}{[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \right) e^{(\eta_n - \mu_n)t} := \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \quad (\text{A.0.23})$$

converge uniformemente. Para tal fin, mostremos que la serie anterior converge absolutamente y por tanto, es convergente. Al examinar el exponente de la función exponencial, notemos que

$$\begin{aligned} \eta_n - \mu_n &= \frac{\sqrt{[b\gamma - k_n(1 - \gamma)]^2 - 4k_n\gamma}}{2[1 + b(1 - \gamma)]} - \frac{b\gamma + k_n(1 - \gamma)}{2[1 + b(1 - \gamma)]}, \\ &= \frac{1}{2[1 + b(1 - \gamma)]} \left[ \sqrt{[b\gamma + \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2] - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 [1 + b(1 - \gamma)] - b\gamma - (1 - \gamma) \left(\frac{a\pi x}{L}\right)^2 n^2} \right], \\ &= \frac{b\gamma + (1 - \gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2}{2[1 + b(1 - \gamma)]} \left[ \sqrt{1 - \frac{4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 [1 + b(1 - \gamma)]}{[b\gamma + (1 - \gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2]} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.0.24})$$

De la ecuación (A.0.24), se deduce que la sucesión  $\eta_n - \mu_n$  es una sucesión creciente de términos negativos para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n - \mu_n = 0$ .

Por lo tanto, se tiene la siguiente desigualdad

$$e^{(\eta_n - \mu_n)t} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t > 0. \quad (\text{A.0.25})$$

De esta manera,

$$|s_n| = \frac{1}{2} \left| \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} + \frac{b\gamma}{[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \right| e^{(\eta_n - \mu_n)t} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} + \frac{b\gamma}{[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \right|. \quad (\text{A.0.26})$$

Al definir

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{2} \left| \frac{\eta_n - \mu_n}{\eta_n} + \frac{b\gamma}{[1 + b(1 - \gamma)]\eta_n} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\left[ b\gamma - (1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 \right]^2 - 4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2} + b\gamma - (1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2}{\sqrt{\left[ b\gamma - (1 - \gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 \right]^2 - 4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.0.27})$$

si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (\text{A.0.28})$$

converge, entonces la serie dada en la ecuación (A.0.23) converge uniformemente y absolutamente por el criterio de Weierstrass. Para demostrar la convergencia de la serie dada en la ecuación (A.0.28) se hará uso del Teorema A.0.1, con  $b_n = \frac{1}{n^2}$ , cuya serie asociada es convergente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma - \sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2} \right] n^2}{2\sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2}}, \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left[ \left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - \left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 + 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 \right]}{2\sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2} \left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma + \sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2} \right]}, \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^4}{(1-\gamma)^2 \left(\frac{a\pi}{L}\right)^4 n^4 - 2b\gamma (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 + b^2\gamma^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma} \sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2}, \\
&= \frac{2\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^4}{(1-\gamma)^2 \left(\frac{a\pi}{L}\right)^4 n^4 - \gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 [2b(1-\gamma) + 4] + (b\gamma)^2 + \sqrt{\left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^4 - 4\gamma \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 \left[ (1-\gamma) \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2 n^2 - b\gamma \right]^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^4 \right\} \div \left\{ (1-\gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 n^4 - 2\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 [b(1-\gamma) + 2] + (b\gamma)^2 \right. \\
&+ \left. \left[ (1-\gamma)^4 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^8 n^8 - 4b\gamma(1-\gamma)^3 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^6 n^6 + 6(b\gamma)^2(1-\gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 n^4 - 4(1-\gamma)(b\gamma)^3 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^2 + (b\gamma)^4 \right. \right. \\
&\left. \left. - 4\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 \left( (1-\gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 n^6 - 2b\gamma(1-\gamma) \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2 n^4 + (b\gamma)^2 n^2 \right]^{1/2} \right\}. \tag{A.0.29}
\end{aligned}$$

Al dividir tanto el numerador como denominar por  $n^4$  en la ecuación (A.0.29) se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2\gamma \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2}{(1-\gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^4 + (1-\gamma)^2 \left( \frac{a\pi}{L} \right)^2} = \frac{\gamma L^2}{(1-\gamma)^2 (a\pi)^2}, \tag{A.0.30}$$

la cual es una constante. Dado que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, de acuerdo al Teorema A.0.1 se deduce que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$  también converge uniformemente, lo cual se deseaba probar.

*Q.E.D.*

---

## Referencias

---

- [1] GORENFLO, R. y MAINARDI, F. Fractional Calculus, Integral and Differential Equations of Fractional Orden. Preprint arXiv: 0805.3823.
- [2] LOMBARDERO OZORES, A. Cálculo fraccionario y dininámica newtoniana, *Revista Pensamiento Matemático*, 4 (1): 77-105, abril 2014. ISSN 2174-0410.
- [3] PIERANTOZZI, T. Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas. Tesis (Doctor en Matemáticas). Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas, 2006. 224 p.
- [4] GUÍA CALDERÓN, M., ROSALES GARCÍA, J. J., CABRERA GUZMÁN, R., GONZÁLES PARADA, A. y ÁLVAREZ JAIME, J. A. El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta Universitaria*, 25 (2): 20-27, abril 2015. ISSN: 0188-6266.
- [5] SÁNCHEZ MUÑOZ, J. M. Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, (1): 1-15, octubre 2011. ISSN 2174-0410.
- [6] YOANA MEDINA, L. y CABRERA, F. Aplicación del cálculo fraccional a la pérdida de energía en la propagación de ondas sísmicas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*. 29 (36): 3671-3681, noviembre 2010.
- [7] ALICIA MONJE, C., *et al.* Fractional-order System and Controls Fundamentals and Applications. 1a ed. Londres: Springer, 2010. 409 p. ISBN: 978-1-84996-334-3.
- [8] MAINARDI, F. Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena. *Chaos Solitons and Fractals*, 7 (9): 1461-1477, septiembre 1996.
- [9] CAPUTO, M. y FABRIZIO, M. A new definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1 (2): 73-85, abril 2015.

- [10] LOZADA, J. y NIETO, J. J. Properties of a New Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1 (2): 87-92, abril 2015.
- [11] PODLUBNY, I. Fractional differential equations. 1a ed. San Diego CA: Academic Press, 1999. 340 p. ISBN: 0-12-558840-2.
- [12] PRABHKAR T., R. A singular kernel equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Mathematical Journal*, 19 : 7-15, 1971.
- [13] TOMOVSKY, Z., M. SRIVASTAVA, H. y HILFER, R. Fractional and operational calculus with generalized fractional operators and Mittag-Leffler type functions. *Integral transforms and special functions*. 21 (11): 797-814. Noviembre 2010. ISSN: 1065-2469.
- [14] TOMOVSKI, Z. y SANDEV, T. Effects of a fractional friction with power-law memory kernel on string vibrations. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 (3): 1554-1561, mayo 2011. ISSN: 0898-1221.
- [15] TOMOVSKI, Z. y SANDEV, T. Fractional wave equation with a frictional memory kernel of Mittag-Leffler type. *Computers and Mathematics with Applications*, 218 (20): 10022-10031, abril 2012. ISSN: 0096-3003.
- [16] ATANGANA, A. y T. ALKAHTANI, B. S. Analysis of the Keller-Segel Model with a Fractional Derivative without Singular Kernel. *Entropy* 17 (6): 4439-4453, junio 2015. ISSN: 1099-4300.
- [17] CONSTANTINESCU, D. y STOICESCU. Fractal dynamics as long range memory modeling technique. *Physics AUC*, 21: 114-120, 2011. ISSN: 1223-6039.
- [18] E. BOYCE, W y C. DIPRIMA, R. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4a. ed. México, D.F.: Limusa, 2000. 758 p. ISBN: 968-18-4974-4.
- [19] KOMECH, A. y KOMECH, A. Principles of Partial Differential Equations. 1a ed. New York: Springer, 2009. 161 p. ISBN 978-1-4419-1095-0.
- [20] EDWARDS HENRY, C. y PENNEY E., D. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4a. ed. México: Pearson Educación, 2009. 824 p. ISBN: 978-970-26-1285-8.

- [21] KENT NAGLE, R., B. SAFF, E. y DAVID SNIDER, A. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4a. ed. México: Pearson Educación, 2005. 816 p. ISBN: 970-26-0592-X.
- [22] SALSA, S. (2008). Partial differential equations in action from modelling to theory. 1a. ed. Milano: Springer, 2008. 556 p. ISBN: 978-88-470-0751-2.
- [23] G. ZILL, D. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 9a. ed. México: Cengage Learning, 2009. 430 p. ISBN: 607-481-313-2.
- [24] HABERMAN, R. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. 2a ed. Estados Unidos de América: Prentice Hall, 1987. 532 p. ISBN: 0-13-252875-4.
- [25] WEINBERGUER, H. F. A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods. 1a. ed. New York: Dover Publications Inc. 1995. 446 p. ISBN: 0-486-68406840
- [26] MYINT-U, T. DEBNATH, L. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. 4a. ed. Berlin: Birkhäuser 2007. 778 p. ISBN: 978-0-8176-4393-5
- [27] IVORRA, C. 2011. Las fórmulas de Cardano-Ferrari. Disponible en <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf>
- [28] ABDELJAWAD, T. y BALEANU, D. On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions. Preprint arXiv:1606.07958v1.
- [29] A. ADAMS, R. y J. J. FOURNIER, J. Sobolev spaces. 2a ed. Países Bajos: Elsevier, 2003. 301 p. ISBN: 0-12-0444143-8.
- [30] YOUNG HUGH, D. y A. FREEDMAN, R. Física universitaria con física moderna volumen 2. 12a. ed. México: Pearson Educación, 2009. 896 p. ISBN: 978-607-442-304-4.
- [31] MORALES DELGADO, V. F. Ecuaciones de evolución-difusión de tipo Dirac y su aplicación a vigas. Tesis (Maestro en Matemáticas Aplicadas). Chilpancingo, México: Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, 2016. 99 p.
- [32] PODLUBNY, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and differentiation, Revista Fractional Calculus and Applied Analysis, 2001. arXiv preprint math/0110241v1.

- [33] TIKHONOV, A. N. y SAMARSKII, A. A. Equations of mathematical physics. 2a ed. New York: Dover Publications, 1963.
- [34] LIANG, J., CHEN, Y., VINAGRE, B. M., PODLUBNY, I. Boundary stabilization of a fractional wave equation via a fractional order boundary controller. En: *the first IFAC Symposium in Fractional Derivatives and Applications (FDA'04)*: Bordeaux, France, julio, 2004.
- [35] LIANG, J., ZHANG, W., CHEN, Y. Q., PODLUBNY, I. Robustness of boundary control of fractional wave equations with delayed boundary measurement using fractional order controller and the Smith predictor. En: *Proceedings of 2005 ASME Design Engineering Technical Conferences*: Long Beach, California, USA, 2005.
- [36] LIANG, J., CHEN, Y. Q. Hybrid symbolic and numerical simulation studies of time-fractional order wave-diffusion systems. *Int. J. Control* 79: 1462-1470, 2006.
- [37] SANDEV, T., TOMOVSKI, Z. y L.A. DUBBELDAM, J. Generalized Langevin equation with a three parameter Mittag-Leffler noise. *Physica A* 390: 3627-3636, junio 2011. ISSN: 0378-4371.
- [38] PANEVA-KONOVSKA, J. Inequalities and asymptotic for the three parametric Mittag-Leffler. *Mathematica Balkanica New Series*, 26: 203-210, 2012.
- [39] PANEVA-KONOVSKA, J. Convergence of series in three parametric Mittag-Leffler functions. *Mathematica Balkanica New Series* 64 (1): 73-84, febrero 2014.
- [40] TAKEUCHI, Y. Sucesiones y series, tomo I. 1a ed. México: Limusa, 1980. 220 p.