Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Ecuación de difusión anómala sobre una semirecta.

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestría en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Uriel Salmerón Rodríguez

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Martín P. Arciga Alejandre

Dr. Francisco J. Ariza Hernández

Abril de 2016.

Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Ecuación de difusión anómala sobre una semirrecta.

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestría en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Lic. Uriel Salmerón Rodríguez

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Martín P. Árciga Alejandre

Dr. Francisco J. Ariza Hernandez

Abril de 2016.

Agradecimientos

A mis padres, porque creyeron en mí y me sacaron adelante dándome ejemplos dignos de superación y entrega, gracias a ustedes hoy puedo ver alcanzada una meta más de mi vida.

A mis hermanos, abuelos, tíos, primos y amigos, por todos sus consejos y su apoyo incondicional.

A mis asesores, por creer en mí y permitirme trabajar a su lado.

A los profesores del núcleo basico de la Maestría en Matemáticas Aplicas, por su apoyo incondicional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de posgrado.

Resumen

En el presente trabajo, se estudia un problema de valor inicial y de frontera para una ecuación de difusión anómala sobre una semirrecta, donde el operador diferencial es tomado en el sentido de Riemann-Liouville. Adaptando las ideas principales del Método de Fokas [2], se construye una representación integral de la solución.

Abstract

In this work, we consider an initial-boundary value problem for an anomalous diffusion equation on the half-line, where the differential operator is taken in the sense of Riemann-Liouville. Adapting the main ideas of the Fokas method [2], we construct an integral representation of solutions.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

El cálculo fraccionario es la denominación dada para la extensión del cálculo que permite considerar la integración y la diferenciación de cualquier orden (no necesariamente entero). Los orígenes del cálculo fraccionario se remontan al final del siglo XVII, en el momento en que Newton y Leibniz desarrollaron las bases del cálculo diferencial e integral. En años recientes las ecuaciones diferenciales fraccionarias han sido de gran interés para matemáticos, ingenieros, físicos, biólogos, entre otros, debido a que se utilizan para modelar una gama amplia de fenómenos (véase [1], [3], [5], [6], [7] , [8], [10]). Las ecuaciones de difusión fraccionaria ha sido consideradas en la literatura por varios autores, por ejemplo Vásquez et al., [9] estudiaron una generalización de la segunda ley de la termodinámica en el marco del cálculo fraccionario. Magin et al., [12] investigaron la difusión anómala en un modelo exponencial que se utiliza para detectar y caracterizar enfermedades malignas e isquémicos, ellos incorporan un modelo de orden fraccionario.

Este trabajo se divide en dos capítulos, a saber: En el capítulo uno, se incluyen los conceptos preliminares y herramientas del análisis matemático necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. Por ejemplo, se mencionan algunas propiedades importantes de la función Gama de Euler, la cual es necesaria en la definición de derivada fraccionaria, también se estudia la transformada de Laplace, herramienta muy útil para resolver problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones diferenciales fraccionarias. En el capítulo dos, se estudia el problema de difusión sobre una semirrecta usando derivadas de orden entero, éste estudio se hace mediante el Método de Fokas [2], el cual consiste en construir una representación integral de la solución usando la transformada de Laplace y las propiedades geométricas del símbolo del operador diferencial. Posteriormente, adaptando las ideas principales del Método de Fokas, se estudia el problema de difusión anómala sobre una semirrecta, donde la derivada de orden uno en el tiempo se reemplaza por una derivada fraccionaria de tipo $Riemann - Liouville$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios de funciones

Se inicia definiendo algunos espacios necesarios para desarrollar la teoría que se ocupara en este trabajo.

Definición 2.1.1. *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *se define como*

$$\mathbf{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\},$$

al conjunto de todas las funciones continuas sobre $[a,b]$.

Este conjunto es un espacio normado, más aún es de Banach con la norma

$$\|f\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Definición 2.1.2. *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, se denota por* $\mathbf{C}^n[a,b]$ *el espacio de todas las funciones que son* n *veces diferenciables sobre* $[a,b]$*, es decir,*

$$\mathbf{C}^n[a,b] = \{f \in \mathbf{C}[a,b] : f^k \in \mathbf{C}[a,b], \quad k = 1, ..., n\}$$

este es un espacio normado, con norma

$$\|f\|_{\mathbf{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^k\|_{\mathbf{C}} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

$n \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathbf{C}^0[a,b] \equiv \mathbf{C}[a,b]$.

Definición 2.1.3. *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Se denota por* $\mathbf{L}^p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ *el espacio de todas las funciones Lebesgue medibles sobre* $[a,b]$, *y que cumplen* $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, *es decir,*

$$\mathbf{L}^p[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es medible sobre } [a,b], \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}.$$

La norma de este espacio se define como

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^p,$$

con esta norma $\mathbf{L}^p[a,b]$ es un espacio de Banach.

Definición 2.1.4. *Una función* f *definida en un intervalo* $[a,b]$ *es llamada absolutamente continua si, para toda colección de intervalos* (a_i, b_i) *disjuntos dos a dos en* $[a,b]$ *y para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que,*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

si $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. *Se denota al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas sobre* $[a,b]$ *como* $\mathbf{A}[a,b]$.

Una propiedad que tienen las funciones absolutamente continuas es el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5. $f \in \mathbf{A}[a,b]$ *si y sólo si existe casi en todas partes una función* $g \in \mathbf{L}^1[a,b]$, *tal que* $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$.

En general se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.6. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $[a,b]$ *se denotará por* $\mathbf{A}^n[a,b]$ *el espacio de todas las funciones de variable real que tienen* $n-1$ *derivadas continuas en* $[a,b]$, *tal que* $f^{n-1} \in \mathbf{A}[a,b])$, *en otras palabras, las funciones* f *para las que existe casi en todas partes una función* $g \in L^1[a,b]$, *tal que*

$$f^{n-1}(x) = f^{n-1}(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

En este caso se llama a g *como la* n*-ésima derivada de* f *y simplemente se escribe* $g = f^n$.

2.2. Teorema fundamental del cálculo.

Antes de dar las definiciones de los operadores de integración y de derivación fraccionarios, se recuerdan algunos resultados y definiciones del cálculo elemental que servirán como punto de partida para construir las definiciones.

Definición 2.2.1. *Se denota a la derivada de una función f por f', es decir,*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La idea básica detrás del cálculo fraccionario es la relación que se encuentra en el teorema fundamental del cálculo, entre la integral y la derivada, es decir, en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2. *Sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $F : [0, b] \to \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

entonces F es diferenciable y $F' = f$.

En notación de Leibnitz, se tiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$$

y por conveniencia se denotará como

$$D^1 Jf(x) = f(x),$$

donde

$$Jf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$ el operador D^n y J^n denotaran la n-ésima aplicación de D y J respectivamente, es decir,

$$J^n = JJ^{n-1}, \qquad D^n = DD^{n-1}.$$

Notese, que el teorema fundamental del cálculo nos dice que $DJf(x) = f(x)$, con lo que se tiene

$$D^n J^n f(x) = f(x),$$

para $n \in \mathbb{N}$, es decir, D^n es la inversa izquierda de J^n en un espacio de funciones conveniente. Por otro lado, de la definición de J^n para $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$J^n f(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n,$$

sin embargo, se puede cambiar esta definición por la siguiente formula explícita.

Lema 2.2.3. *Sea f Riemann integrable en $[0,b]$, entonces para $x \in [0,b]$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Demostración. Se demuestra por inducción sobre n.

Para $n = 1$ es trivial, dado que $0! = 1$ y que $(x-t)^{n-1} = 1$.

Supongase que se cumple para n, es decir,

$$J^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt. \tag{2.1}$$

Por definición del operador J^{n+1} y la ecuación (2.1), se tiene

$$\begin{aligned} J^{n+1} f(x) = JJ^n f(x) &= J\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt\right) \\ &= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\tau (\tau-t)^{n-1} f(t)dtd\tau, \end{aligned}$$

usando el teorema de Fubini véase [4], se encuentra

$$\begin{aligned} J^{n+1} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \int_t^x (\tau-t)^{n-1} f(t)d\tau dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n} f(t)dt, \end{aligned}$$

entonces

$$J^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)dt.$$

□

Otro resultado es el siguiente

Lema 2.2.4. *Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$, y sea f una función con n derivadas continuas en el intervalo $[0,b]$, entonces*

$$D^n f(x) = D^m J^{m-n} f(x).$$

Demostración. Esto es debido a que $f = D^{m-n} J^{m-n} f$ y $D^n D^{m-n} = D^m$. □

La pregunta que inmediatamente surge es: ¿se puede extender en las definiciones anteriores a $n \in \mathbb{N}$ por un $\alpha \in \mathbb{R}$?. Mas adelante se presenta la respuesta a esta pregunta.

2.3. La función Gama.

Para el desarrollo de las definiciones de los operadores fraccionarios es necesario introducir una función que, como se vera más adelante, juega un papel muy importante en la teoría del cálculo fraccionario, esta es la función Gama de Euler. La interpretación más simple que podemos dar a esta función es la siguiente: la función Gama constituye la generalización de el factorial, aunque el argumento de esta sea en general un número complejo, sin embargo, solo tomaremos la definición para los números reales. La función $\Gamma(x)$ ésta definida a través de una integral impropia como sigue.

Definición 2.3.1. *La función* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

es llamada función Gama de Euler.

Teorema 2.3.2. *La función Gama esta bien definida para* $x > 0$*.*

Demostración. A partir de la definición se divide la integral como sigue

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Ahora, para la primera integral se tiene que como $t > 0$, entonces $0 < e^{-t} < 1$, así

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt.$$

Además, si se toma a $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left. \frac{t^x}{x} \right|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{\epsilon^x}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

Por otro lado, si $x \leq 0$ la integral diverge, pues si $x = 0$ se observa que

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 t^{-1} dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} ln(t)|_\epsilon^1$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} (ln(1) - ln(\epsilon)) = \infty$$

y si $x < 0$, entonces $x - 1 < -1$, así $1 - x > 1$ y por lo tanto la integral

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{-(-x+1)} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$$

diverge tomando en cuenta el criterio de la $p - integral$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \infty & \text{si } p > 1, \\ \frac{1}{p-1} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \leq \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x},$$

si $x > 0$, es decir, la integral converge si $x > 0$. Para la otra integral se tienen dos casos:
Caso i) Cuando $x \leq 1$, se encontro que

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt,$$

además como $f(t) = t^{1-x}$ es creciente pues su derivada $f^{'}(t) = (1-x)t^{-x} \geq 0$, entonces $t^{1-x} \geq 1$ y así $\frac{1}{t^{1-x}} \leq 1$ por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt \leq \int_1^\infty e^{-t}dt = \lim_{\epsilon \to \infty} \int_1^\epsilon e^{-t}dt \\ = -\lim_{\epsilon \to \infty} e^{-t}|_1^\epsilon = -\lim_{\epsilon \to \infty}(e^{-\epsilon} - e^{-1}) = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Entonces para $0 < x \leq 1$ las dos integrales convergen, por lo tanto la función gama esta bien definida.
Caso ii) Tomando ahora a $x > 1$, sea $\alpha = [x]$ la parte entera de x, aplicando integración por partes α-veces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t}t^{1-x}dt &= \tfrac{1}{e} + (x-1)\tfrac{1}{e} + \cdots + (x-1)(x-2)\cdots(x-\alpha)\tfrac{1}{e} \\ &+ (x-1)(x-2)\cdots(x-\alpha-1)\left(\textstyle\int_1^\infty e^{-t}t^{x-\alpha-1}dt\right) \end{aligned}$$

además la

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-\alpha-1}dt$$

es acotada (procediendo como en el caso i). Así,

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{1-x}dt$$

es acotada si $x > 1$ entonces las dos integrales son acotadas cuando $x > 1$, por lo tanto la función Gama es acotada en estos dos caso. $\square$

A continuación se presentan algunas propiedades mas relevantes de la función Gama, que son necesarias para el análisis de la definición de los operadores fraccionarios. Notemos primero

que de la definición de la función Gama inmediatamente se obtiene que $\Gamma(1) = 1$.
Además, es posible que para $x > 0$ arbitrario, la integral en la definición de la función Gama sea manipulada por medio de la integración por partes. Esto produce el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *Si $x > 0$, entonces $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Demostración. Por definición de $\Gamma(x+1)$ se tiene que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{\epsilon \to \infty} \lim_{y \to 0^+} \int_y^\epsilon t^x e^{-t} dt.$$

Integrando por partes se encontro

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{\epsilon \to \infty} \lim_{y \to 0^+} \left([-t^x e^{-t}]_y^\epsilon + \int_y^\epsilon x t^{x-1} e^{-t} dt \right) = x \lim_{\epsilon \to \infty} \lim_{y \to 0^+} \int_y^\epsilon t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

En la siguiente propiedad se puede verificar la importante relación que existe entre la función Gama y el factorial de un número entero positivo.

Teorema 2.3.4. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Demostración. Se procede por inducción sobre n.
Si $n = 1$ entonces

$$\Gamma(1) = 1 = 0!.$$

Supongase que $\Gamma(n) = (n-1)!$, entonces por teorema anterior se tiene que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

□

La función Gama se puede extender de los reales positivos a los reales menos los enteros negativos con el cero de la siguiente forma. Despejando $\Gamma(x)$, de la ecuación $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ tomando a $x > 0$, se tiene que

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{2.2}$$

Como la parte derecha de (2.2) esta bien definida para $-1 < x < 0$ se puede definir $\Gamma(x)$ no solo para $x > 0$, sino también para $-1 < x < 0$.

Además, dado que

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+2)}{x+1}$$

tomando a $x > -1$, $x \neq 0$ y sustituyendo en la ecuación (2.2), se encuentra

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\frac{\Gamma(x+2)}{x+1}}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

entonces, podemos definir a $\Gamma(x)$ no solo para $x > 0$ y $-1 < x < 0$ sino también para $-2 < x < -1$. Siguiendo con esta analogía si $k \in \mathbb{N}$ se puede definir a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)\cdots(x+k-1)},$$

para $x > -k$, $x \neq 0, -1, -2, ..., -k+1$.

Así la función Gama esta bien definida no solo para los reales positivos sino para todo $\mathbb{R}$ a excepción de el conjunto $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

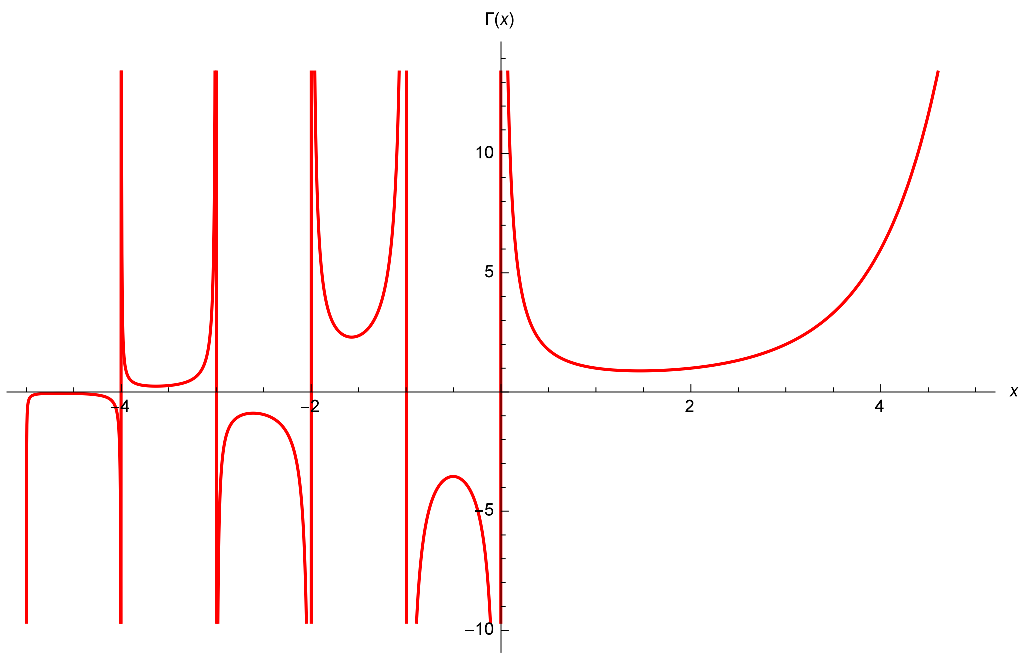

Figura 2.1: Gráfica de la función Gama extendida a $\mathbb{R}/(\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$.

También, es posible encontrar una representación alternativa, que se debe a Gauss, para la función Gama. Sin embargo, en los cálculos prácticos se observa con frecuencia que la representación integral es más fácil de manejar.

Teorema 2.3.5. *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, entonces*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Demostración. Se sabe que $e^{-t} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, entonces por definición

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = \frac{t}{n}$, se tiene que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds,$$

integrando por partes n-veces se encuentra

$$\int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

por lo tanto,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

□

A consecuencia de los resultados anteriores también se puede dar una representación más práctica para la función Gama en el caso de que $x \in (0,1)$ como sigue.

Teorema 2.3.6. *Sea $0 < x < 1$, entonces*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.3.5, se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{2}{x+2}\right)\cdots\left(\frac{n}{x+n}\right)\left(\frac{2^x}{1^x}\right)\left(\frac{3^x}{2^x}\right)\cdots\left(\frac{n^x}{(n-1)^x}\right).\end{aligned}$$

Reordenando se encuentra que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \prod^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\right],$$

entonces

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\right].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(-x) &= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]\frac{1}{-x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}\right] \\ &= \frac{1}{-x^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Usando la siguiente igualdad

$$\operatorname{sen} z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

entonces sustituyendo en (2.3)

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{1}{\frac{-x^2\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}} = \frac{-\pi}{x\operatorname{sen}\pi x}.$$

Además, como $\Gamma(-x) = -\frac{\Gamma(1-x)}{x}$, se obtiene

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}.$$

□

Ejemplo 2.3.7. *Calcular* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Sustituyendo en la fórmula anterior se encuentra que

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

por lo tanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Un último resultado que se menciona de la función Gama es el siguiente.

Teorema 2.3.8. *Sea* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *entonces*

$$\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

También se cumple que

$$\int_0^{\alpha} t^{y-1}(\alpha-t)^{x-1}dt = \alpha^{y+x-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demostración. Se prueba solo la primera igualdad. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds\right)\left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt\right)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty s^{x-1}t^{y-1}e^{-s-t}dsdt.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t=u^2$ y $s=v^2$, se encuentra

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty v^{2x-1}u^{2y-1}e^{-v^2-u^2}uvdvdu.$$

Pasando a coordenadas polares, se obtien

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(x+y-1)}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}e^{-r^2}rd\theta dr.$$

Haciendo $t=r^2$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 2\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{x+y-1}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}e^{-t}d\theta dt\\ &= 2\left(\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta\right)\end{aligned}$$

además por definición de $\Gamma(x+y)$, se tiene

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta\right).$$

Se demustra ahora que

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \int_0^1(1-t)^{x-1}t^{y-1}dt,$$

utilizando la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$, se encuentra

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos^2\theta)^x}{-sen^2\theta}\frac{(\cos^2\theta)^y}{\cos^2\theta}(-sen\theta\cos\theta)d\theta,$$

haciendo $t=\cos^2\theta$, se tiene

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \int_0^1\frac{(1-t)^x}{1-t}\frac{t^y}{t}dt.$$

Por lo tanto,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \int_0^1(1-t)^{x-1}t^{y-1}dt$$

lo que termina la demostración. □

2.4. Integral fraccionaria de *Riemann – Liouville*.

Después de estudiar la función Gama, tiene sentido extender el Lema 2.2.3, es decir, cambiar $n \in \mathbb{N}$ por un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y a su vez cambiar el factorial por su valor correspondiente en términos de la función Gama. Haciendo los cambios descritos tendremos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el operador J^α definido sobre $L^1[0,b]$ por*

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

para $0 \leq x \leq b$, es llamado operador integral fraccionario de orden α de Riemann–Liouville, para $\alpha = 0$ se define a $J^0 f(x) = I$ como el operador identidad.

Es evidente que el operador integral fraccionario de *Riemann – Liouville* coincide con la definición de J^α en el caso de que $\alpha \in \mathbb{N}$, a excepción de que ahora se extiende el dominio de integración de funciones *Riemann* integrables a funciones *Lebesgue* integrables. Por otro lado, en el caso de que $\alpha \geq 1$ es obvio que la integral J^α existe para cualquier $x \in [0,b]$, debido a que el integrando es un producto de una función integrable f y de una función continua $(x-t)^{\alpha-1}$. En el caso $0 < \alpha < 1$ la existencia no es tan obvia pero el siguiente resultado justifica la existencia de la definición del operador integral.

Teorema 2.4.2. *Sea $f \in L^1[0,b]$ y $\alpha > 0$, entonces la integral $J^\alpha f(x)$ existe para casi todo $x \in [0,b]$ y además $J^\alpha \in L^1[0,b]$.*

Demostración. Se nota que

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-t)\phi_2(t)dt,$$

donde

$$\phi_1(u) \in \begin{cases} u^{\alpha-1} & \text{para } 0 < u \leq b \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\phi_2(u) \in \begin{cases} f(u) & \text{para } 0 \leq u \leq b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por construcción $\phi_j \in L^1\{\mathbb{R}\}$, $j \in \{1,2\}$. Así, se tiene la convolución de $\phi_2(u)$ con $\phi_1(u)$, por lo tanto se cumple el resultado. $\square$

El siguiente teorema muestra que cuando el orden de la integral tiende a 0, entonces la integral es la misma función que se integra.

Teorema 2.4.3. *Sea* $\alpha > 0$ *y* $\phi \in L^1[0,b]$, *entonces*

$$\lim_{\alpha \to 0} J^\alpha \phi(x) = \phi(x)$$

casi en todas partes sobre $[0,b]$.

Demostración. Integrando por partes a $J^\alpha \phi(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} J^\alpha \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt \\ &= -\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\phi(t)(x-t)^\alpha |_0^x - \int_0^x (x-t)^\alpha \phi^{'}(t) dt \right], \end{aligned}$$

evaluando en 0 y en x se encuentra

$$J^\alpha \phi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-\phi(0)(x)^\alpha - \int_0^x (x-t)^\alpha \phi^{'}(t) dt \right],$$

tomando limite cuando $\alpha \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} J^\alpha \phi(x) &= \lim_{\alpha \to 0} \left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-\phi(0)(x)^\alpha - \int_0^x (x-t)^\alpha \phi^{'}(t) dt \right] \right] \\ &= \phi(0) + \int_0^x \phi^{'}(t) dt = \phi(x). \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es una generalización de una de las propiedades mas importantes del operador integral de orden entero.

Teorema 2.4.4. *Sea* $\alpha, \beta \geq 0$ *y* $\phi \in L^1[0,b]$, *entonces*

$$J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta} \phi$$

casi en todas partes sobre $[0,b]$. *Si además,* $\phi \in C[0,b]$ *o* $\alpha + \beta \geq 1$, *entonces se cumple sobre todo* $[0,b]$.

Demostración. Por definición se tiene

$$J^\alpha J^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) d\tau dt,$$

como la integral existe usamos el teorema de Fubini, encontrando

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\phi(\tau)dtd\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dtd\tau, \end{aligned}$$

ahora hacemos el cambio de variable $t = \tau + u(x-\tau)$

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \phi(\tau) \int_0^1 \left[(x-\tau)(1-u)\right]^{\alpha-1} \left[u(x-\tau)\right]^{\beta-1} dud\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}dud\tau, \end{aligned}$$

además, por el Teorema 2.3.8, se tiene

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

entonces

$$J^\alpha J^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x \phi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau = J^{\alpha+\beta}\phi(x),$$

por lo tanto, $J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta}\phi$ casi en todas partes sobre $[0,b]$.

Por otra parte, si $\phi \in C[0,b]$ entonces también $J^\beta \phi \in C[0,b]$ y por lo tanto $J^\alpha J^\beta \phi$ y $J^{\beta+\alpha}\phi$ $\in C[0,b]$, como son continuas y además son iguales casi en todas partes sobre $[0,b]$, se tiene que son iguales sobre todo $[0,b]$.

Ahora, si $\phi \in L^1[0,b]$ y $\alpha+\beta \geq 1$, se encuentra que

$$J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta+1-1}\phi = J^{\alpha+\beta-1}J^1\phi$$

casi en todas partes sobre $[0,b]$, como $J^1\phi$ es continua, entonces

$$J^{\alpha+\beta-1}J^1\phi$$

lo es, por lo tanto, $J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta}\phi$ sobre todo $[0,b]$. □

Corolario 2.4.5. *Con las mismas hipótesis del teorema anterior se tiene que*

$$J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha.$$

Demostración.

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha.$$

□

Teniendo estos últimos dos resultados se puede concluir lo siguiente.

Teorema 2.4.6. *El conjunto de operadores*

$$J = \{J^{\alpha} : L^1[0,b] \to L^1[0,b] : \alpha \geq 0\}$$

forma un semigrupo abeliano con elemento neutro J^0, respecto a la operación $J^{\beta}J^{\alpha}\phi = J^{\alpha+\beta}\phi$.

Demostración. Como

$$J^{\alpha}J^{\beta} = J^{\alpha+\beta}$$

está bien definida sobre el conjunto J si $\alpha, \beta \geq 0$, entonces se tiene que la operación es cerrada.

La asociatividad se da por la asociatividad de la suma de numeros reales, análogamente la conmutatividad.

El elemento neutro es J^0, pues

$$J^0J^{\alpha} = J^{0+\alpha} = J^{\alpha} = J^{\alpha+0} = J^{\alpha}J^0.$$

□

Ejemplo 2.4.7. *Sea $f(x) = x^b$ para algún $b > -1$ y $\alpha > 0$, entonces*

$$J^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\alpha+b+1)}x^{\alpha+b}.$$

Por definición se tiene

$$J^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^b dt,$$

usando el siguiente cambio de variable $s = \frac{t}{x}$, se obtiene

$$\begin{aligned} J^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}x^b s^b x ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+b}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^b ds. \end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 2.3.8 se encuentra

$$J^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\alpha+b+1)}x^{\alpha+b}.$$

Otro importante resultado es el de intercambiar el operador por el proceso de límite.

Teorema 2.4.8. *Sean $\alpha > 0$ y $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en $[0, b]$ que convergen uniformemente a f sobre $[0, b]$, entonces se puede intercambiar el operador integral fraccionario por el proceso de límite, es decir,*

$$J^{\alpha}\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right) = \lim_{k\to\infty} J^{\alpha} f_k.$$

En particular, la sucesión de funciones $(J^{\alpha} f_k)_{k=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente.

Demostración. Como $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a f cuando k tiende a ∞, entonces f es continua. Además,

$$\begin{aligned}
|J^{\alpha} f_k(x) - J^{\alpha} f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |f_k(t) - f(t)|(x-t)^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_{\infty} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_{\infty} x^{\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_{\infty} b^{\alpha},
\end{aligned}$$

entonces, $|J^{\alpha} f_k(x) - J^{\alpha} f(x)|$ converge uniformemente a 0 cuando $k \to \infty$, para todo $x \in [0, b]$, por lo tanto, $(J^{\alpha} f_k)_{k=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente. □

Corolario 2.4.9. *Sea f una función analítica en $(-h, h)$ para algún $h > 0$, y sea $\alpha > 0$, entonces*

$$J^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} D^k f(x)$$

para $0 \leq x < \frac{h}{2}$ y

$$J^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)} D^k f(0)$$

para $0 \leq x < h$. En particular, $J^{\alpha} f$ es analítica en $(0, h)$.

Demostración. Para la primera igualdad se tiene

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \tag{2.4}$$

como f es analítica en $(-h, h)$ también lo es en $[0, \frac{h}{2})$, entonces podemos calcular la serie de Taylor de $f(t)$ centrada en algún $x \in [0, \frac{h}{2})$, así

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)^k}{k!} D^k f(x)$$

y sustituyendo en (2.4), se encuentra

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-x)^k}{k!}D^kf(x)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-t)^k}{k!}D^kf(x)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-t)^{k+\alpha-1}}{k!}D^kf(x)dt
\end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 2.4.8 se intercambia la integral por la suma

$$J^{\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kD^kf(x)}{\Gamma(\alpha)k!}\int_0^x (x-t)^{k+\alpha-1}dt$$

resolviendo la integral se obtiene el primer resultado.

Para la segunda igualdad se expande primero a $f(x)$ centrada en 0, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x)^k}{k!}D^kf(0)$$

aplicando el operador integral, se obtiene

$$J^{\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^{\alpha}(x)^k}{k!}D^kf(0)$$

además, usando el Ejemplo 2.4.7 pues $k > -1$, se tiene

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{k+\alpha}}{k!}D^kf(0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{k+\alpha}}{k!}D^kf(0) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)}D^kf(0)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

Ejemplo 2.4.10. *Sea $f(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda > 0$. Calcular $J^{\alpha}f(x)$ para $\alpha > 0$. En el caso de $\alpha \in \mathbb{N}$ es evidente que $J^{\alpha}f(x) = \lambda^{-\alpha}e^{\lambda x}$. Sin embargo, este resultado no es el mismo cuando $\alpha \in \mathbb{R}$. Por el contrario, usando la serie de la función exponencial, el teorema anterior y el Ejemplo 2.4.7, se encuentra*

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}f(x) &= J^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}J^{\alpha}[x^k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{k+\alpha} = x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\
&= x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(\lambda x).
\end{aligned}$$

La serie en el lado derecho no es $e^{\lambda x}$, es la función $E_{1,\alpha+1}(\lambda x)$ que está definida como

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

notese que si $\alpha = \beta = 1$, entonces $E_{\alpha,\beta}(t) = e^t$. La función $E_{\alpha,\beta}(t)$ es conocida como la función de $Mittag - Leffer$.

2.5. Derivada fraccionaria de $Riemann - Liouville$.

Después de haber establecido estas propiedades del operador integral de $Riemann - Liouville$, definiremos el operador diferencial correspondiente. Para motivar la definición, recordando el Lema 2.2.4, que bajo ciertas condiciones es la siguiente identidad

$$D^\alpha f = D^n J^{n-\alpha} f,$$

donde α y n son números enteros tales que $n > \alpha$. Supongase ahora que α no es un número entero. En vista de la teoría desarrollada en la sección anterior, se puede optar por un $\alpha > 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$, tal que el lado derecho de la identidad sigua teniendo sentido, entonces se tiene la siguiente definición.

Definición 2.5.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$, el operador*

$$D^\alpha f = D^n J^{n-\alpha} f$$

es llamado operador diferencial fraccionaria de orden α de $Riemann - Liouville$.
Para $\alpha = 0$, D^0 sera el operador identidad.

Una vez más se observa que, como consecuencia del Lema 2.2.4, la definición de operador de $D^\alpha f$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ coincide con el operador diferencial $D^m f$ con $m \in \mathbb{N}$, siempre que $\alpha = m$. En el Lema 2.2.4 no se había requerido que n fuera tan pequeño como sea posible, de hecho se le permitía cualquier número naturale n siempre y cuando la desigualdad $n > \alpha$ se cumpliera. Una declaración similar se mantiene cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Lema 2.5.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha$, entonces*

$$D^\alpha = D^n J^{n-\alpha}.$$

Demostración. Por la propiedad de semigrupo en el Teorema 2.4.6 de los operadores J y dado que $n \geq \lceil \alpha \rceil$, se tiene

$$D^{\alpha} = D^{\lceil \alpha \rceil} J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} = D^{n} J^{n - \lceil \alpha \rceil} J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} = D^{n} J^{n-\alpha}.$$

□

El resultado siguiente contiene una condición suficiente para la existencia de D^{α}.

Teorema 2.5.3. *Sea* $f \in A^{1}[0, b]$, *entonces* $D^{\alpha} f$ *existe casi en todas partes sobre* $[0, b]$. *Además,* $D^{\alpha} f \in L^{p}[0, b]$ *para* $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ *y*

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int_{0}^{x} f^{'}(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right).$$

Demostración. Usando la definición de la derivada fraccionaria de $Riemann-Liouville$ y el echo de que $f \in A^{1}[0, b]$ se encuentra

$$\begin{aligned}
D^{\alpha} f(x) &= D^{\lceil \alpha \rceil} \left(\frac{1}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\lceil \alpha \rceil - \alpha - 1} f(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} \left(f(0) + \int_{0}^{t} f^{'}(u) du \right) dt \\
&= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \int_{0}^{t} f^{'}(u)(x-t)^{-\alpha} du dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \int_{0}^{t} f^{'}(u)(x-t)^{-\alpha} du dt \right).
\end{aligned}$$

Ahora por el teorema de $Fubini$ se puede intercambiar el orden de las integrales obteniendo

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} f^{'}(u) \frac{(x-u)^{1-\alpha}}{1-\alpha} du \right),$$

por lo tanto

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int_{0}^{x} f^{'}(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right).$$

La integrabilidad es una consecuencia inmediata de esta representación utilizando los resultados clásicos de la teoría de la integración de *Lebesgue*. □

Ejemplo 2.5.4. *Sea* $f(x) = x^{\beta}$ *para algún* $\beta > -1$ *y* $\alpha > 0$, *entonces*

$$D^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}.$$

Por el Ejemplo 2.4.7, se tiene

$$D^\alpha f(x) = D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha+\beta+1)} D^{\lceil\alpha\rceil}[x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha+\beta}]. \tag{2.5}$$

Si $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$, entonces el lado derecho de la ecuación (2.5) no es mas que la derivada de un polinomio de grado $\lceil\alpha\rceil - (n-\beta) \in \{0, 1, ...\lceil\alpha\rceil - 1\}$ y su expresión se desvanece, es decir,

$$D^\alpha[x^{\alpha-s}] = 0$$

para todo $\alpha > 0$ y $s \in \{0, 1, ..., \lceil\alpha\rceil\}$.

Por otra parte si $\alpha - \beta$ no pertenece a los naturales, entonces

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}.$$

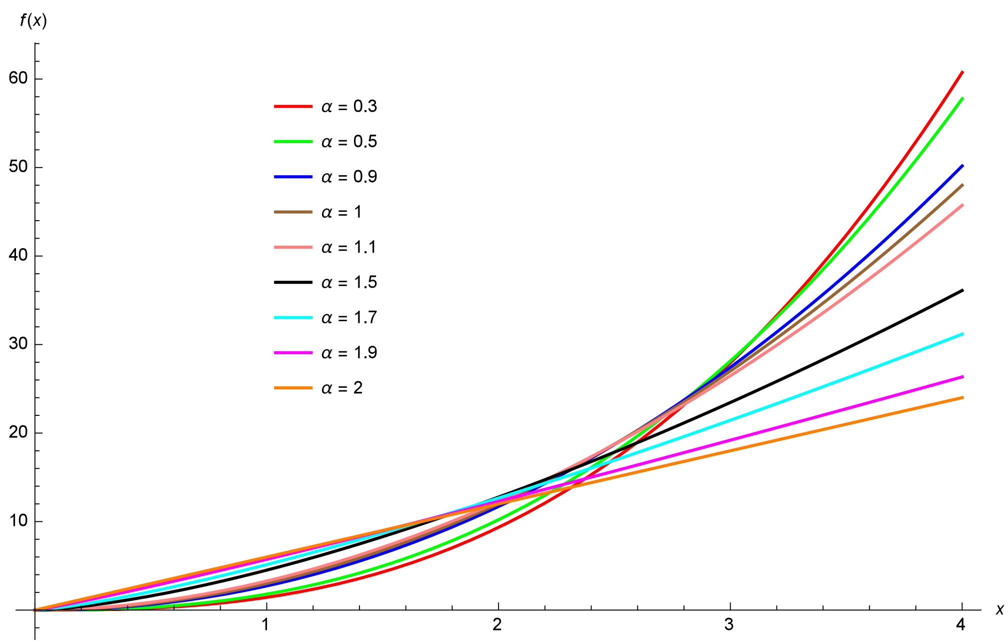

Figura 2.2: $D^\alpha x^3$ para distintos valores de α.

Se sabe que la derivada n-ésima de una función constante es 0 cuando $n \in \mathbb{N}$. Se esperaría un resultado análogo para cuando n no es natural, sin embargo esto no sucede para la derivada de $Riemann - Liouville$, para muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.5. *Sea la función $f(x) = 1$, entonces $D^\alpha f(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, para $0 < \alpha < 1$.*

Por definición se tiene

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^1\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

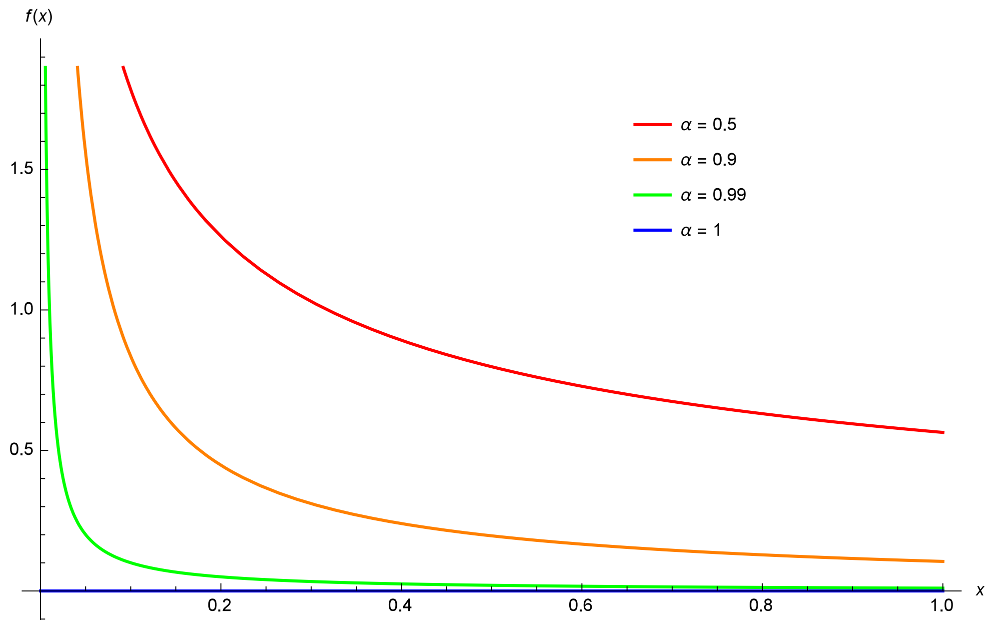

Figura 2.3: $D^\alpha 1$ para distintos valores de α.

Se a visto en el Teorema 2.4.6, que los operadores integrales de $Riemann - Liouville$ forman un semigrupo. Además, los operadores diferenciales $\{D^n : n \in \mathbb{N}\}$ también tienen una propiedad de semigrupo, por lo tanto es natural preguntarse si los operadores diferenciales de $Riemann - Liouville$ tienen tal estructura. El siguiente resultado muestra que la propiedad de semigrupo se cumple solo para algunas funciones, sin embargo esta propiedad no se cumple en general.

Teorema 2.5.6. *Sea* $\alpha,\ \beta \geq 0$, $\phi \in L^1[0,b]$ *y* $f = J^{\alpha+\beta}\phi$, *entonces*

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f.$$

Demostración. Por definición del operador diferencial fraccionario, se tiene

$$D^\alpha D^\beta f = D^\alpha D^\beta J^{\alpha+\beta}\phi = D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^{\lceil\beta\rceil} J^{\lceil\beta\rceil-\beta} J^{\alpha+\beta}\phi.$$

Por la propiedad de semigrupo de los operadores integrales de *Riemann − Liouvelle*, se encuentra

$$D^{\alpha}D^{\beta}f = D^{\lceil\alpha\rceil}J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}D^{\lceil\beta\rceil}J^{\lceil\beta\rceil+\alpha}\phi = D^{\lceil\alpha\rceil}J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}D^{\lceil\beta\rceil}J^{\lceil\beta\rceil}J^{\alpha}\phi,$$

por lo tanto

$$D^{\alpha}D^{\beta}f = \phi.$$

La demostración de que $D^{\alpha+\beta}f = \phi$ es similar. □

Esta propiedad no se cumple para cualquier f, aquí se presentan algunos ejemplos en donde dicha propiedad no se cumple.

Ejemplo 2.5.7. *Sea $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, entonces usando el Ejemplo 2.5.4, se tiene*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(x) = D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}Dx^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}Dx^{0} = \sqrt{\pi}(0) = 0, \end{aligned}$$

análogamente

$$D^{\beta}f(x) = D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

por lo tanto se encuentra

$$D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = 0 = D^{\beta}D^{\alpha}f(x).$$

Por otro lado se tiene que

$$D^{\alpha+\beta}f(x) = D^{1}f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ejemplo 2.5.8. *Sea $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$, entonces por el Ejemplo 2.5.4 se obtiene que*

$$D^{\alpha}f(x) = D^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}Dx^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma(2)}Dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\begin{aligned} D^{\beta}f(x) = D^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}D^{2}x^{2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}D^{2}x = 0, \end{aligned}$$

así

$$D^\alpha D^\beta f(x) = 0.$$

Por otro lado, se encuentra

$$\begin{aligned} D^\beta D^\alpha f(x) &= D^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = D^2 J^{2-\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\ &= D^2\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}dt\right] \\ &= D^2\left[\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}dt\right] = D^2 x^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

entonces

$$D^\beta D^\alpha f(x) = D^2 x^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = D^{\alpha+\beta} f(x).$$

En otras palabras, el Ejemplo 2.5.7 se muestra $D^\alpha D^\beta f = D^\beta D^\alpha f \neq D^{\alpha+\beta} f$, mientras que en el Ejemplo 2.5.8 se muestra $D^\alpha D^\beta f \neq D^\beta D^\alpha f = D^{\alpha+\beta} f$, es decir, la propiedad de semigrupo para los operadores diferenciales de $Riemann - Liouville$ en general no se cumple.

Una de las características principales que queríamos conseguir es $D^\alpha J^\alpha f = f$ para $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Resulta que para la definición de derivada fraccionaria de $Riemann - Liouville$ sí tienen esta propiedad.

Teorema 2.5.9. *Sea $\alpha \geq 0$, entonces para toda función $f \in L^1[0, b]$ se tiene que*

$$D^\alpha J^\alpha f = f$$

casi en todas partes sobre [0,b].

Demostración. Si $\alpha = 0$, entonces la igualad se cumple debido a que los operadores son los de la identidad.

Para $\alpha > 0$ se toma a $n = \lceil \alpha \rceil$, entonces

$$D^\alpha J^\alpha f(x) = D^n J^{n-\alpha} J^\alpha f(x) = f(x).$$

□

Ahora se llega a un resultado análogo del Teorema 2.4.8.

Teorema 2.5.10. *Sea* $\alpha > 0$*, supongamos que* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones continuas uniformemente convergentes sobre* $[0, b]$*, y que* $D^\alpha f_k$ *existe para todo* k*. Por otro lado supongase que* $(D^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ *converge uniformemente sobre* $[\epsilon, b]$ *para todo* $\epsilon > 0$*, entonces para todo* $x \in (0, b]$*, se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} D^\alpha f_k = D^\alpha \left(\lim_{k\to\infty} f_k \right).$$

Demostración. Por definición de D^α, se encuentra

$$\lim_{k\to\infty} D^\alpha f_k = \lim_{k\to\infty} D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f_k.$$

Además, por el Teorema 2.4.8, la sucesión $(J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f_k)_k$ es uniformemente convergente, entonces por hipótesis la sucesión $(D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f_k)_k$ es uniformemente convergente sobre cada subintervalo compacto de $(0, b]$, así

$$\lim_{k\to\infty} D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f_k = D^{\lceil\alpha\rceil} J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} \left(\lim_{k\to\infty} f_k \right) = D^\alpha \left(\lim_{k\to\infty} f_k \right).$$

□

Al igual que el teorema anterior se puede deducir inmediatamente el análogo del Corolario 2.4.9.

Teorema 2.5.11. *Sea* f *una función analítica en el intervalo* $(-h, h)$ *para algún* $h > 0$*, y sea* $\alpha > 0$*,* $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{N}$*, entonces*

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(x)$$

para $0 < x < \frac{h}{2}$ *y*

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(x)$$

para $0 < x < h$*. En particular,* $D^\alpha f$ *es analítica en* $(0, h)$*.*

Demostración. Usando el Corolario 2.4.9, se encuentra

$$J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - \lceil\alpha\rceil}{k} \frac{x^{k+\lceil\alpha\rceil-\alpha}}{\Gamma(k+1+\lceil\alpha\rceil-\alpha)} D^k f(x).$$

Derivando $\lceil\alpha\rceil$ veces respecto a x, se tiene

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - \lceil\alpha\rceil}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+\lceil\alpha\rceil-\alpha)} D^{\lceil\alpha\rceil} \left[x^{k+\lceil\alpha\rceil-\alpha} D^k f(x) \right].$$

Aplicando la formula de Leibniz (formula que se analizará más adelante) para la derivada de orden $\lceil\alpha\rceil$ de un producto de funciones

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-\lceil\alpha\rceil}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+\lceil\alpha\rceil-\alpha)} \sum_{j=0}^{\lceil\alpha\rceil} \binom{\lceil\alpha\rceil}{j} D^{\lceil\alpha\rceil-j}[x^{k+\lceil\alpha\rceil-\alpha}] D^{k+j} f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-\lceil\alpha\rceil}{k} \sum_{j=0}^{\lceil\alpha\rceil} \binom{\lceil\alpha\rceil}{j} \frac{x^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+1+j-\alpha)} D^{k+j} f(x).
\end{aligned}
$$

Por definición, $\binom{u}{j}=0$ si $u\in\mathbb{N}$ y $u<j$, por lo tanto se puede reemplazar el límite $\lceil\alpha\rceil$ de la suma interior por ∞ y sustituyendo $j=l-k$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \binom{-\lceil\alpha\rceil}{k} \binom{\lceil\alpha\rceil}{l-k} \frac{x^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^{l} f(x) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-\lceil\alpha\rceil}{k} \binom{\lceil\alpha\rceil}{l-k} \frac{x^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^{l} f(x),
\end{aligned}
$$

además se tiene

$$
\sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-\lceil\alpha\rceil}{k} \binom{\lceil\alpha\rceil}{l-k} = \binom{\alpha}{l},
$$

por lo tanto se cumple el resultado deseado. □

Otra propiedad interesante de la derivada fraccionaria es la linealidad.

Teorema 2.5.12. *Sea f y g dos funciones definidas en $[0,b]$ tal que $D^{\alpha}f$ y $D^{\alpha}g$ existen casi en todas partes sobre [0,b] y sea $c\in\mathbb{R}$, entonces $D^{\alpha}(cf+g)$ existen casi en todas partes sobre [0,b], y*

$$
D^{\alpha}(cf+g) = cD^{\alpha}f + D^{\alpha}g.
$$

Demostración. Esta propiedad de linealidad es una consecuencia inmediata de la definición del operador fraccionario. □

Cuando se trata de productos de funciones, la situación es completamente diferente, en el caso entero se tiene el siguiente resultado bien conocido (que ya se a utilizado en la demostración del Teorema 2.5.11).

Teorema (fórmula de Leibniz) *Sea $n\in\mathbb{N}$, y sea $f,g\in C^{n}[0,b]$, entonces*

$$
D^{n}[fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{k}f)(D^{n-k}g).
$$

Se puede destacar dos propiedades especiales de este resultado: La fórmula es simétrica, es decir, se pueden intercambiar f y g en ambos lados de la ecuación sin alterar la expresión y para evaluar la derivada enésima del producto fg, sólo se necesita la derivada hasta el orden n de f y de g, en particular, ninguno de los factores necesita tener un derivada de orden $n+1$. El siguiente teorema transfiere la fórmula de *Leibniz* para el orden fraccionario, y es inmediatamente evidente que estas dos propiedades se pierden.

Teorema 2.5.13 (Fórmula de *Leibniz* para los operadores de *Riemann* $-$ *Liouville*)**.** *Sea* $\alpha > 0$, *y sean* f, g *dos funciones analíticas sobre* $(-h, h)$ *con* $h > 0$, *entonces*

$$D^{\alpha}[fg](x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \binom{\alpha}{k} (D^k f)(x)(D^{\alpha-k} g)(x) + \sum_{k=\lfloor \alpha \rfloor+1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^k f)(x)(J^{k-\alpha} g)(x),$$

para $0 < x < \frac{h}{2}$.

Téngase en cuenta que en esta teorema k recorre los números enteros positivos, y por lo tanto se debe tener $f \in C^{\infty}[0, b]$ con el fin de que el lado derecho tenga sentido, mientras que g sólo necesita suavidad hasta el orden α, pero para la prueba es necesario la analiticidad del producto fg, y esto generalmente sólo se asegura si g también esta en $C^{\infty}[0, b]$. Esto muestra que las dos propiedades principales indicadas arriba se pierden. Por último cabe mencionar que en el lado derecho esta el operador integral de *Riemann* $-$ *Liouville*, expresión que no estaban presente en la formulación clásica. A pesar de todas estas diferencias se recupera el resultado clásico del resultado fraccionario usando un valor entero para α, porque los coeficientes binomiales $\binom{\alpha}{k}$ desaparecen para $k > \alpha$ de modo que la segunda suma desaparece.

Demostración. En vista del Teorema 2.5.11, se tiene

$$D^{\alpha}[fg](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k[fg](x).$$

Aplicando la fórmula clásica de *Leibniz* al operador $D^k[fg]$ e intercambiando el orden de la sumas, haciendo $j+l=k$, se obtiene

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}[fg](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{k}{j} D^j f(x) D^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j+l} \frac{x^{j+l-\alpha}}{\Gamma(j+l+1-\alpha)} \binom{j+l}{j} D^l g(x),
\end{aligned}$$

además, dado que

$$\binom{r}{j+l}\binom{j+l}{j} = \binom{r}{j}\binom{r-j}{l},$$

se encuentra

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}[fg](x) &= \sum_{j=0}^{\infty} D^j f(x) \binom{\alpha}{j} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{l} \frac{x^{j+l-\alpha}}{\Gamma(j+l+1-\alpha)} D^l g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \binom{\alpha}{j} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{l} \frac{x^{j+l-\alpha}}{\Gamma(j+l+1-\alpha)} D^l g(x) \\
&+ \sum_{j=\lfloor\alpha\rfloor+1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} D^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-(j-\alpha)}{l} \frac{x^{j+l-\alpha}}{\Gamma(j+l+1-\alpha)} D^l g(x).
\end{aligned}$$

Por la primera parte de el Teorema 2.5.11, el Corolario 2.4.9 respectivamente y sustituyendo en la suma interior se obtiene el resultado deseado. □

Después de haber establecido una teoría de operadores diferencial e integrales de *Riemann – Liouville* por separado, ahora se dira como se relacionan. Un primer resultado muy importante ya se ha demostrado en el Teorema 2.5.9, es decir, el D^{α} es la inversa izquierda de J^{α}. Sin embargo, no se puede afirmar que se trata de la inversa por la derecha, más precisamente, se tiene la siguiente situación.

Teorema 2.5.14. *Sea $\alpha > 0$. Si existe alguna función $\phi \in L^1[0,b]$ tal que $f = J^{\alpha}\phi$, entonces*

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f = f$$

casi en todas partes sobre $[0,b]$.

Demostración. Por definición de f y por el Teorema 2.5.9, se encuentra

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f = J^{\alpha}[D^{\alpha} J^{\alpha} \phi] = J^{\alpha}\phi = f.$$

□

Si f no es de la forma que aparece en el teorema anterior, entonces se tiene lo siguiente.

Teorema 2.5.15. *Sea $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ y supongamos que f es tal que $J^{n-\alpha}f \in A^n[0,b]$, entonces*

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z\to 0^+} D^{n-k-1} J^{n-\alpha} f(z).$$

Por otro lado, para $0 < \alpha < 1$ se tiene

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z\to 0^+} J^{1-\alpha} f(z).$$

Demostración. En primer lugar, tengase en cuenta que los límites a la derecha existen debido a la hipótesis sobre f que implica la continuidad de $D^{n-1}J^{n-\alpha}f$. Además, debido a este supuesto, existe alguna $\phi \in L^1[0,b]$, tal que $D^{n-1}J^{n-\alpha}f = D^{n-1}J^{n-\alpha}f(0) + J^1\phi$. Esta es una ecuación diferencial ordinaria de order $n-1$ para $J^{n-\alpha}f$, su solución es de la forma

$$J^{n-\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) + J^n\phi(x),$$

entonces por definición de D^α y el Teorema 2.5.9,

$$\begin{aligned} J^\alpha D^\alpha f(x) &= J^\alpha D^n J^{n-\alpha} f(x) \\ &= J^\alpha D^n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) + J^n\phi(x) \right] \\ &= J^\alpha D^n J^n \phi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J^\alpha D^n x^k}{k!} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) \\ &= J^\alpha \phi(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, aplicando el operador $D^{n-\alpha}$ a ambos lados de la solución de la ecuación diferencial ordinaria y en vista del Teorema 2.5.9, se encuentra

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{n-\alpha}x^k}{k!} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) + D^{n-\alpha} J^n \phi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{n-\alpha}x^k}{k!} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) + D^1 J^{1-n+\alpha} J^n \phi(x). \end{aligned}$$

Utilizando el Ejemplo 2.5.4, la propiedad de semigrupo de los operadores integrales fraccionarios y el Teorema 2.5.9, se obtiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+\alpha-n}}{\Gamma(k+\alpha-n+1)} \lim_{z\to 0^+} D^k J^{n-\alpha} f(z) + J^\alpha \phi(x). \tag{2.8}$$

Finalmente sustituyendo a k por $n-k-1$ en la suma de la ecuación (2.8), despejando a $J^{\alpha}\phi(x)$ y por (2.7), se tiene

$$J^{\alpha}D^{\alpha}f(x) = J^{\alpha}\phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z\to 0^+} D^{n-k-1}J^{n-\alpha}f(z),$$

encontrando así el resultado desea. $\square$

En el Ejemplo 2.6, se mensiona que la derivada de *Riemann* $-$ *Liouville* de una función constante no es cero para $x>0$. Debido a esto surgió la idea de definir la derivada fraccionaria de la siguiente forma.

Definición 2.5.16. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$, el operador*

$$D_c^{\alpha} f = J^{n-\alpha}D^n f$$

es llamado operador diferencial fraccionario de Caputo de orden α. Para $\alpha = 0$, D_c^0 será el operador identidad.

Notemose que, en este caso primero se deriva la función y después se integra, con esto se obtiene la siguiente propiedad.
Si $f(x) = k$, entonces

$$D_c^{\alpha} f(x) = 0.$$

Ahora se presenta el análogo del Ejemplo 2.5.4.

Ejemplo 2.5.17. *Sea $f(x) = x^{\beta}$ para $\beta \geq 0$, entonces*

$$D_c^{\alpha} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \in \{0,1,2,...,n-1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} & \text{si } \beta \in \mathbb{N},\ \beta \geq n \quad \text{ó} \quad \beta \notin \mathbb{N},\ \beta > n-1. \end{cases}$$

2.6. La transformada de Laplace

Antes de definir la transformada de Laplace se define primero una función integral muy importante para este análisis, se menciona como el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1. *Sea $[0,\infty)$, y $f,g \in L^1[0,\infty)$, entonces la integral*

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

existe para cualquier $x \in [0,\infty)$ y define una función $f * g \in L^1[0,\infty)$. Además, si $f,g,h \in L^1[0,\infty)$ se cumple que

1. $f * g = g * f$.

2. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

*La función $f * g$, es llamada la **convolución** o convolución producto de las funciones f y g.*

Demostración. La prueba de estas propiedades salen inmediatamente de la definición. □

Acontinuación se da la definición de la Transformada de Laplace.

Definición 2.6.2. *Sea f una función definida en $0 \leq t < \infty$, la transformada de Laplace de la función f se define como*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

para $0 < s < \infty$.

Ejemplo 2.6.3. *La función $f(t) = 1$ tiene transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s}$ definida en $0 < s < \infty$. En efecto,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s},$$

para $0 < s < \infty$. Se observa que la integral diverge si $s \leq 0$.

Teorema 2.6.4. *(Criterio de Existencia). Supongase que f es una función definida en $0 \leq t < \infty$ que satisface las siguientes condiciones.*

1. Cada intervalo finito $[0, b]$ se puede dividir en un número finito de intervalos

$$[0, b_1], [b_1, b_2], \ldots [b_{n-1}, b]$$

tales que f es continua en (b_{k-1}, b_k) y $\lim_{t\to b_{k-1}} f(t)$, $\lim_{t\to b_k} f(t)$ existen y son finitos,

2. Existen constantes, $a \in \mathbb{R}$ y $M > 0$, tales que

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

para $0 \leq t < \infty$,

entonces f tiene transformada de Laplace definida en el intervalo $a < s < \infty$.

Si f cumple con estas dos propiedades se denomina función continua por tramos de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$.

Demostración. Por la propiedad 2) se tiene que

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{at} dt = M \int_0^\infty e^{-(s-a)} dt = \frac{M}{s-a}$$

para $a < s < \infty$. La condición 1) garantiza que las integrales finitas $\int\limits_0^b e^{-st} f(t) dt$ existen para todo $b > 0$. $\square$

Este operador tiene las siguientes propiedades básicas que, en particular, lo hacen de utilidad en el cálculo de soluciones de problemas de valor inicial, en ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.6.5. *Sean f y g funciones continuas por tramos de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$ y $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $\mathcal{L}\{af + g\} = a\mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$,
2. $\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \left(\mathcal{L}\{f\} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right)$,
3. $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{t^n f\}$,
4. $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$,
5. $\mathcal{L}\{\int\limits_0^t f(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}$.

Demostración. Solo se prueban la igualdad 2) y la 4) que son las mas interesantes. Para la demostración de 2) se usa inducción sobre n. Para $n = 1$, integrando por partes se tiene

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f\}$$

esto es debido a que $|f(t)| \leq Me^{at}$ lo que implica que $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ para $s > a$. Supongase que se cumple para n, entonces se demostrara que se cumple la siguiente igualdad.

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = s^{n+1} \left(\mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right).$$

En efecto, como

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = \mathcal{L}\{(f^{(n)})'\} = -f^{(n)}(0) + s\mathcal{L}\{f^{(n)}\},$$

entonces usando la hipótesis de inducción se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} &= -f^{(n)}(0) + s\left(s^n\left(\mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}}\right)\right) \\
&= s^{n+1}\left(\mathcal{L}\{f\} - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} + \frac{f^{(n)}(0)}{s^{n+1}}\right)\right) \\
&= s^{n+1}\left(\mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Se demostrara ahora el inciso 4), por definición

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} &= \left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy\right) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}f(x)g(y)dxdy,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = x + y$, se encuentra

$$\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = \int_0^\infty\int_y^\infty e^{-s(t)}f(t-y)g(y)dtdy.$$

Como se esta integrando sobre el conjunto

$$\{(t,y) := 0 \leq y < \infty,\ y \leq t < \infty\} = \{(t,y) : 0 \leq t < \infty,\ 0 \leq y \leq t\}$$

entonces, usando el teorema de Fubini se pueden escribir las integrales como

$$\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(t-y)g(y)dydt = \mathcal{L}\{f * g\}.$$

$\square$

A continuación se presenta una breve tabla de las transformadas de Laplace de algunas funciones

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Una propiedad fundamental de la transformada de Laplace es el siguiente teorema.

Teorema 2.6.6. *(propiedad de inversión). Sea f y g funciones continuas por tramos de orden exponencial en $0 \leq t < \infty$. Si $\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$ en un intervalo $a < s < \infty$, entonces en cada intervalo finito $[0, b]$ se tiene $f(t) = g(t)$, salvo a lo más un número finito de puntos.*

La propiedad de inversión implica que dada una función F definida en un intervalo $a < s < \infty$, si existe una función f definida en $0 \leq t < \infty$ tal que

$$\mathcal{L}\{f\} = F,$$

entonces la función f es esencialmente única.

Definición 2.6.7. *Una función F definida sobre $a < s < \infty$, tiene transformada inversa de Laplace si existe una función f definida en $0 \leq t < \infty$ tal que*

$$\mathcal{L}\{f\} = F.$$

En este caso, se dice que f es la transformada inversa de Laplace de F y se denota por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

También, las propiedades básicas de la transformada de Laplace implican propiedades de la transformada inversa de Laplace. Por ejemplo, si f y g tienen transformada inversa de Laplace, se tiene:

1. $\mathcal{L}^{-1}\{af + g\} = a\mathcal{L}^{-1}\{f\} + \mathcal{L}^{-1}\{g\}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{g^{(n)}\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{g\}$
3. $\mathcal{L}^{-1}\{fg\} = \mathcal{L}^{-1}\{f\} * \mathcal{L}^{-1}\{g\}$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\{\int\limits_s^\infty g(\tau)d\tau\} = \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{g\}$.

para a real y n natural.

A continuación se presenta una tabla con algunas transformadas inversas de Laplace

$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f\}(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\operatorname{sen}(at)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$

para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ y a constante.

Supongase ahora que se desea hallar la solución $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = f(t), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \\ x^{'}(0) = x_0^{'}. \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x'' + ax' + bx\} = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

entonces por la propiedad 2) de la transformada de Laplace, la ecuación se reduce a

$$s^2\mathcal{L}\{x\} - sx(0) - x'(0) + a\left(s\mathcal{L}\{x\} - x(0)\right) + b\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f\}.$$

Así la transformada de Laplace de la solución $x(t)$ es

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{\mathcal{L}\{f\}}{s^2 + as + b} + \frac{x_0 s + ax_0 + x_0'}{s^2 + as + b},$$

entonces la solución de la ecuación en $0 \leq t < \infty$ se obtiene mediante la transformada inversa de Laplace, es decir,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}\{f\}}{s^2 + as + b} + \frac{x_0 s + ax_0 + x_0'}{s^2 + as + b}\right\}.$$

Considerese el modelo de crecimiento poblacional

$$\begin{cases} x^{'}(t) - ax(t) = f(t), \ t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde, $x(t)$ es el número total de la población de alguna especie, x_0 es el número de la población al tiempo $t = 0$ y $f(t)$ es una fuente que interviene en el modelo.

Aplicando la transformada a la ecuación (2.10), se obtiene

$$s\mathcal{L}\{x\} - x(0) - a\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

entonces

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{x_0}{s - a} + \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{s - a}. \tag{2.10}$$

Aplicando la transformada inversa a (2.10), se encuentra

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} + e^{at} * f(t) \\ &= x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En estos ejemplos solo se a utilizado la transformada de Laplace para resolver problemas con derivadas enteras, sin embargo existen propiedades de esta transformada que permiten encontrar la solución de problemas con derivadas fraccionarias, por ejemplo para la derivada de Caputo y la derivada de $Riemann - Liouville$ se tiene la siguiente propiedad.

$$\mathcal{L}\{D_c^{\alpha} f(x)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha} f(x)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} s^{\lceil\alpha\rceil-k-1} D^{k}(J^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f)(0).$$

La prueba no es difícil solo se usa la definición de la transformada de Laplace. Otra propiedad que es conveniente es la siguiente

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha n+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(n)}(at^{\alpha})\} = \frac{n! s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{n+1}}. \tag{2.13}$$

Considerese ahora

$$\begin{cases} D_c^{\alpha} x(t) - ax(t) = f(t), \ t > 0, \alpha \in (0,1), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Por (2.12), se tiene

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{x\} - s^{\alpha-1}x(0) - a\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

así

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{s^{\alpha-1}x_0}{s^{\alpha}-a} + \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{s^{\alpha}-a}.$$

Aplicando (2.13), se encuentra

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 E_{\alpha,1}(at^{\alpha}) + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}) * f(t) \\ &= x_0 E_{\alpha,1}(at^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(t-\tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notese que la ecuación (2.11) y la ecuación (2.15) coinciden cuando $\alpha = 1$.

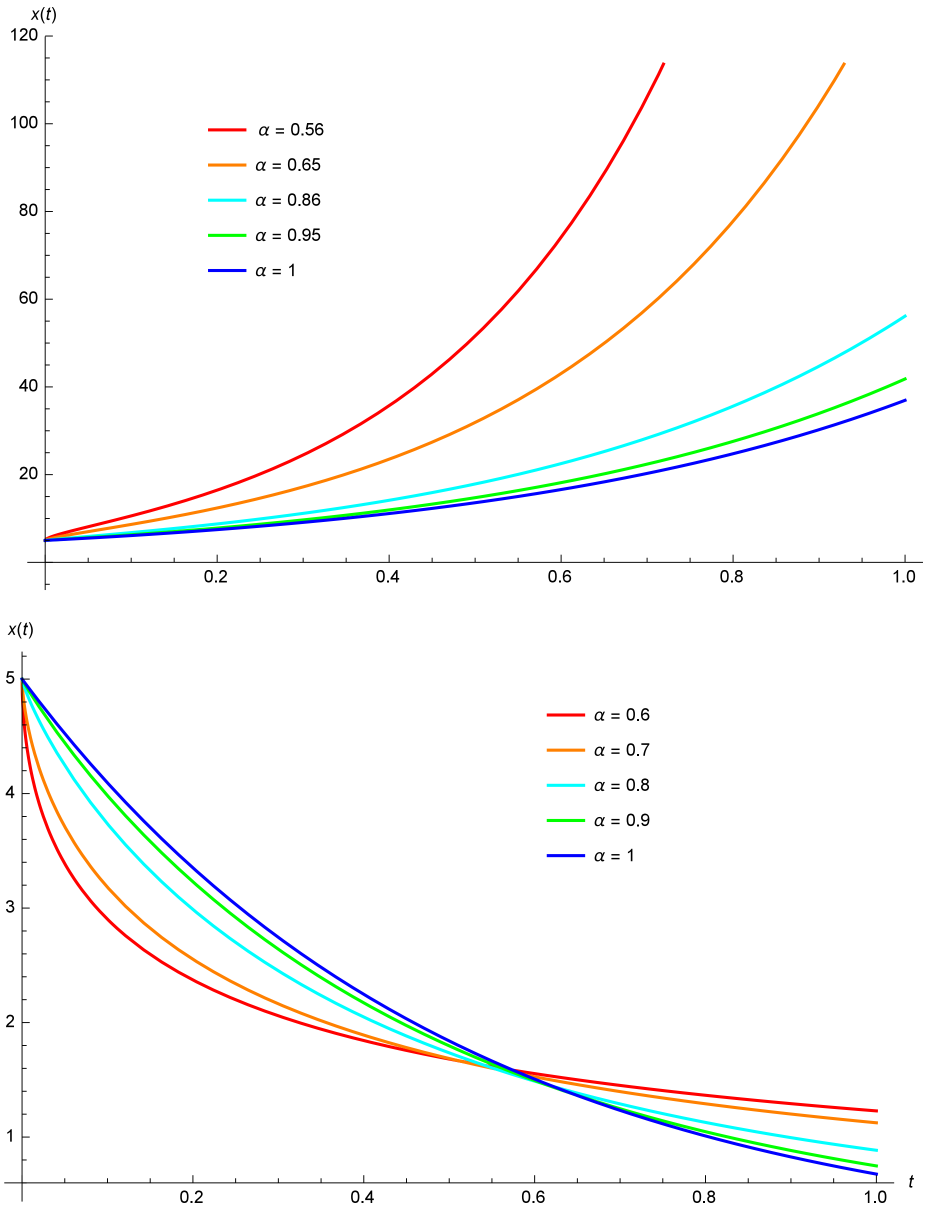

Figura 2.4: Solución para la ecuación (2.15), con $x_0 = 5$, $f(t) = 0$ y distintos valores para α, tomando primero $a = 2$ y despues $a = -2$.

Capítulo 3

Ecuaciones de difusión

La segunda ley de la termodinámica es un principio general que impone a la dirección de la transferencia de calor, por ejemplo, cuando dos objetos que están a diferente temperatura y se ponen en contacto térmico entre sí, el calor fluye del objeto más cálido al más frió, pero nunca del más frió al más cálido, esta ley es experimental y su nombre es Ley de Fourier (la ecuación $q_t(x,t) = q_{xx}(x,t)$ de difusión de calor es el caso mas sencillo).

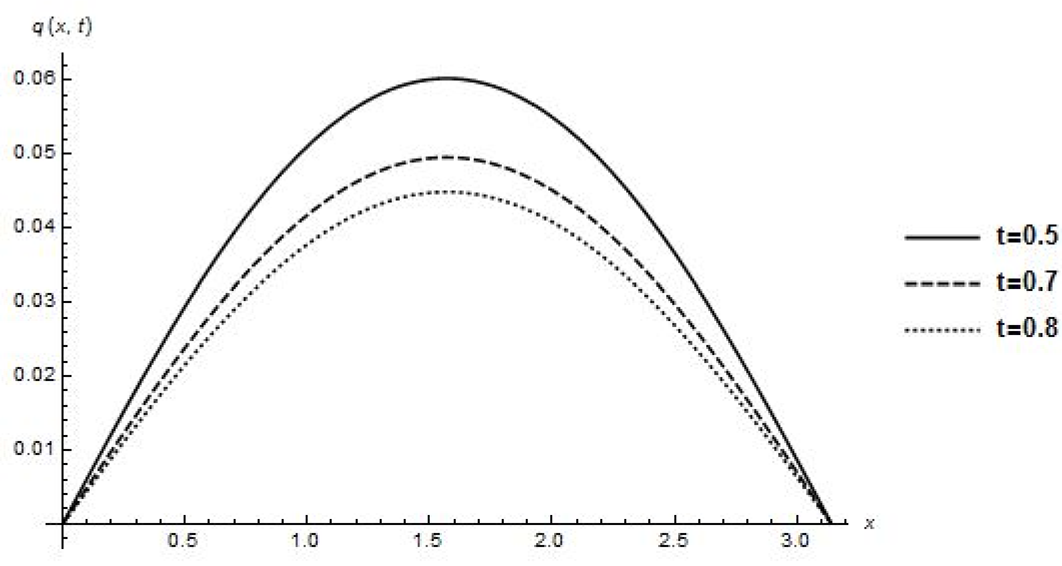

Figura 3.1: Comportamiento de la difusión de calor sobre un intervalo.

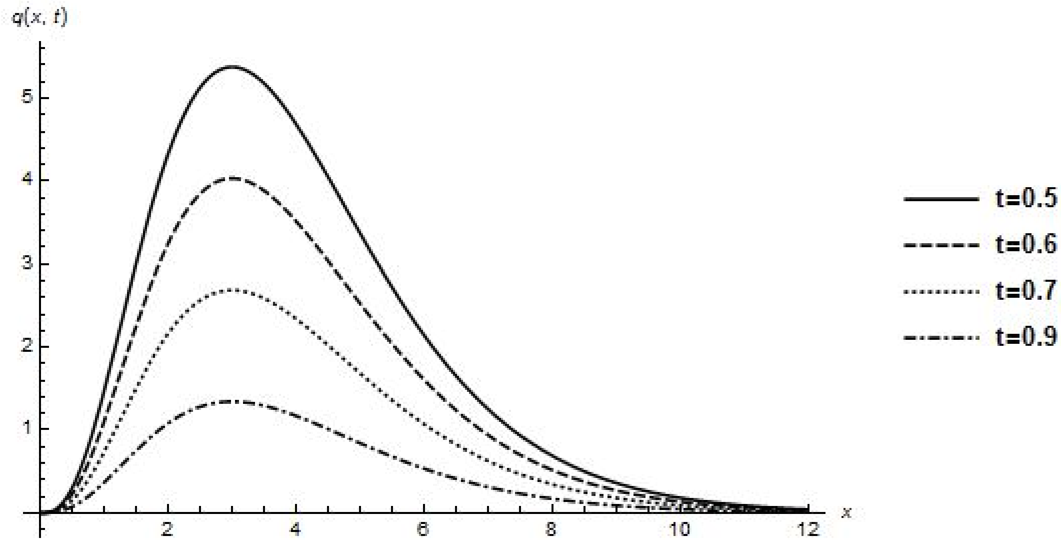

Figura 3.2: Comportamiento de la difusión de calor sobre $\mathbb{R}^+$.

3.1. Ecuación de difusión sobre una semirrecta

En esta sección, se estudia el modelo de difusión mediante el método de Fokas ver [2], éste método sirve para construir funciones integrales para ecuaciones de evolución sobre la semirrecta y utiliza la siguiente variante de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-ikx} f(x)dx, \quad Im(k) < 0, \tag{3.1}$$

ésta trasformada cumple todas las propiedades antes mencionadas de la trasformada de la Laplace, la única diferencia es que ahora se trabaja en el plano inferior tomando $Im(k) < 0$, por notación la llamaremos como $\widehat{f}(k)$. La trasformada inversa ésta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{f}(k)dk.$$

Considerese el modelo de difusión con valor inicial y de frontera siguiente

$$\begin{cases} q_t(x,t) = q_{xx}(x,t), & x > 0, \quad t \in [0,T], \\ q(x,0) = q_0(x), \\ q(0,t) = g_1(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

Se construirá la representación integral de la solución de éste modelo de difusión. Por la ecuación (3.1), se tiene

$$\widehat{q_t}(k,t) \;\; = \;\; \int_0^{\infty} e^{-ikx} q_t(x,t)dx, \tag{3.3}$$

sustituyendo la ecuación (3.2) en la ecuación (3.3), se encuentra

$$\widehat{q}_t(k,t) = \int_0^\infty e^{-ikx} q_{xx}(x,t)dx,$$

integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_t(k,t) &= \int_0^\infty e^{-ikx} dq_x(x,t) \\
&= [e^{-ikx} q_x(x,t)]_0^\infty + ik \int_0^\infty e^{-ikx} dq(x,t) \\
&= -q_x(0,t) + ik[[e^{-ikx} q(x,t)]_0^\infty + ik \int_0^\infty e^{-ikx} q(x,t)dx] \\
&= -q_x(0,t) + ik[-q(0,t) + ik\widehat{q}(k,t)] \\
&= -g_2(t) - ikg_1(t) + (ik)^2 \widehat{q}(k,t),
\end{aligned}$$

donde $g_2(t) = q_x(0,t)$, así

$$\widehat{q}_t(k,t) = -g_2(t) - ikg_1(t) + (ik)^2 \widehat{q}(k,t). \tag{3.4}$$

Notemose que la ecuación (3.4), es una ecuación diferencial ordinaria para $\widehat{q}(k,t)$, entonces multiplicando por su factor integrante $e^{-(ik)^2 t}$ e integrando por partes respecto de t, se obtiene que la parte izquierda de (3.4) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-(ik)^2 s} \widehat{q}_s(k,s)ds &= \int_0^t e^{-(ik)^2 s} d\widehat{q}(k,s) \\
&= [e^{-(ik)^2 s} \widehat{q}(k,s)]_0^t + (ik)^2 \int_0^t e^{-(ik)^2 s} \widehat{q}(k,s)ds \qquad (3.5) \\
&= e^{-(ik)^2 t} \widehat{q}(k,t) - \widehat{q}(k,0) + (ik)^2 \int_0^t e^{-(ik)^2 s} \widehat{q}(k,s)ds,
\end{aligned}$$

mientras que la parte derecha queda como

$$-\int_0^t e^{-(ik)^2 s} g_2(s)ds - ik \int_0^t e^{-(ik)^2 s} g_1(s)ds + (ik)^2 \int_0^t e^{-(ik)^2 s} \widehat{q}(k,s)ds, \tag{3.6}$$

entonces igualando las ecuaciones (3.5) y (3.6), se encuentra

$$e^{-(ik)^2 t} \widehat{q}(k,t) = \widehat{q}_0(k) - \int_0^t e^{-(ik)^2 s} g_2(s)ds - ik \int_0^t e^{-(ik)^2 s} g_1(s)ds.$$

Así

$$e^{-(ik)^2 t} \widehat{q}(k,t) = \widehat{q}_0(k) - \widetilde{g}_2(-(ik)^2, t) - ik\widetilde{g}_1(-(ik)^2, t), \tag{3.7}$$

donde

$$\widetilde{g}_j(k,t) = \int_0^t e^{ks} g_j(s) ds, \tag{3.8}$$

$j = 1, 2$ e $Im(k) \leq 0$.

Aplicando la transformada inversa a la ecuación (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t}\widehat{q}_0(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t}\widetilde{g}_2(-(ik)^2,t)dk \\ - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t} k\widetilde{g}_1(-(ik)^2,t)dk. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Notemose que si $k = k_R + ik_I$, se tiene que $ik = ik_R - k_I$, así e^{ikx} tiene decaimiento si $0 \leq k_I$ dado que $x > 0$, por otro lado $e^{(ik)^2t}$ tiene decaimiento si $Re((-k)^2) \leq 0$ dado que $t > 0$, y esto sucede en la region $|k_I| \leq |k_R|$, entonces se puede intercambiar el contorno de integración por ∂D donde

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : Arg(k) \in \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

así la ecuación (3.9) queda

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t}\widehat{q}_0(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t}\widetilde{g}_2(-(ik)^2,t)dk \\ - \frac{i}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t} k\widetilde{g}_1(-(ik)^2,t)dk. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $k \to -k$ en la ecuación (3.7) y dado que las ecuaciones (3.8) quedan invariantes, se tiene

$$e^{-(ik)^2t}\widehat{q}(-k,t) = \widehat{q}_0(-k) - \widetilde{g}_2(-(ik)^2,t) + ik\widetilde{g}_1(-(ik)^2,t), \tag{3.11}$$

notese que esta ecuación es válida en la región $0 \leq k_I$, además por el teorema de Cauchy [11] se tiene

$$\int_{\partial D} e^{ikx}\widehat{q}(-k,t)dk = 0,$$

entonces despejando a $\widetilde{g}_2(-(ik)^2,t)$ de (3.11) y sustituyendo en (3.10) se encuentra

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t}\widehat{q}_0(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t}\widehat{q}_0(-k)dk \\ - \frac{i}{\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t} k\widetilde{g}_1(-(ik)^2,t)dk, \end{aligned}$$

ahora por definición de $\widehat{q}$ y de $\widetilde{g}_1$ se tiene

$$\begin{aligned} q(x,t) = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^2t}\int_0^{\infty} e^{-iky}q_0(y)dydk \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t}\int_0^{\infty} e^{iky}q_0(y)dydk \\ & -\frac{i}{\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2t}k\int_0^{t} e^{-(ik)^2s}g_1(s)dsdk. \end{aligned}$$

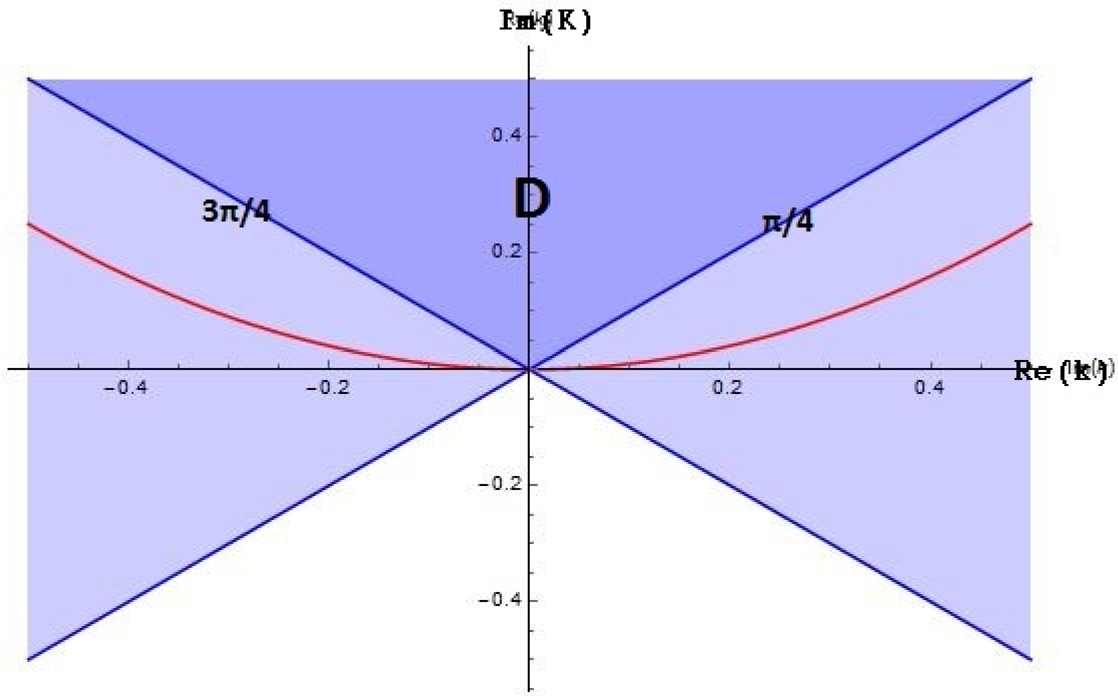

Figura 3.3: Region D para la ecuación de difusión de calor

Usando el teorema de Fubini para intercambiar las integrales se obtiene

$$\begin{aligned} q(x,t) = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_0(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)+(ik)^2t}dkdy \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_0(y)\int_{\partial D} e^{ik(x+y)+(ik)^2t}dkdy \\ & -\frac{i}{\pi}\int_0^{t} g_1(s)\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^2(t-s)}kdkds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la representación integral de la solución del modelo (3.2), es

$$q(x,t) = \int_0^{\infty} G^{(I)}(x,y,t)q_0(y)dy + \int_0^{t} G^{(B)}(x,t-s)g_1(s)ds,$$

donde

$$G^{(I)}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)+(ik)^2t}dk - \int_{\partial D} e^{ik(x+y)+(ik)^2t}dk\right),$$

$$G^{(B)}(x,t-s)=\frac{-i}{\pi}\int_{\partial D} k e^{ikx+(ik)^2(t-s)}dk.$$

3.2. Ecuación de difusión anómala sobre una semirrecta

La ecuación de difusión de calor se utiliza para los casos ordinarios en medios normales. Sin embargo, en muchos casos, los procesos tienen lugar en medios anómalos (tejidos orgánicos, materiales heterogéneos, etc.) con características que puede afectar a la evolución del flujo de energía, por ejemplo, la heterogeneidad del medio es un factor que puede modificar la velocidad del flujo de energía, pero es natural que la segunda ley de la termodinámica (ley de Fourier) no puede ser modificada, por esta razón es necesario introducir una variante que permita caracterizar este tipo de procesos complejos. Una manera posible de modelar esta variación es usar una derivada fraccionaria en la densidad de flujo de energía, de tal manera que esta derivada fraccionaria caracterice a la fuerte anormalidad del medio. Es por eso que después de haber estudiado en la sección anterior el modelo de difusión con derivada clásica, se estudiara ahora el modelo de difusión usando la derivada fraccionaria de *Riemann – Liouville* y también se usaran las ideas del matemático Athanassios S. Fokas, es decir, se usara la transformada

$$\widehat{q_t}(k,t)=\int_0^{\infty} e^{-ikx}q_t(x,t)dx,\quad Im(k)<0 \tag{3.12}$$

para encontrar la representación integral de la solución del siguiente problema de valor inicial y de frontera que involucra derivadas fraccionaria de tipo *Riemann – Liouville*. Sea

$$\begin{cases} q_t(x,t)=D_x^{\alpha}q(x,t), & x>0,\quad t\in[0,T],\\ q(x,0)=q_0(x), & \\ J^{2-\alpha}q(0,t)=g_1(t), & \end{cases} \tag{3.13}$$

donde D_x^{α} es la derivada fraccionaria y $J^{2-\alpha}$ es la integral fraccionarias de *Riemann – Liouville* respectivamente, $1<\alpha<2$.

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.12), se encuentra

$$\widehat{q_t}(k,t)=\int_0^{\infty} e^{-ikx}D_x^{\alpha}q(x,t)dx=\int_0^{\infty} e^{-ikx}D_x^{2}J^{2-\alpha}q(x,t)dx,$$

haciendo integración por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_t(k,t) &= \int_0^\infty e^{-ikx} dD_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t) = [e^{-ikx} D_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t)]_0^\infty + ik\int_0^\infty e^{-ikx} D_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t)dx \\
&= -D_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t)|_0 + ik \int_0^\infty e^{-ikx} dJ^{2-\alpha} q(x,t) \\
&= -D_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t)|_0 + ik[[e^{-ikx} J^{2-\alpha} q(x,t)]_0^\infty + ik\int_0^\infty e^{-ikx} J^{2-\alpha} q(x,t)dx] \\
&= -D_x^1 J^{2-\alpha} q(x,t)|_0 + ik[-J^{2-\alpha} q(x,t)|_0 + ik\widehat{J^{2-\alpha}} q(k,t)] \\
&= -g_2(t) - ikg_1(t) - k^2 \widehat{J^{2-\alpha}} q(k,t),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\widehat{q}_t(k,t) = -g_2(t) - ikg_1(t) + (ik)^2 \widehat{J^{2-\alpha}} q(k,t), \tag{3.14}$$

donde

$$D_x^1 J^{2-\alpha} q(0,t) = g_2(t).$$

Por la propiedad 4) del Teorema 2.6.5, se tiene

$$\widehat{J^{2-\alpha}} q(k,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \widehat{f(k) * q(k,t)} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \widehat{f}(k)\widehat{q}(k,t), \tag{3.15}$$

donde $f(x) = x^{1-\alpha}$, además se puede probar que

$$\widehat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-ikx} x^{1-\alpha} dx = (ik)^{\alpha-2}\Gamma(2-\alpha), \tag{3.16}$$

así sustituyendo (3.16) en (3.15), se tiene

$$\widehat{J^{2-\alpha}} q(k,t) = (ik)^{\alpha-2} \widehat{q}(k,t), \tag{3.17}$$

y finalmente sustituyendo (3.17) en (3.14), se encuentra la ecuación

$$\widehat{q}_t(k,t) = -g_2(t) - ikg_1(t) + (ik)^\alpha \widehat{q}(k,t), \tag{3.18}$$

donde $(ik)^\alpha = |k|^\alpha e^{i\alpha(arg(ik))}$ y se elige $arg(k)$ de la siguiente manera: para $\alpha \in (1, 4/3]$, $\frac{\pi(2-3\alpha)}{\alpha} < arg(k) \leq \frac{\pi(2-\alpha)}{\alpha}$, y para $\alpha \in (4/3, 2)$, $\frac{-3\pi}{2} < arg(k) \leq \frac{\pi}{2}$. Notemose que al igual que en la ecuación (3.4), la ecuación (3.18) es una ecuación diferencial ordinaria para $\widehat{q}(k,t)$, entonces procediendo como en el caso clásico, es decir, multiplicando por su factor integrante $e^{-(ik)^\alpha t}$ e integrando por partes respecto de t, se encuentra

$$e^{-(ik)^\alpha t}\widehat{q}(k,t) = \widehat{q}_0(k) - \int_0^t e^{-(ik)^\alpha s} g_2(s)ds - ik\int_0^t e^{-(ik)^\alpha s} g_1(s)ds,$$

por lo tanto

$$e^{-(ik)^\alpha t}\widehat{q}(k,t) = \widehat{q_0}(k) - \widetilde{g}_2(-(ik)^\alpha,t) - ik\widetilde{g}_1(-(ik)^\alpha,t), \tag{3.19}$$

donde

$$\widetilde{g}_j(k,t) = \int_0^t e^{ks}g_j(s)ds, \tag{3.20}$$

$j = 1,2$ e $Im(k) \leq 0$.

Despejando $\widehat{q}(k,t)$ de (3.19) se tiene

$$\widehat{q}(k,t) = e^{(ik)^\alpha t}\widehat{q_0}(k) - e^{(ik)^\alpha t}\widetilde{g}_2(-(ik)^\alpha,t) - ike^{(ik)^\alpha t}\widetilde{g}_1(-(ik)^\alpha,t), \tag{3.21}$$

y aplicando transformada inversa a la ecuación (3.21), se encuentra

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^\alpha t}\widehat{q_0}(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^\alpha t}\widetilde{g}_2(-(ik)^\alpha,t)dk \\ - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^\alpha t}k\widetilde{g}_1(-(ik)^\alpha,t)dk. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Notemose que si $arg(k) \in \left[\frac{-(3+\alpha)\pi}{2\alpha}, \frac{-(1+\alpha)\pi}{2\alpha}\right] \cup \left[\frac{(1-\alpha)\pi}{2\alpha}, \frac{(3-\alpha)\pi}{2\alpha}\right]$, entonces $Re(ik)^\alpha \leq 0$, así deformando el contorno de integración a el contorno ∂D en la ecuación (3.22), donde la región D está definida por $arg(k) \in (\frac{\pi(2-3\alpha)}{\alpha}, -(\pi+\epsilon))$, para $\alpha \in (1, 4/3]$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $arg(k) \in \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-2\pi}{\alpha}\right] \cup \left[\frac{\pi(2-\alpha)}{\alpha}, \frac{\pi}{2},\right]$ para $\alpha \in (4/3, 2)$, entonces

$$\begin{aligned} q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^\alpha t}\widehat{q_0}(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^\alpha t}\widetilde{g}_2\left(-(ik)^\alpha,t\right)dk \\ - \frac{i}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^\alpha t}k\widetilde{g}_1\left(-(ik)^\alpha,t\right)dk. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $k \to ke^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}$ en (3.19) y dado que las ecuaciones (3.20) quedan invariantes, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{-(ik)^\alpha t}\widehat{q}\left(ke^{-i\frac{2\pi}{\alpha}},t\right) = \widehat{q_0}\left(ke^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}\right) - \widetilde{g}_2\left(-(ik)^\alpha,t\right) \\ - ike^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}\widetilde{g}_1\left(-(ik)^\alpha,t\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Se observa que la ecuación anterior es válida para $Re(k) < \cot\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)Im(k)$, además por el teorema de Cauchy

$$\int_{\partial D} e^{ikx}\widehat{q}\left(ke^{-i\frac{2\pi}{\alpha}},t\right)dk = 0,$$

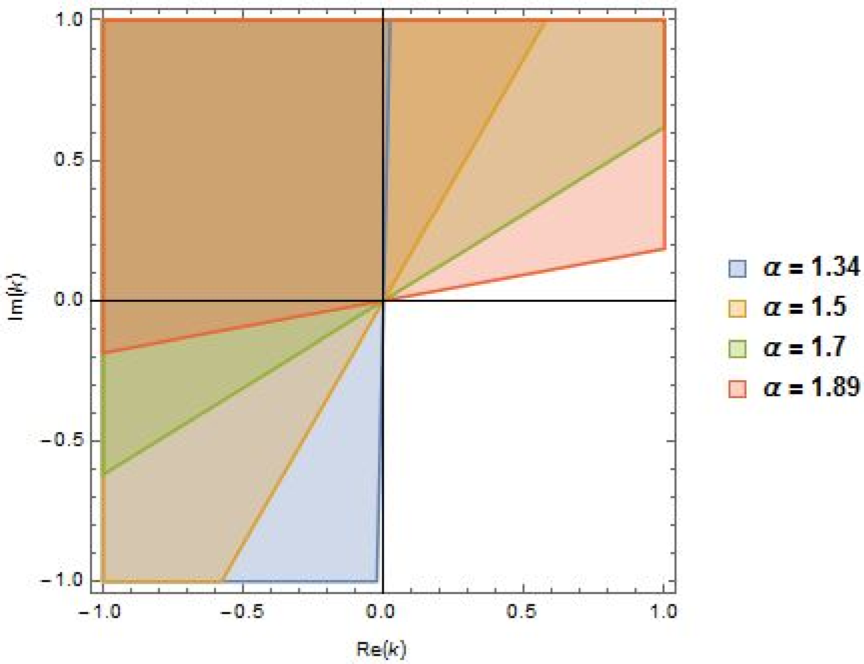

Figura 3.4: Region donde se cumple la ecuación (3.24), para distintos valores de α.

entonces sustituyendo $\widetilde{g}_2\left(-(ik)^{\alpha}, t\right)$ de la ecuación (3.24) en la ecuación (3.23) y usando la ecuación anterior se llega a

$$q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}\widehat{q}_0(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}\widehat{q}_0\left(ke^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}\right)dk$$
$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}k\widetilde{g}_1\left(-(ik)^{\alpha}, t\right)dk.$$

Ahora por definición de $\widehat{q}$ y de $\widetilde{g}_1$ se tiene

$$q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}\int_0^{\infty} e^{-iky}q_0(y)dydk$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}\int_0^{\infty} e^{ike^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}y}q_0(y)dydk$$
$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\pi}\int_{\partial D} e^{ikx+(ik)^{\alpha}t}k\int_0^{t} e^{-(ik)^{\alpha}s}g_1(s)dsdk,$$

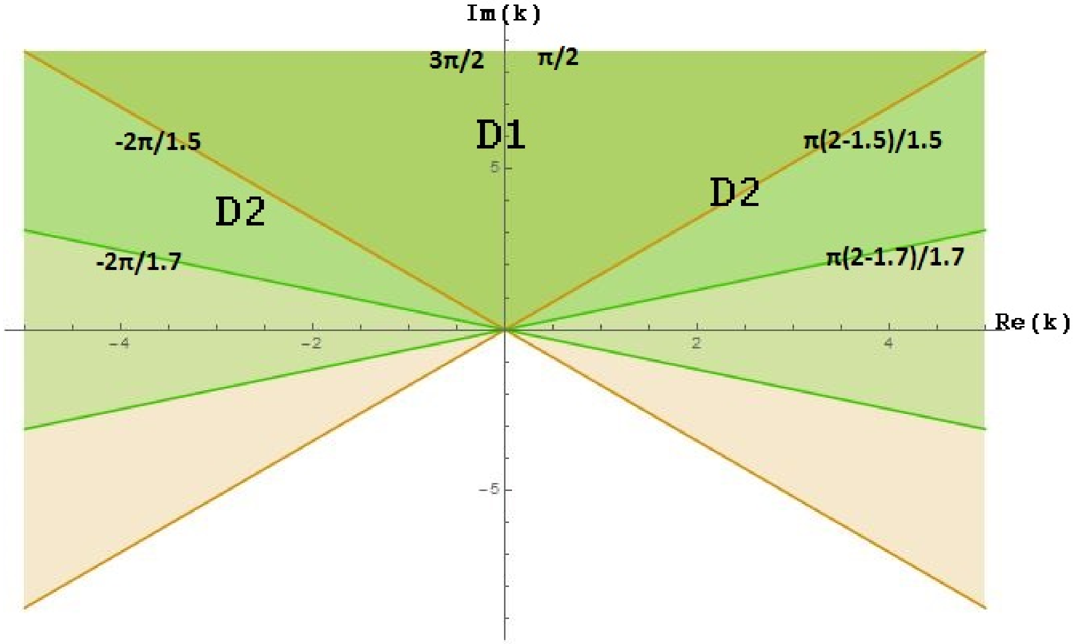

Figura 3.5: Region D_1 para $\alpha = 1.5$ y D_2 para $\alpha = 1.7$ de la ecuación de difusión anómala.

usando el teorema de Fubini para intercambiar las integrales se encuentra que la representación integral del problema (3.13) es

$$q(x,t) = \int_0^\infty G^{(I)}(x-y,t)q_0(y)dy + \int_0^t G^{(B)}(x,t-s)g_1(s)ds,$$

donde

$$G^{(I)}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)+(ik)^\alpha t}dk - \int_{\partial D} e^{ik\left(x-ye^{-i\frac{2\pi}{\alpha}}\right)+(ik)^\alpha t}dk\right)$$

y

$$G^{(B)}(x,t-s) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}{\pi}\int_{\partial D} ke^{ikx+(ik)^\alpha(t-s)}dk.$$

Referencias

[1] A. Acrivos, R.E. Davis, Solitary internal waves in deep water, J. Fluid Mech. (1967) 593-607.

[2] A. Fokas, A Unified Approach to Boundary Value Problems, SIAM 2008.

[3] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez, J.J. Trujillo, Fractional differential equations as alternative models to nonlinear diferential equations, Applied Mathematics and computation 187 (2007) 79-88.

[4] E. Kreyszig, Introductory functional Analysis with applications, John Wiley, New York 1972.

[5] E. Ott, R.N. Sudan, Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping, Phys. Fluids 12 (1969) 2388-2394.

[6] H.H. Chen, Y.C. Lee, Internal wave solitons of fluids with finite depth, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 264-266.

[7] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, Springer 2004.

[8] L.A. Ostrovsky, Short-wave asymptotics for weak-shock waves and solitons in Mechanics, Int. J. Non-Linear Mechanics 11 (1976) 401-416.

[9] L. Vásquez, J.J. Trujillo, M.P. Velasco, Fractional heat equation and the second law of thermodynamics, Fractional Calculus and Applied Analysis, An International Journal for Theory and Applications 14-3 (2011) 334-342.

[10] M. Di Paola, A. Pirrota, A. Valenza, Visco-elastic behavior through fractional calculus:

An easier method for best fitting experimental results, Mechanics of Materials 43 (2011) 799-806.

[11] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, Complex Variables Introduction and aplications, Cambridge University Press 2003.

[12] R.L. Magin, O. Abdullah, D. Baleanu, X.J.Zhou, Anomalous diffusion expressed through fractional order differential operators in the Bloch-Torrey equation, Journal of Magnetic Resonance 190 (2008) 255-270.