EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i2p*099-129*

Construcción de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE

Construction of the diagonalizable linear operators based on the APOE theory

Construção dos operadores lineares diagonalizáveis com base na teoria APOE

Esteban Mendoza-Sandoval[1]
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-7421-5421
Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez [2]
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-9596-4253
Jesús Romero-Valencia [3]
Universidad Autónoma de Guerrero
https://orcid.org/0000-0002-3606-890X

Resumen

El estudio de la comprensión de conceptos en álgebra lineal es un tema de interés en educación matemática, principalmente por la abstracción y complejidad que presentan. Un concepto objetivo de enseñanza del álgebra lineal en una licenciatura en matemáticas es el operador lineal diagonalizable, por lo que, con base en la teoría APOE, se conjetura sobre un modelo cognitivo que considera su construcción como un *objeto*. Para ello, se aplicó un cuestionario a cinco estudiantes de posgrado (25-30 años) y una entrevista semiestructurada. Los resultados evidencian dos vías de construcción que siguieron los estudiantes en la construcción del concepto de estudio, en las cuales se requieren las estructuras mentales conjeturadas en la descomposición genética preliminar. Además, se encontró que los estudiantes entrevistados, con su concepción *proceso* de matriz semejante prefieren determinar si la representación matricial del operador lineal es semejante a una matriz diagonal que *coordinar* los *procesos* base ordenada y vectores propios en el *proceso* base propia.

[1] emendoza@uagro.mx
[2] flor.rodriguez@uagro.mx
[3] jromv@yahoo.com

Palabras clave: Álgebra lineal, Educación matemática, Teoría APOE.

Abstract

The understanding study of linear algebra concepts is an interesting research topic in mathematics education, mainly because of its abstraction and complexity. A goal concept for teaching linear algebra in a mathematics teaching degree course is that of a diagonalisable linear operator, therefore, based on APOS theory, a cognitive model that considers its construction as an *object* is given. A questionary was applied to five postgraduate students (25-30 years old) and a semi-structured interview. The results show two ways of construction followed by the students to construct the study concept, which required conjectured mental structures obtained from preliminary genetic decomposition. In addition, it was found that the students prefer to determine whether the matrix representation of the linear operator is similar to a diagonal matrix than to *coordinate* the ordered basis and eigenvectors *processes* in the eigenbasis *process,* with their c*onception process* of similar matrix.

Keywords: Linear algebra, Mathematics education, APOS theory.

Resumo

O estudo da compreensão de conceitos em álgebra linear é um tema de interesse na educação matemática, principalmente pela abstração e complexidade que apresentam. Um conceito objetivo do ensino de álgebra linear na licenciatura em matemática é o operador linear diagonalizável, portanto, com base na teoria APOE, conjectura-se sobre um modelo cognitivo que considera sua construção como um objeto. Para isso, aplicou-se um questionário a cinco alunos de pós-graduação (25-30 anos) e uma entrevista semiestruturada. Os resultados mostram dois percursos de construção que os alunos seguiram na construção do conceito de estudo, nos quais são requeridas as estruturas mentais conjecturadas na decomposição genética preliminar. Além disso, verificou-se que os alunos entrevistados, com sua concepção de *processo* matricial semelhante, preferem determinar se a representação matricial do operador linear é semelhante a uma matriz diagonal do que *coordenar* os *processos* de base ordenada e autovetores no próprio processo de base.

***Palabras clave*:** Álgebra linear, Educação matemática, Teoria APOE.

Résumé

L'étude de la compréhension des concepts en algèbre linéaire est un sujet d'intérêt dans l'enseignement des mathématiques, principalement en raison de l'abstraction et de la complexité qu'elle présente. Un concept objectif d'enseignement de l'algèbre linéaire dans un cours de "licenciatura" en mathématiques est l´opérateur linéaire diagonalisable. Basé sur la théorie APOE, on conjecture sur un modèle cognitif qui considère sa construction comme un objet. Pour cela, un questionnaire et un entretien semi-directif ont été appliqués à cinq étudiants de troisième cycle (25-30 ans). Les résultats montrent les stratégies de construction suivies par les étudiants dans la construction du concept d'étude, dans lesquels les structures mentales conjecturées dans la décomposition génétique préliminaire sont requises. De plus, il a été constaté que les étudiants interrogés, avec leur conception d'un processus matriciel similaire, préfèrent déterminer si la représentation matricielle de l'opérateur linéaire est similaire à une matrice diagonale plutôt que de coordonner les processus de base ordonnés et les vecteurs propres dans le processus de base lui-même.

Mots-clés : Algèbre linéaire, Education Mathématique, Théorie APOE.

Construcción de los operadores lineales diagonalizables con fundamento en la Teoría APOE

La asignatura Álgebra Lineal, de acuerdo a Siap (2008), se puede considerar como el primer curso abstracto de matemáticas impartido en una carrera de matemáticas, ingeniería e incluso otras carreras. Respecto a la enseñanza y aprendizaje de dicha asignatura, se considera universalmente como una experiencia frustrante no solo para alumnos sino también para maestros (Hillel & Sierspinska, 1994; Hillel, 2000) y además, existe la creencia de ser la "naturaleza de la bestia" expresión usada por Hillel y que no hay mucho que hacer para que esto sea diferente. Menciona Stewart y Thomas (2009) que a pesar de los esfuerzos que se han hecho para mejorar esa situación, el aprendizaje por parte de los estudiantes sigue siendo un gran reto. Sin embargo, la asignatura del Álgebra Lineal debe ser considerada por los estudiantes universitarios potencialmente útil y su primer curso debe ser uno de los más útiles para ellos (Carlson et al., 1993).

Los operadores lineales diagonalizables (OLD) son un objetivo de enseñanza del Álgebra Lineal en el sentido de que se prepara al estudiante para que trabaje con conjuntos, se dota de estructura a esos conjuntos, se establecen funciones especiales que preservan estructura (transformaciones lineales) entre esos conjuntos, posteriormente se enseña que las transformaciones lineales tienen una representación matricial y finalmente, se muestra que algunos operadores lineales (transformaciones lineales particulares) tienen una representación "sencilla" y que algunas veces esto se logra con la elección de una "buena base". La importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando es posible, es porque simplifica significativamente los cálculos al tener una representación matricial y sencilla, y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido.

En particular, con respecto a diagonalizar una matriz, Yildiz (2013), reporta que al seguir una serie de pasos se comenten errores de cálculo, aumentando la probabilidad de error si el tamaño de la matriz aumenta, asimismo, menciona que la parte crucial es decidir si la matriz es diagonalizable o no, lo cual requiere de conocimientos de la teoría de la diagonalización.

En cuanto a la diagonalización de un operador lineal en su representación matricial se cuenta con una estrategia pedagógica por medio del uso de software para facilitar los cálculos y se logre diagonalizar matrices, dando prioridad al aprendizaje de valores y vectores propios (Siap, 2008). Pero decidir si un operador lineal se puede diagonalizar involucra diferentes conceptos y relaciones prácticas y teóricas. Por ejemplo, en lo práctico, calcular un determinante y, en lo teórico, el análisis de los espacios generados por los valores propios. Esta actividad resulta complicada para los estudiantes por la misma complejidad que presentan los conceptos inherentes, entre los cuales están: base, transformación lineal, matriz asociada a una transformación lineal, polinomio característico, valor propio, vector propio. Por ejemplo, sobre el tema de valores y vectores propios, de acuerdo con Salgado y Trigueros (2014), es considerado por profesores y alumnos como un tema difícil.

En consecuencia, se ha planteado la siguiente pregunta de investigación ¿Qué estructuras y mecanismos mentales pueden ser asociados con los operadores lineales diagonalizables? Por lo tanto, el objetivo de este artículo es proponer una descomposición genética con fundamento en la teoría APOE que describa la construcción de los operadores lineales diagonalizables como un *objeto* cognitivo.

Marco teórico

La teoría APOE tiene fundamentos en la *abstracción reflexiva* de Piaget, la cual es considerada como el mecanismo principal en la construcción del conocimiento matemático. Dicho mecanismo consta de dos partes: 1) conocimiento sobre un objeto matemático y las operaciones que actúan sobre dicho objeto, desde un nivel de cognición inferior a uno superior de operaciones (de *acciones* a *procesos* y de *procesos* a *objetos*) y, 2) reorganización y reconstrucción del objeto y de las operaciones que actúan en él, en una etapa superior que da como resultado contenido al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014; Badillo et al., 2015).

La teoría APOE destaca la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir estructuras mediante la *abstracción reflexiva*. La estructura más básica es una *acción*, la cual es aplicada a *objetos* mentales construidos previamente y es dirigida por sugerencias externas. Si se repite la *acción* y se reflexiona y además no se tiene necesidad de las sugerencias externas entonces se convierte en un *proceso* por medio del mecanismo interiorización. Dos o más *procesos* pueden dar como resultado un nuevo *proceso* por medio del mecanismo *coordinación*. Los *procesos* se encapsulan en *objetos* mentales a los cuales nuevamente se pueden aplicar *acciones* (Oktaç et al., 2019). Finalmente, en la teoría APOE, se define un esquema como la colección de *acciones, procesos, objetos* y otros *esquemas* que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que podría utilizar para resolver una situación problemática específica que involucre una determinada área de las matemáticas (Trigueros, 2005).

Al modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo podría necesitar para aprender un determinado concepto se llama *descomposición genética* (Arnon et al., 2014).

Metodología

La investigación que se propone es de corte cualitativa, debido a que, se interpretaron atributos cognitivos para establecer los mecanismos y estructuras mentales que surgen en la construcción de los operadores lineales diagonalizables. Se utilizó la metodología de investigación de la teoría APOE la cual considera tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y colección y análisis de datos (Arnon et al., 2014).

En un primer momento, se realizó el análisis teórico, el cual se fundamentó bajo tres aspectos: 1) Revisión de textos de Álgebra Lineal con base en la bibliografía básica para la carrera de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero; 2) Revisión de artículos de investigación para identificar las *descomposiciones genéticas* de los conceptos involucrados en la definición de los OLD, asi como identificar la estructura de cada concepto que podría estar involucrada en la construcción del OLD; 3) Diálogos recurrentes con un profesor en servicio de Álgebra Lineal, con experiencia de mas de 10 años, respecto al aprendizaje y enseñanza de los OLD.

El resultado del análisis teórico fue una *descomposición genética preliminar* de los operadores lineales diagonalizables (DGPOLD), la cual considera la construcción de los OLD como *objeto* cognitivo.

En un segundo momento, se realizó el diseño e implementación de enseñanza. Para esta componente se diseñó un instrumento de investigación con base en la *descomposición genética preliminar*. El instrumento se conformó por un cuestionario y una entrevista semiestructurada.

En un tercer momento, se realizó la colección y análisis de datos, para el análisis de datos se utilizó el estudio de caso, el cual, de acuerdo a Trigueros et al. (2015) se inserta dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE para llevar a cabo un análisis coherente del trabajo de los participantes de la investigación.

A continuación, se describen los participantes de la investigación, se presenta el análisis teórico y como resultado de este se muestra una *descomposición genética preliminar* de los OLD. Posteriormente se muestra el diseño y aplicación del instrumento de investigación.

Participantes de la investigación

Participaron cinco estudiantes de posgrado, dos estudiantes del programa educativo Maestría en Matemáticas Aplicadas y tres estudiantes de la Maestría en Ciencias Matemáticas. Ambos programas de la Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero. Se consideraron tres aspectos para seleccionar a los estudiantes participantes: i) que fueran estudiantes de posgrado y hubieran cursado dos semestres Álgebra Lineal para descartar que sus construcciones mentales se limitaran a *acciones* y/o *procesos*; ii) alto desempeño académico; iii) acuerdo de participación voluntaria.

Análisis teórico: descomposición genética preliminar

Los libros de texto de Álgebra Lineal que se revisaron fueron los siguientes: *Linear Algebra* (Lang, 1987, p. 93); *Linear Algebra with Applications* (Nicholson, 2018, p. 186); *Álgebra Lineal* (Friedberg et al., 1982, p. 233); *Linear Algebra Done Right* (Axler, 1997, p. 88); *Álgebra Lineal* (Hoffman & Kunze, 1973, p. 183); *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (Poole, 2011, p. 527); *Introducción al Álgebra Lineal* (Anton, 1994, p. 263), *Algebra* (Godement, 1974, p. 529). El criterio de selección de estos textos fue que aparecieran en la bibliografía básica de los cursos de Álgebra Lineal en la carrera de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, por lo que el análisis teórico aunque podría extenderse con el análisis de otros textos, se limita a una población particular. De cada texto, se analizó la definición del operador lineal diagonalizable de tal forma que se identificaron los conceptos relacionados con el concepto de estudio. Con esta revisión, se tuvo un primer acercamiento a las estructuras mentales que un individuo debería tener para la construcción del operador lineal diagonalizable.

Asimismo, se tuvieron diálogos recurrentes con un experto de Álgebra Lineal (profesor en servicio) sobre la enseñanza de los operadores lineales diagonalizables y sobre los conceptos necesarios para comprender dicho concepto.

Así, sobre la revisión de los textos y las sugerencias del experto, se delimitaron los conceptos involucrados en los operadores lineales diagonalizables y se determinó el tipo de estructura mental que debe tener un individuo acerca de ellos. Posteriormente, en la revisión de artículos se buscaron dichas estructuras y las descomposiciones genéticas existentes de los conceptos involucrados y, en los casos donde no se encontró literatura que reportara la *descomposición genética* correspondiente, se propuso la caracterización de la estructura. Los conceptos que se analizaron y el tipo de estructuras se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1.

Estructuras de los Conceptos Relacionados con los OLD

Concepto	**Símbolo**	**Estructura**	**Caracterización**
Espacio vectorial	EV	*Esquema*	Puede estar conformado por vectores, operaciones definidas entre ellos, conjuntos, bases y dimensiones, cada uno considerado como un *proceso* o un *objeto*. En un nivel *trans*-EV en un individuo, le permitirá trabajar con ejemplos no estándar de espacios vectoriales y evocar su *esquema* cuando este sea necesario. (Parraguez & Oktaç, 2010, p. 2116)
Transformación lineal	TL	*Proceso*	El estudiante puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar, o la preservación de combinaciones lineales. (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010, p. 107)
Base (ordenada)	BO	*Proceso*	Un individuo puede reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base B, decidir cuál será dicho orden y establecer si un vector dado o un conjunto de vectores podrían escribirse como combinación lineal de los elementos B con el orden establecido o dar una base para el espacio vectorial dado. (Kú, Trigueros & Oktaç, 2008, p. 73; Mendoza-Sandoval, Rodríguez-Vásquez & Roa-Fuentes, 2015, p. 373)
Matriz asociada a una transformación lineal	MATL	*Proceso*	Un individuo puede determinar la representación matricial de un operador lineal para un par de bases específicas. (Montelongo, 2016, p. 150)
Valores propios; vectores propios.	vP; VP	*Proceso*	Un individuo reconoce el paralelismo de los vectores $\boldsymbol{A}v$ y v para cualquier espacio de $\mathbb{R}^n$. Reconoce que un valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector v. (Salgado & Trigueros, 2014, p. 95)
Conjunto solución de un sistema de ecuaciones	CSSE	*Esquema*	Es posible realizar operaciones de fila en una matriz aumentada para poder encontrar el conjunto de soluciones (Trigueros et al., 2007, p. 2361). Además, dado cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede encontrar el conjunto solución.

Matriz semejante	MS	*Proceso*	Un individuo puede encontrar una matriz $\boldsymbol{P}$ tal que, dada una matriz $\boldsymbol{A}$ se satisfaga $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ con $\boldsymbol{D}$ una matriz diagonal.

Finalmente, la construcción de los OLD como un *objeto* cognitivo, podría darse en un individuo de la manera siguiente: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O, con una concepción *proceso* de base ordenada, el individuo, encuentra una base B ordenada de V. Con su concepción *proceso* de vector propio, determina si cada vector $v_i \in B$ es un vector propio de O, con lo que concluye que O es un operador diagonalizable (se *coordinan* los *procesos* de base ordenada y vector propio en el *proceso* base específica) el cual se encapsula en el *objeto* operador lineal diagonalizable al que pueden aplicarle *acciones* específicas, es decir, considera que un operador lineal es diagonalizable si puede construir una base donde cada vector de la base es un vector propio del operador lineal. Si los $v_i \in B$ no todos son vectores propios de O entonces el individuo con su concepción *proceso* de matriz asociada a una transformación lineal (MATL) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B, es decir $[\boldsymbol{O_B}]$. Con su concepción *proceso* de matriz semejante, encuentra una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$, si existe, tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{O}]_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{P}$ con lo que concluye que O es un operador diagonalizable (*coordina* el *proceso* MATL con el *proceso* de matriz semejante en el *proceso* matriz diagonal) el cual se encapsula en el *objeto* operador lineal diagonalizable al que pueden aplicarle *acciones* específicas (ver Figura 1).

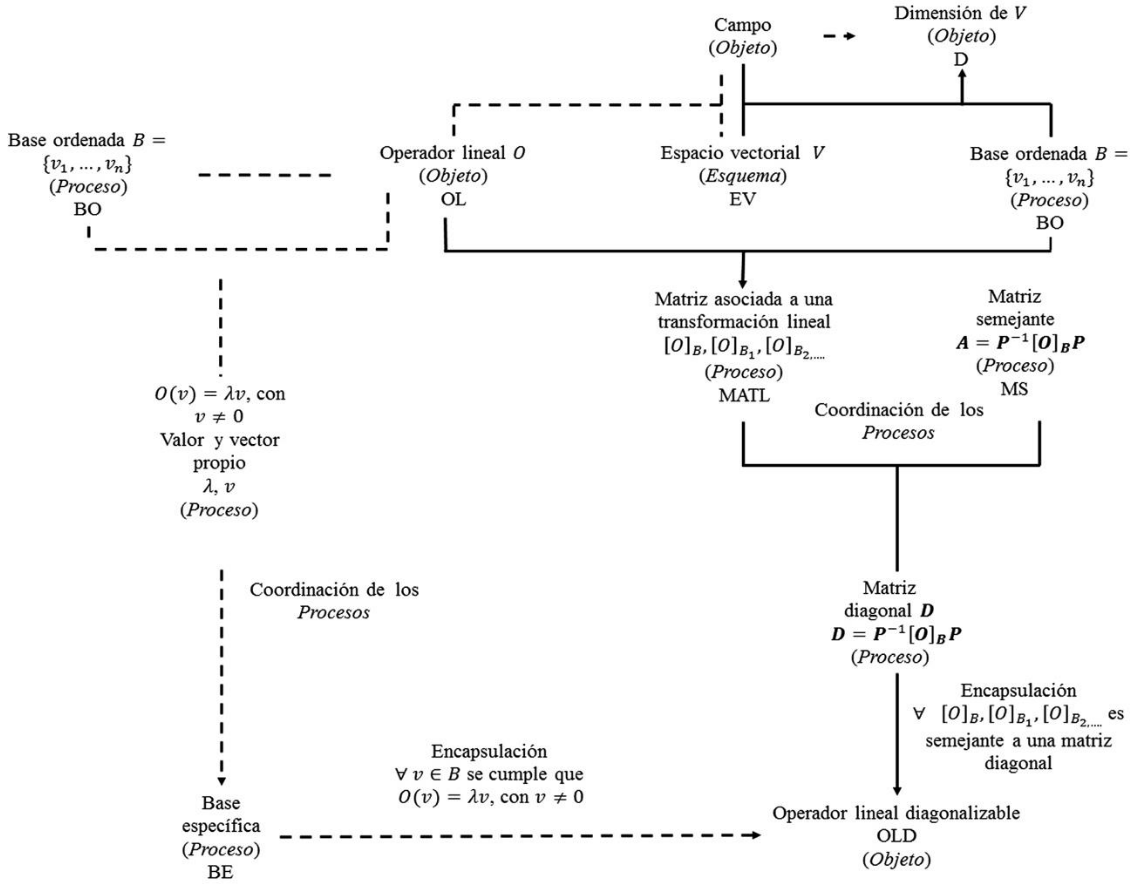


Figura 1.

Descomposición Genética Preliminar de los OLD

La *descomposición genética preliminar*, conjetura dos formas para la construcción de los operadores lineales diagonalizables que un individuo puede lograr.

Diseño del instrumento de recolección de datos

Sobre la base en la DGPOLD se diseñó un instrumento de investigación compuesto por un cuestionario y una entrevista semiestructurada. El cuestionario tuvo el objetivo de validar los conocimientos básicos de Álgebra Lineal que son asociados con los OLD, y que fueron descritos en la Tabla 1. La entrevista semiestructurada se centra concretamente en los operadores lineales considerando su representación funcional y matricial. La entrevista tuvo el objetivo de validar o retroalimentar las estructuras y mecanismos propuestos en la DGPOLD para obtener la *descomposición genética* de los OLD.

A continuación, se presenta el análisis *a priori* del cuestionario y de la entrevista semiestructurada. Posteriormente, se presentan los resultados de la aplicación del instrumento de investigación.

Análisis a priori del cuestionario

Se cuestiona sobre la definición formal de los conceptos: espacio vectorial, base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita, operador lineal diagonalizable, matriz diagonalizable, vector propio para un operador lineal y una matriz, matriz semejante (Figura 2). En las respuestas, se espera identificar algún tipo de estructura mental en los estudiantes sobre dichos conceptos.

1. ¿Qué es un espacio vectorial?
2. Determinar si los siguientes conjuntos con las operaciones dadas son espacios vectoriales.
   a) El conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, es decir, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las siguientes operaciones:
   $$\begin{aligned} \mathbf{A}+\mathbf{B} &= (a_{ij}+b_{ij}) \\ c\cdot\mathbf{A} &= (ca_{ij}), \end{aligned}$$
   donde, $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ y $c\in\mathbb{R}$.
   b) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq 0\}$ con la suma de vectores y multiplicación escalar por vector usuales.
3. ¿Qué es una base ordenada para un espacio vectorial de dimensión finita?
4. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices de tamaño 2×2 sobre $\mathbb{R}$, determinar una base ordenada del espacio vectorial dado distinta de $B=\left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\right\}$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
5. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes reales encontrar su conjunto de soluciones.

   a)
   $$\begin{aligned} 5x+6y&=-1\\ 2x+4y&=3 \end{aligned}$$
   b)
   $$\begin{aligned} x_1+3x_2&=-1\\ 2x_1+4x_2&=2\\ 3x_1+6x_2&=4 \end{aligned}$$
   c)
   $$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3&=-1\\ 2x_1+4x_2+2x_3&=2\\ 2x_1+6x_2+10x_3&=-2 \end{aligned}$$
6. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices ¿Qué significa que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sean matrices semejantes?
7. Sean $\mathbb{R}[x]_3=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 : a_i\in\mathbb{R} \text{ para } i=0,1,2,3\}$ y $\mathbb{R}[x]_2=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_i\in\mathbb{R} \text{ para } i=0,1,2\}$ los espacios de polinomios de grado menor igual a 3 y 2, respectivamente. Considera $D:\mathbb{R}[x]_3\to\mathbb{R}[x]_2$, definido por, $f(x)\mapsto f'(x)$ (cada polinomio lo transforma en su derivada). Determina la representación matricial de D, correspondiente a las bases ordenadas $\mathcal{B}_1=\{1,x,x^2,x^3\}$ y $\mathcal{B}_2=\{1,x,x^2\}$.
8. ¿Qué significa que un vector sea propio para un operador lineal O?
9. ¿Qué significa que un vector sea propio para una matriz cuadrada $\mathbf{A}$?
10. Considera el operador lineal $O:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $(x,y)\mapsto(x,0)$. Decide cuáles de los vectores del siguiente conjunto $\mathcal{C}$ son vectores propios de O en caso de serlo, a qué valor propio están asociados:
    $$\mathcal{C}=\{(2,0),(1,-1),(5,0),(4,1),(0,1),(0,-3),(0,0)\}.$$
11. Define formalmente qué es un operador lineal diagonalizable.
12. Define formalmente qué significa que una matriz $\mathbf{A}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sea diagonalizable.

Figura 2.

Cuestionario

Por otro lado, se pide determinar el conjunto solución para tres sistemas de ecuaciones lineales; el primer sistema tiene una única solución, el segundo sistema no tiene solución, y el tercer sistema tiene infinitas soluciones. Se considera que un individuo con una concepción proceso del conjunto solución de un sistema de ecuaciones (CSSE) podrá calcular las soluciones requeridas independientemente de cual sea el caso. Otro problema, se pide construir la matriz asociada a una transformación lineal cuando la base de llegada es distinta a la base de salida. Se espera que a partir de una concepción proceso de la matriz asociada a una transformación, los estudiantes logren determinar la representación matricial.

En otro problema, se pide determinar cuáles de los elementos de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios, dado un operador lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, se espera que con una concepción *acción* de vector propio el estudiante logre identificar a los vectores.

Análisis a priori de la entrevista semiestructurada

La entrevista constó de los problemas trece al diecisiete (ver Figura 3). En principio se considera un operador lineal definido en $\mathbb{R}^3$ y busca dos representaciones matriciales en bases distintas, se espera que un individuo con una estructura *proceso* de la matriz asociada a una transformación lineal logre determinar ambas representaciones. Luego, se pide encontrar una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz invertible $\boldsymbol{P}$ tal que se satisfaga la relación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ para una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada de dos por dos cuyos valores propios son diferentes. También, considera una matriz cuadrada de dos por dos y se cuestiona sobre si es diagonalizable, se espera que con una concepción *proceso* de matriz semejante se logre resolver ambos problemas. Además, se consideró un operador lineal definido sobre $\mathbb{R}^2$ y otro definido sobre $\mathbb{R}^3$, y se le pide al estudiante que determine si el operador lineal dado es diagonalizable. El objetivo de estos problemas es validar o retroalimentar la construcción propuesta en la descomposición genética preliminar.

13. Considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (6x+4z, x+2y+z, -3x-z)$. Encuentra la representación matricial $[f]_{\mathcal{B}}$ respecto a la base canónica ordenada $\mathcal{B}$ y la representación matrical $[f]_{\mathcal{B}_1}$ respecto a la base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1),(0,1,0),(4,1,-3)\}$

14. Encuentra una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y una matriz invertible $\mathbf{P}$ tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, para la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

15. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ¿$\mathbf{A}$ es diagonalizable? Justifica tu respuesta.

16. Decide si el operador $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1,x_2) = (24x_1+20x_2, -30x_1-26x_2)$. Es diagonalizable el operador lineal dado. Justifica tu respuesta.

17. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1-x_2-x_3, x_1-x_3, -x_1+x_2+2x_3)$. Es diagonalizable el operador lineal dado. Justifica tu respuesta.

Figura 3.

Entrevista Semiestructurada

Una característica importante de los problemas del 14 al 17 es que se consideran implícitamente los casos: i) cuando los valores propios son distintos y la matriz y operador lineal son diagonalizables; ii) cuando los valores propios tienen multiplicidad algebraica mayor que uno y la matriz no es diagonalizable; iii) cuando un valor propio tiene multiplicidad algebraica mayor que uno y es diagonalizable.

Aplicación del instrumento de investigación

Primero se aplicó el cuestionario, el cual fue dividido en dos sesiones, en días distintos, sesión 1 y sesión 2. En la sesión 1, se respondieron los problemas del 1 al 6, en un tiempo de hora y media y, en la sesión 2, los problemas del 7 al 12 en una hora. Asimismo, la entrevista semiestructurada se realizó en dos sesiones, en días distintos, sesión 3 y sesión 4, y fue grabada en video y transcrita totalmente. En la sesión 3, se profundizó sobre los problemas 12 y 13 en un tiempo de una hora y, en la sesión 4, sobre los problemas del 14, 15, 16 y 17 en un tiempo de hora y media. Para responder el instrumento únicamente se permitió papel y lápiz, y fue aplicado de manera individual.

Análisis de datos

El análisis de los datos se hizo en dos momentos. El primer momento, consistió en analizar las respuestas del cuestionario sobre los conocimientos básicos asociados a los operadores lineales diagonalizables. Posteriormente, se revisaron las respuestas de los estudiantes centrando la atención en la definición del concepto y cómo lo utilizaban para responder los problemas. En un segundo momento, se revisó la transcripción de la entrevista, centrados en identificar las construcciones que establecieron los estudiantes y no fueron consideradas en el análisis teórico pero emergieron en sus respuestas, logradas por los mecanismos mentales que pusieron en juego. Posteriormente, se estableció si el estudiante en su respuesta mostró evidencia de la construcción propuesta a priori, o, en caso contrario se propusó que construcción se evidenció a partir de sus respuestas.

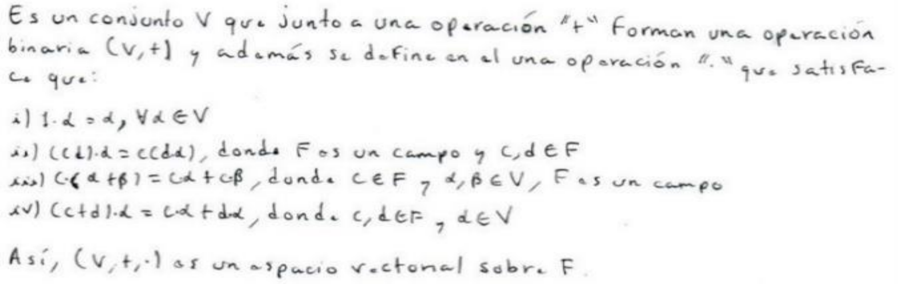
Finalmente, se trianguló la información entre los investigadores y resultó parte de la evidencia para la construcción de los OLD.

En lo que sigue, la presentación de resultados se ha organizado, en primer lugar, con base en las respuestas al cuestionario y, en segundo lugar, sobre la entrevista. Se denota a los estudiantes por E1, E2, E3, E4 y E5. Al entrevistador se denota por E. Se utiliza la simbología definida con antelación (ver Tabla 1), por ejemplo, MATL-Matriz asociada a una transformación lineal.

Resultados

Cuestionario: respecto a las definiciones

Los cinco estudiantes lograron dar algunos axiomas que se deben satisfacer para que un conjunto no vacío junto con una operación llamada "+" y una aplicación (operación externa) sea un espacio vectorial, es decir, se muestra evidencia de una estructura esquema-EV, su nivel de desarrollo dependerá de las relaciones que establezcan para resolver problemas matemáticos donde los espacios vectoriales estén involucrados. Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E1 y E2 (ver Figura 4 y Figura 5).



Es un conjunto V que junto a una operación "+" forman una operación binaria (V,+) y además se define en el una operación "·" que satisface que:

i) $1\cdot\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in V$

ii) $(cd)\cdot\alpha = c(d\alpha)$, donde F es un campo y $c,d \in F$

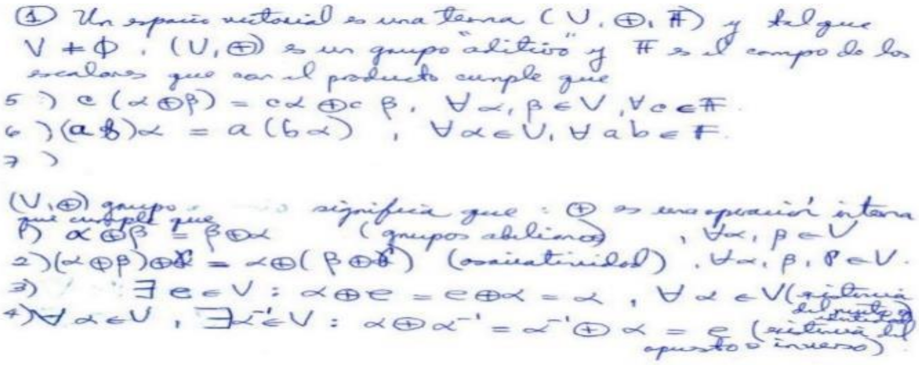
iii) $c\cdot(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$, donde $c \in F$ y $\alpha,\beta \in V$, F es un campo

iv) $(c+d)\cdot\alpha = c\alpha + d\alpha$, donde $c,d \in F$ y $\alpha \in V$

Así, (V,+,·) es un espacio vectorial sobre F.

Figura 4.

Respuesta de E2 al Problema 1



① Un espacio vectorial es una terna $(V, \oplus, \mathbb{F})$ y tal que $V \neq \phi$. $(V,\oplus)$ es un grupo "aditivo" y $\mathbb{F}$ es el campo de los escalares que con el producto cumple que

5) $c(\alpha\oplus\beta) = c\alpha \oplus c\beta$, $\forall \alpha,\beta\in V$, $\forall c\in \mathbb{F}$.

6) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$, $\forall \alpha \in V$, $\forall a b \in \mathbb{F}$.

7)

$(V,\oplus)$ grupo significa que: $\oplus$ es una operación interna que cumple que

1) $\alpha\oplus\beta = \beta\oplus\alpha$ (grupos abelianos), $\forall \alpha,\beta\in V$

2) $(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma = \alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$ (asociatividad). $\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$.

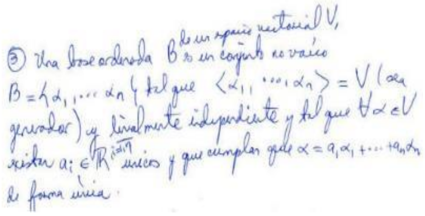
3) $\exists e \in V : \alpha\oplus e = e\oplus\alpha = \alpha$, $\forall \alpha\in V$ (existencia del neutro o identidad)

4) $\forall \alpha \in V$, $\exists \alpha^{-1} \in V : \alpha\oplus\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\oplus\alpha = e$ (existencia del opuesto o inverso)

Figura 5.

Respuesta de E1 al Problema 1

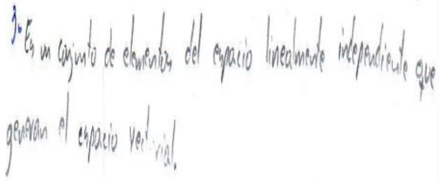
Respecto a la base ordenada los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 fueron capaces de dar la definición de base de un espacio vectorial pero en algunos casos omiten el orden en la base al dar su definición de este concepto. Se muestra como ejemplo de evidencia la respuesta de E2 y E4 (ver Figura 6 y Figura 7).



③ Una base ordenada B de un espacio vectorial V, es un conjunto no vacío $B = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ tal que $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = V$ (es generador) y linealmente independiente y tal que $\forall \alpha \in V$ existan $a_i \in \mathbb{R}^{i\le i\le n}$ únicos y que cumplan que $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ de forma única.

Figura 6.

Respuesta de E2 al Problema 3



3. Es un conjunto de elementos del espacio linealmente independiente que generan el espacio vectorial.

Figura 7.

Respuesta de E4 al Problema 3

Respecto a los vectores propios de un operador lineal y de una matriz, en la ecuación $O(x) = \lambda x$ o $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, E1 no escribió que se buscan los vectores distintos del vector cero para ambos casos. E2 sólo fue capaz de definir los vectores propios para el caso de matrices. E3 manifestó que los valores que deben ser distintos de cero son los escalares, pero reconoce a los vectores propios como aquellos que bajo el operador lineal van a un múltiplo del vector. E4 respondió adecuadamente para ambos casos. E5 no escribió que se buscan los vectores distintos del vector cero para ambos casos. Se muestra como ejemplo de evidencia las respuestas de E1 (ver Figura 8 y Figura 9) y E3 (ver Figura 10 y Figura 11).

a) Sea $O: V \to V$ un operador lineal, se dice que $\alpha \in V$ es un vector propio de O si se cumple que:
Existe $c \in F$ tal que $O(\alpha) = c\alpha$

Figura 8.

Respuesta de E1 al Problema 9

b) Sean $A \in Mat_{n \times n}(F)$ y $X \in Mat_{n \times 1}(F)$, se dice que X es un vector propio de A si existe $c \in F$ tal que:
$AX = cX$

Figura 9.

Respuesta de E1 al Problema 8

Respuesta 1
a) Son aquellos vectores (α) para los cuales existe un escalar $c \neq 0$ t.q. $O(\alpha) = c\alpha$, es decir, al aplicar la transformación obtenemos un múltiplo de este vector.

Figura 10.

Respuesta de E3 al Problema 8

b) es un vector para el cual se cumple $A\alpha = c\alpha$ con $c \neq 0$. y $A \in Mat_{n \times n}(K)$.

Figura 11.

Respuesta de E3 al Problema 9

Respecto a la cuestión de definir un OLD, E2 no respondió. E1, E3, E4 y E5 intentaron dar la definición por medio de la representación matricial del operador lineal respecto a una base, que proporcionar la definición de un operador lineal diagonalizable en su representación funcional, es decir, respondieron de acuerdo a la definición de Friedberg, Insel y Spence (1982, p. 233) y Poole (2011, p. 527). Respecto a una matriz diagonalizable E1, E4 y E5 fueron capaces de proporcionar la definición dada en Nicholson (2018, p.186) de matriz

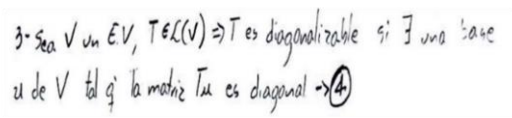


Figura 15.
Respuesta de E4 al Problema 11

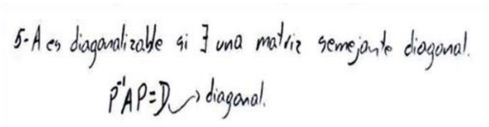


Figura 15.
Respuesta de E4 al Problema 12

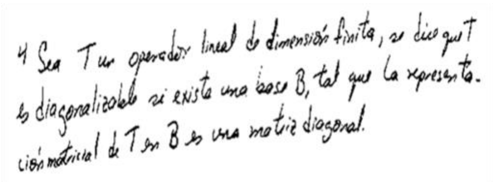


Figura 15.
Respuesta de E5 al Problema 11

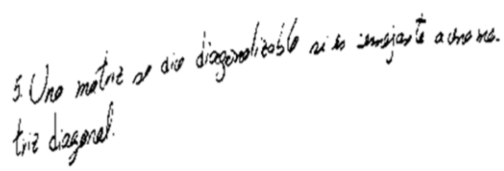


Figura 15.
Respuesta de E5 al Problema 12

diagonalizable. E2 no respondió la pregunta. E3 consideró que las matrices diagonalizables a partir de operaciones elementales se pueden llevar a una matriz diagonal, se muestra como ejemplo de evidencia las respuestas de E4 (ver Figura 12 y Figura 13) y E5 (ver Figura 14 y Figura 15).

Esta tendencia de definir a los operadores lineales diagonalizables, como aquellos que tienen su representación matricial semejante a una matriz diagonal, puede influir de tal manera que se manifieste como una forma de construir al concepto OLD.

Cuestionario: respecto a las estructuras previas

Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 mostraron evidencia de evocar a su *esquema*-EV en un nivel *trans*-EV, basando su coherencia en los axiomas que debe satisfacer un espacio vectorial. Se muestra como ejemplo la respuesta de E2 y E3 al inciso b, del problema 2 (ver Figura 16 y Figura 17).

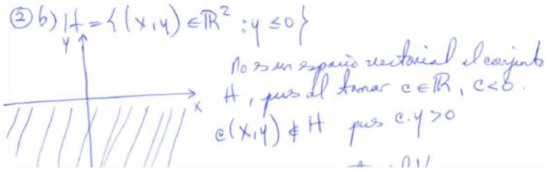


Figura 17.

Evidencia del Esquema-EV de E2

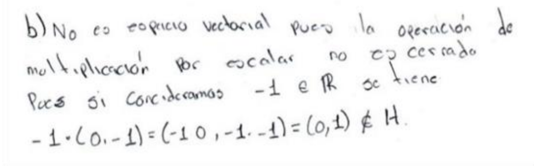


Figura 17.

Evidencia del Esquema-EV de E3

Con respecto al concepto de base ordenada, los cinco estudiantes evidenciaron una estructura *proceso*, dado que, son capaces de dar un orden diferente en la base y siguen considerando como base al conjunto dado. E4 construyó una base distinta dando evidencia de una concepción *proceso* de base. Se muestra como ejemplo lo que respondieron E2 y E4 (ver Figura 18 y Figura 19).

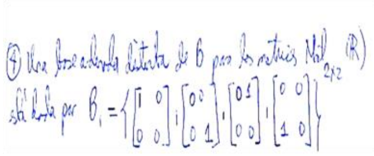


Figura 19.

Concepción Proceso BO de E2

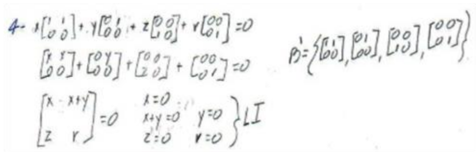


Figura 19.

Estructura Proceso de BO de E4

Derivado de las respuestas de los cinco estudiantes, se puede concluir que tienen una concepción *proceso* del conjunto de solución de un sistema de ecuaciones lineales (CSSE), es decir, cuando sea necesario podrían determinar el conjunto solución para algún sistema de ecuaciones lineales ya sea que tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución, según sea el caso. Se muestra como ejemplo la respuesta de E4 (ver Figuras 20, 21 y 22).

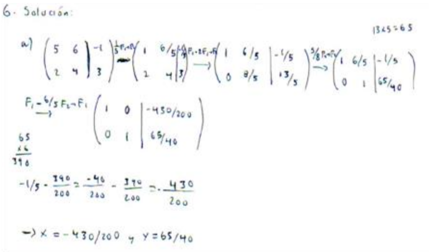


Figura 22.

Respuesta de E4 al Problema 6. Inciso a

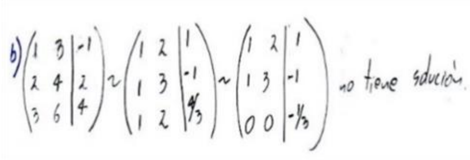


Figura 22.

Respuesta de E4 al Problema 6. Inciso b

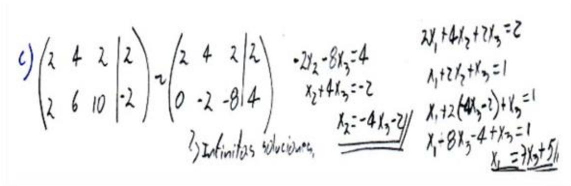


Figura 22.

Respuesta de E4 al Problema 6. Inciso c

Todos los estudiantes evidenciaron una concepción *proceso* de la matriz asociada a una transformación lineal y no tuvieron dificultad en calcular la representación matricial de las transformaciones lineales en los problemas 7 y 13. Como ejemplo, se muestra evidencia de las respuestas de E2 y E5 (ver Figura 23 y Figura 24).

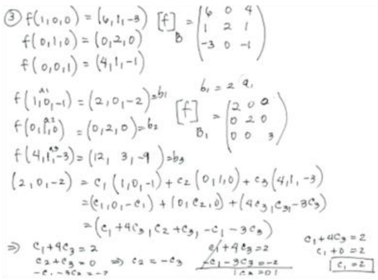


Figura 24.

Concepción Proceso de la MATL de E2

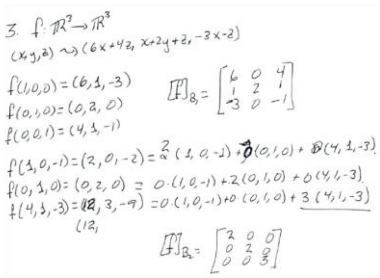


Figura 24.

Concepción Proceso de la MATL de E5

E4 y E5 evidenciaron una estructura *acción* de vector propio al resolver el problema 9 (ver Figura 25 y Figura 26).

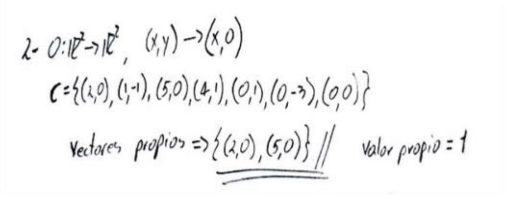


Figura 26.

Respuesta de E4 al Problema 9

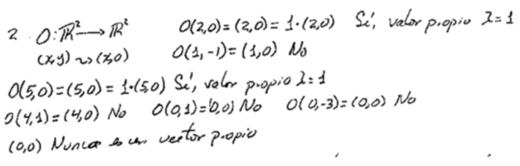


Figura 26.

Respuesta de E5 al Problema 9

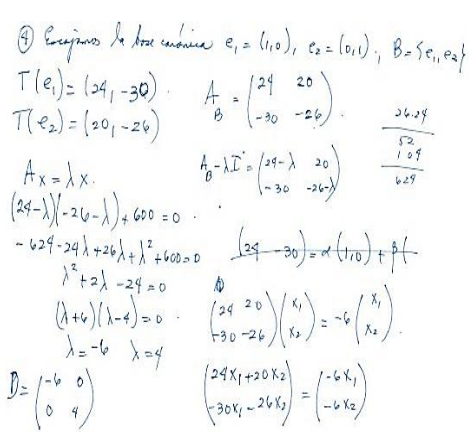
Resultados sobre la entrevista

En lo siguiente se muestra la viabilidad de la construcción propuesta en la descomposición genética preliminar, a partir del análisis de algunos extractos de las entrevistas. Además, se muestran dos ejemplos de cómo se alcanza la construcción de los OLD.

Con respecto al problema 16, E2, E3 y E4 respondieron de manera similar. Se muestra como ejemplo lo que realizó el estudiante E2. Primero, E2 con su concepción *proceso* de base ordenada proporcionó una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, luego, mencionó que el problema se reduce al análisis de diagonalización de la representación matricial (ver Tabla 10).

Tabla 2.

Fragmento de Entrevista al E2 ante el Problema 16. Parte 1

Diálogo	**Representación**
E: Te da un operador. ¿Y ese operador dónde está? E2: De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, el espacio vectorial. E: Ok, y se te pregunta si ese operador es diagonalizable. ¿Qué significa? Tú mencionaste un poco. E2: Dada una base, o sea, encuentra una matriz asociada a ese operador y si esa matriz es diagonalizable, entonces ese operador es diagonalizable. E: Bueno al menos aquí ya tienes más elementos, tienes espacios vectoriales, y tienes un operador, ya en este caso como tienes espacios vectoriales puedes ocupar toda la teoría de espacios vectoriales que te sepas. E2: Aja. E: ¿Cómo hacerle para…? E2: No sé, cojamos la base canónica (escribió, $B = \{e_1, e_2\}$). E: ¿Ok, y ahora qué tienes?	Figura 27 *Respuesta de E2 al Problema 16. Parte 1* 

E2: Se reduce al análisis de la diagonalización de esta matriz (señaló $\boldsymbol{A_B}$, en la Figura 27).

Posteriormente, E2 consideró que busca los vectores distintos de cero ($x \neq 0$) en la relación $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, y logró determinar los vectores propios. Además, mostró evidencia de una estructura *proceso* de vector propio, dado que, mencionó que para determinar más vectores propios asociados al valor $\lambda = -6$, tienen que ser proporcionales a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ver Tabla 11).

Tabla 3.

Fragmento de Entrevista al E2 ante el Problema 16. Parte 2

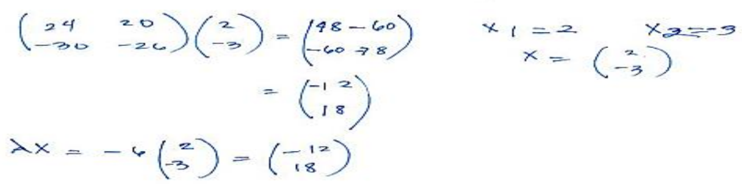
Diálogo

E: A ver, ya tenemos calculados los valores propios -6 y 4, ahora nos faltan los vectores propios. ¿Recuerdas cómo se calculan? Recordemos que es un vector propio.
E2: Un vector distinto de cero que satisface esta relación ($\boldsymbol{A}x = \lambda x$).
E: Ok, más aún, ya tenemos ese λ, bueno ya encontraste ese λ, ahora podrías dar un vector propio asociado, al valor propio -6.
E: ¿Eso sería uno? ¿Si verificó? ¿Si sale?
E2: Verificamos… (Escribió, Figura 28).
E: Ahora sí.
E2: Ya.
[…]
E: ¿Si satisface?
E2: Sí.
E: Bueno ya tienes uno. ¿Pero de esos hay varios?
E2: Cualesquiera que esté en esta proporción (señaló, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en la Figura 28).
E: Ya tienes uno ¿cómo encuentras otro?
E2: ¿Asociado a este mismo autovalor?
E: Bueno para el otro autovalor, porque para este ya me dijiste que si tiene la misma proporción.

Representación

Figura 28.

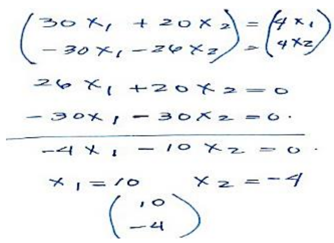
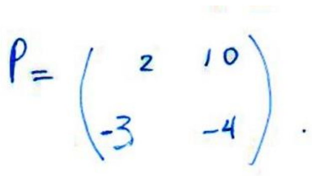
Respuesta de E2 al Problema 16. Parte 2



Se consideró necesario orientar al estudiante E2 con la definición de OLD en el sentido de Hoffman y Kunze (1973, p. 183), debido a que mostró evidencia de tener dominio acerca de las estructuras previas y entonces, podría proporcionar una base propia, sin embargo, E2 recurrió a la definición de Friedberg et al. (1982, p 233), para resolver el problema (ver Tabla 12).

Tabla 4.

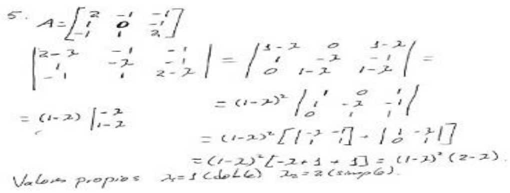
Fragmento de Entrevista al E2 ante el Problema 16. Parte 3

Diálogo	**Representaciones**
E: Te pregunto esto porque, no perdamos el foco. ¿Qué estás buscando? E2: La matriz invertible. E: Esa es una, la otra es, si existe una base, en este caso, quien es T, va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, si existe una base de $\mathbb{R}^2$, donde cada vector suyo formen una base para decir que ese operador es diagonalizable, ¿Puedes construir una base, cuántos vectores necesitas para formar una base en $\mathbb{R}^2$? E2: Dos. E: ¿Con el otro autovalor podrás encontrar otro vector propio? E2: Que sea linealmente independiente… Aja… y por tanto T sería diagonalizable. E: Exacto, si se logra hacer eso. E2: Ya (escribió, Figura 29). (…) E: Encontraste otro, ok. ¿Ya comprobaste que es vector propio? E2: No. E: Supongamos que sí ¿No? E2: Es la matriz $\boldsymbol{P}$ formada por los vectores columnas que son los autovectores… (Escribió, Figura 30). E: ¿Y ya? Tú tienes a $\boldsymbol{P}$ ¿Y esa $\boldsymbol{P}$ para qué? E2: Para buscar su matriz invertible. E: Ok. E2: ¡Y ya! ¡Sí!..., ya te quedaría similar a esa (señaló $\boldsymbol{D}$).	Figura 29. *Respuesta de E2 al Problema 16. Parte 3*  Figura 30. *Respuesta de E2 al Problema 16. Parte 4* 

Por otro lado, se muestra evidencia de otra forma de proceder y lograr construir los OLD. La evidencia se tomó del estudiante E5, quien con su concepción *proceso* de base ordenada proporcionó una base para $\mathbb{R}^3$. Posteriormente, con su concepción *proceso* de MATL determinó la representación matricial del operador lineal respecto a la base que propuso (ver Tabla 13).

Tabla 5.

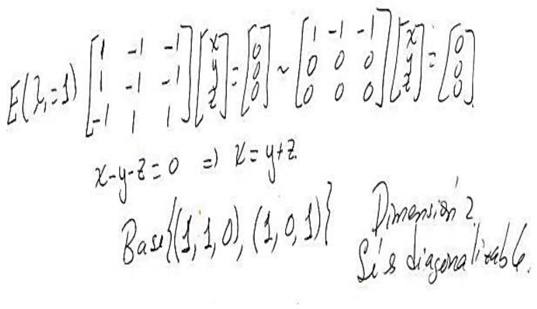
Fragmento de Entrevista al E5 ante el Problema 16. Parte 1

Diálogo	**Representaciones**
E: ¿Qué? E5: Aquí estos son x_1, x_2. E: ¿Qué estás haciendo? E5: Igual hallando la matriz en la base canónica. Me dió uno y dos (escribió, Figura 31). E: ¿Los valores propios? E5: Ya es diagonalizable.	Figura 31. *Repuesta de E5 al Problema 17. Parte 1* 

Después, E5 con su estructura *proceso* de valor propio encontró los valores propios asociados a la representación matricial del operador lineal que determinó. E5 mencionó que al valor propio de multiplicidad 2 tiene dimensión geométrica 2 y por tanto el operador lineal es diagonalizable (ver Tabla 14).

Tabla 6.

Fragmento de Entrevista al E5 ante el Problema 17. Parte 2

Diálogo	**Representaciones**
E5: Sí es diagonalizable. E: ¿Por qué? E5: Porque ya hallé la dimensión geométrica doble y da dos. Ya el otro simple no hay que calcularlo. E: ¿Cuál tiene multiplicidad dos? E5: El uno. E: ¿Cuáles son los valores propios? E5: Uno y dos. E: ¿Por qué es diagonalizable? E5: Porque para el doble (señaló, $\lambda = 1$) es de dimensión dos, el espacio propio. El otro como es simple la dimensión va ser uno (ver Figura, 32).	Figura 32. *Respuesta de E5 al Problema 17. Parte 2* 

Derivado de la respuesta de E5, se le preguntó por qué es suficiente comparar la dimensión geométrica de un valor propio con respecto a la multiplicidad algebraica para saber que el operador lineal dado es diagonalizable (ver Tabla 15).

Tabla 7.

Fragmento de Entrevista al E5 ante el Problema 17. Parte 3

E: ¿Y eso qué?
E5: Ya es diagonalizable.
E: ¿Pero por qué? ¿Cuál es la definición de que un operador lineal sea diagonalizable?
E5: Bueno que la multiplicidad algebraica de sus valores propios coincida con la dimensión geométrica.
E: ¿Eso significa que un operador….?
E5: O puedes verlo como que existe una base que ese operador lineal en esa base tiene forma diagonal.
E: Ok.
E5: Pero al final esa base es llamada, base propia. Que está formada por la base de los subespacios propios.
E: ¡Ah bueno! Pues deme esa base.
E5: No te la puedo dar porque no la he calculado, aquí no me pide eso. Habría que hallar la base.
E: Ok, y cómo es que ya sabes que es diagonalizable.
E5: Porque cuando es simple no hay que calcularlo, porque la dimensión, coincide con uno.
E: Ok, bueno primero estos dos vectores son propios (señaló $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$) ¿Cómo verifico eso?
E5: Con la definición. Habría que evaluar el vector en el operador y ver que existe un λ por eso. Perfecto no me equivoque si son valores propios como se esperaba (escribió, Figura 33).
E: Según tus cuentas esos son valores propios.
E5: Sí.
E: ¿El otro?
E5: No lo pedía.

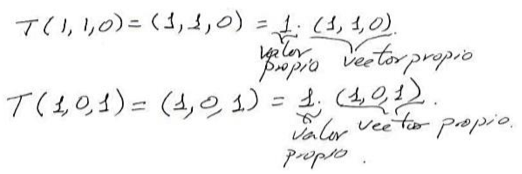


Figura 33.

Respuesta de E5 al Problema 17. Parte 3

Finalmente, con una estructura *objeto* de dimensión geométrica y multiplicidad algebraica, E5 comparó estos valores para determinar si el operador lineal es diagonalizable. La construcción de él tiene coherencia porque justificó si la dimensión geométrica y multiplicidad algebraica coinciden y entonces se puede construir una base con representación matricial en esa base diagonal (ver Tabla 16).

Tabla 8.

Fragmento de Entrevista al E5 ante el Problema 17. Parte 4

E: Bueno, a ver… si me preguntan ¿Ese operador lineal es diagonalizable?

E5: No es necesario calcular todos cuando es simple, nada más hay que calcular los que no sean de multiplicidad uno.
E: ¿Qué significa eso? ¿Qué yo debo responder a partir de la dimensión geométrica y algébrica?
E5: Sí.
E: Yo podría responder a partir de ahí.
E5: Claro, es diferente al uno (se refirió al primer problema) que me piden la matriz.
E: ¿La definición que conoces de operador lineal diagonalizable es?
E5: Que un operador lineal es diagonalizable tenga forma diagonal, es decir, que la representación matricial del operador lineal en esa base sea diagonal.
E: Esa es una forma de caracterizar a un operador lineal diagonalizable.
E5: Mmmju
E: Hablas de una base…
E5: Sí, pero yo no tengo que dar la base porque ahí me dice es diagonalizable y yo digo sí, y puedo decir que sí existe la base.
E: ¿Por qué existe esa base?
E5: Porque cumple las condiciones necesarias y suficientes.
E: Ok.
E5: Bueno te voy a dar la base.
E5: Pero está visto y probado que con aquello era suficiente. Aquí la base propia (escribió Figura 34).

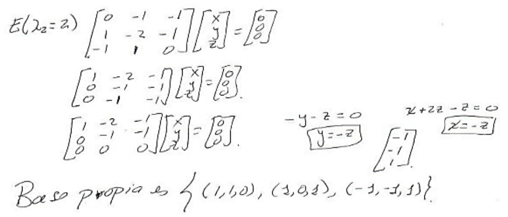


Figura 34.

Respuesta de E5 al Problema 17. Parte 4

Conclusiones

Con base en el análisis de los datos se logró obtener la *descomposición genética* de los OLD, sus estructuras se validaron en función de las propuestas en la DGPOLD. De acuerdo a Trigueros (2019), si a partir de los resultados se comprueban las construcciones previstas por el modelo preliminar, entonces la *descomposición genética* es validada. Además, se adhieren como estructuras previas las siguientes: polinomio característico como un *proceso*, en esta, un individuo es capaz de calcular el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada; multiplicidad algebraica como *objeto*, en la cual el individuo considera la potencia del valor propio como el número que es solución del polinomio característico; y dimensión geométrica como *objeto*, en esta estructura los individuos la consideran como el número de vectores propios que se pueden determinar. Al menos estas estructuras deben estar en un individuo al momento de construir los OLD, dado que la evidencia recolectada garantiza que los individuos que las poseían eran capaces de diagonalizar o decidir si un operador lineal se puede diagonalizar.

El modelo cognitivo, describe dos *trayectorias* en la construcción de los OLD, es decir, se identificaron dos caminos de aprendizaje que siguieron los estudiantes en la construcción del concepto de estudio.

La primera trayectoria de construcción de los OLD se describe como sigue: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O sobre él, con una concepción *proceso* de base ordenada, el individuo encuentra una base ordenada B de V. Luego, con su concepción *proceso* de la matriz asociada a una transformación lineal (MATL) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B ($[\boldsymbol{O_B}]$). Posteriormente, con una concepción *objeto* de dimensión geométrica y multiplicidad algebraica, compara estos valores para determinar si el operador lineal es diagonalizable. La segunda trayectoria de construcción de los OLD se describe a continuación: dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O sobre él, con una concepción *proceso* de base ordenada, el individuo, encuentra una base ordenada B de V. Posteriormente, con su concepción *proceso* de la matriz asociada a una transformación lineal encuentra la representación matricial (MATL) de O respecto a la base B, es decir $[\boldsymbol{O_B}]$. Luego, *coordina* el *proceso* MATL con el *proceso* matriz semejante en el *proceso* matriz diagonal, es decir, encuentra una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz $\boldsymbol{P}$ (invertible), si existen, tales que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{O}]_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{P}$, con lo que concluye que O es un OLD. Después, se encapsula el *proceso* anterior en *objeto* OLD al que pueden aplicarle *acciones* específicas. (Ver Figura 35).

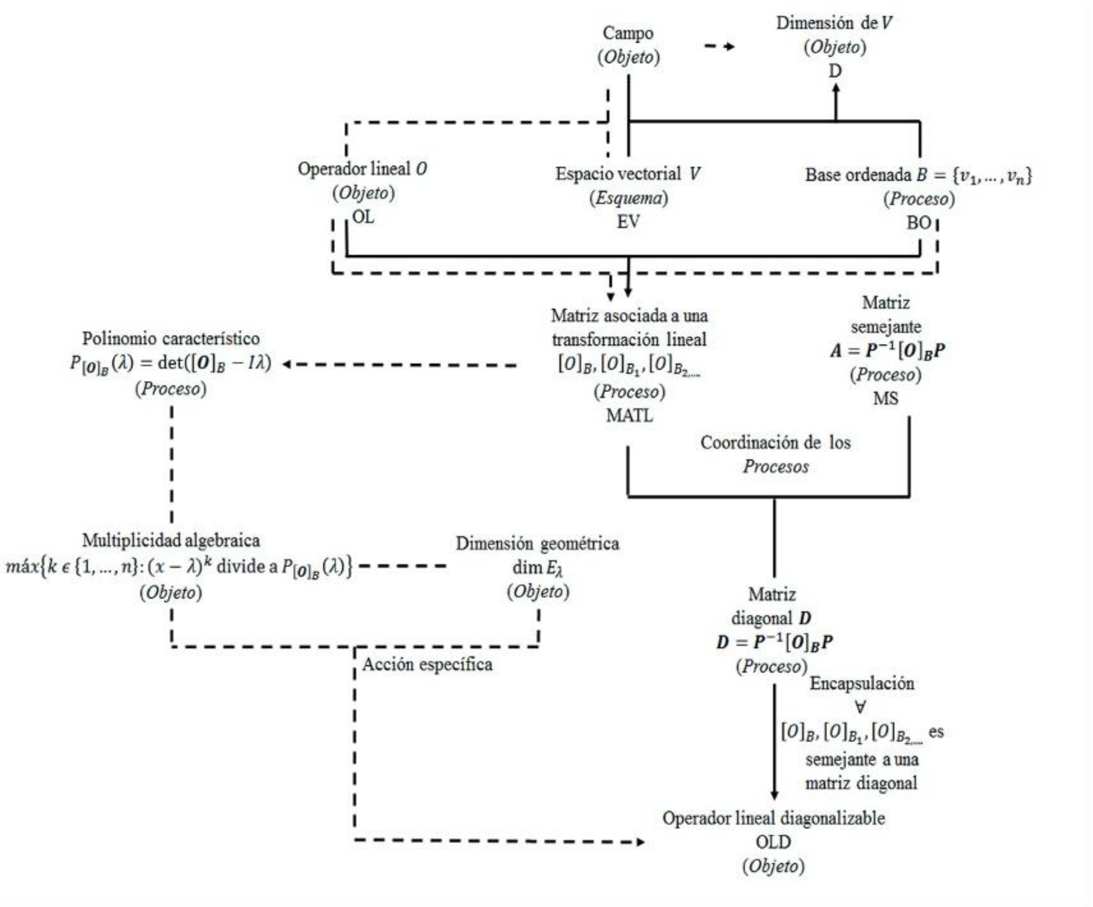


Figura 35.

Modelo Cognitivo de los Operadores Lineales Diagonalizables

Nota: El modelo muestra dos trayectorias de construcción de los OLD. Los segmentos de líneas punteadas muestran la primera trayectoria y los segmentos de líneas continuas muestran la segunda trayectoria.

Cabe mencionar que la segunda trayectoria se presentó con mayor frecuencia, pues los estudiantes entrevistados respondieron considerando un operador lineal diagonalizable en el sentido de Friedberg, Insel y Spence (1982, p. 233).

La principal diferencia entre estos dos caminos de aprendizaje en la construcción del concepto de estudio, radicó en que por un lado se busca comparar la dimensión geométrica con la dimensión algebraica y por el otro lado se busca una matriz diagonal que sea similar a la representación matricial del operador lineal dado, es decir, un individuo con una concepción *proceso* de matriz semejante prefiere determinar si la representación matricial del operador lineal es semejante a una matriz diagonal que, *coordinar* los *procesos* base ordenada y vectores propios, en el *proceso* base propia.

Declaración de disponibilidad de datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, [EMS], previa solicitud razonable.

Referencias

Anton, H. (1994). *Introducción al álgebra lineal*. Editorial Limusa.

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Axler, S. (1997). *Linear Algebra Done Right*. Springer.

Badillo, E., Trigueros, M., & Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. In C. Azcárate, M. Camacho-Machin, Mª T. González & M. Moreno (eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31–51). Universidad de la Laguna.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Poter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24 (1), 41–46. https://doi.org/10.2307/2686430

Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (1982). *Álgebra lineal*. Publicaciones Cultural, S.A.

Godement, R. (1974). *Álgebra*. Tecnos.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (ed.), *On the teaching of linear algebra.* (pp. 191–207). Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (eds.), *Proceedings of the International Conference for Psychology of Mathematics Education 18* (3) (pp. 65–72). *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED383537.pdf

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamerica.

Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20 (2), 65–89. http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol20-2.pdf

Lang, S. (1987). *Linear algebra*. Springer.

Mendoza-Sandoval, E., Rodríguez-Vásquez, F., & Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la teoría APOE. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 371–380). Universidad de Alicante.

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Guerrero]

Nicholson, W. K. (2018). *Linear algebra with applications.* Lyryx.

Oktaç, A., Trigueros, M., & Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics,* 39 (1), 33–37.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications,* 432 (8), 2112–2124.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradigma*. 33 (1), 103-134. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/494/491

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. Cengage Learning.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13 (1), 89–112.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación matemática,* 26 (3), 75–107. http://somidem.com.mx/descargas/Vol26-3-3.pdf

Siap, I. (2008). Motivating the concept of eigenvectors via cryptography. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 27 (2), 53–58. https://doi.org/10.1093/teamat/hrn001

Stewart, S., & Thomas, M. (2009). A framework for mathematical thinking: the case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (7), 951–961. https://doi.org/10.1080/00207390903200984

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17 (1), 5-32. http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol17-1.pdf

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. In D. Pitta – Pantazi & G. Philippou (eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME (pp. 2359-2368).

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., & Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Educación matemática*, 27 (2), 95–124. http://somidem.com.mx/descargas/Vol27-2-4.pdf

Trigueros, M. (2019). Diálogo entre las teorías APOE y TAD. *Educaçao Matemática Pesquisa,* 21 (5), 1-14. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p30-43

Yildiz, A. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: A case study at Galatasaray University. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 12 (1), 119–130. http://www.tojet.net/articles/v12i1/12113.pdf