VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ANÁLISIS HISTÓRICO DEL CÁLCULO FRACCIONARIO

Adrian Muñoz, Flor Rodríguez, Martin Arciga
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
adrianmunozorozco@hotmail.com, flor.rodriguez@uagro.mx, mparciga@gmail.com

Resumen
El cálculo fraccionario actualmente tiene un alto potencial de desarrollo en la modelación matemática a través de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y permite además la extensión, a órdenes no enteros, de conceptos como la derivada y la integral. Es un nuevo enfoque que tiene antecedentes en los trabajos de Leibniz. Una problemática asociada a los conceptos matemáticos que se enseñan en la actualidad, reside en que estos carecen de una contextualización de su propia génesis y en consecuencia se presentan como objetos terminados sin un precedente histórico. En este documento presentamos un avance de la obra de Liouville (1832) la cual es considerada por los historiadores como fundamental en el desarrollo del cálculo fraccionario, usando el método de investigación histórica y análisis cualitativo de textos. La investigación nos permite identificar algunos aspectos históricos y epistemológicos que permitieron el desarrollo del cálculo fraccionario.

Palabras clave: historia, cálculo fraccionario, Liouville, análisis cualitativo

Abstract
Nowadays, fractional calculus has a high development potential in mathematical modeling through fractional differential equations and it also allows the extension, to non-integer orders, of concepts such as derivative and integral. It is a new approach that includes previous Leibtniz´s research works. An issue related to mathematical concepts that are taught at present is the lack of their own genesis contextualization. Consequently, they are presented as ended objects with no historical precedent. In this paper, we present an advance of the analysis of Liouville's work (1832) which is considered essential in the development of the fractional calculation, by historians. We use the historical research method and the qualitative analysis of texts. The investigation let us identify some historical and epistemological aspects that led to the development of fractional calculus development.

Key words: history, fractional calculus, qualitative analysis

Introducción

La investigación histórica en didáctica de la matemática tiene como objetivos no sólo el generar aportes en los procesos de enseñanza aprendizaje a través de propuestas de aula sino en el sentido más general interpretar, evaluar y sintetizar evidencia sistemática y objetiva para establecer hechos y extraer conclusiones acerca de acontecimientos pasados. Este tipo de investigación se ha ido fortaleciendo en las últimas tres décadas a través de investigaciones como la de Anacona (2003), quien menciona que desde los estudios históricos se pretende mostrar que las matemáticas son una construcción humana, y como tal están ligadas al ámbito social y cultural que las produce.

La problemática principal consiste en que los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan a nivel escolar, se presentan de una forma cerrada y acabada, como si se tratara de un resumen de los conocimientos más desarrollados en la ciencia, olvidando que han surgido después de un largo proceso de gestación. (Sierra, 2000; González, 2004; Nolla, 2006; Cantoral & Farfán, 2004). Es decir, la enseñanza actual de la matemática deja de lado los sucesos, los problemas y las dificultades que incidieron en la formación de un objeto matemático.

Desde la investigación histórica en didáctica de la matemática, se han analizado diferentes conceptos matemáticos, por ejemplo Valdivé y Garbien (2008) estudiaron los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal; Oller y Gairín (2013) realizaron una revisión histórica de algunos conceptos fundamentales relacionados con la proporcionalidad aritmética, como son la razón y la proporción; Gallardo y Basurto (2010) desarrollaron una investigación histórica en la cual destacan tres episodios cruciales en la trayectoria hacia la expansión del dominio numérico de los naturales a los enteros; y Doorman y Maanen (2008) investigaron sobre los orígenes de la derivada con el objetivo de generar reflexiones históricas que contribuyan a mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Bajo este enfoque, las investigaciones se caracterizan por interpretar cada uno de los aspectos incidieron en la constitución de los conceptos matemáticos, tanto para proporcionar un marco histórico social y cultural como para buscar favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje del mismo.

En este sentido, esta investigación muestra un análisis histórico epistemológico del concepto de cálculo fraccionario, dado que este concepto permite modelar crecimiento de poblaciones, fenómenos físicos y fenómenos sociales, que usualmente no se ajustan de forma idónea a los modelos usuales como el exponencial. La revisión bibliográfica pone en manifiesto que desde la Didáctica de la Matemática son escasos los trabajos sobre el Cálculo Fraccionario y particularmente en la línea histórica.

Este artículo se presenta un avance de investigación que describe a través del análisis histórico y del análisis cualitativo de textos, las primeras definiciones presentadas por Liouville (1832) sobre el Cálculo Fraccionario y algunos de los problemas que se resolvían empleando este concepto.

Marco Teórico y Metodológico

El enfoque histórico ofrece la posibilidad de estudiar los aspectos que dieron origen a un concepto determinado, mostrando que las matemáticas son el resultado de un proceso en continua evolución, en los cuales se han presentado dificultades y épocas de estancamiento. Este enfoque, deslumbra como aparecen las teorías matemáticas el contexto en las cuales surgieron y los problemas que resolvieron (Sierra, 2000). Desde la aportación hacia la enseñanza, la investigación histórica le permite al docente de matemáticas mejorar su discurso matemático (Anacona, 2003); y desde la aportación del aprendizaje se favorece el entendimiento de las dificultades que pueden tener los estudiantes en ordenar y establecer lo que es una demostración (Sierra, 2000) y de enseñar los objetos de forma distinta a la que se presenta en el aula de forma acabada y como una verdad absoluta (González, 2011).

Desde el aporte hacia la historia social de las matemáticas, el enfoque histórico provee información sobre el contexto sociocultural donde emerge el concepto matemático, mostrando que las matemáticas son producto de las actividades culturales enmarcadas en un contexto (Sierra, 2000). Así, desde esta perspectiva se estudia el papel de las instituciones educativas, al análisis de textos de enseñanza, revisión de currículos, directrices políticas-educativas, y de todos aquellos aspectos que impidieron o fomentaron el desarrollo de un concepto matemático (Anacona, 2003). Este tipo de estudios permite una comprensión más profunda de las dificultades que han surgido a lo largo de la constitución de un objeto, relacionándolas con las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión de los conceptos (González, 2011). Desde el aporte hacia la enseñanza de las matemáticas, el enfoque histórico sustenta diseños de propuestas de enseñanza de las matemáticas que contemplan conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas (Anacona, 2003). Por lo general en este tipo de investigaciones se recurre a teorías de la didáctica de las matemáticas para diseñar, aplicar, y analizar el impacto de dichas propuestas; como por ejemplo la transposición didáctica que explica las transformaciones que tiene el saber matemático hasta convertirse un objeto de enseñanza (Chevalard, 1985).

Ahora bien, para el análisis de los textos recurrimos al método de investigación histórica, el cual es definido por Cohen y Manion (2002) como la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados. Este método indica las etapas elección de tema, recopilación de datos, evaluación y redacción del informe de investigación. La elección de tema consiste en escoger el tema que se va a estudiar, considerando su impacto en la Didáctica de la Matemática, el problema y objetivo de investigación y las acotaciones necesarias. La recopilación de los datos consiste en identificar distintas fuentes de información como documentos escritos, sonoros pitagóricos, memorias, diarios, periódicos, revistas, guías, libros de actas entre otros. Los elementos de consulta se catalogan en fuentes primarias y fuentes secundarias.

La evaluación que plantea el método, consiste en la autenticidad de la fuente y la precisión de la información brindada, estos procesos se conocen como crítica externa y crítica interna respectivamente. En la crítica externa se evalúa que la fuente encontrada se encuentre en buen estado, que sea legible, que la información no está distorsionada o que se trate de una falsificación de la obra original. En la crítica interna se analiza la relevancia de la información contenida en las fuentes verificadas, y los aportes de estas a la investigación. Finalmente la cuarta fase consiste en sintetizar lo que se ha desarrollado en las tres fases anteriores, mediante la presentación del informe. Esta es quizás la fase más difícil de este tipo de investigaciones, ya que conlleva a niveles elevados de objetividad, creatividad y análisis sistemático de las fuentes encontradas.

Específicamente, para la crítica interna se recurrirá al análisis cualitativo de textos propuesto por Kuckartz (2014), que tiene como objetivo de realizar análisis de textos con altos estándares de objetividad, fiabilidad y valides. Esta metodología, se divide en cinco fases: en la primera se lee y se interpretar el texto de la investigación; en la segunda se construyen categorías; en la tercera se codifican los elementos del texto; en la cuarta se analizan están categorías y en la última fase se presentan los resultados. Figura 1

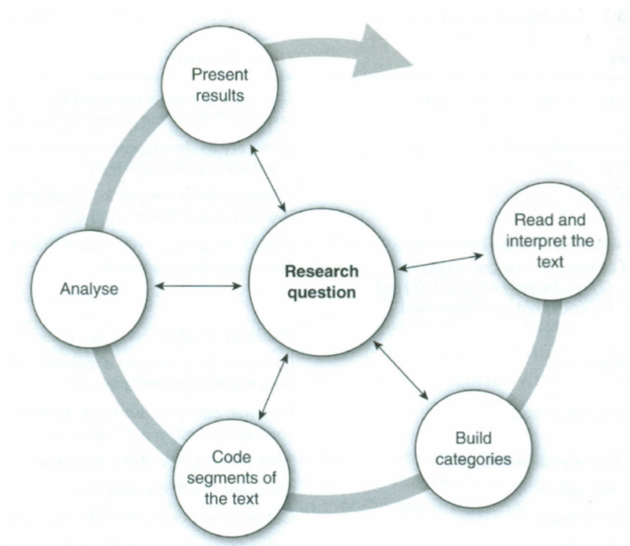

Figura 1. Proceso general del análisis cualitativo de textos (Kuckartz, 2014).

Desarrollo del Cálculo Fraccionario desde el trabajo de Liouville

Para analizar el aporte de Liouville consideraremos la fuente *Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions* escrita en 1832 y publicada en el *Journal de l'École Polytechnique.* Dado que, en investigaciones como las de Ross (1977) y Sánchez (2011) consideran esta obra como relevante en el desarrollo del Cálculo Fraccionario, ya que en esta se presenta las primeras definiciones formales de este concepto y además las primeras aplicaciones del mismo.

Ahora bien, de acuerdo con la metodología de análisis de textos en primer lugar se realiza una lectura concienciada por parte de los investigadores de la obra de Liouville (1832) y a partir de esa lectura se diseñan las siguientes categorías de análisis presentadas en la tabla 1.

Tabla 3. Categorías de análisis.

Fuente de análisis	Categorías de Análisis	Códigos
Liouville (1832)	Definiciones	DE
	Teoremas	TE
	Tipos de problemas	TP

Del análisis se identifica que la primera definición dada por Liouville sobre el cálculo fraccionario es

$$\frac{d^{\mu}(f)}{dx^{\mu}} = \sum A_m\, e^{mx} m^{\mu} \qquad (1)\ \text{DE}$$

Donde μ es el orden la derivada, y μ puede ser un número entero, racional, irracional o complejo; además si μ es negativo se considera que es una integral fraccionaria**.** Para Liouville llegar a esta definición parte de la premisa de que toda función se puede expresar como la suma de funciones exponenciales

$$f(x) = \sum A_m\, e^{mx} \qquad (2)$$

Y al derivar (2) n veces, con $n \in N$ se obtiene $\frac{d^n(f)}{dx^n} = \sum A_m\, e^{mx} m^n$, dado que la derivada de una función exponencial es la misma función multiplicada por la derivada interna en este caso m. Ahora, de forma arbitraria Liouville expande este razonamiento para $\mu \in \mathbb{C}$ llegando a la definición presentada en (1). Es decir, Liouville generaliza la derivada de orden n, con $n \in Z$ a una derivada de orden μ, con $\mu \in \mathbb{C}$.

Liouville considera que la definición (1) presenta algunas deficiencias entre ellas, la dificultad para expresar cualquier función como la suma de funciones exponenciales, el radio de convergencia de esta expansión; y que para llegar a una definición solida de un nuevo campo de análisis no basta con crear denominaciones aleatorias y anotaciones arbitrarias. Por estos motivos Liouville considera que es necesario definiciones más amplias y sólidas llegando a dos definiciones más del cálculo Fraccionario, específicamente para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, para posteriormente generalizarla para la función $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Estas definiciones se presentan en su obra como:

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(1+\mu)}{x^{1+\mu}} \qquad (3)$$

con $\mu \in \mathbb{C}$ y Γ conocida como la función Gama (DE); y

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n) x^{n+\mu}} \qquad (4)$$

con $\mu \in \mathbb{C}$ (DE).

Para llegar a la definición de la ecuación (3), Liouville consideró dos casos. El primero para $x > 0$ y el segundo para $x < 0$. Para el primer caso, parte de la igualdad

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\propto x}\, d\alpha \qquad (5)$$

la cual puede ser verificada al calcular la integral de lado derecho de la igualdad en términos de α. Ahora bien, derivando a ambos lados de la ecuación (5) en términos de x, y empleando el resultado de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \int_0^\infty e^{-\propto x}\, (-\alpha)^\mu\, d\alpha \qquad (6).$$

Para el segundo caso, se recurre a la equivalencia $\frac{1}{x} = -\int_0^\infty e^{\propto x}\, d\alpha$ (7) y empleando un pensamiento análogo al primer caso se llega a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = -\int_0^\infty e^{\propto x}\, \alpha^\mu d\alpha \qquad (8)$$

Ahora bien, las expresiones encontradas en (6) y (8) pueden verse sintetizadas en una única expresión considerando dos aspectos: el primero es la sustitución $\alpha x = \theta$ en (6) y $\alpha x = -\theta$ en (8); el segundo aspecto es considerar la función gama definida como

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-\theta}\, (\theta)^{\mu-1} d\theta$$

con $\mu \in \mathbb{C}$. Así, realizando las sustituciones mencionadas y realizando los procesos algebraicos necesarios, la expresión en (6) se convierte en

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(1+\mu)}{x^{1+\mu}} \qquad (3) \qquad \text{(DE)}$$

Dado que si $\alpha x = \theta$ entonces $\alpha = \frac{\theta}{x}$ y $d\alpha = \frac{d\theta}{x}$ y además $\int_0^\infty e^{-\theta}\, (\theta)^\mu d\theta = \Gamma(1+\mu)$. Realizando un proceso análogo en (8) como el desarrollado en (6) se llega una vez más a (3) cuando $x < 0$.

Considerando ahora, el caso de la tercera definición del Cálculo Fraccionario, expresada en (4) de la función $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Liouville parte de que $x > 0$ y de la sustitución $\alpha x = \theta$ en la integral $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha$, obteniendo la expresión

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\alpha^{n-1}d\alpha = \int_0^\infty e^{-\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{d\theta}{x}\right) = \frac{\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta}{x^n} \qquad (9)$$

En consecuencia, al sustituir $\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$ por $\Gamma(n)$ y al realizar una trasposición de términos en (9) se llega a

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}d\alpha}{\Gamma(n)} \qquad (10)$$

y al derivar a ambos lados μ veces d (10), empleando la definición (1) y en términos de x,se llega a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}(-\alpha)^\mu d\alpha}{\Gamma(n)},$$

lo que puede reescribir como

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n+\mu-1}d\alpha}{\Gamma(n)} \qquad (11).$$

Al realizar nuevamente la sustitución $\alpha x = \theta$ en (11) conduce a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n+\mu-1}d\alpha}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

Llegando finalmente a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu\Gamma(1+\mu)}{x^{n+\mu}} \qquad (4) \qquad \text{(DE)}.$$

En general las definiciones presentadas en (1) y (4) son conocidas por los historiadores como la primera y segunda definición de Liouville sobre el cálculo fraccionario. Sin embargo, desde nuestra interpretación se presentaron tres definiciones, pero si se analiza a fondo la definición en (3) es un caso particular en (4) cuando $n = 1$. Además, desde la perspectiva de Liouville las definiciones (3) y (4) son consideradas como dos simples ejemplos de una teoría mucho más avanzada.

Una de las intenciones con las cuales Liouville presenta esta memoria es con el objetivo de solucionar nueve problemas, que desde las teorías matemáticas ya conocidas hasta el momento hay algunas impresiones, o que sencillamente no se pueden solucionar. Para ello, Joseph recurre a la demostración de tres teoremas, los cuales será considerado como ampliaciones a las definiciones presentadas hasta el momento.

Ahora bien, Liouville no utiliza un enunciado para estos teoremas, simplemente los presenta como una ecuación, en este orden de ideas los tres teoremas presentados en la obra de Liouville sin profundizar en ellos por razones de extensión:

$$\int^u \phi(x)dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha \qquad \text{(TE)};$$

$$\frac{d^\mu\phi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\cdot\int_0^\infty \frac{d^n\phi(x+\alpha)}{dx^n}\,\alpha^{p-1}d\alpha \qquad \text{(TE)};$$

$$\int_0^\infty \phi(x^2+\alpha^2)\alpha^{2\mu-1}d\alpha = \frac{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}{2}\int_0^u \phi(x^2)\,d\,(x^2)^\mu \qquad \text{(TE)}.$$

Donde, en los tres casos $\phi(x) = \sum A_m\, e^{mx}$ y p es un número real positivo.

Una vez Liouville realiza la demostración de los teoremas anteriores pasa la enunciación de nueve problemas y solución de los mismos utilizado los teoremas demostrados. Los problemas enunciados tienen las siguientes características: el primero referente a geometría (TP). El segundo y el tercero relacionan con fuerzas atractivas, que se derivan de elementos de hilos conductores, es decir electromagnetismo (TP). El cuarto y el quinto problema también aluden a fuerzas atractivas pero en contextos diferentes, para el cuarto problema se analiza la atracción entre dos sustancias (física mecánica) contenidas en recipientes cuyo formas son paralelipedos (TP), y en el quinto también se expresa en términos de atracción entre dos sustancias, sin embargo en este caso se considera cuerpos en forma esférica ((TP). El sexto problema, de la tautochrone de física mecánica. El séptimo y octavo de geometría (TP), y noveno nuevamente de fuerzas de atracción (TP).

Conclusiones

El análisis histórico del cálculo fraccionario permite comprender como fue el desarrollo de este concepto, y en especial si se consideran fuentes primarias como en este caso. Destacando que uno de los motivos por lo cual nace este concepto es por la necesidad de los matemáticos de generalizar pasado de un orden natural a uno complejo. Asimismo, se hace hincapié que es la obra de Liouville donde se presenta una amplia aplicación de este concepto ya que desde su nacimiento en 1965 (Ross, 1997), era un concepto que se creía prácticamente teórico, sólo se había encontrado una aplicación en el problema de la tautócrona que Liouville retomó en el problema seis. Este análisis también muestra la aplicabilidad de este concepto es diferentes campos como la geometría, la física mecánica y el electromagnetismo. También se hace explícitos la noción de ecuaciones diferenciales, dado que en algunos de los problemas resueltos se trataba de encontrar la función $\phi(x)$.

Desde el punto de vista didáctico los problemas reportados en la obra de Liouville pueden ser retomados por docentes universitarios e involucrarlos en sus prácticas de enseñanza. Además, pueden ser considerados en futuras investigaciones mediante rediseños para ser llevados al aula de clase y posteriormente analizado el impacto de estos problemas en el aprendizaje con otras teorías de educación matemática.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Internacional Thomson Editores.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación Educativa.* Madrid: La Muralla.

Dorman, M, y Maanen, J. (2008). A Historical Perspective on Teaching and Learning Calculus. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 4-14.

Gallardo, A., y Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 255-268.

González, M. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon - Revista de Educación Matemática, 28*(77), 83-97.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: Sage publications.

Liouville, J. (1832). Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. *Journal de l'École Polytechnique*, *21*(13), 1-69.

Nolla, R. (2006). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*. Barcelona: l'Institut d'Estudis Catalans.

Oller, A., & Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 317-338.

Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Matemática, 4,* 75-89.

Sánchez, J. (2011). Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, *1*(2), 1-15.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *Números,* (43-44), 93-96.

Valdivé, C., y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450.