NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 103, marzo de 2020, páginas 113-121

Estrategia teórico-didáctica para formar el concepto de gráfica y función lineal en el registro geométrico

Angie Damián Mojica (Colegio México, Guerrero, México)
Armando Morales Carballo (Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Fecha de recepción: 21 de noviembre de 2019
Fecha de aceptación: 20 de febrero de 2020

Resumen Se presenta una estrategia teórico-didáctica con enfoque variacional que favorece la formación del concepto de función lineal y que rompe con la presentación clásica tratada en los textos y otros recursos de apoyo que habitualmente acompañan los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto, en el nivel preuniversitario. Se inicia el tratamiento en el registro geométrico para evitar que influyan las nociones previas que se tengan del sistema cartesiano y de las representaciones.

Palabras clave Estrategia didáctica, gráfica, trayectoria, razonamiento covariacional, función lineal.

Title **Theoretical-didactic strategy to form the concept of graph and linear function in the geometric register**

Abstract A theoretical-didactic strategy is presented with a variational approach that favors the formation of the concept of linear function and that breaks with the classic presentation treated in the texts and other support resources that usually accompany the teaching and learning processes of the concept, in the pre-university level. The treatment begins in the geometric register to avoid the influence of notions related to the cartesian system and the representations.

Keywords Didactic strategy, graph, trajectory, covariational reasoning, linear function.

1. Introducción

Formar el concepto de función lineal se desprende de un proyecto mucho más amplio que está en desarrollo, denominado Propuesta de Ingeniería Didáctica (PID) para el estudio del sentido de variación de una función. En el desarrollo del análisis preliminar de la PID, en el análisis cognitivo, diversas investigaciones orientadas hacia el estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo (Reséndiz, 2006; Zúñiga, 2009; Castillo, 2009; Díaz, 2009; Salinas y Alanís, 2009; Rubí, Moreno, Pou y Jordán, 2010; Pineda, 2013, Delgado, 2013; Ruiz, Hernández y Gutiérrez, 2015; Cuevas y Delgado, 2016) ponen de manifiesto que tanto en profesores como alumnos del preuniversitario se identifican problemas sobre la comprensión de los conceptos básicos del cálculo, tales como el concepto de función y de los tipos de funciones, gráfica, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros.

En relación al tratamiento sugerido en los libros de texto de Cálculo (Apóstol, 1967; Swokowsky, 1982; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Stewart, 2007; Granville, 2007; Ibañez y García, 2007; Cuéllar, 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 201; Sántalo y Carbonell, 2011; Arteaga y Espinoza 2014; Contreras, 2014; Garza, 2015; Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001; Valdés, 1983) sobre el concepto de función, y de manera particular del de función lineal, se identifica la presentación algebraica. Este enfoque estático de proponer el tratamiento influye tanto en el profesor como en los alumnos, ya que pueden llegar a concebir una función lineal como aquella expresión de la forma $f(x) = ax + b$, para luego describir el papel de los parámetros, su efecto en la gráfica, y el estudio de las propiedades, y no identificar otros comportamientos esenciales que favorecen su comprensión a partir del estudio de la gráfica con enfoque dinámico.

En un estudio sobre estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar (Dolores y Valero, 2004), se han reportado las dificultades que los estudiantes universitarios tienen al ser enfrentados a actividades de análisis de funciones elementales. Entre estas dificultades se menciona específicamente que cuando se pide responder cuáles son las zonas de crecimiento o decrecimiento de una función, el obstáculo principal es que los estudiantes no son capaces de entender el comportamiento covariacional de las variables involucradas; dando como resultado un gran número de respuestas equivocadas.

Las situaciones descritas que han arrojado las investigaciones referidas, y las identificadas en los textos acerca de la función lineal y su comportamiento gráfico, nos han motivado hacia la búsqueda de definiciones y tratamiento, y al respecto se ha encontrado que hay dos formas de definir *gráfica de una función*, según el punto de vista que se adopte: estático y dinámico. Desde el punto de vista estático, la gráfica de una función puede definirse como un conjunto de puntos en un espacio determinado que tienen una determinada propiedad; desde el punto de vista dinámico, la gráfica de una función describe el comportamiento de una de las variables en dependencia de otra (haciendo referencia a los casos más simples). Aun cuando ambas formas de referirse a la gráfica de una función son correctas, consideramos que la concepción estática da idea de inmovilidad; mientras que la concepción dinámica recoge la idea acerca del cambio de una variable con respecto de otra (una de las dimensiones de estudio de la relación covariacional).

La idea de covariación es necesaria para dar respuestas correctas a preguntas como ¿cuáles son las zonas de crecimiento, decrecimiento y de estabilidad de una función? Así como otras interrogantes en el campo del análisis de funciones. Sin embargo, la acción de ubicar puntos de la gráfica mediante la tabulación constituye en la práctica una preferencia por la concepción estática sobre la concepción dinámica de gráfica de una función y, por tanto, de su definición.

Con el propósito de incidir en una propuesta didáctica para la formación del concepto de gráfica de una función y función lineal bajo un enfoque dinámico, se determinó por empezar estudiando mediante el software GeoGebra la representación ortogonal de dos magnitudes que mantienen una dependencia, de manera que esta situación represente un fenómeno variacional.

Se elige el registro geométrico como registro inicial para representar dicho fenómeno variacional. Hablando con mayor especificidad, se trataría del mismo concepto, pero sin involucrar el sistema cartesiano; en lugar de las variables x, y aparecen otras p, q que son segmentos de rectas variables; pero éstas últimas ligadas ortogonalmente durante todo el proceso de variación. El hecho de ligar estas dos últimas variables ortogonalmente puede hacer que los estudiantes atiendan principalmente a la covariación entre ellas.

La propuesta la conforman actividades de tipo variacional en las cuales se busca la relación entre segmentos ortogonales a través de la dependencia que guardan las dos variables que los representan.

Finalmente se orienta a la generalización necesaria para reconocer los efectos que los parámetros D, d tienen sobre la gráfica de la relación $p = Dq + d$; logrando en estos casos predecir la posición de la trayectoria a medida que varía la relación ortogonal de las magnitudes. Hecho el trabajo anterior mediante el uso del software GeoGebra se continúa el tratamiento, ya en el sistema cartesiano.

2. Fundamento teórico y metodológico

2.1. Razonamiento covariacional

Carlson y Jacobs (2003) definen razonamiento covariacional como *las actividades cognitivas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*. En tal definición, se asume que el concepto de imagen es la fuente y el vínculo de operaciones mentales y tiene un carácter evolutivo; por tanto, las imágenes de covariación se pueden definir por niveles. Las acciones mentales en este marco conceptual proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden identificar cuando los estudiantes realizan este tipo de actividades. Este trabajo se interesa por el desarrollo de los siguientes niveles:

Acción Mental 1 (AM1). Coordinación del valor de una variable con los cambios en las otras. Dado el enfoque dinámico que se asume en el trabajo, en un primer momento se busca la relación entre magnitudes que cambian ortogonalmente; en este nivel no se considera la designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de variables (y cambia con cambios en x). Sin embargo, la búsqueda de la relación de dichas magnitudes prepara las condiciones para la transición del registro geométrico al gráfico de la situación, y en este último, se establece como tal la relación de las variables dependiente e independiente, en términos de los cambios en ambas, y la búsqueda interna de la condición del proceso.

Acción Mental 2 (AM2). Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. El enfoque dinámico potencia la identificación de las condiciones de un punto que recorre cierta trayectoria: aquí, la identificación se favorece a medida que se identifica la relación entre las magnitudes que varían ortogonalmente. En esa relación, se pueden identificar las condiciones del cambio y la dirección del cambio, lo que permite conocer la naturaleza de la trayectoria recorrida.

Acción Mental 3 (AM3). Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra variable. La relación de las magnitudes que cambian ortogonalmente se puede representar en términos de una trayectoria; esta última en el registro geométrico ayudará a identificar la naturaleza de ese comportamiento (creciente, decreciente o estable), y de ese modo se sabrá que el cambio en las magnitudes de salida, obedecen al cambio de la magnitud de entrada. Ya en un sistema de coordenadas, se puede enriquecer el significado de las trayectorias (rectas).

2.2. Registros y representaciones semióticas

Duval (2004) asume que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran, además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación para su tratamiento. El investigador establece que los registros de representación deben ser semióticos, es decir, deben permitir las tres acciones cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber: *Formación de un conjunto de signos que sean identificables:* Se trata de la representación de un objeto matemático. Por ejemplo: una frase, una fórmula, una figura geométrica, etc. Esta formación implica una selección de rasgos y datos del objeto a representar. *Tratamiento de la representación:* Esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. *Conversión de la representación:* Es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

La conversión es una transformación externa a un registro, ésta no debe ser confundida con la codificación que sería una especie de representación "puntual" que no tendría en cuenta al contenido representado. El cambio de un sistema de representación a otro o la puesta en juego simultánea de varios sistemas de representación en el desarrollo de una clase no resulta, para nada, evidente o espontáneo para los alumnos. En general les cuesta reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos.

Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio, y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, entre otros) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, entre otros) no puede haber comprensión en matemática.

2.3. El software GeoGebra y la visualización

El software favorece el desarrollo de actividades dinámicas y ofrece un recurso heurístico en los procesos de la resolución de problemas, y en la búsqueda y desarrollo del conocimiento, mientras que la visualización, entendida esta como la asociación de imágenes-ideas, favorece la identificación de patrones de comportamiento y el establecimiento de relaciones lógicas que posibilitan la comprensión matemática.

3. Estrategia teórico-didáctica

3.1. Descripción y análisis

El objetivo principal de la propuesta es que tanto profesores como alumnos del preuniversitario (los cuales llamamos actores) aprendan a bosquejar la gráfica de la relación entre dos variables que cambian en un fenómeno variacional. En otras palabras, se trata de que, a partir del conocimiento de la relación $p = Dq + d$ (donde D, d son magnitudes constantes) entre dos variables p, q (segmentos de recta ligados ortogonalmente), los profesores o alumnos bosquejen la gráfica que representa dicha relación después de descubrir los efectos que los parámetros D, d tienen sobre la gráfica de la relación $p = Dq + d$.

Nivel 0. Nivel inicial. Se preparan previamente a los actores en el uso de la regla y el compás utilizando el software GeoGebra hasta que logren realizar operaciones como las que se muestran en la Figura 1.

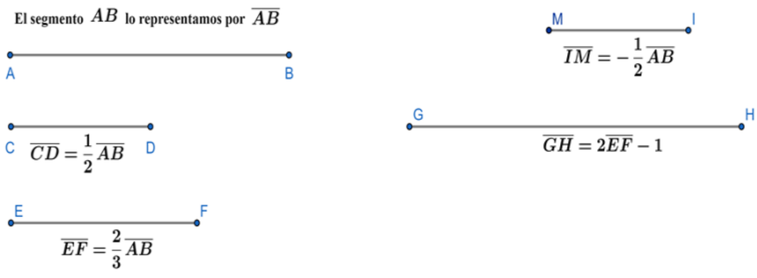

Figura 1

También se promueven actividades que consisten en solicitar a los actores que proporcionen una representación geométrica que describa la relación entre segmentos p, q ligados ortogonalmente, para un valor inicial de q, apoyándose en el uso de la regla y el compás, y aceptando las siguientes reglas: 1. Se debe determinar un punto como origen (0), 2. Se debe designar de antemano la unidad de medida, 3. El segmento q debe ser siempre horizontal partiendo de (0); a la derecha si es positivo; a la izquierda si es negativo, 4. El segmento p debe ser ligado ortogonalmente al extremo final de q; hacia arriba si es positivo; hacia abajo si es negativo. En la Figura 2 se muestran dos casos particulares de la construcción indicada.

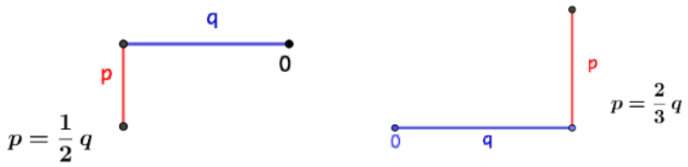

Figura 2

Nivel 1. Un ejemplo particular del tratamiento de la relación objetivo. Dada la relación $p = 2q + 1$ y una representación particular de la misma, imagine que el segmento q cambia de valores entre positivos, (en la Figura 3 se muestra el caso en que $q = 2.18$, por lo que $p = 2(2.18) + 1 = 5.36$).

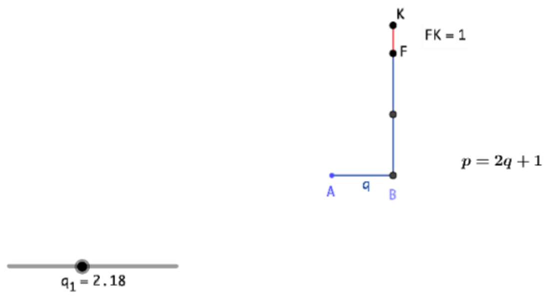

Figura 3

Aquí, el impulso didáctico refiere a la pregunta: *¿Qué cambia cuando cambia* q*?* Se espera que los actores identifiquen que si q cambia, el segmento ortogonal p también cambia, y aumenta o disminuye según la variación de valores de q. De la evidencia de que el segmento ortogonal $p = \overline{BK}$ cambia a medida que q lo hace, se impulsa la cuestión *¿Qué forma adquiere la trayectoria de* K *a medida que* q *cambia?* En la Figura 4 se muestra el caso de la trayectoria del punto a medida que q adquiere valores positivos; se puede observar que el punto recorre una trayectoria lineal.

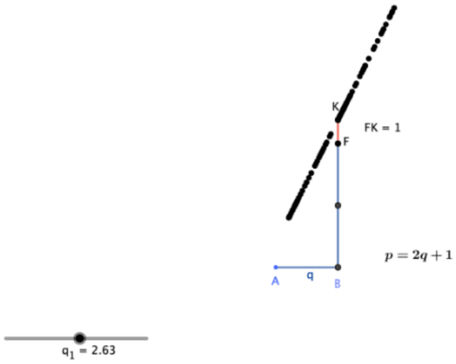

Figura 4

Nivel 2. Principio de generalización. En esta etapa los actores consideran los comportamientos anteriores cada vez que q toma valores positivos (partiendo de (0) a la derecha) y valores negativos (partiendo de (0) a la izquierda). En la Figura 5 puede identificarse que p cambia condicionado por el cambio de q. Al variar q entre valores negativos y positivos, K hace el recorrido en una trayectoria lineal, siempre creciente cuando q se desplaza de izquierda a derecha, y siempre decreciente cuando q se desplaza de derecha a izquierda.

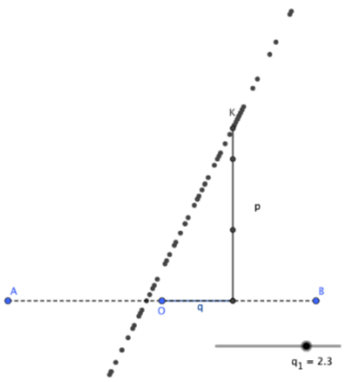

Figura 5

Con las actividades realizadas en el registro geométrico se han creado las condiciones para continuar el tratamiento en el sistema de coordenadas. La Figura 6 representa la situación anterior en el sistema cartesiano.

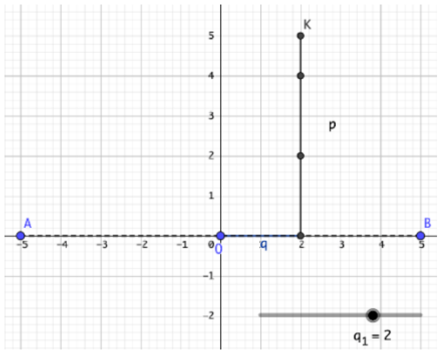

Figura 6

Puesta la situación en este registro, se analiza el comportamiento del punto K, de igual modo se identifica que la trayectoria que recorre este punto depende del punto q. Si q toma valores mayores o iguales a $(-1/2)$, el punto K se posiciona por encima del eje horizontal (en los cuadrantes I y II), si q toma valores menores que $(-1/2)$ el punto K se posiciona por debajo del eje horizontal (en el cuadrante III).

Nivel 3. Relación funcional de las magnitudes que varían ortogonalmente. Se ha observado que los cambios de p dependen del cambio de q. Al llevar este comportamiento a un sistema coordenado, puede notarse la relación funcional $y = 2x + 1$, y esto se posibilita de manera natural en el proceso dinámico que se ha venido anticipando. En la Figura 7 se muestra la recta asociada a la función lineal; dicha recta representa el lugar geométrico del punto K a medida que q se mueve y recorre valores positivos y negativos. De inmediato se redescubre que dicho comportamiento también se adquiere al graficar la función lineal $y = f(x) = 2x + 1$.

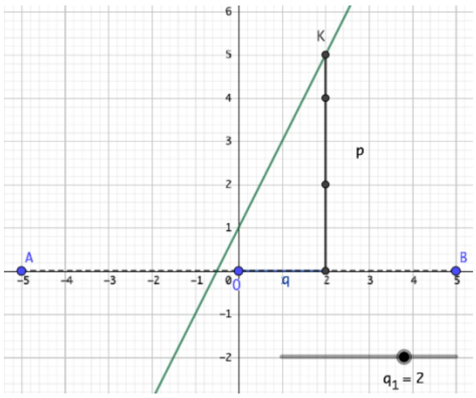

Figura 7

Nivel 4. Análisis de la relación funcional $p = Dq + d$ y $f(x) = ax + b$: Definición de la función lineal y de su gráfica. Considerando el caso particular estudiado, los actores analizan ahora qué efectos producen sobre el punto K los parámetros D y d, y finalmente en el sistema coordenado analizan el comportamiento de la relación funcional $f(x) = ax + b$ y establecen su definición.

A partir de aquí se está en condiciones suficientes para resignificar gráficamente los conceptos creciente, decreciente y estable, toda vez que el comportamiento de $f(x) = ax + b$, si bien representado mediante una recta, se puede entender como la variación que ya se ha descrito hasta ahora, en dependencia de su pendiente, de un punto $(x, f(x))$ que se desplaza suavemente, y que puede ser creciente, decreciente o estable, introduciendo con ello los conceptos adicionales de máximos, mínimos, y puntos de inflexión, aspectos que caracterizan mejor las curvas de grado mayor que uno.

4. Conclusiones

Como se describió antes, en el diseño de las actividades para la formación del concepto de gráfica y función lineal, es notorio que se trató de un fenómeno variacional; la elección del registro puramente geométrico evita el uso de la calculadora y promueve el uso de la regla y el compás; en lugar de la gráfica de la relación entre las variables x, y se pregunta por su equivalente en este fenómeno variacional, es decir la trayectoria de K a medida que q cambia. Son estos rasgos del diseño los que hacen que en esta propuesta didáctica prevalezca la posibilidad de atender por parte de los actores (profesores y estudiantes) a la covariación entre las variables en juego. El diseño de las secuencias propias del proceso de formación del concepto de gráfica y función lineal involucró el uso de representaciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra, pues éste tiene una potente capacidad gráfica con opciones dinámicas.

Con esta propuesta se contribuye en la formación del concepto de gráfica y de función lineal desde un enfoque dinámico, en donde se potencian algunas acciones mentales dentro del razonamiento covariacional que posibilitan determinar las condiciones, dirección y representación del cambio entre la relación de magnitudes que varían ortogonalmente. Una vez que se generan las condiciones indicadas se tiene la posibilidad de una presentación formal del concepto de gráfica y de función lineal, además del tratamiento de sus propiedades.

Finalmente, con esta elaboración se contribuye a una propuesta de enseñanza-aprendizaje en el tratamiento de la función lineal y su gráfica que rompe con el esquema clásico de su presentación en los textos y planes y programas de estudio del nivel preuniversitario. El enfoque dinámico que se describió, desde la visión de los autores, influye de manera natural en el estudio del sentido de variación de una función, y presenta las bases para el tratamiento de recursos formales del cálculo: el uso de la derivada.

Bibliografía

Apóstol, T. (1984). *Cálculus*. México: Reverté.
Artega, S. y Espinoza, J. (2014). *Cálculo.* México: Fondo de cultura económica.
Ayres, F. (1967). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw Hill.
Ayres, F. y Mendelson, E. (2001). *Cálculo.* México: Mc Graw Hill.
Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA.* 8(2), 121-156.
Contreras, S. (2014). *Cálculo Diferencial.* México: Fondo de cultura económica.
Cuéllar, J. (2007). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* México: Mc Graw Hill.
Cuevas, C. y Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *ReCalc*, *7*, 108-119.
Delgado, M. (2013). Un problema con la concepción de la continuidad de una función. *El Cálculo y su*

Enseñanza, 4, 27-44.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*, 75-90.

Dolores, C. y Valero, M. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Épsilon: Revista de la S.A.E.M. Thales*, 58, 20(1), 45-74.

Duval, R. (2004) Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Merlín I.D.

Granville, W. A. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa

Ibañez, P. y García, G. (2007). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* México: Cosegrat.

Leithold, L. (1992). *El cálculo con Geometría Analítica.* México: Harla.

Ortiz, F. (2009). *Cálculo Diferencial.* México, Ed. Patria.

Ortiz, F., Ortiz, F., y Ortiz, F. (2011). *Cálculo diferencial.* México: Patria.

Pineda, C. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria*. (Tesis de Maestría). Universida Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Resendiz, E. (2006). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9*(3), 435–458.

Rubí, G., Moreno, M., Pou, S., y Jordán, A. (2010). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo Caso de la Facultad de Ciencias , UABC., 1–10.

Ruiz, E., Hernández, J., y Gutiérrez, J. (2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo, *El cálculo y su enseñanza. 6*, 123–144.

Salinas, P., y Alanis, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del calculo dentro de una institucion educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa. 12*(3), 355-382.

Sántalo, M. y Carbonell, V. (2007). *Cálculo diferencial*. México: Diana.

Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral.* EEUU: Thomson.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica.* EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.

Valdés, C. (1983). *Análisis matemático, Tomo II*. Cuba: Pueblo y Educación.

Zúñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. en alumnos de un curso de cálculo I.*(Tesis de maestría) UPN. Tegucigalpa, Honduras.

Armando Morales Carballo. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Hueycantenango, Guerrero, México. Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la UAGro. Autor de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina. Email: armandomorales@uagro.mx

Angie Damián Mojica. Colegio México. Nacida en Tanganhuato, Guerrero, México. Maestra en Ciencias en el Área de Matemática Educativa por la UAGro. Autora de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina. Email: adamian@uagro.mx