UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

El Conocimiento Didáctico Matemático de la derivada implementado por un profesor del Nivel Medio Superior

TESIS

Que para obtener el grado de Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa

Presenta:

Diana Patiño Flores

Director de tesis:

Dra. Catalina Navarro Sandoval

Co-director:

Dr. Armando Morales Carballo

Chilpancingo, Guerrero Octubre, 2018.

El Conocimiento Didáctico Matemático de la derivada implementado por un profesor del Nivel Medio Superior

Diana Patiño Flores

A mis padres:

Manuel y Ma. Asunción

A mis hermanos:

Octavio, Daniel, Nohemi y Manuel

A mis sobrinos:

Naomi y Omar

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por ser la luz incondicional que ha guiado mi camino y permitirme concluir con mi objetivo.

A mis Padres, por ser los principales motores de nuestras expectativas. Por todo su amor, comprensión y por motivarme para alcanzar mis sueños.

A mis hermanos, por compartir conmigo momentos difíciles y alegrías en esta etapa tan importante, y brindarme su apoyo moral siempre.

A mi directora de tesis, Dra. Catalina Navarro Sandoval, por asumir el compromiso de asesorarme en todo momento, con su conocimiento, enseñanza y colaboración hoy puedo culminar este trabajo. También le agradezco su amistad.

A mi co-director, Dr. Armando Morales Carballo que con sus conocimientos y profesionalismo, estuvo guiándome académicamente para el desarrollo de esta investigación.

A mis sinodales, Dra. María García González y Dr. Javier García García, por tomarse el tiempo de leer mi trabajo y por haberla enriquecido con sus conocimientos y experiencia.

A mis profesores, por sus enseñanzas, tiempo y por compartir sus experiencias y conocimientos, lo cual contribuyo sin duda a mi formación profesional.

A mis compañeras, Carolina , Rosa Iris y Nallely con las que compartí dentro y fuera de las aulas, que se convirtieron en amigas de la vida y que serán mis colegas.

Al profesor de la escuela preparatoria No.1 de la UAGro, por autorizarme estar en su aula y grabar sus clases.

Y por último, a mis amigos Luz Janet y Fernando por impulsarme a crecer profesionalmente.

Agradezco a la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), por apoyarme con un Convenio de Beca para estudios de maestría y liberarme de mi jornada de trabajo al 100%.

Contenido

Abreviaturas

CDM	Conocimiento Didáctico Matemático
EOS	Enfoque Onto-Semiótico
UAGro	Universidad Autónoma de Guerrero
NMS	Nivel Medio Superior
RIEMS	Reforma Integral de Educación Media Superior
SNB	Sistema Nacional de Bachillerato
CE	Configuración Epistémica
Uap	Unidad de aprendizaje
D	Definición
P	Proposición
P_r	Procedimientos
A_r	Argumentos
E	Estudiantes
EP	Ejemplos del Profesor
EE	Ejemplos de los Estudiantes

Introducción

En la disciplina Matemática Educativa, prevalecen diversas problemáticas respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en los distintos niveles educativos. Una de ellas es la relacionada con el estudio de la formación de profesores; particularmente la determinación del conglomerado de conocimientos matemáticos y didácticos, que un profesor de matemáticas debería tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más idónea posible, de tópicos específicos relacionados con el conocimiento base para la enseñanza.

El estudio de la formación de profesores ha tomado cada vez más interés tanto por la comunidad de investigadores en Matemática Educativa, como por las administraciones educativas. Éstas últimas, debido a que autoridades educativas consideran principalmente que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes depende esencialmente de los conocimientos, competencias y habilidades de los profesores. De manera general, se han realizado investigaciones cuya intención ha sido caracterizar los componentes del conocimiento matemático que deberían integrar los profesores, lo que ha dado oportunidad de conocer algunos modelos teóricos (Shulman, 1986; Shulman, 1987; Ball, 2000; Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schlling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Godino, 2009; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Por lo que en este trabajo, interesó continuar en la línea de investigación formación de profesores, con el propósito de caracterizar componentes del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) que evidencia un profesor de matemáticas durante su práctica, al abordar el tema de la derivada. La noción de derivada, ha sido objeto de estudio desde distintas aproximaciones teóricas; particularmente en cuestiones instruccionales, investigaciones como Hitt (2003); Salinas y Alanís (2009); Gavilán (2005); Pino-Fan (2014); Pino-Fan *et al*. (2015) han mencionado que la enseñanza de las nociones del Cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas para los profesores, respecto de la comprensión de las ideas fundamentales y que existen pocas investigaciones centradas en la formación de profesores sobre el tratamiento de la derivada. Sin embargo, el objetivo de esta investigación fue caracterizar las facetas epistémica, que refiere a la diversidad de significados institucionales de cualquier objeto matemático; interaccional, que describe las interacciones que se establecen en aula de clases; mediacional, que refiere a los recursos apropiados para potencializar el aprendizaje de los estudiantes; y ecológica, que señala las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas; del CDM, que evidencia un profesor del tema derivada. Con la intención de analizar el "conocimiento didáctico matemático que efectivamente se implementa en el aula", estudio considerado importante, porque el hecho de saber este conocimiento podría ayudar al profesor a mejorar su práctica docente, al analizar y reflexionar el desarrollo de ésta; así como orientarlos para el diseño de acciones formativas, acrecentado su actualización y formación continua y rediseñando actividades o secuencias didácticas que propicien el aprendizaje de los estudiantes.

El trabajo, se encuentra estructurado en cinco capítulos, a través de los cuales se va consiguiendo gradualmente el fin último del mismo. En el Capítulo 1, se presentan antecedentes, donde se describieron investigaciones sobre la problemática que subyace sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada, se planteó la pregunta de investigación, un objetivo general y cuatro objetivos particulares, que guiaron el rumbo del estudio. En el Capítulo 2, se recogen las nociones teóricas y metodológicas que se utilizaron a lo largo de la investigación, particularmente del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2009; Godino *et al*., 2016). Y se plantea la metodología usada.

En el Capítulo 3, se presenta el significado global de la derivada retomado de una investigación; la revisión del Programa de estudio de Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) y dos libros de texto, recurso potente para la práctica de los profesores, que permitieron identificar los significados pretendidos de la derivada en el bachillerato. En el capítulo 4, se presenta el análisis de las clases de un profesor de una escuela preparatoria, al impartir el tema de la derivada, mostrando en primer lugar el análisis detallado de los objetos y procesos matemáticos, que se pusieron en juego durante las prácticas matemáticas implementadas, es decir, los significados matemáticos (faceta epistémica); y posteriormente se presenta la caracterización de las facetas interaccional, mediacional y ecológica.

Mientras que en el capítulo 5, se presenta una síntesis y las conclusiones de los resultados obtenidos de esta investigación. Producto de la respuesta a la pregunta de investigación, tomando como base el objetivo general y los objetivos particulares. Mostrando además, algunas limitaciones, aportaciones y cuestiones abiertas de la investigación. Y finalmente se presentan las referencias bibliográficas.

Capítulo 1

Antecedentes y problemática

Capítulo 1. Antecedentes y problemática

1.1. Introducción

En este apartado se presenta un panorama general de investigaciones realizadas en el campo de la Matemática Educativa, que sustentan el problema del trabajo y se enmarcan, el objetivo general y los objetivos particulares. Para la presentación de los antecedentes y de la problemática, se ha organizado el capítulo considerando cuatro aspectos: el estudio de la determinación y análisis del conocimiento matemático que deberían tener los profesores sobre un tópico específico; investigaciones que reportaron problemas con la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal (derivada); estudios que mencionan algunos factores que se deberían considerar en la enseñanza de la derivada; y trabajos que estudian sesiones de clase con profesores al abordar un contenido matemático. Estas investigaciones se presentan con el propósito de precisar la pertinencia de nuestra investigación.

1.2. Determinación y análisis del conocimiento matemático que deberían tener los profesores de matemáticas

1.2.1. Pertinencia del estudio con profesores en servicio

Una de las problemáticas en el campo de formación de profesores de matemáticas que ha interesado a investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas como la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), está relacionada con la determinación del conglomerado de conocimientos matemáticos y didácticos, que un profesor de matemáticas debería tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea la más idónea posible, sobre tópicos específicos relacionados con el conocimiento base para la enseñanza (Ponte y Chapman, 2006; Pinto y González, 2008; Pino-Fan, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino *et al*., 2016). Debido a que es un tema de actualidad, existen investigaciones que señalan que el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los estudiantes, dependen de manera importante de la formación de sus profesores (Grossman, 1990; Shulman, 2005; Ponte y Chapman, 2006; Godino, 2009; Pino Fan, Godino y Font, 2011).

En el mismo sentido, Dolores (2013) señaló que la formación de profesores ha sido uno de los factores vinculados con la calidad de la educación, dado que los cambios actuales y los previsibles demandan un profesor de Matemáticas con una actitud de cambio y de actualización continua. Y si se enfoca a administraciones educativas, particularmente, en la

UAGro en su Plan y Programa de Estudios por Competencias 2010, enfatiza para el NMS la actualización docente con la intención de favorecer metodologías de enseñanza y con ello la formación de los estudiantes, basadas en competencias que permitan una mayor y mejor evaluación[1], situación que en la práctica aún no se consolida.

Al respecto, en las investigaciones en Matemática Educativa se han propuesto diversos modelos teóricos que tratan de describir y analizar los componentes del complejo de conocimientos que se requieren para la enseñanza de las matemáticas (Shulman, 1986; Shulman, 1987; Ball, 2000; Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill *et al*., 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Sin embargo, Godino (2009) mencionó que estos modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, incluyen categorías demasiado globales; por ello, en sus estudios presenta un modelo que permite un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas.

Este modelo o sistema de categorías de análisis, que relaciona los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor; integran, organizan y extienden los modelos que han propuestos Shulman (1986); Llinares y Krainer (2006); Ponte y Chapman (2006); Philipp (2007); Sowder (2007); Ball *et al*. (2008); Sullivan y Wood (2008); Hill *et al*. (2008); Schoenfeld y Kilpatrick (2008); Ball *et al*. (2008), enunciando que "esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores" (Godino, 2009, p. 19). Este sistema es llamado modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), propuesto en el marco del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS),[2] que incluye facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) para la enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos. El cual también se ha desarrollado y perfeccionado, como se muestra en los trabajos dirigidos por Godino, Batanero y Font (2007); Font, Godino y Gallardo (2013); Pino-

---

[1] Universidad Autónoma de Guerrero (2010) Modelo curricular y plan de estudios por competencias de educación media superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. P. 71.

[2] El modelo teórico "Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática", se describirá a profundidad en el Capítulo 2.

Fan y Godino (2015); Pino-Fan, Assis y Castro (2015); Godino *et al*. (2016); Godino *et al*. (2017). Todos ellos, con la intención de analizar y determinar los conocimientos que deberían tener los profesores de matemáticas, por lo que cada versión del modelo presenta similitudes; en particular, hacen énfasis sobre algunas de las facetas propuestas en Godino (2009); otros analizan el conocimiento de los profesores a partir de tres dimensiones, con base en conocimientos puramente matemáticos que se tienen, otros sobre los conocimientos didácticos, asimismo se han ocupado de evaluar dichos conocimientos; y otros estudian el desarrollo e identificación de competencias de los profesores.

En particular, para esta investigación se hace uso del modelo que proponen Godino *et al*. (2016) que permite caracterizar la actividad matemática del profesor, es decir, se logran identificar los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos, y con ello, identificar los significados que se le dan a los objetos matemáticos. Como consecuencia, se admite analizar y describir el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Investigaciones como Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013) mencionaron que es necesaria una agenda de investigación que acerque a la práctica los modelos teóricos existentes, para conceptualizar la práctica docente, describir y analizar entre otros aspectos, cómo se presenta la matemática en el transcurso de una clase. De igual manera, Pinto y González (2008) resaltaron la necesidad de estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas, a través de marcos conceptuales que permitan comprender cómo construye los significados matemáticos, cómo los transforma y cómo los representa en la práctica docente. Es así que para el desarrollo del trabajo de investigación, se hace uso de un modelo teórico que permitirá analizar el conocimiento de un profesor al abordar un contenido matemático.

1.3. Investigaciones que reportaron problemas con la enseñanza y aprendizaje de la derivada

Las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal han sido intensamente investigadas en Matemática Educativa. En particular el concepto derivada, considerada una de las nociones clave del Cálculo de acuerdo con Sánchez-Matamoros, García y Linares (2008); Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013); Pino-Fan (2013), Pino-

Fan *et al*. (2015); Godino *et al*. (2017). Dicho concepto ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada) tal y como se mostraron en Habre & Abboud (2006); Artigue, Batanero y Kent (2007); Sánchez-Matamoros et al. (2008); Gordillo, Movilla y Parra (2015); Mateus (2016); Pino-Fan (2017).

En relación a cuestiones instruccionales o a la instrucción matemática. Hitt (2003), Salinas y Alanís (2009) afirmaron que la enseñanza de las nociones del cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para alumnos como para profesores, respecto de la comprensión de las ideas fundamentales. Asimismo, Gavilán (2005) y Pino-Fan *et al*. (2015) señalaron que existen pocas investigaciones centradas en los profesores, y menos aún, en los conocimientos que debe tener un profesor sobre la noción de derivada. Pino-Fan (2013) mencionó que las múltiples dificultades de las nociones del Cálculo a las que se enfrentan los alumnos se deben, en cierto modo a la naturaleza compleja de dichas nociones, pero que también se debe, en gran parte, a cómo el profesor gestiona los conocimientos sobre los objetos matemáticos del Cálculo, y para el caso de la noción derivada existen pocas investigaciones centradas en los profesores en relación al tratamiento que hacen de esta noción.

Las investigaciones enunciadas anteriormente, marcan la necesidad de continuar el estudio de la práctica del profesor para la noción derivada. Lo que da pie a desarrollar el presente trabajo, es decir, analizar los elementos que intervienen en el proceso enseñanza aprendizaje cuando el profesor enseña el tema de la derivada en el aula de clases, con la intención de identificar el tratamiento que éste le da a dicho tema.

1.3.1. Conocimientos matemáticos de profesores y futuros profesores sobre derivada, mediante el diseño de actividades

Investigaciones como Badillo, Azcárate y Font (2011) describieron el esquema de la derivada como la conexión de dos objetos complejos $f'(a)$ y $f'(x)$ derivada en un punto y la función derivada, analizan los niveles de comprensión de cinco profesores que trabajaban con la asignatura de Matemáticas en centros educativos de Colombia. El estudio se realizó a partir de una descomposición genética y con aportaciones del EOS. Se diseñó un instrumento, donde profesores realizaron tareas que implicaban la coordinación de los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en contextos algebraicos y gráficos, así como relacionar la pendiente de la recta tangente y razón de cambio para la construcción de los macroobjetos. En el análisis se señaló, que el nivel de comprensión *intra* [3]algebraico-*trans*[4] gráfico no es posible que se dé en la realidad, dado que no es cognitivamente viable, puesto que la interpretación gráfica de los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$ requieren de una complejidad en el manejo del aparato formal de estos objetos que no se tiene construida en el nivel *intra* algebraico. Mientras que el nivel *trans* algebraico-*intra* gráfico es cognitivamente más factible de encontrar, porque los profesores están influenciados por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos. Otro aspecto fue que los profesores presentaron dificultad en la comprensión gráfica de los macroobjetos $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$ al reproducir inconsistencias en la interpretación. Finalmente, se concluyó que en los resultados de los profesores prima la algebrización de los conceptos matemáticos en el detrimento de la interpretación gráfica de los mismos.

Proponiendose mejorar la caracterización de los conocimientos de los futuros profesores, Pino-Fan (2013) realizó un estudio con estudiantes de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, sobre conocimientos que estos deberían tener para lograr los aprendizajes sobre la derivada. Para ello, diseñó un cuestionario con tareas que involucraron significados de dicha noción, como el análisis de la derivada de la función valor absoluto y el cálculo de la función primitiva. Las respuestas permitieron explorar, las prácticas matemáticas desarrolladas por los futuros profesores, es decir, el conocimiento didáctico-matemático, referente a la faceta epistémica sobre la derivada. Se hizo la descripción de las configuraciones epistémicas (análisis a priori de los conocimientos; conocimientos esperados) y de las configuraciones cognitivas (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

Los resultados mostraron que el conocimiento común del contenido no es suficiente para abordar tareas propias de la enseñanza y se requiere cierto nivel de conocimiento especializado y un conocimiento ampliado de los objetos matemáticos; se evidenció la

[3] Se construyen relaciones internas del objeto matemático. Las explicaciones son locales y particulares.
[4] Las relaciones construidas adquieren mayor coherencia y se estructuran relaciones.

desconexión de significados parciales de la derivada en los futuros profesores, debido a las dificultades presentadas; y también se identificó que los futuros profesores tienen un mejor desempeño cuando se usa la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente. El autor señaló que, aún quedan cuestiones por responder centradas en aspectos del conocimiento y la formación inicial de profesores, por lo que las investigaciones podrían continuar en pro de la mejora de la calidad de los procesos de formación del profesorado.

Asimismo, Pino-Fan *et al*. (2015) analizaron las prácticas matemáticas con una muestra de futuros profesores (Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México) de la resolución de dos tareas sobre derivadas. El análisis se hizo a través de las prácticas matemáticas y configuraciones de objetos y procesos, bajo el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento matemático, con la intención de caracterizar los conocimientos del profesorado de Matemáticas. Se diseñó un cuestionario, donde los ítems activaron distintos significados para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación). Los resultados mostraron que los futuros profesores exhibieron dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado y ampliado sobre la derivada y que el 56,6% de ellos tuvieron problemas para demostrar la definición formal de la derivada que conlleva el uso de la derivada como límite de tasas medias de variación. Por ello, sugirieron hacer conciencia de esta complejidad tanto para los formadores, dando oportunidad a los profesores de desarrollar el conocimiento requerido para la enseñanza de la derivada, como para los futuros profesores, para que desarrollen y evalúen la competencia matemática en sus estudiantes.

Robles, Del Castillo y Font (2012) diseñaron, implementaron y valoraron una secuencia de actividades didácticas realizadas por computadora, que promovieron la construcción del significado de la función derivada. Se trabajó con alumnos del primer curso de Cálculo Diferencial e Integral de Ingeniería de la Universidad de Sonora, cuyo objetivo fue propiciar la puesta en juego de las diferentes representaciones de la función derivada (a partir de la gráfica de $f(x)$ obtener la tabla de valores para $f(x)$', construir la gráfica correspondiente y, finalmente, identificar la expresión analítica respectiva). La valoración de la idoneidad didáctica de la secuencia se desarrolló con base a los seis criterios de idoneidad propuestos en el EOS, para cada criterio se presentó una comparación entre lo esperado a partir del diseño de la secuencia (a priori), y lo observado como resultado de su implementación (a posteriori). El primer aporte de la investigación, fue el diseño de la secuencia didáctica cuyo objetivo fue propiciar la puesta en juego de diferentes representaciones de la función derivada, recalcando la importancia de usar applets y enfatizando que las actividades diseñadas son un material útil, para profesores e investigadores interesados en la enseñanza aprendizaje de la derivada. La segunda aportación, es la aplicación al proceso de instrucción implementado de un modelo de análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas.

Las investigaciones presentadas anteriormente, analizaron los conocimientos matemáticos de profesores y futuros profesores mediante el diseño de diversas actividades para el objeto matemático derivada, con la intención de identificar los conocimientos que éstos poseen, los resultaron mostraron que prima la algebrización de los conceptos matemáticos en el detrimento de la interpretación gráfica de los mismos. Otros analizaron la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático, evidenciando la desconexión de los significados parciales de la derivada. Por ello, sugirieron hacer conciencia de esta complejidad para los formadores y dar oportunidad a los profesores de desarrollar el conocimiento requerido para la enseñanza de la derivada, así como aplicar al proceso de instrucción de un modelo de análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. Es así que en el presente trabajo, se continuará con lo sugerido por los resultados de estas investigaciones, haciendo un análisis didáctico de sesiones de clase cuando un profesor enseña la derivada, con la intención de describir y analizar algunas facetas del Conocimiento Didáctico Matemático.

1.4. Factores que se deberían considerar en la enseñanza de la derivada

Pino-Fan *et al*. (2011) presentaron una reconstrucción del significado global (holístico) de la derivada, considerando los tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos y los sistemas de prácticas correspondientes. Haciendo uso de las nociones de configuración epistémica y significado global del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática. El objetivo fue la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada mediante la descripción del significado epistémico global de la derivada, dicha reconstrucción se realizó mediante un estudio histórico-epistemológico, a partir de los informes de investigación y documentos históricos del cálculo infinitesimal. Se identificaron y describieron de manera sistemática objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervinieron en los sistemas de prácticas de los cuales emergió el objeto derivada. Como resultado se identificaron nueve sistemas de prácticas los cuales llevaron asociados, una configuración epistémica y cada una constituyó un significado parcial de la derivada.

Concluyeron que la reconstrucción del significado global de la derivada, es importante para el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico. Ya que a partir del significado global de un objeto matemático, se determinan cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica; además de que tal significado es pieza clave para el conocimiento didáctico-matemático del profesor; pues para una enseñanza idónea de un contenido matemático específico se requiere la apropiación de este conocimiento, con la intención de que el profesor conozca la trama de los conocimientos sobre el propio contenido a enseñar.

Pino-Fan *et al*. (2013) caracterizaron el significado pretendido en el currículo de Bachillerato de la Universidad Autónoma de Yucatán y abordaron los significados de la derivada, a partir de las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel. La comparación de ambos significados (global y curricular) permitió valorar la idoneidad epistémica del significado curricular proponiendo juicios de valoración, con base en la representatividad de los campos de problemas propuestos, tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas, conocimientos previos a la introducción de la derivada, representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia, para la idoneidad epistémica del significado curricular de la derivada.

El análisis, evidenció que el significado de la derivada pretendido en el currículo de bachillerato es: la derivada como límite del cociente de incrementos. Se sugiere que en la enseñanza de la derivada, se consideren los vínculos con la historia del cálculo diferencial, propuesta que podría favorecer a que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático, comprendan el significado holístico de un objeto matemático y, en particular, dar sentido a la simbología de Leibniz que prevalece en la actualidad. La hipótesis que declararon, es que si las instituciones educativas se apoyan de los desarrollos de las investigaciones del campo de la Matemática Educativa, se lograría diseñar un currículo idóneo en relación con los significados de los objetos matemáticos y con ello se facilitaría que los profesores de matemáticas logren diseñar e implementar procesos de instrucción idóneos.

Banfi (2015) creó un espacio virtual de reflexión entre docentes, tratando la introducción del "límite de una función en un punto" y de la "derivada de una función en un punto", presentando un enfoque basado en los textos "Cálculo diferencial e Integral" de diferentes editoriales. La modalidad formativa que propuso fue *e-learning*, medio electrónico para el aprendizaje a distancia o virtual, donde se integra el uso de las tecnologías y elementos pedagógicos para la formación, capacitación y enseñanza de los profesores en línea. Se buscó el intercambio de experiencias y debate interno. Para ello, se llevó a cabo una propuesta didáctica, presentando el concepto del límite mediante el concepto de la "pendiente de una curva en un punto", ideas intuitivas de la "pendiente de una curva", "pendiente de una curva entre dos puntos" (pendiente de la recta secante) y finalmente la "pendiente de una curva en un punto" (pendiente de la recta tangente). Se propusieron espacios virtudes con un docente para cada una de ellas, que actuó como tutor; se llevaron a cabo actividades de lectura de los módulos, observación, análisis y reflexión del material hipertextual e hipermedial correspondiente (videos, artículos académicos, archivos de audio); actividades complementarias como debates, intercambio y análisis de lecturas y propuestas en foros. Se concluyó que la interacción permite al profesor, planificar actividades de formación a través de las lecciones, tareas, documentos, enlaces con webs o colaborativas mediante foros, wikis y glosarios. Lo que podría cambiar la forma de planificar las actividades de los profesores y con ello lograr un mejor aprendizaje en los estudiantes, se recalca la importancia de implementar instrumentos informáticos para la enseñanza del cálculo diferencial, particularmente la derivada y su representación gráfica.

Estas investigaciones, recalcaron la importancia de que los profesores consideren algunos recursos para su práctica docente; como la apropiación del significado global del objeto matemático a enseñar, pues éste es clave para su conocimiento didáctico-matemático, para conocer la trama de los conocimientos sobre el propio contenido a enseñar; también enfatizaron en el uso de la tecnología para la enseñanza de la derivada y su representación gráfca; asimismo se hace la recomendación a instituciones educativas de consultar los desarrollos de las investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, para lograr diseñar un currículo idóneo en relación con los significados de los objetos matemáticos, pues ello, facilitaría que los profesores de matemáticas logren diseñar e implementar procesos de instrucción idóneos. Es así que, surge el interés de revisar los recursos que se sugieren en estos trabajos; como consultar el significado global de la derivada, los significados de la derivada que se establecen en la propuesta curricular de la UAGro e identificar los significados que son implementados por un profesor en el aula de clases. Así como conocer los materiales didácticos en que se apoya el profesor para la enseñanza. Con la intención de identificar el grado de aplicación de los significados que le atribuye el profesor a la derivada, respecto de aquellos que se tienen como pretendidos en la propuesta curricular.

1.5. Sesiones de clase con profesores al enseñar un contenido matemático

Contreras, García y Font (2012) describieron una parte del proceso de estudio de una clase de Bachillerato, sobre el objeto límite de una función. Se realizó un análisis epistémico del proceso de instrucción, se identificaron las prácticas matemáticas realizadas y los objetos primarios con la crónica de la sesión. Para la descripción, se hizo una valoración parcial de la idoneidad del proceso de estudio, tomando en cuenta los significados de referencia gráfico, geométrico, el infinitesimal y numérico. Con dicho marco fue posible abordar, a profundidad, el estudio del significado institucional implementado. Con la trayectoria instruccional se pudo identificar el tipo de enseñanza que desarrolló el profesor, que, en gran medida es dialógica, y, en menor medida, magistral. Además, el estudio descriptivo de las clases facilitó aflorar los conflictos semióticos reales que suceden en clase. Se recalca que existen muchos estudios con la formación de profesores que tienen connotaciones de carácter psicológico, ya que solamente cubren parte de las indagaciones que pueden efectuarse en este campo, quedando el espacio del análisis semiótico muy poco abordado.

Badillo et al. (2013) abordaron la visualización de la práctica docente en el aula, identificaron elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase (definiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). El objetivo de la investigación fue diseñar un instrumento para la visualización, que diera cuenta de la complejidad matemática durante el desarrollo de una clase en términos de objetos, procesos y relaciones que las profesoras utilizaron para aproximarse al concepto de mediatriz; el instrumento dio cuenta de las similitudes y diferencias de la actividad matemática de diferentes profesoras que abordaron un mismo contenido matemático en el mismo año escolar. Se observaron clases de un curso de primaria de diferentes colegios con tres profesoras, que explicaban la mediatriz en tres grupos diferentes.

Los autores afirmaron que el instrumento, se puede aplicar para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para resaltar y visualizar los elementos esenciales de la actividad matemática. Destacando la importancia del trabajo como aportación para la formación del profesorado de matemáticas, enunciando que para su desarrollo, es necesario: (1) seleccionar episodios de aula, (2) realizar el análisis de las prácticas profesionales observadas en estos episodios y del conocimiento didáctico - matemático activado en dichas prácticas, (3) diseñar un ciclo formativo en el que se utilicen estos episodios y el análisis realizado en el punto 2 e (4) implementar estos ciclos formativos en la formación inicial y/o permanente de profesores de matemáticas. El trabajo hizo aportaciones a las fases 1 y 2.

Asimismo, Mateus (2016) realizó un análisis de la estructura y funcionamiento de una secuencia de clases de matemáticas, con estudiantes de Colombia, donde se enseñaba el método de integración por partes. El objetivo del trabajo fue realizar un análisis minucioso del proceso de instrucción sobre una secuencia de clases. El principal resultado fue la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado y una explicación de las dificultades de aprendizaje de los alumnos. Para el análisis de la transcripción de las clases, se utilizó el modelo de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, que permitió realizar un análisis sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. Los resultados mostraron tres grandes dificultades a lo largo de las 12 sesiones de clase: dificultad para determinar el orden jerárquico para elegir cuál función se nombrará como u y cuál como dv, conduciendo a los estudiantes a considerar que siempre debe tomarse como u la función que está escrita de primero en la integral; dificultad para hacer transformaciones como tratamientos, conversiones, trasferencias y aplicar la regla de integración por partes; y dificultad para solucionar problemas pertenecientes a otros contextos científicos como la física y la economía.

Finalmente, se menciona que dicho análisis didáctico, al igual que una radiografía, penetra en la estructura interna de la clase, resaltando aspectos y matices que, si bien pueden parecer obvios después de haber sido encontrados, se hallan ocultos ante una mirada general. Este tipo de análisis puede orientar a los profesores en formación y a los que imparten este tipo de clase a valorar, reflexionar y sugerir acciones de mejora.

Las investigaciones mostraron la importancia de analizar sesiones de clases, señalando que estos estudios permiten identificar el tipo de enseñanza que desarrolla un profesor y facilita aflorar los conflictos semióticos reales que suceden en clase. Recalcando que este tipo de análisis puede orientar a los profesores que imparten algún contenido matemático a valorar, reflexionar y sugerir acciones de mejora. Por lo que, es necesaria hacer más investigaciones de este tipo. Atendiendo estas sugerencias, en la presente investigación se pretende hacer un análisis didáctico cuando se enseña la derivada, para identificar los elementos esenciales que suceden en el aula de clases.

1.6. Problemática y objetivos de la investigación

Autores como Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Godino *et al*. (2017) han afirmado que existe un acuerdo generalizado, que consiste en que el profesor de matemáticas ha de conocer y ser capaz de realizar correctamente prácticas matemáticas para resolver los problemas matemáticos que propone a los estudiantes del nivel correspondiente; así como articularlos con los bloques temáticos posteriores; y un conocimiento especializado del propio contenido, considerando las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, en la realidad esto no siempre sucede así, pues los resultados de las investigaciones enunciadas en el apartado anterior lo muestran. Y aunque estas investigaciones comparten la finalidad de mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje, aún queda mucho por analizar en tal proceso.

Tales investigaciones, muestran la importancia y pertinencia de conocer y estudiar el conocimiento didáctico matemático que tienen o ponen en juego los profesores, al realizar tareas específicas sobre diversos tópicos matemáticos. Donde se recalca la importancia de hacer uso de algún modelo teórico, para conceptualizar la práctica docente, describir y analizar cómo se presenta la matemática en el transcurso de una clase. También se marca la necesidad de estudiar a los profesores de matemáticas para comprender cómo se construyen los significados matemáticos de tópicos matemáticos, como los transforma y los representa en la práctica docente; así como continuar con el estudio con los profesores en *pro* de la mejora de la calidad de los procesos de formación del profesorado.

Por ello, en este trabajo de investigación, se caracterizaron algunos componentes del conocimiento didáctico matemático que un profesor de matemáticas implementó durante su práctica, al enseñar tópicos específicos de matemáticas. De manera particular, se centró en describir algunas facetas del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) que efectivamente pone en juego un profesor de NMS de la UAGro al enseñar el tema de derivada, a través de la observación de sus clases; caracterizando algunas facetas del modelo de CDM propuesto por Godino *et al*. (2016). Con la intención de identificar el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico que desarrolla el profesor en el aula de clases, estudio considerado importante, porque dar a saber este conocimiento podría ayudar al profesor a reflexionar sobre su propia práctica y cuestionarse de lo que pudiera mejorar, para gestionar el aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, para los futuros profesores dotarle de herramientas para proponer y sugerir acciones de mejora cuando se aborde el tema derivada.

Navarro (2007) señaló que hay una acepción generalizada que la reflexión constituye uno de los mecanismos fundamentales para promover el cambio y el desarrollo profesional de los docentes; de igual manera Breda *et al*. (2017) mencionaron que la reflexión del docente sobre su propia práctica es un aspecto clave en la formación docente. Por tal razón se cree que, con la investigación, los profesores podrían replantear la forma de planificar las actividades en caso de ser necesario, para lograr un mejor aprendizaje en los estudiantes.

Con base en lo anterior se plantea el problema y el objetivo general de la investigación, como sigue:

Pregunta de Investigación

¿Cuáles son los conocimientos de las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático, que implementa un profesor del tema derivada?

Objetivo general

Caracterizar las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático, que evidencia un profesor del tema derivada.

Objetivos particulares

- OP1. Describir los significados de la derivada pretendidos en el Plan y Programa de estudio de la UAGro y de dos libros de texto de Nivel Medio Superior, para conocer el grado de aplicación de los significados que se tienen como referencia.
- OP2. Identificar los significados de la derivada que efectivamente implementa un profesor en el aula de clases, para conocer el grado de aplicación de los significados pretendidos.
- OP3. Describir los significados de la derivada con base en el currículo de NMS y los significados efectivamente implementados en el aula de clase.
- OP4. Describir cómo se gestiona el conocimiento en el aula de clases, cuando el profesor aborda el tema de la derivada.

Capítulo 2

Marco conceptual y metodología

Capítulo 2. Marco conceptual y metodología

2.1. Introducción

En el presente capítulo se muestran las "herramientas" y nociones teóricas que son utilizadas para el desarrollo de este estudio; concretamente del "Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática" que sirven de base para utilizar el modelo específico que propone dicho enfoque, el llamado "Conocimiento Didáctico Matemático" (CDM), describiendo cada uno de los aspectos que se toman en cuenta. Asimismo, se presenta la metodología empleada para el desarrollo de la investigación.

2.2. El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática

El EOS es un sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática sobre diversas problemáticas. Es desarrollado por Godino y Batanero (1994), Godino (2002) y Godino *et al*. (2007), quiénes sentaron las bases de dicho sistema, el cual incluye un modelo epistemológico de las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores; todo ello visto como herramientas que permiten describir y explicar los fenómenos relativos a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con la intención de ayudar a mejorar tales procesos (Grugeon-Allys, Godino y Castela, 2016).

A continuación se describen brevemente algunas de las nociones del EOS que son de utilidad para el desarrollo del presente trabajo.

2.2.1. Sistemas de prácticas y significado de los objetos matemáticos

Dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática, la noción de "práctica matemática" juega un papel central, desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Por ello, se considera *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución[5], lo cual da lugar a las nociones de sistemas de prácticas personales[6] y sistemas de prácticas institucionales[7]. Y si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, entonces los objetos emergentes también se consideran como "objetos institucionales"[8] y si los sistemas de prácticas son personales, los objetos emergentes son "objetos personales"[9].

También en el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, derivada, etc.), desde una perspectiva pragmático-antropológica. Es decir, el significado de un objeto matemático[10] se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene (Godino y Batanero, 1994). Estos sistemas de prácticas se categorizan teniendo en cuenta diversos puntos de vista. Primeramente la distinción entre los significados personales de un sujeto, y el significado institucional (compartida, social) de las mismas.

Cuando se hace la descripción de los conocimientos de un sujeto particular, también será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación), logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia) e inicial (sobre las prácticas de conocimientos previos). Y en cuanto a los significados institucionales también es necesario distinguir entre las prácticas efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia.

---

[5] Godino (2014) afirma que "Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas" (p. 11).

[6] "Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C" (p. 339).

[7] "El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (p. 337).

[8] "El objeto institucional OI es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PI(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI" (p. 338).

[9] "objeto personal OP es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PP(C). (Godino y Batanero, 1994, p. 339).

[10] Objeto o entidad matemática como: "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas" (Godino, 2002 , p. 5).

Es decir, la interpretación de los significados como sistemas de prácticas lleva a hablar de tipologías de significados (Figura 1) personales (globales, declarados y logrados) y significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, 2014).

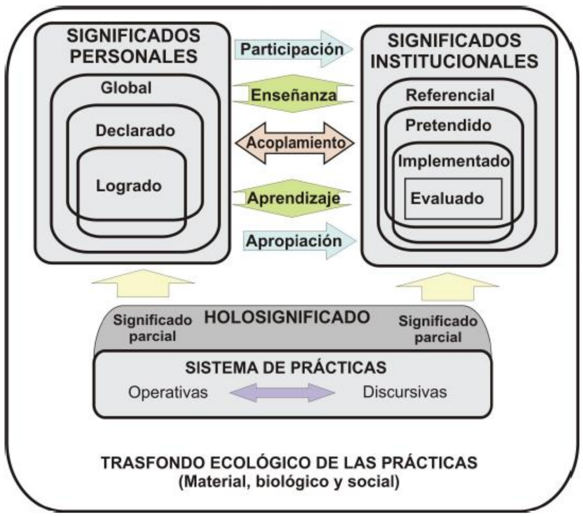


Figura 1. Significado como sistemas de prácticas (Godino, 2014, p.13).

Para el significado global de referencia de un objeto matemático, éste se define a partir de dos nociones: 1) significado global (holístico), que comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático y para su determinación se requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión; y 2) significado de referencia o pretendidos, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan *et al*., 2011). Para una institución de enseñanza concreta, los significados pretendidos será una parte del global de un objeto matemático.

2.2.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el apartado anterior se mencionó que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas. Particularmente. Font *et al*. (2013) señalan lo siguiente

> Nuestra propuesta ontológica se deriva de las prácticas matemáticas, siendo éstas el contexto básico en la que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales los objetos

> matemáticos emergen. Consecuentemente, el objeto adquiere un estatus derivado de las prácticas que le preceden (p.104).

Es así que, en la investigación también se analiza la ocurrencia de los objetos matemáticos, a partir de las prácticas matemáticas realizadas para resolver problemas matemáticos. De igual manera, en los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos) y no ostensivos (conceptos, proposiciones), que ocurren al hacer matemáticas; y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual.

Asimismo el EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que intervienen en los sistemas de prácticas (Godino, *et al*., 2007):

- ✓ Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- ✓ Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- ✓ Conceptos/Definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada).
- ✓ Proposiciones/Propiedades (enunciados sobre conceptos).
- ✓ Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- ✓ Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí (Pino-Fan, 2013).

2.2.3. Configuración ontosemiótica

Para un análisis más "fino" de la actividad matemática, el EOS introduce la herramienta de configuración ontosemiótica, donde los objetos matemáticos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) se relacionan entre sí, formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas que se realizan para la resolución de las situaciones-problemas.

Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). Por ello, cuando una persona realiza una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la configuración (objetos matemáticos primarios). Estos objetos matemáticos que conforman la configuración, se manifiestan durante la actividad matemática: el lenguaje matemático con el cual se hace referencia a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se operativizan mediante procedimientos y propiedades asociadas, que se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas.

La emergencia de los objetos de la configuración tiene lugar mediante respectivos procesos matemáticos [11]de: comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización) y argumentación (Godino, 2014). En la Figura 2 se muestra el desglose, y las interacciones, de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos, y los procesos que llevan asociados.

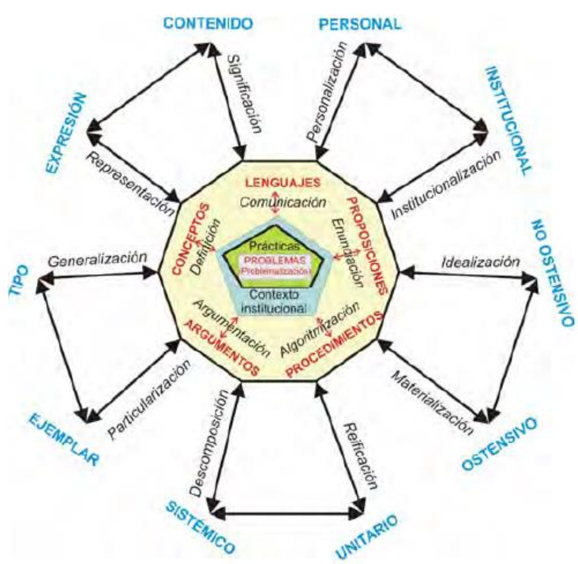


Figura 2. Configuración ontosemiótica (Godino, 2014, p.23).

[11] Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada) (Font et al., 2013).

2.3. Conocimiento Didáctico Matemático del profesor de matemáticas desde el punto de vista del EOS

2.3.1. El Modelo Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)

En Godino (2009) se comenzó a proponer un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas; denominado modelo de *Conocimiento Didáctico Matemático* (CDM), que proporciona pautas y criterios para analizar y caracterizar el conocimiento requerido por los profesores para la enseñanza de temas específicos de matemáticas. Dicho modelo se ha ampliado y perfeccionado con el desarrollo de numerosos trabajos dirigidos por Godino *et al*. (2007), Font *et al*. (2013), Pino-Fan y Godino (2015), Pino-Fan *et al*. (2015), Godino *et al*. (2016) y Godino *et al*. (2017).

Para el desarrollo del trabajo de investigación se hace uso del modelo CDM que proponen Godino *et al*. (2016) que permite analizar y caracterizar el conocimiento didáctico matemático implementado por un profesor al abordar el tema derivada en el aula de clases; lo que es equivalente a conocer los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Para la investigación, se coincide en que el Conocimiento Didáctico- Matemático (CDM) se interpreta como:

> la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios (y los procesos de significación), que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. (Pino-Fan, Godino y Font, 2010, p. 209).

Este conocimiento es una combinación de conocimiento del contenido y de conocimiento pedagógico del contenido, equivalente al conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, que es diferente del que adquieren los estudiantes y que es propio de los profesores (conocimiento especializado del profesor).

2.4. Herramientas teóricas que se utilizan para el análisis de la práctica del profesor

2.4.1. Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático

Como se ha venido mencionando, el modelo de CDM que proponen Godino *et al.* (2016) de la figura 3 es el que se toma para analizar los conocimientos del profesor. Este modelo corresponde a la dimensión didáctica de acuerdo con Pino-Fan *et al*. (2015), se compone de seis facetas que se relacionan entre sí, en diferentes etapas de los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre temas matemáticos específicos como estudio preliminar, planificación, implementación y evaluación (Pino-Fan, Godino y Font, 2014; Pino-Fan *et al*., 2015).

Las fases que componen la dimensión didáctica son las siguientes:

–*Faceta epistémica*: es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial.

– *Faceta cognitiva*: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.

– *Faceta afectiva*: incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

– *Faceta instruccional*: conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

– *Faceta mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

– *Faceta ecológica*: implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (línea punteada en la figura 3), en la medida que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático, sea común o ampliado (Godino *et al*., 2016).

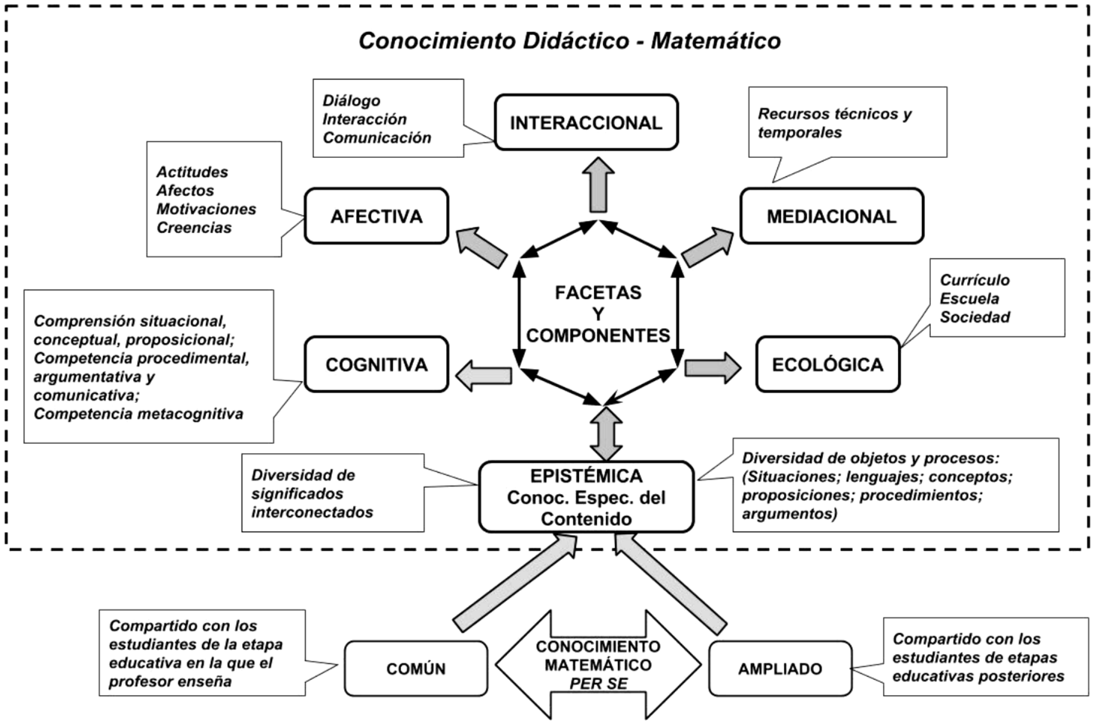


Figura 3. Facetas y componentes del conocimiento del profesor (Godino *et al*., 2016 p. 292).

Además, todas ellas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe resolver la tarea, utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas interaccional y cognitiva).

Particularmente en la investigación, interesa describir y analizar el conocimiento de las facetas del CDM que implementa un profesor en el aula de clases, a partir de la observación. Por tal razón, no se describe el conocimiento de las facetas cognitiva y afectiva, ya que se analizan los conocimientos y significados del profesor como parte institucional, sin intervención del investigador. Interesa pues, describir los significados institucionales que se implementan y no los significados personales (cognitiva y afectiva) del profesor, es decir, sólo se describe el conocimiento que se logra observar del profesor como representante de la institución y que implementa en el aula de clases.

2.4.2. Caracterización de la faceta epistémica

Para dar cuenta de la faceta epistémica, se usan las herramientas de sistemas de prácticas, objetos y procesos matemáticos, y configuraciones epistémicas; que permitirán identificar los significados institucionales que se atribuyen a la derivada.

2.4.2.1 Sistemas de prácticas y los objetos emergentes

Para esta investigación, se consideran a los sistemas de prácticas matemáticas discursivas y operativas como *sistemas de prácticas institucionales,* donde el foco de atención son las prácticas que realiza el profesor, es decir, se considera al profesor como representante de la institución en el aula de clases. Y dado que los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, entonces los objetos emergentes son llamados *objetos institucionales*.

De acuerdo con la figura 1, existen diversos tipos de significados; de manera particular para este trabajo se centra en los significados de referencia, pretendidos y en los significados institucionales implementados.

2.4.2.2. Configuración epistémica

Se hace uso de la noción configuración epistémica[12] (Figura 4), que permite analizar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada (Font y Godino, 2006). Para el presente estudio, se hacen configuraciones epistémicas para la descripción de los significados que propone el Programa de estudios de la UAGro y dos libro de texto con el tema de la derivada. De manera similar, configuraciones epistémicas de acuerdo con las prácticas matemáticas que efectivamente desarrolla el profesor en el aula de clases.

[12] Las configuraciones epistémicas se componen de los objetos matemáticos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático (Font y Godino, 2006).

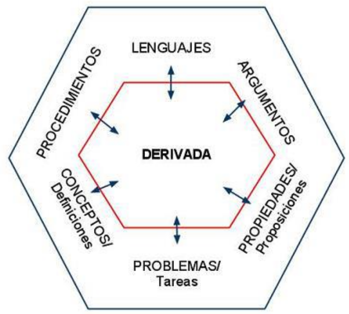


Figura 4. Configuración de objetos primarios intervinientes en las prácticas (Pino-Fan et al., 2013, p. 126).

2.4.2.3. Procesos matemáticos

Para el análisis de las prácticas matemáticas que se desarrollan en el aula de clase, intervienen procesos matemáticos (Font y Rubio, 2017). Y dado que dichos procesos son densos en la actividad matemática, no se pretende realizar un estudio exhaustivo de ellos; por ello, se limita a realizar una síntesis, tomando los más relevantes al mirar la clase de manera global (comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación) mismos que establece el EOS.

2.4.3. Caracterización de la faceta interaccional

Para dar cuenta de la faceta interaccional del CDM; se enuncian nociones de Godino, (2000); Godino, Contreras y Font, (2006). Que ayudarán a identificar la interacción profesor-estudiantes.

2.4.3.1. Dimensiones de un proceso de instrucción matemática. Trayectorias muestrales

En la realización de un proceso de instrucción (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) se pone en juego una muestra de elementos del significado pretendido o implementado de un objeto matemático (epistémica), así como una muestra de las funciones docentes y discentes. Es decir, se produce una *trayectoria muestral* del proceso (Godino, 2002) que describe la secuencia particular de los componentes que han tenido lugar a lo largo de un tiempo.

Como las prácticas matemáticas pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos; por ello, además de la *configuración epistémica*, también se consideran la *configuración docente* [13]y *discente*[14], de manera que la articulación de las tres constituye una configuración didáctica[15] (Godino *et al*., 2006). Donde en cada proceso de instrucción, se produce una trayectoria de configuraciones didácticas, que a su vez se descompone en trayectorias más específicas (trayectorias epistémicas, docentes y discentes), cuyo análisis lleva a la comprensión global de la trayectoria didáctica en su conjunto (Robles *et al*., 2012). En la investigación se consideran dos trayectorias específicas: trayectoria epistémica[16], (distribución temporal de prácticas, objetos y procesos matemáticos) y trayectoria docente[17]. Por lo tanto no se reporta una configuración didáctica como tal, dado que no se consideran las configuraciones y trayectorias de los estudiantes. Por ello, se dará cuenta de la interacción que sucede en el aula de clases en base a éstas dos configuraciones.

2.4.3.2. Estados de las trayectorias de los procesos instruccionales

2.4.3.2.1. Trayectoria epistémica

Para desarrollar el análisis epistémico (configuración epistémica, su secuenciación y articulación) de un proceso de instrucción, las configuraciones epistémicas se descomponen en unidades de análisis, con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Estas unidades de análisis son llamados estados de la trayectoria y se distinguen seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento: E1: Situacional[18], E2: Actuativo[19], E3: Lingüístico[20], E4: Conceptual[21], E5: Proposicional[22] y E6: Argumentativo[23]. Estos estados suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático. Los cuales a su vez se identifican

---

13 Conjunto actividades que se circunscriben a una situación-problema (o tarea) específica.

[14] Sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica.

[15] La secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea).

[16] La distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

[17] Distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción de un contenido o tema matemático.

[18] se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de ejercicios/problemas.

[19] se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

[20] se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

[21] se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

[22] se enuncian e interpretan propiedades.

[23] se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

como unidades epistémicas, que son oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio y son numeradas correlativamente para su referencia.

2.4.3.2.2. Trayectoria docente

Para las actividades o acciones que realiza el profesor, Godino *et al*. (2006) proponen la siguiente categorización: P1: Planificación[24], P2: Motivación[25], P3: Asignación de tareas[26], P4: Regulación[27], P5: Evaluación[28], P6: Investigación[29].

2.4.3.3. Interacciones didácticas

Como se mencionó anteriormente, con la identificación de trayectorias y estados potenciales, se proporciona un procedimiento sistemático para identificar regularidades en la secuenciación de los estados en cada trayectoria, o en las interacciones entre dos o más trayectorias. Se trata de describir la interacción del profesor con los estudiantes a propósito de los componentes de un saber matemático específico, usando determinados recursos o materiales.

2.4.3.3.1. Configuraciones didácticas de referencia

Para clasificar la interacción que sucede en el aula de clases. Godino *et al.* (2006) se fundamenta en lo que dice Guy Brousseau (1997) proporcionando herramientas para analizar los procesos de instrucción matemática; es así que establece cuatro tipos de configuraciones teóricas, usadas como referencia para el análisis de las configuraciones didácticas

[24] Diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

[25] Creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

[26] Dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

[27] Fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista

[28] Observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

[29] Reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

efectivamente implementadas en un proceso instruccional, se designan como: *magistral*[30], *adidáctica*[31], *personal*[32] *y dialógica*[33].

En la figura 5 se representan en los cuatro vértices de un cuadrado, los tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

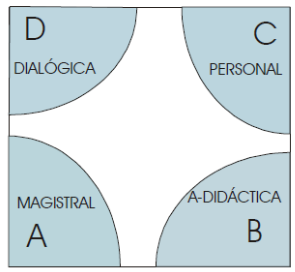


Figura 5. Configuraciones didácticas teóricas.

A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos.

2.4.4. Caracterización de la faceta mediacional

Para caracterizar la faceta mediacional del CDM, correspondiente con los recursos (tecnológicos y materiales temporales) que son utilizados para abordar un contenido matemático, se toman en cuenta herramientas que establecen Godino *et al.* (2006); Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) y Arteaga, Batanero y Gea (2017), identificando los componentes que resultan en el proceso de instrucción.

[30] La manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas, basado en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados.

[31] El estudiante crea una actividad de producción de conocimiento, de manera independiente de la intervención del profesor. El sujeto entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, cuando se da interacción entre un sujeto y un medio para resolver un problema.

[32] Se tiene cuando la resolución de la situación-problema (o la realización de una tarea) se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente.

[33] La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución.

Tabla 1
Componentes e indicadores de idoneidad mediacional (Godino *et al.*, 2013, p. 62)

Componentes:	Indicadores:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	-Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. -Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	-El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. -El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	-El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida -Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema -Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

2.4.5. Caracterización de la faceta ecológica

Para caracterizar a la faceta ecológica del CDM, se utilizan herramientas que proponen Godino (2009) y Godino *et al*. (2013); que permiten identificar y describir la relación de los componentes efectivamente implementados y los propuestos en el currículo de bachillerato.

Tabla 2
Componentes e indicadores de idoneidad ecológica (Godino *et al.*, 2013, p. 57)

Componentes:	Indicadores:
Adaptación al currículo	-Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	-Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	-Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	-Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	-Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

2.5. Metodología

La investigación tiene un enfoque cualitativo. “Cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p.364). Puesto que interesa analizar la práctica del profesor, para describir y caracterizar las prácticas, objetos y procesos matemáticos que desarrolla, así como los contenidos matemáticos que aborda y los materiales que emplea para tal fin. Por ello, se observa al profesor en el aula de clases sin ninguna intervención por parte del investigador, con la intención de que éste desarrolle la clase lo más natural posible y comprenderlo dentro de su propio espacio; es importante mencionar que no se busca enjuiciarlo, pero si comprender a detalle lo que realiza en el aula de clases.

2.5.1. Componentes y fases de la investigación

Para la consecución de los objetivos, planteados anteriormente, nos proponemos cinco fases:

Fase 1

Significado global de la derivada

El significado global de la derivada, se realizó con base en Pino-Fan *et al*. (2011), quienes señalaron nueve significados distintos (significados parciales) en la evolución histórica del objeto matemático derivada, es decir, se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas y cada uno contiene una configuración epistémica asociada a objetos y procesos que constituyeron algún significado parcial para dicha noción, mismos que serán considerados como significados de referencia para la derivada.

Fase 2

Situación curricular del contenido matemático derivada en el NMS de la UAGro en México

Se realizó el análisis del currículo de Bachillerato de la UAGro, es decir, se revisó el Plan y Programa de estudios (Uap Matemáticas V) por competencias 2010 de Educación Media Superior de la UAGro y la revisión del contenido matemático de dos libros de texto que utilizó el profesor como apoyo para sus clases; con la intención de identificar y describir las prácticas y objetos matemáticos que intervinieron en la configuraciones epistémicas de la derivada (significados pretendidos).

Fase 3

Contextualización de las clases e instrumentos para la recolección de los datos

El estudio se llevó a cabo considerando un solo profesor del NMS de la UAGro. Quién actualmente labora en la escuela preparatoria No.1 (con una antigüedad de 30 años en servicio) ubicada en la ciudad de Chilpancingo, Gro.

La recolección de datos se realizó a través de observaciones de clase, grabando cada una al momento de enseñar el contenido matemático de la derivada, mediante el uso de una cámara de vídeo y una grabadora de voz. Estos recursos permitieron identificar los elementos esenciales de la práctica del profesor, además, de realizar las transcripciones, así como analizar y describir detalladamente los objetos matemáticos que intervinieron en las prácticas matemáticas durante el desarrollo del tema

Cabe señalar que se observaron de manera continua 8 sesiones de clase, pues fueron estas sesiones las dedicadas al trabajo con la derivada, con una duración de aproximadamente de 50 minutos, acordes con el horario asignado por la escuela.

Fase 4

Niveles de análisis didáctico propuesto por el EOS

Para realizar el análisis del proceso de instrucción, se usó del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS (Godino *et al*., 2007; Pochulu y Font, 2011). Dicho modelo considera cinco niveles, cada uno permite analizar aspectos complementarios de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, los cuales se enuncian a continuación:

1) Identificación de prácticas matemáticas.

2) Elaboración de las configuraciones didácticas y epistémicas de objetos y procesos matemáticos.

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4) Identificación del sistema de normas y metanormas.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Para el análisis de las clases, se utilizaron los tres primeros niveles. Con base en estos niveles se interpretaron las sesiones de clase, lo que permitió caracterizar las facetas del CDM.

Fase 5

En los capítulos 4 y 5 se realizan las descripciones y caracterizaciones de las sesiones de clase para el tema de la derivada.

Capítulo 3

Significados de referencia y significados pretendidos de la derivada

Capítulo 3. Significados de referencia y significados pretendidos de la derivada

3.1. Introducción

En este apartado se presentan los significados de referencia y los significados pretendidos de la derivada. Primeramente, se muestra el significado de referencia (global) de la derivada retomado de la investigación de Pino-Fan *et al*. (2011); Posteriormente, se identifican y describen los objetos matemáticos de la derivada establecidos tanto en el Programa de estudio de la UAGro para el NMS como en dos libros de texto de cálculo diferencial, a partir de la identificación de prácticas matemáticas desarrolladas para la resolución de los problemas matemáticos; y como consecuencia de ello, se presentan los significados que son identificados como pretendidos para el NMS para el estudio de la derivada.

3.2. La importancia de estudiar los significados de la derivada

Es importante recordar que el interés de la investigación, es identificar el Conocimiento Didáctico Matemático que implementa un profesor en el aula de clase al abordar el tema de la derivada, es por ello que se hace necesario conocer el tratamiento que se tiene de la derivada en el NMS. Pino-Fan (2017) señala que cuando se pretende indagar sobre los conocimientos que tienen ciertos sujetos (profesores o estudiantes) sobre un determinado objeto matemático, una pregunta imprescindible es ¿qué es o qué significado(s) tiene realmente dicho objeto matemático? Hay dos formas de aproximarse a la respuesta. La primera estudiando la naturaleza histórico epistemológica del objeto matemático (significado de referencia). Y la segunda realizando un estudio de los significados pretendidos por el currículo de matemática y los libros de texto sobre la noción particular.

3.3. Significados de referencia de la derivada

Como se mencionó anteriormente y como parte de la fase 1 de este trabajo, se presenta *el significado de referencia de la derivada*, retomado de la reconstrucción del significado global (holístico) de la derivada de la investigación realizada por Pino-Fan *et al.* (2011), donde señalan que a lo largo de la evolución histórica ésta noción ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, la derivada se ha presentado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas donde cada una de las cuales tiene una configuración epistémica asociada, de objetos y procesos que constituyen un significado parcial de derivada.

A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, se han denominado: 1) el trazado de tangentes en la matemática griega (CE1); 2) problemas sobre la variación en la edad media (CE2); 3) cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra (CE3); 4) trazados de tangentes mediante consideraciones cinemáticas (CE4); 5) cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite (CE5); 6) cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales (CE6); 7) el cálculo de fluxiones (CE7); 8) el cálculo de diferencias (CE8) y, 9) la derivada como límite (CE9). Estas configuraciones, a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en la figura 6.

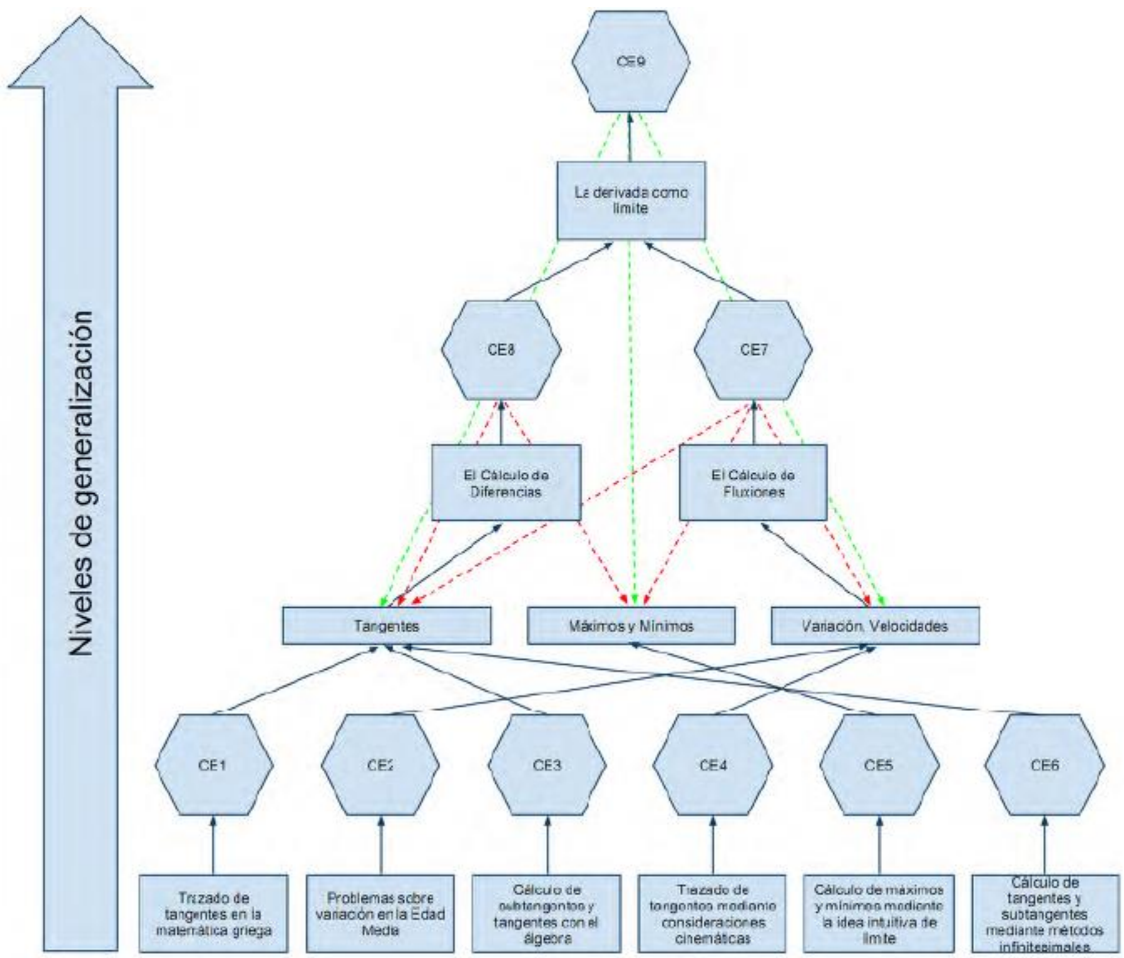


Figura 6. Significado epistémico global de la derivada (Pino-Fan *et al*., 2011, p.174).

Como se observa en la figura 6, los significados de la derivada se han desarrollado de manera paulatina a lo largo de la historia desde los primeros trabajos sobre tangentes en la matemática griega, hasta una definición formal que fue dada a partir del límite del cociente de incrementos. De modo que los elementos en conjunto y sus relaciones, ilustrados en la misma figura conforman el significado epistémico global de la derivada (Pino-Fan, 2013).

A continuación se muestran los conceptos-definiciones que intervienen en cada una de las configuraciones del significado global de la derivada (Tabla 3):

Tabla 3
Conceptos-definiciones de la derivada

Configuraciones Epistémicas	Conceptos-definiciones
CE1: Trazado de tangentes en la matemática griega.	a) Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Definición II del libro III de los Elementos de Euclides); b) Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan (Definición IV del libro III de los Elementos de Euclides).
CE2: Problemas sobre la variación en la Edad Media.	La demostración que realiza Oresme de la denominada "Regla de Merton", conduce a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Intervienen conceptos tales como: a) aceleración uniforme, definida por los escolásticos de Merton como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; b) movimiento uniforme, definido como aquel que se tiene cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; c) velocidad instantánea, que es la forma en que definieron al movimiento variable; d) longitud, la cual sería nuestra abscisa, que considera es el tiempo; e) latitud, que sería nuestra ordenada, y considerada la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros; f) representación gráfica de las intensidades de las cualidades, que es la representación de la forma de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo.
CE3: Cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra.	Se señalan distintas formas de concebir la recta tangente a una curva: a) la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir; y b) aquella que está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero.
CE4: Trazado de tangentes	a) concepto intuitivo de movimiento instantáneo; b) Una curva es la trayectoria de un punto móvil;

mediante consideraciones cinemáticas.	c) en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe (concepción de tangente de Roberval); d) una tangente es la que resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva (concepción de tangente de Sluse).
CE5: Cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite.	Conceptos-definiciones tales como el límite y la derivada. Otra cuestión es que, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos (por ejemplo, el método de Fermat o la formulación de Hudde). Método de Fermat: dado un polinomio de la forma $y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $y=\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}=0$ (método de los extremos). El proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lím_{E\to 0}\frac{f(A+E)f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada.
CE6: Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales.	a) La concepción de Barrow sobre la tangente, como posición límite de la secante cuando *a* y *e* se aproximan a cero, hecho del cual subyace suprimir las potencias de *a* y *e* de orden superior a uno en la primera regla de Barrow; b) la noción intuitiva de límite, tanto en el método de Barrow para hallar las subtangentes, como en el método de los extremos de Fermat; y c) la noción intuitiva de la derivada.
CE7: El cálculo de fluxiones.	a) *"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x* y que representa con *ox* (análogamente define el momento de *y*, *oy*); c) en palabras de Newton: *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que son aumentadas gradualmente e indefinidamente; se representan mediante las últimas letras del alfabeto *v*, *x*, *y*, *z*, para distinguirlas de las otras cantidades; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: representa con las mismas últimas letras coronadas con un punto $v°$; $x°$; $y°$; $z°$; las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones; e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *"o"*, es decir, $x°$.
CE8: El cálculo de diferencias.	Se utiliza dy para denotar el concepto de diferencial de una variable *y*, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de *y* (análogamente define la diferencial de la variable *x*, dx). Y se introducen los símbolos $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas, y ∂ para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de *x* o *y*.

CE9: La derivada como límite.	El concepto de límite, del cual se dieron diversas definiciones a lo largo de esta etapa, como por ejemplo: a) el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña (Simon Lhuilier); b) Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras (Cauchy); c) el límite de una función *f(x)* vale *L* cuando *x* tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que para todo punto *x* verificando $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ y donde la función *f* esté definida se tiene que $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ (Weierstrass). Por su parte, Bolzano define la derivada de una función como la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero. Finalmente, en el primer cuarto del siglo XIX la derivada de una función se define como: $\boldsymbol{f'(x) = lim_{h\to 0}}(\frac{\boldsymbol{f(x+h)-f(x)}}{\boldsymbol{h}})$.

Pino-Fan *et al*. (2011) señalan que a partir del significado global de un objeto matemático, pueden determinarse cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica. De esta manera, afirman que conocer el significado global de la derivada es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

3.4. Significados pretendidos de la derivada

Los significados pretendidos de la derivada, entendidos como los sistemas de prácticas que se usan como referencia que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Y como parte de la fase 2 de la investigación, se hace la revisión y análisis del Plan y Programa de estudios de la UAGro, así como de dos libros de texto que declaró utilizar el profesor; lo que permitió conocer el tratamiento que se le da a la derivada en el NMS. Ya que el análisis de la dupla "Plan de Estudios de cálculo diferencial, libros de texto", permite indagar cómo se aborda un objeto matemático en el currículo de matemáticas del bachillerato (Pino-Fan, 2013).

3.4.1. Situación curricular del contenido matemático de la derivada en México

3.4.1.1. Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS)[34]

La Educación Media Superior (EMS) está basada en el enfoque educativo por competencias y está en el centro de la política educativa de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Sus fundamentos se encuentran en el acuerdo 442 del Diario Oficial de la Federación de fecha 26 de septiembre de 2008 en los que establece la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) en un marco de diversidad y competencias Genéricas y el Perfil del Egresado de la Educación Media Superior, mismos que fueron integrados por la Subsecretaría de Educación Media Superior dependiente de la SEP, e incluyen aportaciones de las autoridades educativas de los estados de la república como la Red de Bachillerato de Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES).

El propósito general del plan de estudios: es lograr que los estudiantes desarrollen integralmente las competencias genéricas, disciplinares básicas y extendidas y las competencias profesionales básicas, a través de una planta de profesores y directores formados en los ámbitos de las competencias, capaces de gestionar sus actividades en torno a los aprendizajes y los estudiantes, para que éstos cursen con éxito una carrera profesional y/o se incorporen al mercado laboral y coadyuven al desarrollo del estado de Guerrero y el país[35].

Particularmente, las competencias para los docentes que imparten clases en la Educación Media Superior en la modalidad escolarizada, se establecen y se fundamentan en el acuerdo 447 del Diario Oficial de la Federación de fecha 29 de octubre de 2008. Enunciando que en el México de hoy, es necesaria una comprensión de la función del docente que vaya más allá de las prácticas tradicionales de enseñanza en el salón de clases, para adoptar un enfoque centrado en el aprendizaje en diversos ambientes, sobre todo ante la RIEMS emprendida para el establecimiento del SNB.

Las competencias que deberán cumplir los docentes de las instituciones educativas. Son las siguientes:

[34]RIEMS. Plan de Estudios por Competencias de Educación Media Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero (2010), p. 14.

[35] Plan de Estudios por Competencias de Educación Media Superior (2010), P.27.

1. Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.

2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.

3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.

4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.

5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.

6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.

7. Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.

8. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Estas competencias demandan de un profesor actualizado y con una formación continua, es decir, éstos deben contar con los conocimientos, habilidades y actitudes que les permiten diseñar clases participativas, en las que se fomente el aprendizaje colaborativo, la resolución de problemas y el trabajo en torno a proyectos. Así como integrar el desarrollo de las competencias genéricas en cada una de sus áreas de enseñanza. Y se hace necesario incluir materiales de apoyo para la enseñanza y potencializar el aprendizaje de los estudiantes.

3.4.2. La derivada en el programa de estudios de Matemáticas y descripción de la Unidad de Aprendizaje (Uap)

De acuerdo con la revisión de los programas de estudio propuestos en la UAGro, se identificó que el tema derivada se presenta en la Uap Matemáticas V[36]. La cual forma parte del área disciplinar de Matemáticas; se ubica en el quinto semestre y es parte de la Etapa de integración y de vinculación del Plan de Estudios por Competencias 2010, de EMS de la

[36] Universidad Autónoma de Guerrero. Educación Media Superior (2010). Plan de Estudios por Competencias, Programa de estudios de Matemáticas V.

UAGro; se imparte con cuatro horas semanales, para hacer un total de sesenta y cuatro en el semestre. El propósito general de la Uap es

> Que el estudiante articule conocimientos de diversas disciplinas, identifique sus relaciones, (sistemas y reglas o principios) para estructurar ideas, argumentos, y dar solución a problemas surgidos de la actividad humana aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos finitos que involucren razones de cambio (Plan de Estudios por Competencias Matemáticas V, 2010, p. 5).

En la Tabla 4, se describe el contenido temático presentado en el Plan y Programa de estudio; primeramente se aborda el concepto función, razón de cambio y definición de derivada (Unidad 1), posteriormente se propone la derivación de funciones algebraicas y trascendentes aplicando las reglas de derivación (Unidad 2), y finalmente en la Unidad 3 se estudia el comportamiento de una función (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función) a partir de las gráficas.

Tabla 4
Distribución de los contenidos de aprendizaje de cálculo diferencial según la UAGro.

Competencias disciplinares	**Proceso de construcción del aprendizaje**	**Unidades de competencia**		
		I. Función, razón de cambio y derivada	**II. Derivación de funciones**	**III. Comportamiento de una función**
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques. 3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante	Problema Función Gráfica Derivada Comportamiento- Optimización	Distingue las relaciones entre dos variables que son funciones. Evalúa la velocidad y expresa la regla relacionada al observar la gráfica que representa la posición de un vehículo en movimiento, para las funciones siguientes: i. $f(x) = c$ ii. $f(x) = x$ ii.) $f(x) = x + b$ iv. $f(x) = ax + b$ Resuelve el problema de evaluar la velocidad y expresar	Aplica las reglas de la derivación para las funciones algebraicas. Reproduce las reglas de la derivación para las funciones trascendentes. Aplica las reglas de la derivación para la derivada de una función. Construye un modelo para expresar la ecuación de la tangente a una curva.	Evalúa los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del análisis de las gráficas de los problemas abordados en los cursos de 1º a 4º semestres. Determina analíticamente los valores máximos, mínimos absolutos y/o puntos de inflexión de los problemas abordados en los cursos de 1º a 4º semestres.

el lenguaje verbal y matemático. 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	la regla al observar la gráfica que representa la posición de un vehículo en movimiento, para las funciones siguientes: v. $f(x) = x^2$ vi. $f(x) = x^3$
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Define la derivada de una función

3.4.3. Análisis de la Unidad de aprendizaje Matemáticas V

En el capítulo 2 se mencionó que para efectuar el análisis de la unidad de aprendizaje (Uap), se hizo uso de la noción de configuración epistémica (Font y Godino, 2006) que permitió identificar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (situaciones/problema, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/ proposiciones, procedimientos y argumentos) propuestos en el programa de estudio.

A continuación, se describe la configuración epistémica asociada con los objetos matemáticos primarios.

Como ***elementos lingüísticos*** se aprecian los términos del lenguaje simbólico (notación de función, variables, los números reales, punto de coordenadas, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, igualdad, ecuación, notaciones para expresar la derivada de una función y notaciones para las fórmulas de derivación) y gráfico (plano cartesiano, rectas, representación geométrica de una función y de la derivada).

En ***situaciones problemas*** se proponen ejercicios contextualizados[37] y no contextualizados [38]para distinguir las relaciones (entre dos variables) que son funciones, calcular la derivada de funciones y aplicaciones de la derivada para diversas funciones (máximos, mínimos, concavidad).

[37] Simulan situaciones de la vida cotidiana que se resuelven con conocimientos previos de matemáticas.
[38] Actividades en contexto matemático (Ramos y Font, 2006).

Los ***conceptos-definiciones*** aparecen primeramente definiciones previas: función, desigualdad, ecuación, pendiente, secante, tangente; y como definición emergente la razón de cambio promedio, rapidez de cambio instantánea y finalmente de la de derivada.

Como ***proposiciones*** se observan los teoremas o reglas para la derivación de funciones, regla de la cadena y las propiedades de las identidades trigonométricas.

Y finalmente, como ***argumentos*** se aprecia que se solicita la justificación de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje matemático.

En el programa de estudios de la unidad de aprendizaje, se resalta la interpretación geométrica de la derivada como la razón de cambio promedio, así como ejercicios para calcular la derivada de diversas funciones. El tratamiento que se la da a la derivada es como el límite del cociente de incrementos. Y la bibliografía propuesta para los estudiantes se presenta en la tabla 5:

Tabla 5
Bibliografía básica para el estudiante

	Libros de bachillerato
1	Martínez de G., Mayra et al. (2009). Cálculo diferencial e integral. México: Santillana
2	Mora V., Emiliano y del Río F., M. (2009). Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económicas administrativas. México: Santillana.
3	Ortiz C. F. J. (2007). Cálculo Diferencial. México: Grupo Editorial Patria.
4	Stewart, H., et al. (2010). Introducción al cálculo. México: Thompson. 2. Salazar, G., Bahena R. y Vega H., (2007). Cálculo Diferencial. México: Grupo Editorial Patria.
5	Stewart, James. (2007). Cálculo Diferencial e Integral. México: CENGAGE Learning.
6	Stewart, James. (2010). Cálculo Conceptos y Contextos. México: CENGAGE Learning.
7	Larson, R., et al. (2002). Cálculo diferencial e integral. México: McGraw-Hill.

3.4.4. Revisión y análisis de dos libros de texto de bachillerato con el tema de la derivada

3.4.4.1. Importancia del estudio del Libro de Texto

Se ha mencionado de la revisión y análisis de dos libros de texto que el profesor declaró utilizar para la implementación de sus clases. Es sabido que los libros de texto son esenciales para la planeación de los procesos de instrucción (Pino-Fan *et al.,* 2013). Por ello, la revisión de los libros de texto, es debido a la importancia que estos adquieren para los profesores durante la implementación de sus clases. Dichos libros tienen por título: Cálculo diferencial bajo el enfoque por competencias en estricto apego a la RIEMS y Matemáticas V Cálculo diferencial.

Se puede observar que el profesor no hace uso de la bibliografía básica que se propone en el Programa de estudio (tabla 5).

3.4.4.2. Configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas propuestas en los libros de texto de bachillerato

Para efectuar el análisis, se utilizó la noción de configuración epistémica para identificar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios que intervinieron en las prácticas matemáticas, es decir, el análisis se centró en identificar los objetos matemáticos primarios asociados a las prácticas matemáticas identificadas, específicamente en los capítulos dedicados al estudio de derivada (Pino-Fan, 2013).

3.4.4.2.1. Libro 1

Este libro contempla tres unidades didácticas para el estudio de la derivada. La primera se orienta a la presentación de funciones, la segunda a la definición de límites y la tercera unidad se dirige a la introducción del cálculo infinitesimal, las definiciones de razón de cambio y de la derivada, así como la presentación del cálculo de derivadas, derivadas de funciones transcendentales, derivadas sucesivas y aplicaciones de la misma. Se identificaron los objetos, prácticas y procesos matemáticos de esta última unidad (Unidad III), que es donde se aborda el tema de nuestro interés. Lo que permitió identificar tres significados de abordar la derivada.

3.4.4.2.1.1. Identificación de las prácticas matemáticas (significado 1)

Las prácticas matemáticas, están en torno con la interpretación geométrica de la deriva. Para ello, se proponen y resuelven ejercicios introductorios contextualizados para calcular incrementos; la diferencial de diversas situaciones de manera algebraica y gráfica, tales como: razón de cambio de velocidades, poblaciones, ingreso, longitud, etc.; así como la realización de ejercicios para explicar la velocidad instantánea de un móvil.

3.4.4.2.1.2. Identificación de objetos matemáticos (significado 1)

En los ***elementos lingüísticos*** se aprecian los términos del lenguaje simbólico (Δx, $\Delta f(x)$, $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, variables, números naturales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, igualdad, ecuaciones) y gráfico (segmentos, plano cartesiano, gráficas e interpretaciones geométricas de los incrementos, rectas secantes, notaciones para la velocidad instantánea en ciertos segundos).

En ***situaciones/problemas*** se abordan dos tipos de ejercicios-problemas, 1) problemas introductorios contextualizados sobre incrementos, cantidades infinitamente pequeñas y diferenciales; y 2) problemas (resueltos) que refuerzan y ejemplifican el uso y la interpretación geométrica de la velocidad instantánea de un móvil en diversos segundos y con ello el cálculo de la derivada.

Como ***conceptos-definiciones*** se tienen las definiciones previas de la pendiente de una recta secante $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y una definición emergente, la velocidad instantánea en un punto t del intervalo como el límite: $v(t) = lím_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

En las ***proposiciones*** se pueden señalar: el incremento de una función.

> Sea una función $f(x)$, si x varía de un valor inicial a y un valor final b, entonces tenemos un valor inicial para la función $f(a)$ y un valor final $f(b)$. A la diferencia $f(b) - f(a)$ se le llama incremento de la función y se denota por $\Delta f(x)$ (Cuevas y Bermúdez, 2016, p. 129).

Los ***procedimientos*** consisten en el desarrollo del cálculo de incrementos, el método de tabulación para encontrar los valores y la gráfica de funciones, procedimiento para la resolución de velocidades instantáneas.

En cuanto a los ***argumentos*** se puede identificar el uso de las gráficas y de tablas para encontrar el valor de variables distancia-tiempo y de la relación $v = \frac{d}{t}$ Así como elementos de la geometría analítica.

En este libro, se hace la interpretación geométrica de la derivada a partir del cálculo de la velocidad instantánea de un móvil, se usa la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente de la secante. Y se emplea el método de las secantes, para hacer tender de manera indefinida el incremento de la variable independiente a cero. Se deja ver la semejanza que existe entre la fórmula para calcular la velocidad promedio y la pendiente de una función, donde se observa que en ambas se obtiene una división de incrementos, lo que le llaman razón de cambio.

3.4.4.2.1.3. Identificación de las prácticas matemáticas (significado 2)

Se desarrollan las prácticas matemáticas en torno al cálculo de la derivada, por medio de los teoremas de derivación para diversas funciones y en las justificaciones de dichos teoremas haciendo uso de la definición de derivada.

3.4.4.2.1.4. Identificación de objetos matemáticos (significado 2)

Como ***elementos lingüísticos*** se aprecian términos del lenguaje simbólico ($lím_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$, y', variables, los números reales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, igualdad, ecuaciones) y gráfico (plano cartesiano para representar grados de inclinación de la tangente, rectas tangentes, rectas secantes, pendiente de una función, gráficas de la derivada de la función logaritmo y funciones trigonométricas).

En ***situaciones/problemas*** se abordan tres tipos de ejercicios: 1) introductorios contextualizados que solicitan calcular la razón de cambio; 2) no contextualizados para calcular derivadas de funciones (suma, resta, multiplicación y cociente de funciones) y uso de la regla de la cadena; y 3) problemas no contextualizados para calcular la derivada de funciones trascendentales.

Como ***conceptos-definiciones*** se presenta la definición de derivada. “Si una función f está definida en un punto x y existe el $lím_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se dice que la función f es derivable en x y su derivada es dicho límite” *Ibídem*., p. 142. Así como la definición: “Si $a^b = x$, entonces $log_a x = b$”. *Ibídem*., p. 161.

Se presentan las ***proposiciones***: La regla de los cuatro pasos para encontrar la pendiente de una función; “Sea $c \in \mathbb{R}$ si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$” *Ibídem*., p. 144; “Sea la función identidad $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$" *Ibídem*., p. 145; y "Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x$, definamos $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$" *Ibídem*., p. 147; "La derivada de una función de la forma $f(x) = x^n$ es igual al producto del exponente por la potencia disminuida en una unidad de la misma variable independiente, esto es: la función $f(x) = x^n$, donde $n \in R$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$" *Ibídem*., p. 149; "La derivada de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones; sean $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$, funciones reales, si $f(x) = h(x)g(x)$, entonces $f'(x) = h'(x)g(x) + g'(x)h(x)$" *Ibídem*., p. 150; "Sean $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ funciones reales, si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $h(x) \neq 0$, entonces: $f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-h\prime(x)g(x)}{(h(x))^2}$," *Ibídem*., p. 156; "Si f es una función derivable en un punto x y g es otra función que es derivable en $f(x)$, entonces la función compuesta (gof) es derivable en x y $(gof)'(x) = g'(f(x))$" Ibídem., p. 159; Y las propiedades básicas de los logaritmos, por ejemplo: "$Ln(x) = 0$, ya que $e^0 = 1$. $Ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$, y $e^{-1} = \frac{1}{e}$," *Ibídem*., p. 161; la derivada de la función logaritmo: "Sea $f(x) = lnx$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$," *Ibídem*., p. 164. Y las proposiciones para la derivada de funciones trigonométricas.

Los ***procedimientos*** consisten básicamente en los pasos para calcular derivadas de funciones algebraicas y trascendentales, algoritmos algebraicos o procedimientos para demostrar las proposiciones mencionadas anteriormente.

Para los ***argumentos*** se pueden señalar la definición de derivada y las propiedades de los logaritmos y de las identidades trigonométricas para la demostración de las proposiciones y de los conceptos/definiciones. El uso de las gráficas para interpretar el significado de la derivada.

3.4.4.2.1.5. Identificación de las prácticas matemáticas (significado 3)

Las prácticas que se desarrollan, son con base en las aplicaciones de la derivada, realizando y proponiendo diversos ejercicios; e interpretando las soluciones geométricamente. Considerando definiciones previas como las presentadas en las prácticas anteriores.

3.4.4.2.1.6. Identificación de objetos matemáticos (significado 3)

Como ***elementos lingüísticos*** se presentan términos del lenguaje simbólico ($f'(x)$, $f''(x)$, $\frac{df}{dx}$, variables, símbolos para suma, resta, multiplicación, división e igualdad, ecuaciones, desigualdades) y gráfico (plano cartesiano, para encontrar intervalos para los cuales las funciones están definidas, recta tangente, normal, subtangente y subnormal en un punto; funciones crecientes y decrecientes; representar máximos, mínimos y puntos de inflexión.

En ***situaciones/problemas*** se abordan tres tipos de ejercicios, 1) no contextualizados para calcular la pendiente de una recta, la derivada de funciones, calcular la subnormal y subtangente; 2) no contextualizados para calcular máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad de una función; y 3) contextualizados para calcular la primera, la segunda derivada (puntos críticos, máximos, mínimos, puntos de inflexión, concavidad) y establecer modelos que indiquen la razón de cambio, velocidad instantánea).

Como ***conceptos-definiciones*** se tienen los conceptos previos; de la normal: en un punto dado de una curva es la perpendicular a la tangente en dicho punto, y como las pendientes de dos rectas perpendiculares son recíprocas y de signos contrarios, conociendo la pendiente y un punto de la tangente, también podemos calcular la pendiente y la ecuación de la recta normal; subtangente: si $(x, (f(x))$ son las coordenadas del punto de contacto de la tangente, la longitud de la subtangente queda definida como $S_t = \frac{f(x)}{m}$; subnormal: la definición de la subnormal se define como $S_n = f(x).m$.

Se presentan las ***proposiciones***: “Se dice que una función real $f(x)$ es creciente en un intervalo si para cualesquiera dos elementos dentro del intervalo, llamémosle a y b, donde $a < b$, se tiene que $f(a) < f(b)$”, “Se dice que una función real $f(x)$ es decreciente en un intervalo si para cualesquiera dos elementos dentro del intervalo (a, b) donde $a > b$, se tiene que $f(a) > f(b)$”, “Si una función continua es creciente en un punto dado, su derivada en ese punto es positiva, “Si una función continua es decreciente en un punto dado, su derivada en ese punto es negativa” *Ibídem*., p. 176; “Sea f una función continua, f tiene un máximo local (o también llamado máximo relativo) en c, si $f(c) \geq f(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a c”; “Sea f una función continua, f tiene un mínimo local (o también llamado mínimo relativo) en c, si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a c" *Ibídem*., p. 181; "Si f es diferenciable en un intervalo abierto, se dice que la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo si se tiene que f' (la primera derivada de f) es creciente sobre dicho intervalo". "De forma análoga, se dice que la gráfica de f es cóncava hacia abajo si f'(la primera derivada de f) es decreciente sobre el intervalo"; "Si se obtiene que $f'' > 0$ para todo elemento x del intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo dado"; y "Si se obtiene que $f'' < 0$ para todo elemento x del intervalo, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo dado" *Ibídem*., p. 183.

Los ***procedimientos*** se presentan en el cálculo de derivadas, pasos para encontrar máximos o mínimos de una función en un intervalo, procedimiento para encontrar puntos de inflexión en la gráfica de una función y pasos para resolver problemas de aplicación de la derivada.

Como ***argumentos*** se pueden señalar: el teorema de Pitágoras para deducir las longitudes de la tangente y la normal; las gráficas de funciones para argumentar los valores de la normal y la tangente; las proposiciones de función creciente y decreciente, para calcular máximos y mínimos de funciones; la regla de la primera derivada para calcular máximos y mínimos; se hace uso de la segunda derivada y de gráficas para comprobar resultados de concavidad de funciones.

En este libro primeramente, se presentan problemas introductorios sobre la velocidad instantánea, se inicia el tratamiento de la derivada como razón instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). Posteriormente, se propone calcular la derivada de funciones por medio de teoremas de derivación; y finalmente la aplicación de la derivada para determinar máximos, mínimos y la concavidad de funciones.

En cuanto a los objetos matemáticos ostensivos-no ostensivos, se observa que destacan los ostensivos como simbólicos para representar funciones y sus derivadas, gráficos para interpretar a la derivada y sus aplicaciones. Y no ostensivos como definición de la derivada como el límite del cociente incremental y las proposiciones de derivación

3.4.4.2.2. Libro 2

Este libro contempla tres unidades didácticas para el estudio de la derivada. La unidad I se nombra como Límites; la unidad II Razón de cambio y la derivada; y la unidad III como valores máximos y mínimos relativos, ejemplos de sus aplicaciones. Se identificaron los objetos, prácticas y procesos matemáticos de la Unidad II, que es donde se aborda el tema de interés. Lo que permitió identificar tres significados para la derivada.

3.4.4.2.2.1. Identificación de las prácticas matemáticas (significado 1)

Las prácticas que se identifican están en torno a la interpretación geométrica de la deriva y el cálculo de derivadas de funciones por la definición. Se proponen y resuelven ejercicios introductorios contextualizados y no contextualizados para calcular incrementos, razón de cambio de funciones, pendientes de rectas secantes; así como la realización de ejercicios descontextualizados para explicar y calcular la velocidad instantánea de una función.

3.4.4.2.2.2. Identificación de objetos matemáticos (significado 1)

En los ***elementos lingüísticos*** se aprecian los términos del lenguaje simbólico (fórmula de la pendiente de una recta, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $lím_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $lím_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pendiente de rectas secantes, razón de cambio instantánea, límite de la razón de cambio promedio y gráfico (la tabulación y representación de diversas funciones en el plano cartesiano, interpretaciones geométricas de la razón de cambio promedio y de razón de cambio instantánea, la pendiente de una curva.

En ***situaciones/problemas*** se abordan dos tipos de ejercicios, 1) contextualizados para calcular la razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea; y 2) descontextualizados que ejemplifican a la derivada como razón de cambio e instantánea, ejercicios de calcular derivadas de funciones aplicando la definición de derivada (derivación con cuatro pasos).

En ***conceptos-definiciones*** se presentan las definiciones de razón de cambio instantánea: el límite de la razón de cambio promedio cuando Δx tiende a cero se tiene $lím_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $lím_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; la derivada de una función es el límite de la razón de cambio instantánea cuando Δx tiende a cero (Ibáñez y García, 2007, p.96).

En ***las proposiciones*** se pueden identificar: "A la división $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se llama razón de cambio promedio de $f(x)$ con respecto de x" *Ibídem*., p. 81; "cuando una función crece, la pendiente de las rectas secantes son positivas"; "la pendiente de las rectas secantes que son paralelas al eje X, valen cero"; "cuando la función decrece la pendiente de las rectas secantes son negativas" *Ibídem*., pp. 102-103.

En cuanto a ***procedimientos*** son de carácter simbólico y gráfico, consisten básicamente en los pasos para el cálculo de razones de cambio promedio e instantánea, en el cálculo de la derivada de funciones haciendo uso de la definición.

Y en los ***argumentos*** se pueden destacar la fórmula de la pendiente de una recta, las gráficas para justificar procedimientos y comprobar resultados, la definición de la derivada y las ejemplificaciones de técnicas a seguir usando conceptos y proposiciones.

3.4.4.2.2.3. Identificación de las prácticas matemáticas (significado 2)

Se identifican las prácticas matemáticas en torno al cálculo de la derivada por medio de teoremas de derivación, se proponen y resuelven diversos ejercicios de derivación para funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

3.4.4.2.2.4. Identificación de objetos matemáticos (significado 2)

Como ***elementos lingüísticos*** se aprecian términos del lenguaje simbólico ($\frac{dy}{dx}$, notaciones para la derivada de funciones algebraicas y funciones trascendentales) y de lenguaje gráfico (plano cartesiano, para representar la pendiente de funciones e interpretación de la derivada).

En ***situaciones/problemas*** se abordan tres tipos de ejercicio: 1) no contextualizados que solicitan calcular la derivada de funciones algebraicas; 2) no contextualizados para calcular derivadas de funciones trascendentales (logarítmicas, exponenciales y trigonométricas); y 3) no contextualizados para calcular la derivada de funciones explícitas e implícitas.

No se presentan ***conceptos-definiciones***.

Aparecen las ***proposiciones***: "La derivada de una constante $\frac{dc}{dx} = 0$"; "la derivada de una variable con respeto a ella misma es $\frac{dx}{dx} = 1$"; "la derivada de una suma $\frac{d}{dx}(u - v + w) =$

$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$"; "la derivada de la multiplicación de una constante por una función $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$"; "la derivada de la potencia de una función de exponente constante $\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$; la derivada de la multiplicación de dos funciones $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$"; "la derivada de la división de dos funciones $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$" *Ibídem*., pp. 109-116; fórmulas de derivación para funciones trascendentes; y funciones trascendentes: logarítmicas y exponenciales.

Los ***procedimientos*** consisten básicamente en el cálculo de derivadas de funciones algebraicas y trascendentales, pasos o procedimientos algebraicos para demostrar los teoremas de derivación.

Para los ***argumentos***, se observan en las ejemplificaciones de técnicas a seguir usando las proposiciones o propiedades de derivación; las propiedades de logaritmos y de las identidades trigonométricas para la demostración de las proposiciones de derivación.

3.4.4.2.2.5. Identificación de prácticas matemáticas (significado 3)

Las prácticas matemáticas desarrolladas son en base al cálculo de tangentes y la normal de una curva, así como las explicaciones para su interpretación en el plano cartesiano; y en el cálculo de las pendientes de la tangente a una curva (ecuaciones de la tangente, normal, subnormal, subtangente) enfatizando el uso de la derivada para ello.

3.4.4.2.2.6. Identificación de objetos matemáticos (significado 3)

Como ***elementos lingüísticos*** se presentan términos del lenguaje simbólico ($\frac{dy}{dx}$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, ecuaciones) y gráfico (plano cartesiano para representar la longitud de la normal, tangente, subtangente y subnormal).

Como ***situaciones/problemas*** se abordan problemas no contextualizados para encontrar la pendiente de la tangente a una curva, ecuaciones de la tangente y la normal, longitud de la subtangente y de la subnormal; así como la representación gráfica de ello.

En ***conceptos-definiciones*** se tienen los conceptos previos: "la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva"; "el cálculo de la longitud de la subtangente es: $LT = \left|\frac{f(a)}{\frac{d}{dx}f(a)}\right|$, el cálculo de la longitud de la subnormal está determinado por:$LN = \left| f(a)\left[\frac{d}{dx} f(a)\right]\right|$” *Ibídem*., p.140.

Se presentan las ***proposiciones***: “dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario”; “la proyección de la longitud de la tangente sobre el eje X recibe el nombre de longitud subtangente (LT)”; “la longitud de la proyección de la longitud de la normal sobre el eje X recibe el nombre de longitud de subnormal (LN)” *Ibídem*., p. 145.

Los ***procedimientos*** se presentan en el desarrollo o pasos para calcular la pendiente de la tangente a una curva, ecuaciones de la tangente y la normal, longitud de la subtangente y de la subnormal; así como su representación gráfica.

Como ***argumentos,*** se hace uso de la definición de la derivada; la forma punto-pendiente de una recta; las propiedades de las pendientes para dos rectas perpendiculares; así como el uso del plano cartesiano para justificar e interpretar las soluciones.

El análisis del contenido matemático referente con la derivada de los libros 1 y 2, se pudo conocer la forma en que se aborda ésta noción en el bachillerato; donde se identifica que las situaciones/problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que se activaron en los textos, es: *la derivada como límite del cociente de incrementos.* En la tabla 6 se presentan las definiciones que establecen ambos libros.

Tabla 6
Definiciones de la derivada en los libros de texto

Definiciones de la derivada	
Libro 1	Libro 2
▪ La velocidad instantánea en un punto t del intervalo como el límite: $v(t) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$. ▪ Si una función *f* está definida un punto x y existe el $lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, se dice que la función f es derivable en x y su derivada es dicho límite.	▪ La derivada de una función es el límite de la razón de cambio instantáneo cuando Δx tiende a cero. ▪ El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en aquel punto. ▪ Una función f es derivable en un punto si la derivada en ese punto existe y es diferenciable en un intervalo abierto (a, b) si la función es diferenciable en todos los valores que pertenecen al intervalo. ▪ La derivada de $f(x)$ es el límite del valor del cociente diferencial: $f'(x) = lím_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3.4.5. Significados pretendidos de la derivada en el Nivel Medio Superior

De acuerdo con la revisión y análisis del contenido de la derivada en 2 libros de texto de cálculo diferencial, se apreció que dichos libros, establecen como conocimientos previos a la introducción de la derivada: funciones, continuidad y, fundamentalmente, la noción de límite. Asimismo, se logró observar que las situaciones/problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos que se activaron en los textos, independientemente del contexto de uso de la derivada, siempre aluden a un mismo significado: la derivada como límite del cociente de incrementos. Esto se puede distinguir, en las definiciones que se plantean en los libros (Tabla 6).

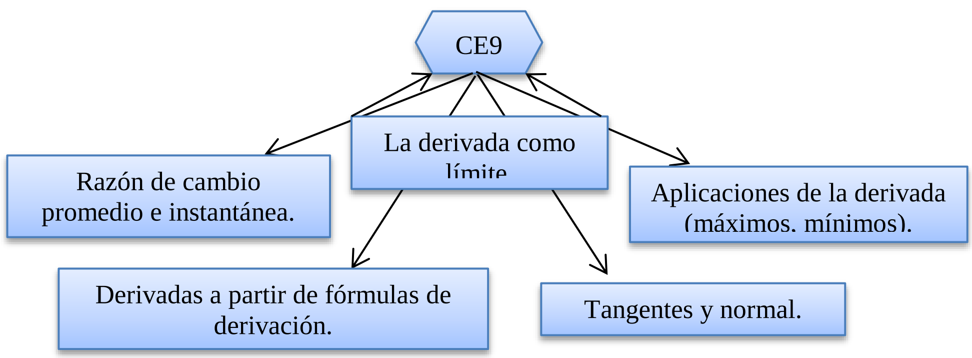


Figura 7. Significados de la derivada pretendido en el NMS.

Por ello, el análisis del Plan y Programa de Estudios de la UAGro y dos libros de Texto de cálculo diferencial, permitió identificar los significados de la derivada pretendidos en el NMS. Por un lado, la organización que se hace en el Programa de Estudio de la UAGro (Tabla 4) de los temas planificados para la enseñanza del cálculo diferencial, acentúan la interpretación geométrica como razón de cambio, mientras que los dos libros de texto también recalcan la interpretación geométrica y aplicaciones de la misma pero como procedimientos meramente algebraicos. Y ambas propuestas recurren a la noción de límite, para definir y usar a la noción derivada. Es por ello que, se evidencia que el objeto límite juega en la actualidad un papel fundamental para la introducción y definición de dicha noción en el NMS, frente al significado global (Figura 6). Cabe mencionar que un resultado similar ya se había encontrado en el trabajo de Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), en el cual se analizaron textos de bachillerato sobre la derivada.

Se evidencia que la configuración que se activa para el tratamiento de la derivada, en el NMS en el proceso de enseñanza de dicho objeto es la CE9 (Figura 7) y de acuerdo con la revisión de los programas de estudio en dicho nivel, es en esta Uap el primer contacto de manera formal que tienen los estudiantes con el Cálculo diferencial, específicamente con la derivada.

Capítulo 4

Análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego en el aula de clases

Capítulo 4. Análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego en el aula de clases

4.1. Introducción

En este capítulo, se presenta la descripción de las clases del profesor de una escuela preparatoria, quien fue al impartir el tema derivada; el análisis detallado de los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos matemáticos (problematización, representación, definición, enunciación, argumentación y generalización) que se pusieron en juego durante las prácticas matemáticas desarrolladas por el profesor, es decir, los significados matemáticos que se interpretaron de dichas prácticas (faceta epistémica); asimismo, se caracterizaron las facetas interaccional, mediacional y ecológica del modelo CDM.

4.2. Desarrollo de la experiencia de enseñanza

Para lograr el objetivo general y con ello responder a la pregunta de investigación, se realizó un **análisis didáctico** desde la teoría que soporta el trabajo, tomando en cuenta las observaciones de la práctica de un profesor (un caso). Con el propósito de identificar el CDM que pone en juego un profesor durante las sesiones de clase, con la intención de comunicar a otros profesores lo que ocurre en el aula de clases, y con ello reflexionar sobre la propia práctica al abordar cualesquier tópico.

4.2.1. Procedimiento

La población de interés de esta investigación fue un profesor que labora en el NMS (preparatoria) de la UAGro, en el campo disciplinar de Matemáticas, información referente a la fase 3 de la investigación. Con la revisión previa del Plan y Programa de estudio de dicha universidad, el tema de la derivada se propone en la Uap Matemáticas V. Con base a ello, se contactó y entrevistó previamente a profesores para saber los tiempos exactos en que abordarían el tema de derivada. En un primer momento se contactó a cuatro profesores de distintas preparatorias, sin embargo, se consideró observar a uno de ellos para la investigación; quien mencionó que empezaría a trabajar con el tema de interés hasta la unidad de competencia III (últimos temas del semestre) tomando en cuenta su propia planeación de clase. El instrumento que sirvió para la recolección de la información fue la observación de las clases.

4.3. Descripción y análisis del proceso de estudio del profesor

4.3.1. Participante

El profesor que fue observado, forma parte de la planta docente de la escuela preparatoria No.1 ubicada en la ciudad de Chilpancingo, Gro. Este profesor tiene una formación académica de Licenciado en Educación y cuenta con una Licenciatura en Matemática Educativa; tiene una antigüedad de 30 años frente a grupo como docente en dicha institución, donde imparte las unidades de aprendizaje de Matemáticas I, Matemáticas III y Matemáticas V con los grupos de primero, segundo y tercer grado respectivamente; y también labora en una escuela primaria de la misma ciudad. Se observó al profesor en el aula del grupo 502 T.M, donde se grabaron de manera continua 8 sesiones de clase cuya duración aproximadamente fue de 50 minutos por sesión, mismas que se implementaron de acuerdo con el horario asignado por la escuela, es decir, 4 sesiones por semana.

Para el análisis de las transcripciones de las sesiones de clase observadas, se utilizaron los tres primeros niveles del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, los que ya se han referido en el capítulo 2, referente a la fase 4 de la investigación. Con relación a los objetos matemáticos primarios, éstos se identificaron mediante definiciones, procedimientos de construcción, propiedades y situaciones-problema (ejemplos, contraejemplos o tareas). El análisis de las sesiones de clase permitió elaborar configuraciones epistémicas (redes de objetos institucionales) donde se reconocieron los objetos y procesos, así como la diversidad de significados que se pusieron en juego durante el desarrollo del tema de la derivada. Información que primeramente se utilizó para dar evidencia a la faceta epistémica.

4.3.2. Faceta epistémica

Habrá que recordar que el conocimiento correspondiente a la faceta epistémica, se refiere a la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, del reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados para cada significado parcial. Es así que a continuación se presenta la descripción de las clases del profesor, identificando las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos y con ello, los significados que el profesor le atribuye a la derivada.

4.3.2.1. Identificación de prácticas matemáticas

En un primer momento se identificaron las prácticas que desarrolló el profesor, las cuales se activaron en torno con la interpretación geométricamente de la derivada: El profesor mostró interpretaciones sobre la pendiente de una recta; dibujó una curva en el plano cartesiano y trazó rectas secantes y pendientes; e hizo cálculos algebraicos usando la fórmula de la pendiente de una recta conocidos dos puntos. Al conjunto de objetos matemáticos que se activaron, se le nombró configuración epistémica 1(CE1). Se identificó que el profesor promovió a que los estudiantes se involucraran en las actividades propuestas para el tema, solicitando participar de manera constante con sus conocimientos previos relacionados con la pendiente de la recta.

4.3.2.2. Identificación de objetos y procesos

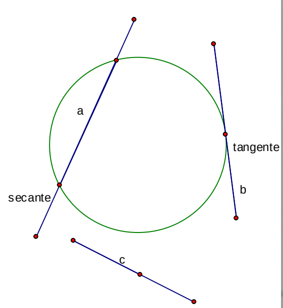
Tabla 7
Configuración epistémica 1

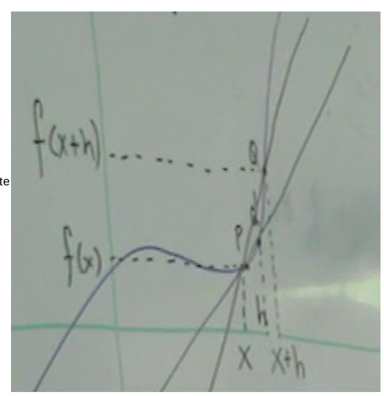
Objetos matemáticos

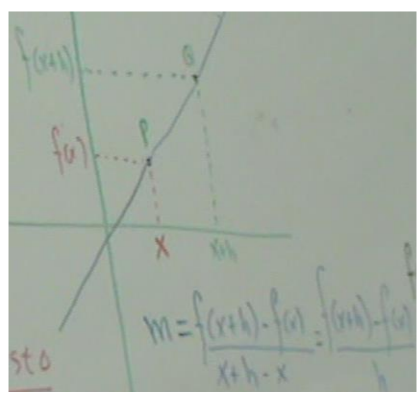
Elementos lingüísticos

Expresión oral: pendiente como la inclinación, pendiente cuando se tienen dos puntos, la tangente de un ángulo, límite, recta tangente, recta secante.

lenguaje simbólico: $tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$, $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\frac{dy}{dx} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y *lenguaje gráfico*:







Situaciones-problemas

El profesor no propuso aplicaciones sobre el objeto matemático ni ejercicios. Sólo fomentó a que los estudiantes recuerden conocimientos previos que podrían ayudar a desencadenar la interpretación geométrica de la derivada; como localizar puntos en el plano cartesiano, pendiente de una recta, incrementos, y el límite de una función.

Definiciones

Se identifican y enlistan definiciones, aunque algunas son acercamientos a éstas, que sirvieron para el acabado de las definiciones que enunció el profesor.

D_1	La derivada es la pendiente de una recta en un punto.
D_2	La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.
D_3:	La pendiente de una recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
D_4	La recta tangente es la que toca en un punto a una curva.
D_5	La secante es la recta que corta a la curva en dos puntos.
D_6	La pendiente es una inclinación.
D_7	Sea una función $f(x)$, si x varía de un valor inicial x y un valor final $x + h$, entonces tenemos un valor inicial para la función $f(x)$ y un valor final $f(x + h)$.
D_8	El límite dice que para que una recta secante se pueda considerar tangente, la distancia entre los puntos debe ser tan pequeña que sea casi el cero, no exactamente cero pero lo más reducido.
D_9	El límite de los puntos de la recta secante, es decir, que la distancia entre los puntos debe ser tan pequeña que sea casi cero o mínima posible para que la recta sea considerada pendiente de la recta. Si se tiene $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y aplicando el límite a esa h o incremento, ahora si se establece la definición de derivada.

Proposiciones

Cualquier afirmación, relacionada con la definición y el procedimiento de construcción de derivada, que puede ser cierta o falsa, pero que hay un intento de justificarla en la clase.

P_1	En un triángulo rectángulo la tangente de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Procedimientos

Una serie de pasos en lenguaje simbólico, gráfico y algebraico para interpretar la derivada:

Pr_1	Mediante la construcción de una curva y el trazo de rectas secantes; en la aplicación de la fórmula de la pendiente conocidos dos puntos y en el límite del cociente de incrementos.
Pr_2	Recta secante, recta tangente y pendiente de una curva.

Argumentos

Se hace uso de argumentaciones gráfico-visuales y en las constantes explicaciones del profesor.

Ar_1	El uso del plano cartesiano para representar a la curva de una función, localizar los puntos P $(x, f(x))$ y Q $(x + h, f(x + h))$ e interpretar a la derivada.
Ar_2	Mediante la construcción de una curva y haciendo uso de la fórmula de pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos para establecer la definición de derivada
Ar_3	En las explicaciones y ejemplificaciones del uso de los procedimientos geométricos y algebraicos.

Procesos matemáticos

De modo general, el análisis de la clase impartida por el profesor permitió identificar un proceso de *comunicación*, esto con el constante discurso del profesor oral/escrito; de igual manera se presentó un proceso de *definición* al mencionar diversas definiciones que emergieron para la interpretación geométrica de la derivada. Asimismo, el profesor realizó el proceso de *enunciación* en la presentación de una propiedad de los ángulos de un triángulo rectángulo. Aunque en mínimas ocasiones el profesor también, realizó el proceso de *problematización* al esforzarse a que los estudiantes se involucren con el tema, solicitando conocimientos de sus cursos anteriores, para que entendieran las cuestiones que se les presentó. También se realizó el proceso de *argumentación* o justificación, mediante la construcción de una curva y haciendo uso de la fórmula de pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos para establecer la definición de derivada y en las explicaciones y ejemplificaciones de procedimientos.

En esta primera configuración, se puede concluir que el profesor define a la derivada por medio de la interpretación geométrica, haciendo uso de gráficos y procedimientos algebraicos, aunque de manera implícita también se observaron ideas variacionales aunque no formales, como la razón de cambio, como los cambios de distancias o diferencias que enunció el profesor, hecho que se pudo enfatizar mencionando que dichas razones de cambio también se pueden relacionar con el concepto derivada. De igual manera, cuando el profesor trazó la secante sólo mencionó en el discurso que dicha recta se convierte en tangente cuando se aplica el límite, pero no se hizo una explicación a fondo. También se observa que el concepto de derivada lo asoció con otros conceptos como ángulo de inclinación y la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo aunque no relacionó dichos conceptos en las explicaciones gráficas que realizó.

4.3.2.3 Identificación de prácticas matemáticas

A partir de la interpretación geométrica de la derivada (CE1), se identificó que el profesor desarrolló las prácticas matemáticas en función de la enunciación de la definición formal del concepto de derivada de una función, explicó y desarrolló diversos ejemplos para calcular derivadas por medio del método de los cuatro pasos (por definición). Donde al conjunto de los objetos matemáticos que se activaron en dichas prácticas, se nombró configuración epistémica 2 (CE2).

4.3.2.4 Identificación de objetos y procesos matemáticos

Tabla 8

Configuración epistémica 2

Objetos matemáticos

Elementos lingüísticos

Expresión oral: límite, razón, derivada, método de cuatro pasos, fórmulas de derivación; *lenguaje simbólico*: notaciones de Lagrange y Leibniz para representar la derivada de una función $\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$, $D_x y$, $f(x)$, $f(x+\Delta x)$, Δx, h.

Situaciones-problemas

Ejercicios descontextualizados de cálculo de derivadas, haciendo uso de la definición (método de cuatro pasos).

Ejemplos realizados por el profesor:

EP Calcular la derivada por el método de los cuatro pasos

A) $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$

B) $y = x^7$

Ejemplos realizados por los estudiantes:

EE a) $f(x) = 5x + 3$

Definiciones

D_1 La derivada es el límite de la razón de la función incrementada menos la función original entre el incremento cuando éste tiende a cero, $\frac{dy}{dx} = lím_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Proposiciones

Cualquier afirmación, relacionada con la definición y el procedimiento de construcción de derivada, que puede ser cierta o falsa, pero que hay un intento de justificarla en la clase.

P_1 La derivada es igual límite cuando el incremento tiende a cero del cociente $\frac{dy}{dx} = lím_{h\to 0} \frac{k}{h}$.

P_2 Propiedades de límite: el límite de una constante es igual a ella misma.

Procedimientos

Una serie de pasos para el cálculo de derivadas.

Pr_1 Cálculo mental, uso de las operaciones fundamentales (sumas, restas, multiplicación y división de términos).

Pr_2 Cálculo de la derivada por el método de los cuatro pasos.

Argumentos

Ar_1 Se resaltan ejemplificaciones y explicaciones de la aplicación del método de los cuatro pasos para calcular la derivada de diversas funciones.

Procesos matemáticos

De modo general, el análisis realizado durante la clase, el profesor efectuó un proceso de *comunicación* esto con las explicaciones constantes oral/escrito y en el limitado diálogo entre profesor-estudiantes; no hubo *problematización* dado que sólo se mostró el cálculo de derivadas como seguir una técnica (método de los cuatro pasos); se identificó un proceso de *definición* cuando señaló el concepto de derivada y con ello la *enunciación* de algunas propiedades de límite; aparece también un proceso de *algoritmización* en los pasos del cálculo de la derivada de diversas funciones. Respecto a la *argumentación* se identificó en las ejemplificaciones y explicaciones de técnicas, así como del uso de las proposiciones.

En la configuración se identificaron otros elementos lingüísticos (términos semejantes, signos de agrupación, términos simétricos, potencias, suma, resta, multiplicación, factorización, funciones originales y funciones incrementadas) que no aparecieron en la tabla, dado que no están directamente relacionados con la derivada, pero que si ayudaron al profesor a aplicar el método de los cuatro pasos (la derivada por definición) para diversas funciones.

4.3.2.5 Identificación de prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas que se identificaron del profesor, estuvieron en torno al cálculo de la derivada de diversas funciones por medio de la teoremas o fórmulas de derivación, donde el profesor solicitó a los estudiantes calcular la derivada de diversas funciones aplicando fórmulas de derivación, con base en un formulario proporcionado por él mismo. Esta configuración se nombró configuración epistémica 3 (CE3).

4.3.2.6 Identificación de objetos y procesos matemáticos

Tabla 9

Configuración epistémica 3

Objetos matemáticos
Elementos lingüísticos *Expresión oral*: fórmulas de derivación; *lenguaje simbólico*: $\frac{dy}{dx}$, $y´$ $f´(x)$, $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$, $f´(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$.
Situaciones-problemas Ejercicios descontextualizados de cálculo de derivadas haciendo uso de fórmulas de derivación. Particularmente, se trabaja con funciones polinómicas y radicales.
EP *Ejemplos realizados por el profesor.* Derivar las siguientes funciones: a) $y = x^7 + 7x^3 - 14x + 9$. b) $f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$. c) $y = (x^4 + 5)(3x^2 - 4)$. d) $f(x) = \sqrt{x}(3 - x^2)$. e) $y = (4 - 9x)^7$. f) $y = \frac{1}{9}(4x - x^7)^9$. g) $f(x) = \sqrt[5]{7x^4 - 9x}$.
EE *Ejemplos realizados por los estudiantes.*

1. $f(x) = (8x - x^8 + 2)^6$.
2. $f(x) = \sqrt{11x - x^4}$.

Definiciones

No aparecen definiciones.

Proposiciones

Cualquier afirmación, relacionada con la definición y el procedimiento de construcción de derivada, que puede ser cierta o falsa, pero que hay un intento de justificarla en la clase.

P_1 La derivada de cualquier constante es cero: $\frac{d}{dx}(c) = 0$.

P_2 La derivada de la variable cuando está sola sin factores ni exponentes es 1: $\frac{d}{dx}(x) = 1$.

P_3 La derivada de una constante por una variable es la constante: $\frac{d}{dx}(cx) = c$.

P_4 La derivada de una variable, pero afectada por una potencia, va a ser igual al exponente que se convierte en factor de la misma variable y le asignamos exponente solo que al exponente que tenía original le restamos la unidad: $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$.

P_5 La derivada de un producto de funciones: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$.

P_6 La derivada de la raíz cuadrada es igual a la derivada de lo que hay dentro del radical el valor de la *u* y en el denominador colocamos el 2 multiplicado por la misma raíz que estamos derivando:

$$f'(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$$

P_7 La derivada de una función elevada a una potencia: $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$.

P_8 $\frac{d}{dx}(cu^m) = cmu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$.

Procedimientos

Pr_1 El desarrollo de pasos para calcular la derivada de diversas funciones por medio de las fórmulas de derivación (funciones polinómicas y radicales).

Argumentos

Ar_1 Se destacan ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones para calcular la derivada de diversas funciones.

Procesos matemáticos

Durante el análisis de la clase se observó que el profesor realizó un proceso de *comunicación* esto con las explicaciones constantes oral/escrito y en el diálogo entre profesor-estudiantes; también se identificó un proceso de *problematización* en la aplicación de las fórmulas de derivación proporcionadas por el profesor para diversas funciones, así como un proceso de *enunciación* cuando el profesor presentó las fórmulas de derivación; Y de manera constante un proceso de *algoritmización* en los procedimientos para calcular la derivada de funciones. Los estudiantes se limitaron a seguir el procedimiento secuencial que hizo el profesor, o bien apoyarse en el formulario proporcionado por el profesor, en este sentido, la actividad priorizó ejemplificaciones por encima de las justificaciones de los procedimientos y propiedades.

Es importante mencionar que dentro de esta configuración, también aparecieron otros elementos lingüísticos tales como: constantes, variables, coeficientes, exponentes, números naturales, números irracionales, serie de términos, suma, resta, multiplicación y división, incógnitas, números reales, símbolos para potencias, igualdad, etc. Que el profesor utilizó para calcular la derivada de diversas funciones.

De acuerdo con la identificación de las tres configuraciones epistémicas; el tratamiento que mostró el profesor con la derivada fue con base a la interpretación geométrica, haciendo uso de gráficos y procedimientos algebraicos; intentó relacionar a la derivada con la pendiente de una recta, tangente de rectas, rectas secantes de una curva, tangente del ángulo de inclinación, catetos de un triángulo rectángulo y rectas en una circunferencia, aunque no hubo una explicación clara con tal relación. Y la mayor parte de las sesiones de clase, el profesor se enfocó a que los estudiantes se apropiaran del concepto derivada como la aplicación de las fórmulas de derivación para diversas funciones, donde lo importante fue saber aplicar dichas fórmulas más que la interpretación de dicho concepto.

Asimismo, se identificaron prácticas matemáticas operativas (resolución de problemas) y discursivas (explicación, justificación y comunicación de las actividades), así como la intervención de objetos ostensivos (símbolos y gráficos) y no ostensivos (conceptos y proposiciones), ocurridos en la actividad matemática y que fueron representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De acuerdo con las configuraciones epistémicas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) que se realizaron, se identificaron tres significados parciales del objeto matemático derivada, los cuales se muestran en la figura 8. En cuanto a los procesos matemáticos se identificaron de comunicación, definición, enunciación, problematización y argumentación que intervinieron en los objetos matemáticos y con ello en cada configuración.

:

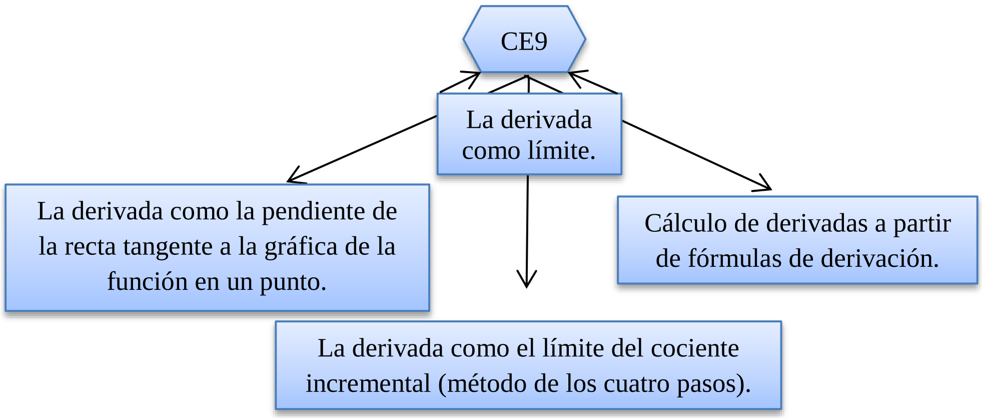


Figura 8. Significados de la derivada que implementó el profesor.

4.3.2.7. Discusión de la Faceta Epistémica

De acuerdo con lo mencionado en el capítulo III, en la propuesta curricular del bachillerato de la UAGro y en los dos libros de texto, los significados propuestos apuntaron a un mismo significado, es decir, a la derivada como límite, por lo que era de esperarse que el profesor orientara la enseñanza hacia el mismo significado global de la derivada CE9. Lo que coincide con Godino y Batanero (1994), quienes mencionaron que el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. Y que los significados logrados (aprendidos) por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales.

Se pudo observar durante el desarrolla de las clases, que el profesor no logró relacionar los significados atribuidos por él mismo a la derivada, en consecuencia los estudiantes consideraron los contextos gráficos y algebraicos separados, aplicando solamente algoritmos para resolver ejercicios y no conectaron procesos vinculados con la idea de derivada (razón, límite, función), lo que concuerda con los resultados Sánchez-Matamoros *et al*. (2008) y Gordillo, Arango y Fan (2015) quienes mencionaron que los modos de representación de un objeto matemático influyen en la construcción de los significados de los estudiantes, debido a que los pueden considerar como separados al aplicar algoritmos sin relación

4.3.3. Faceta Interaccional

Esta faceta refiere a la interacción entre el profesor y estudiantes, describiendo y revisando la comunicación que se propicia en el aula de clases. Primeramente, se presentan las trayectorias: epistémica y docente de la CE1, con ello la configuración empírica del profesor describiendo el tipo de interacción generada; de manera similar para las CE2 y CE3.

Tabla 10
Trayectoria epistémica 1

CE	U. Epist.	Descripción	Estado potencial	
CE1	1	Hace una afirmación, que se categoriza como una aproximación a una definición: La pendiente es una inclinación.	E4	E1: Situacional E2: Actuativo E3: Lingüístico E4: Conceptual E5: Proposicional E6: Argumentativo
	2	Se introduce la notación de la pendiente de una recta $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y de la tangente de un ángulo en un triángulo rectángulo $tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	E3	
	3	Enuncia: en un triángulo rectángulo la tangente de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	E5	
	4	La definición: La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.	E4	
	5	Dibuja una circunferencia y rectas sobre ella.	E3	
	6	Las definiciones: La recta tangente es la que toca en un punto a una curva y la secante es la recta que corta a la curva en dos puntos.	E4	
	7	Uso del plano cartesiano para representar la curva de una función desconocida para interpretar a la derivada.	E3	
	8	Durante la explicación se identifica la siguiente afirmación que se utiliza para la definición de la derivada: Sea una función $f(x)$, si x varía de un valor inicial x y un valor final $x + h$, entonces tenemos un valor inicial para la función $f(x)$ y un valor final $f(x + h)$.	E4	
	9	Uso del plano cartesiano para representar las explicaciones.	E3	
	10	Recuerdo de la definición de la pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos.	E4	
	11	Aplica la fórmula de la pendiente.	E2	
	12	El uso de la fórmula de la pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos para establecer la definición de derivada y justificar las afirmaciones.	E6	
	13	Una afirmación que se caracteriza como acercamiento a una definición: El límite dice que para que una recta secante se pueda considerar tangente, la distancia entre los puntos debe ser tan pequeña que sea casi el cero, no exactamente cero pero lo más reducido.	E4	

14	Uso del plano cartesiano para justificar las explicaciones y procedimientos usados.	E6
15	La definición de derivada: El límite de los puntos de la recta secante, es decir, que la distancia entre los puntos debe ser tan pequeña que sea casi cero o mínima posible para que la recta sea considerada pendiente de la recta. Si se tiene $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y aplicando el límite a esa h o incremento, ahora si se establece la definición de derivada.	E4

Tabla 11
Trayectoria docente 1

CE	U. Doc.	Descripción	Estado potencial	
CE1	1	Recuerdo de conocimientos previos (pendiente de una recta, ángulo de inclinación, tangente de un ángulo y las rectas de una circunferencia).	P4	
	2	Introducción de notaciones.	P4	
	3	Recuerdo e interpretación de reglas conceptuales.	P4	
	4	Dibuja una circunferencia y rectas en ella.	P4	
	5	Recuerdo e interpretación de definiciones.	P4	
	6	Presenta la gráfica de una función para explicar la interpretación geométrica de la derivada.	P4	
	7	Explica/justifica los procedimientos que ha mostrado.	P4	
	8	Recuerdo de proposiciones previas (la derivada se asocia con el concepto de tangente y con la pendiente, empleo de la fórmula de la pendiente de una recta conocidos dos puntos, distancias e incrementos).	P4	P1: Planificación
	9	Considera las respuestas de los estudiantes en las explicaciones.	P2	P2: Motivación
	10	Constantes interrogaciones sobre proposiciones/propiedades (dominio e imagen de una función, distancia entre dos puntos “h” incrementos).	P5	P3: Asignación P4: Regulación
	11	Se referencia en el plano cartesiano para las explicaciones.	P4	P5: Evaluación
	12	Recuerdo de definiciones previas (la fórmula de la pendiente de una recta).	P4	P6: Investigación
	13	Explica/justifica la técnica que ha mostrado.	P4	
	14	Con diversas preguntas evalúa la secuencia de procedimientos.	P5	
	15	Motivación, (considerando las respuestas de los estudiantes).	P2	
	16	Presenta una primera definición del concepto de derivada.	P4	
	17	Se referencia en el plano cartesiano para las explicaciones.	P4	
	18	Formaliza la definición que presentó (12) .	P4	
	19	Orientación (anotar lo escrito en el pintarrón).	P3	

4.3.3.1. Primera configuración empírica del profesor

Para describir esta configuración se consideran las tablas 10 y 11, con la relación de ambas se identificó la interacción sucedida en el aula de clases. En esta configuración, el profesor desarrolló actividades referentes con la interpretación geométrica de la derivada. Se inicia la clase, solicitando conocimientos previos de los estudiantes (Unidad docente. 1)

> Profesor [LI]: *¿Qué recordamos de la pendiente?*
>
> E [L2]: ¿es la tangente?
>
> Profesor [L7-L12]: *Para obtener la pendiente hay una formulita, la recordamos ¿Cuál es?, ¿Quién recuerda?*

Que dio lugar a nuevas explicaciones por parte de él mismo. Dichas explicaciones pusieron en juego las funciones docentes de recuerdo (Unidad docente 2 y 3). Con ello se presenta una afirmación (Unidad Epistémica 1, 2 y 3) con el propósito de realizar diferentes acepciones sobre la derivada, considerando las respuestas y participaciones de los estudiantes; enseguida, el profesor describe la definición de la pendiente de una recta (Unidad Epistémica. 4). Y representa de manera gráfica la pendiente haciendo uso del círculo y trazando diferentes rectas (Unidad Epistémica 5, 6 y Unidad docente 4 y 5).

Posteriormente el profesor, asocia a la derivada con funciones (Unidad Epistémica 7 y Unidad docente 6 y 7) donde involucra a los estudiantes a participar en la construcción de la definición.

> Profesor [L24]: *¿Qué representa este trazo?*
>
> Profesor [LI]: *¿Qué pedimos para ubicar un punto en el plano*?
>
> E [L30]: *las coordenadas*
>
> Profesor [L30]: *Las coordenadas ¿verdad?*
>
> Profesor [L32, L33]: *¿Alguna pregunta en las coordenadas? No verdad.*

Con dichas cuestiones recurrió nuevamente a recordar conocimientos previos (Unidad Epistémica 8 y Unidad docente 8). Considerando las respuestas de los estudiantes (Unidad docente 9) y continúa con las interrogantes (Unidad docente 10),

> Profesor [L35]: *¿Cuál es la diferencia que estamos observando? ¿Qué nombre recibiría esa diferencia?*

(Unidad Epistémica 9) en esta ocasión los estudiantes no responden, pero el profesor insiste con las preguntas apoyándose del gráfico que construyó (Unidad docente 11), lo que muestra que los lleva a la interpretación que había planeado previamente sobre la derivada. De modo que se continúa explicando y estimulando a los estudiantes para recordar conocimientos previos.

> Profesor [L74]: *Entonces, ¿cuál es la fórmula de la pendiente?*

(Unidad Epistémica 10 y Unidad docente 12), solo algunos estudiantes responden de manera satisfactoria y aplican la fórmula de la pendiente considerando las coordenadas de los puntos P y Q de la curva (Unidad Epistémica 11, 12 y Unidad docente 13) Y:

> Profesor [L77]: *¿Cómo quedaría? ¿De acuerdo?*

El profesor plantea que los estudiantes analicen la situación y con ello recordar contenidos de clases anteriores (Unidad docente 14).

> Profesor [L78]: … *Hay una condición para la h, para la recta que tenemos trazada no sea secante y sea tangente ¿cuál es la condición?*

> E [L78]: *Que se le aplique el límite*

Reafirmando lo que mencionan los estudiantes (Unidad docente 15). Con lo anterior se presenta un primer acercamiento a la definición de derivada (Unidad Epistémica 13 y Unidad docente 16) justificando las explicaciones y usando el gráfico que dibujó (Unidad Epistémica 14 y Unidad docente 17), finalmente enuncia una definición "más" formal de derivada (Unidad Epistémica 15 y Unidad docente 18 y 19). Durante el desarrollo de la actividad, no se da espacio para atender dudas por parte de los estudiantes, de modo que el profesor asume, con las participaciones de ellos, se ha entendido el tema.

Por tanto, en esta configuración, se identificaron rasgos de tipo dialógico (tipo D) debido a las interrogantes planteadas por parte del profesor hacia los estudiantes y las participaciones mismas de éstos últimos. Además se identifican rasgos de una presentación magistral (tipo A), dado que se observa que el profesor presenta y desarrolla el tema derivada basado en lo planeado previamente para la clase, sin dar pie a otras interpretaciones que pudieran surgir por parte de los estudiantes. Por lo tanto en la tabla 12, se puede resumir lo presentado anteriormente.

Tabla 12
Trayectorias epistémica, docente e interacción

CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teóricas	
	1	Conceptual	1	Regulación		
	2	Lingüístico	2	Regulación		
	3	Proposicional	3	Regulación		
	4	Conceptual	4	Regulación		
	5	Lingüístico	5	Regulación		
	6	Conceptual	6	Regulación		
	7	Lingüístico	7	Regulación		Magistral
	8	Conceptual	8	Regulación		
	9	Lingüístico	9	Motivación		Adidáctica
CE1	10	Conceptual	10	Evaluación	Dialógica/ Magistral	
	11	Actuativo	11	Regulación		Personal
	12	Argumentativo	12	Regulación		
	13	Conceptual	13	Regulación		Dialógica
	14	Argumentativo	14	Evaluación		
			15	Motivación		
			16	Regulación		
	15	Conceptual	17	Regulación		
			18	Regulación		
			19	Asignación		

Tabla 13
Trayectoria epistémica 2

CE	U. Epistémica	Descripción	Estado potencial	
	16	Definición: La derivada es el límite de la razón de la función incrementada menos la función original entre el incremento cuando éste tiende a cero, $\frac{dy}{dx} = lím_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	E4	E1: Situacional E2: Actuativo
CE2	17	Uso de las notaciones para representar a la derivada: $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = D_x y$.	E3	E3: Lingüístico E4: Conceptual
	18	Aplicación del método de los cuatro pasos para la función $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$.	E2	E5: Proposicional
	19	Uso de notaciones en la aplicación del método de los cuatro pasos.	E3	E6: Argumentativo

	20	Propiedades de límite: el límite de una constante es igual a ella misma.	E5
	21	Uso de las explicaciones, ejemplificaciones con el método de los cuatro pasos.	E6
	22	Uso del método de los cuatro pasos para derivar la función $f(x) = 5x + 3$.	E1
	23	Propiedades de límite: el límite de una constante es igual a ella misma.	E5
	24	Uso de las explicaciones, ejemplificaciones con el método de los cuatro pasos.	E6
	25	Aplicación del método de los cuatro pasos para otra función $f(x) = x^7$.	E2
	26	Enuncia: la derivada es igual límite cuando el incremento tiende a cero del cociente $\frac{dy}{dx}$.	E5
	27	Justificación de la derivada de una función, por medio de explicaciones y aplicación del método de los cuatro pasos.	E6

Tabla 14
Trayectoria docente 2

CE	U. Doc.	Descripción	Estado potencial	
	20	Presenta la definición de la derivada.	P4	
	21	Introducción de notaciones para la derivada.	P4	
	22	Explica/justifica el método de los cuatro pasos que ha mostrado.	P4	
	23	Introducción de notaciones para expresar los pasos de la definición de la derivada.	P4	
	24	Se aplica la definición (método de los cuatro pasos) y enseña el cálculo de la derivada por dicho método $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$.	P4	
	25	Recuerdo de proposiciones previas (propiedades de límite).	P4	
	26	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	P1: Planificación
	27	Evaluación interrogativa colectiva.	P5	
CE2	28	Planteamiento del problema de hallar la derivada de $f(x) = 5x + 3$.	P3	P2: Motivación
	29	Evaluación interrogativa colectiva.	P5	P3: Asignación
	30	Ayuda a presentar la resolución del ejercicio.	P3	
	31	Presenta un ejercicio $f(x) = x^7$. (Derivada de una función) que involucra diversos procedimientos (desarrollo de binomios cuadrados, operaciones fundamentales, factorización).	P4	P4: Regulación P5: Evaluación
	32	Recuerdo de proposiciones previas (la derivada es igual límite cuando el incremento tiende a cero del cociente $\frac{dy}{dx}$).	P4	P6: Investigación
	33	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	
	34	Orientación (anotar lo escrito en el pintarrón).	P4	

4.3.3.2. Segunda configuración empírica del profesor

Para la descripción de esta configuración, se consideran las tablas 13 y 14; y la relación de ambas, permitió identificar la interacción. Por ello, en esta configuración se identificó que el profesor planificó la clase para abordar a la derivada como el límite del cociente incremental, para ello inicio enunciando su definición (Unidad docente 20, Unidad Epistémica16) y con ello sus respectivas notaciones (Unidad docente 21 y Unidad Epistémica 17), exponiendo el método de los cuatro pasos (Unidad docente 22 y 23). No se observó participación por parte de los estudiantes, prevaleciendo la intervención del profesor quien llevó la batuta durante la presentación de la actividad.

El profesor presenta un ejemplo para aplicar el método de los cuatro pasos a una función (Unidad Epistémica 18 y Unidad docente 24), es hasta esta actividad se involucra a los estudiantes, estimulándolos a participar en la aplicación de cada paso del método.

Profesor [L132]: *¿Qué dice el paso 1?*

Profesor [L45-163]: *¿Qué consideramos como siguiente paso? ¿Qué pasa si reducimos* $8x^2$ *con* $-8x^2$*?, ¿Cuánto suman?, ¿Qué hacemos? ¿Qué tienen en común esos términos?, ¿Qué nos quedó?*

Las participaciones de los estudiantes son mínimas, siendo el profesor quien realiza el uso de notaciones para representar cada paso (Unidad Epistémica 19). Durante la aplicación del método de los cuatro pasos, promoviendo a que los estudiantes recuerden conocimientos previos, es decir, durante la resolución el profesor desempeña las funciones de recuerdo.

Profesor [L169]: *¿Ya con eso se termina?*

E [L170]: *No, porque vamos a aplicar el límite.*

Profesor [L177]: *¿Cómo seguimos cuando se trabajó el tema de límites?*

(Unidad Epistémica 20 y Unidad docente 25). Finalmente el profesor presenta la resolución del ejercicio planteado (Unidad Epistémica 21 y Unidad docente 26). Y al concluir con la actividad, cuestiona:

Profesor [L184]: *¿Hay alguna duda?*

(Unidad docente 26). Y una estudiante pregunta:

E [L187]: *¿los valores que le dio a las* x *puede ser cualquiera?*

El profesor interpreta, que la estudiante quiere saber si el método de los cuatro pasos se puede aplicar para cualquier función,

> Profesor [L189-L192]: *¡Ah sí!, lo que ahorita buscamos es un ejemplo que se pareciera al ejercicio que tienen en su cuadernillo y ya si por tu cuenta quieres trabajar otros ejemplos ahí si ya los inventaría.*

Con esta respuesta se observa que la estudiante se convence, sin embargo, no hay garantía de que sea verdadero por el recurso empleado del profesor. Se menciona nuevamente (Unidad docente 27)

> Profesor [L193]: *¿Otra duda?*

Los estudiantes ya no responden. En esta parte de la configuración la participación es poca, el discurso se centra más en el profesor durante la presentación y aplicación secuencial el método de los cuatro pasos. Se propone un ejercicio más, para calcular la derivada de una nueva función aplicando el método de los cuatro pasos (Unidad Epistémica 22 y Unidad docente 28), la dinámica utilizada es pasar a una estudiante a resolverlo al pintarrón y se considera la ayuda de sus compañeros, el profesor interviene nuevamente (Unidad docente 29) incitando a los estudiantes a recordar propiedades (Unidad Epistémica 23). Se sigue observando poca participación por parte de los estudiantes, por lo que el profesor reafirma la solución del problema (Unidad Epistémica 24, Unidad docente 30). No se abrió espacio para dudas, hecho que no garantiza la ausencia de las mismas.

Se presenta un nuevo ejercicio, que involucra el desarrollo de binomios cuadrados y la aplicación del método de los cuatro pasos (Unidad Epistémica 25, Unidad docente 31), nuevamente se motiva a que los estudiantes recuerden propiedades de límite (Unidad Epistémica 26, Unidad docente 32), se considera que ésta es una forma de tener la atención de los estudiantes, de modo que el profesor presenta el procedimiento de resolución del ejercicio en el pintarrón (Unidad Epistémica 27, Unidad docente 33). Finalmente el profesor indica la toma de notas por parte de los estudiantes (Unidad docente 34) mencionando:

> Profesor [L278]: *Y ya tenemos resuelta nuestra derivada ¿Esta claro verdad?*

Y no da oportunidad de la manifestación de posibles dudas de los estudiantes.

Las actividades que realizó el profesor, en la segunda configuración empírica, indican que se sitúe en el tipo A (magistral), con algunos rasgos del tipo D (dialogal). Pero de manera general se identifica como magistral. Por lo tanto en la tabla 15, se puede resumir lo presentado anteriormente.

Tabla 15
Trayectoria epistémica, docente e interacción

CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teóricas	
CE2	16	Conceptual	20	Regulación	Magistral/ Dialógica	Magistral Adidáctica Personal Dialógica
	17	Lingüístico	21	Regulación		
	18	Actuativo	22	Regulación		
	19	Lingüístico	23	Regulación		
	20	Proposicional	24	Regulación		
	21	Argumentativo	25	Regulación		
	22	Situacional	26	Regulación		
	23	Proposicional	27	Evaluación		
	24	Argumentativo	28	Asignación		
	25	Actuativo	29	Evaluación		
	26	Proposicional	30	Asignación		
	27	Argumentativo	31	Regulación		
			32	Regulación		
			33	Regulación		
			34	Regulación		

Tabla 16
Trayectoria epistémica 3

CE	U. Epist.	Descripción	Estado potencial	
	28	Se mencionan algunos teoremas de derivación: La derivada de cualquier constante es cero: $\frac{d}{dx}(c) = 0$. La derivada de la variable cuando está sola sin factores ni exponentes es 1: $\frac{d}{dx}(x) = 1$. La derivada de una constante por una variable es la constante: $\frac{d}{dx}(cx) = c$. La derivada de una variable pero afectada por una potencia, va a ser igual al exponente que se convierte en factor de la misma variable y le asignamos exponente solo que al exponente que tenía original le restamos la unidad: $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$.	E5	E1: Situacional E2: Actuativo E3: Lingüístico E4: Conceptual E5: Proposicional E6: Argumentativo
	29	Uso de las notaciones para representar a las fórmulas de derivación.	E3	
	30	Encontrar la derivada para la función $y = x^7 + 7x^3 - 14x + 9$.	E2	
	31	En las explicaciones y ejemplificaciones de la aplicación de las fórmulas de derivación.	E6	

	32	Encontrar la derivada de la función $f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$.	E2
	33	Se destacan las ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	34	Derivar el producto de funciones $y = (x^4 + 5)(3x^2 - 4)$.	E2
	35	Enunciación de: la derivada de un producto de funciones: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$.	E5
	36	Ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	37	Derivar la función $f(x) = \sqrt{x}(3 - x^2)$.	E2
	38	Enunciación de: La derivada de un producto de funciones: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$. La derivada de una raíz cuadrada $f'(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$.	E5
	39	Se destacan las ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	40	Encontrar la derivada de la función: $y = (4 - 9x)^7$	E2
	41	Se enuncia: La derivada de una función elevada a una potencia: $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$.	E5
	42	Ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	43	Encontrar la derivada de la función $f(x) = (8x - x^8 + 2)^6$	E1
	44	Se presenta nuevamente la proposición $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$.	E5
	45	Ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	46	Derivar la función $y = \frac{1}{9}(4x - x^7)^9$.	E2
	47	Se enuncia $\frac{d}{dx}(cu^m) = cmu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$.	E5
	48	Ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6
	49	Derivar la función $f(x) = \sqrt{11x - x^4}$	E1
	50	Se presenta nuevamente la proposición: $f'(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$	E5
	51	Ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y uso de las proposiciones.	E6
	52	Resolvemos el último ejercicio: $f(x) = \sqrt[5]{7x^4 - 9x}$	E2
	53	Se destacan las ejemplificaciones y explicaciones de técnicas a seguir y del uso de las proposiciones.	E6

Tabla 17

Trayectoria docente 3

CE	U. Doc.	Descripción	Estado potencial	
	35	Se planifica la clase en torno a calcular derivadas de funciones, haciendo uso de un formulario.	P1	P1: Planificación
	36	Motivación (el trabajo es más sencillo y rápido).	P2	P2: Motivación
	37	Presenta las fórmulas de derivación.	P4	

38	Introducción de notaciones.	P4	P3: Asignación
39	Planteamiento de hallar la derivada de una función $y = x^7 + 7x^3 - 14x + 9$	P4	P4: Regulación
40	Explica/justifica la técnica que ha mostrado.	P4	
41	Presenta la solución del ejercicio.	P4	P5: Evaluación
42	Presenta otro ejercicio para encontrar la derivada de una función $f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$.	P4	P6: Investigación
43	Evaluación interrogativa colectiva.	P5	
44	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	
45	Propone calcular la derivada de otra función $y = (x^4 + 5)(3x^2 - 4)$.	P4	
46	Enuncia proposiciones (derivada del producto).	P4	
47	Muestra la solución del ejercicio.	P4	
48	Orientación (anotar lo escrito en el pintarrón).	P4	
49	Propone calcular la derivada de otra función $f(x) = \sqrt{x}(3 - x^2)$.	P4	
50	Evaluación interrogativa colectiva ("¿Qué operación se está efectuando y que fórmula se va a utilizar?").	P5	
51	Recuerdo y enunciación de proposiciones (derivada del producto y derivada de la raíz cuadrada).	P4	
52	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	
53	Propone calcular la derivada de la función $y = (4 - 9x)^7$.	P4	
54	Evaluación interrogativa colectiva ("¿Cuál sería la fórmula requerida o indicada?").	P5	
55	Enuncia la proposición (la derivada de una función elevada a una potencia).	P4	
56	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	
57	Asignación de derivar una función $f(x) = (8x - x^8 + 2)^6$.	P3	
58	Nuevamente enuncia la proposición (la derivada de una función elevada a una potencia).	P4	
59	Revisa la resolución del ejercicio en conjunto con los estudiantes.	P3	
60	Planteamiento de calcular la derivada de una función $y = \frac{1}{9}(4x - x^7)^9$.	P4	
61	Evaluación interrogativa colectiva ("¿se aplicarán los mismos pasos que en los casos anteriores?").	P5	
62	Recuerdo y enunciación de la proposición (derivada del producto de una función elevada a un exponente multiplicada por una constante).	P4	
63	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	
64	Orientación (anotar lo escrito en el pintarrón).	P4	
65	Asignación de derivar una función $f(x) = \sqrt{11x - x^4}$.	P3	
66	Presenta nuevamente la proposición: $f'(\sqrt{u}) = \dfrac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$	P4	
67	Revisa la resolución del ejercicio en conjunto con los estudiantes.	P3	
68	Propone calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt[5]{7x^4 - 9x}$.	P4	
69	Recuerdo de la proposición (derivada de una raíz cuadrada).	P4	
70	Presenta la resolución del ejercicio.	P4	

4.3.3.3. Tercer configuración empírica del profesor

Para la descripción de esta configuración, se toman en cuenta las tablas 16 y 17; y con la relación de ambas se identificó la interacción sucedida en el aula de clases. Por ello, en la configuración, se identifica que esta clase como las posteriores están preparadas para derivar funciones aplicando reglas de derivación (Unidad docente 35). El profesor menciona la existencia de otro procedimiento para derivar funciones.

> Profesor [L284]: *Las fórmulas de derivación tienen la intención de hacer más sencillo el trabajo*

(Unidad docente 36). Por lo que enuncia y escribe en el pintarrón proposiciones de derivación (Unidad Epistémica 28, Unidad docente 37).

> Profesor [L293-L297]: *La derivada de cualquier constante es cero… Una constante puede ser cualquier número natural, pero puede ser también una fracción, un número irracional. Anoten unos ejemplos.*

(Unidad Epistémica 29, Unidad docente 38), solo se observa la intervención del profesor explicando un formulario que proporciona a los estudiantes previamente.

Presenta un ejemplo, indicando calcular la derivada de una función (Unidad Epistémica 30 y Unidad docente 39), tratando de involucrar a los estudiantes con las siguientes interrogantes:

> Profesor [L358-L361]: *Esa función tiene la forma de una serie de términos sean positivos o negativos la derivada se obtiene trabajando cada uno por separado. ¿Cuál sería la derivada de y? ¿Cuál aplicaríamos?*

Se observa poca participación de los estudiantes, durante la presentación de la resolución por parte del profesor (Unidad Epistémica 31, Unidad docente 40 y 41), no hay espacio para externar dudas. El profesor sigue con el mismo proceso, y presenta un ejemplo más (Unidad Epistémica 32 y Unidad docente 42). Se propicia una lluvia de preguntas con la intención de analizar los conocimientos existentes en los estudiantes e involucrarlos en la resolución del ejercicio (Unidad docente 43).

> Profesor [L381-L393]: *¿Qué fórmula vamos a utilizar?*, *¿Cuál es la derivada de* $4x^{\frac{1}{3}}$*?, ¿Qué valor tenemos en el numerador?*

La participación de los estudiantes no se logra. Finalmente el profesor presenta el resultado de la derivada de la función (Unidad Epistémica 33 y Unidad docente 44). Ahora éste propone, encontrar la derivada de un producto de funciones (Unidad Epistémica 34 y Unidad docente 45), para ello escribe en el pintarrón una proposición para proseguir con la explicación (Unidad Epistémica 35 y Unidad docente 46) insistiendo con la idea de involucrar a los estudiantes…

> Profesor [L420]: *¿Habrá términos semejantes que se puedan reducir?, ¿son divisible entre?*

> E [L293-L297]: *Todos tienen mitad y todos tienen una misma letra*

No hay participaciones, el profesor presenta la resolución (Unidad Epistémica 36 y Unidad docente 47) e indica a los estudiantes a tomar nota de lo escrito en el pintarrón (Unidad docente 48). Se continúa presentando ejemplos, para abordar diferentes proposiciones de derivación; presentando un ejemplo para la derivada de un producto de funciones, involucrando radicales (Unidad Epistémica 37 y Unidad docente 49) continuando con preguntas constantes a los estudiantes (Unidad docente 50).

> Profesor [L430]: *¿Qué operación se está efectuando y que fórmula se va a utilizar? ¿Cómo resolvemos una diferencia de fracciones cuando el denominador es distinto?*

Participaron algunos estudiantes ante los cuestionamientos. El profesor fomenta el recuerdo de la proposición de la derivada de un producto de funciones (Unidad Epistémica 38 y Unidad docente 51), después de una extensa explicación el profesor muestra la resolución (Unidad Epistémica 39 y Unidad docente 52), nuevamente no se abre un espacio para atender dudas de los estudiantes. Se continúa con la dinámica, donde los estudiantes tienen limitadas participaciones.

Ahora, el profesor asigna a una estudiante el cálculo de la derivada de una función, similar a la realizada en el último ejemplo (Unidad Epistémica 43y Unidad docente 57), donde se enuncia nuevamente la fórmula ya utilizada (Unidad Epistémica 44 y Unidad docente 58). Algunos estudiantes intentan ayudar a la compañera a calcular la derivada de la función propuesta. El profesor también participa en la resolución del ejercicio y finalmente en conjunto revisan la resolución (Unidad Epistémica 45y Unidad docente 59). Con la participación de los estudiantes, se da por entendido que no hay dudas, pues ya no se abre un espacio para atenderlas.

Se sigue con la ejemplificación de ejercicios, el profesor muestra el cálculo de una nueva función (Unidad Epistémica 46 y Unidad docente 60), cuestiona a los estudiantes con la intención de evaluar lo que éstos ha aprendido e involucrarlos en la resolución (Unidad docente 61), orientándolos a tomar nota de lo realizado hasta ese momento (Unidad docente 64).

Se propone la ejercitación para calcular una nueva función (Unidad Epistémica 52 y Unidad docente 68), en esta actividad no se promueve la participación de estudiantes. El profesor enuncia la fórmula de derivación (vista previamente) que le permitirá encontrar la derivada de la función (Unidad Epistémica 53 y Unidad docente 69). Después de una explicación el profesor presenta la derivada de la función (Unidad docente 70) y concluye la clase.

> Profesor [L542-L544]: *Hasta aquí concluimos el semestre, no alcanzamos a concluir lo que indica el curso porque el tiempo no nos alcanzó. Sin embargo tanto ustedes como yo hicimos lo necesario.*

Al final de esta actividad tampoco hubo oportunidad para preguntas por parte de los estudiantes. Se puede decir, que en la mayoría de las actividades implementadas no se permite espacio para preguntas de los estudiantes, tampoco para disipar dudas, no se observa retroalimentación durante el desarrollo del tema derivada. El profesor asume que con las limitadas participaciones de los estudiantes durante la resolución de los ejercicios, es suficiente para el logro de su aprendizaje. La forma de proceder del profesor, éste no se garantiza, pues con la dinámica empleada para la resolución de las actividades no logró involucrar a todos los estudiantes ya que solo se limitan a tomar nota de lo presentado y algunos sin saber o reflexionar sobre lo que escriben. Por lo cual esta configuración docente es de tipo A (magistral). En la tabla 18, se puede resumir lo presentado anteriormente.

Tabla 18

Trayectoria epistémica, docente e interacción

CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teóricas	
CE3	28	Proposicional	35	Planificación	Magistral	Magistral
	29	Lingüístico	36	Motivación		Adidáctica
	30	Actuativo	37	Regulación		Personal
	31	Argumentativo	38	Regulación		Dialógica
	32	Actuativo	39	Regulación		
	33	Argumentativo	40	Regulación		
	34	Actuativo	41	Regulación		
	35	Proposicional	42	Regulación		
	36	Argumentativo	43	Evaluación		
	37	Actuativo	44	Regulación		
	38	Proposicional	45	Regulación		
	39	Argumentativo	46	Regulación		
	40	Actuativo	47	Regulación		
	41	Proposicional	48	Regulación		
	42	Argumentativo	49	Regulación		
	43	Situacional	50	Evaluación		
	44	Proposicional	51	Regulación		
	45	Argumentativo	52	Regulación		
	46	Actuativo	53	Regulación		
	47	Proposicional	54	Evauación		
	48	Argumentativo	55	Regulación		
	49	Situacional	56	Regulación		
	50	Proposicional	57	Asignación		
	51	Argumentativo	58	Regulación		
	52	Actuativo	59	Asignación		
	53	Argumentativo	60	Regulación		
			61	Evaluación		
			62	Regulación		
			63	Regulación		
			64	Regulación		
			65	Asignación		
			66	Regulación		
			67	Asignación		
			68	Regulación		
			69	Regulación		
			70	Regulación		

4.3.3.4. Discusión de la Faceta Interaccional

Durante la interacción dada en el aula, se identificó que el profesor se centró en la presentación del tema de la derivada como la resolución mecánica de ejercicios. En menor medida, los estudiantes se enfrentaron a resolver problemas en los que tenían que movilizar conocimientos y conceptos, es decir, los estudiantes no tienen oportunidad de cuestionar la naturaleza de los objetos matemáticos presentados, ni de pensar acerca de las operaciones que realizan y/o sobre su naturaleza conceptual, como también lo ha reportado Preiss, Valenzuela y Larraín (2011). En general, el estilo del profesor y su estrategia didáctica incidió en la dinámica que prevaleció en el aula, el grado de participación de los estudiantes, los niveles de interacción, los niveles de atención y disposición de los estudiantes, y con ello el aprovechamiento escolar de los mismos, aspectos que han señalado en sus resultados Mares, Guevara, Rueda y Rivas (2004). Lo sucedido en el aula de clase con este profesor, también coincide con resultados de investigaciones que han destacado el predominio de una práctica orientada al desarrollo de procedimientos repetitivos (Araya y Dartnell, 2009, Radovic y Preiss, 2010).

4.3.3.5. Conclusiones de la interacción sucedida en el aula de clases

De acuerdo con el análisis de la interacción que sucedió en el aula de clases, se pudieron identificar varios aspectos. Primeramente, el profesor organizó las actividades académicas con base en los contenidos del Programa de estudio correspondiente, en cuanto a la comunicación del profesor se observó una presentación clara (no habló rápido), enfatizó conceptos clave del tema y en algunas ocasiones se favoreció el diálogo entre los estudiantes; sin embargo, no se observó que reconociera conflictos o dudas por parte de éstos (no dando espacio para tales dudas).

Para el desarrollo del tema, se propició la participación de los estudiantes durante la construcción de la definición de la derivada y en la resolución de ejercicios, pero siempre sirviendo como guía de lo planeado por el mismo profesor, sin dar oportunidad de interpretar la información presentada de forma distinta. Estas participaciones acontecieron, cuando se intentó involucrar y captar la atención de los estudiantes, solicitando a algunos de ellos resolver ejercicios en el pintarrón. Con dicha dinámica, se puede decir que el aprendizaje sucedió por medio de la observación, con base en lo realizado por un experto, en este caso el profesor, por lo que en la mayor parte de las clases los estudiantes fueron solo receptores del proceso que siguieron instrucciones.

Los momentos de apropiación del conocimiento matemático no fueron producto de fases de discusión sobre los aspectos críticos del proceso de enseñanza, más bien fueron de una manera de encaminar a que se pensara que existe un algoritmo apropiado que garantiza la respuesta. Una de las causas que podrían bloquear el aprendizaje, es la no captación de atención de los mismos, pues la mayoría de ellos no asumió la responsabilidad de resolver las actividades, dado que un grupo numeroso de estudiantes quedó fuera de la dinámica de la clase.

Por otra parte, el resultado del análisis de las interacciones didácticas indica que la mayoría de las clases fueron de tipo magistral y en parte dialógica. Es magistral porque se impuso la autoridad del profesor, considerado experto, permitiendo que éste gestione su discurso e imponga normas aceptadas por los estudiantes. Y dialógica porque se involucró la participación de otras voces en el discurso (participa un grupo reducido de estudiantes), prevaleciendo una interacción monológica entre docente y discente, sobre preguntas cerradas y específicas por parte del profesor. A su vez, éste aceptó como válidas las respuestas, en la medida que coincidan con el discurso previamente diseñado.

4.3.4. Faceta Mediacional

Para caracterizar la faceta mediacional, correspondiente con los recursos (tecnológicos o materiales temporales) que fueron utilizados para implementar la Uap Matemáticas V y para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Se consideran los componentes de la faceta: recursos o materiales didácticos, número de alumnos, horario y condiciones del aula, y el tiempo de enseñanza.

4.3.4.1. Recursos o materiales temporales para la enseñanza de la derivada

De acuerdo con el Plan y Programa de estudios para la Uap Matemáticas V, se proponen diversos recursos como apoyo para el profesor, con la intención de facilitar y potencializar el proceso de enseñanza-aprendizaje; tales como: proyector, computadora, libros de texto, internet, pintarrón, marcadores y el uso de un software educativo. Así como medios de presentación de la información en clase (pizarra, proyector, etc.); medios para búsqueda de la información (libros de texto e internet); y dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, software).

Con base en las trayectorias epistémica y docente implementadas en el proceso de instrucción de la derivada. Se lograron identificar los materiales que usó el profesor durante sus clases, éstos fueron: el pintarrón, marcadores y un formulario (material tradicional) para representar los objetos matemáticos tales como; elementos lingüísticos, situaciones/problemas, definiciones, proposiciones y argumentos. Cabe resaltar que las situaciones/problemas no fueron contextualizadas en ningún momento, mientras que los objetos matemáticos fueron representados mediante el uso del plano cartesiano.

4.3.4.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula

El grupo estuvo conformado por 35 estudiantes y el profesor, se puede afirmar que el grupo estaba sobrecargado de estudiantes, lo que pudo ser un factor para que no se lograra involucrar en las actividades a la totalidad de ellos; y menos aún, de que el profesor tuviera una atención personalizada. La implementación de cada una de las clases se llevaron a cabo bajo un horario asignado por la escuela, en éste se programaron cuatro sesiones semanales acordes con lo indicado en el Plan y programa de estudio; el horario fue apropiado, pues las sesiones estuvieron programadas entre las 8:00hrs y las 11:00hrs.

El proceso de instrucción tuvo lugar en el aula de clase, espacio usual para la interacción entre profesor y estudiantes, ésta contaba con suficientes butacas móviles, para que los estudiantes pudieran trabajaran en equipo, sin embargo, no hubo necesidad de ello, pues no hubo actividades planeadas para trabajo en equipo, en la mayor parte de la sesiones se realizó trabajo de manera individual. En el salón de clases siempre se dispuso, de un pintarrón; cabe resaltar que el profesor mencionó que la escuela cuenta con proyectores, pero había que solicitarlos con antelación a la dirección de la misma escuela para poder usarlos, por lo que en su caso prefería escribir la información en el pintarrón o bien proporcionar fotocopias a los estudiantes.

4.3.4.3. Tiempo de enseñanza

El último componente considerado fue el tiempo de enseñanza colectiva. De acuerdo con el Plan y Programa de estudio de la UAGro se establecen cuatro horas semanales, es decir, 240 minutos; mientras que la duración que el profesor dedicó a las actividades para la enseñanza fue de cuatro sesiones de 50 minutos, lo cual indica que efectivamente se implementaron 200 minutos a la semana sin tomar en cuenta que la clase iniciaba 5 minutos después y se concluía 10 minutos antes de lo programado, tiempo menos de lo propuesto en el programa de estudio.

Por medio de las trayectorias epistémica y docente, se logró identificar la distribución del tiempo dedicado en la enseñanza-aprendizaje. El profesor dedicó el tiempo suficiente para las explicaciones del contenido matemático; sin embargo, priorizó en ejemplificar y resolver ejercicios propuestos por él mismo, haciendo que el tratamiento de la derivada se redujera al desarrollo de cálculos y procedimientos meramente aritméticos, más que propiciar o desarrollar el análisis en los estudiantes. Con el hecho anterior, el profesor no dedicó espacio o el tiempo para tratar las actividades propuestas en el Plan y Programa de estudio, tales como: búsqueda de la información por parte de los estudiantes, el trabajo en equipo, exposición, desarrollos y resultados de contenidos por parte de los estudiantes. Tampoco se priorizó la retroalimentación de los aprendizajes adquiridos y no se puso atención a las dificultades que se presentan en los estudiantes, situación que según el programa de estudios debería atenderse.

4.3.4.4. Discusión de la Faceta Mediacional

Tomando como referencia los componentes de la faceta mediacional, los materiales usados por el profesor durante el desarrollo de las clases al enseñar el tema de la derivada, fueron únicamente el pintarrón y marcadores. Materiales considerados insuficientes para representar o visualizar a los objetos matemáticos, pues la mayoría de estudiantes no se interesaron por las explicaciones del profesor. Al respecto Banfi (2015) y Robles *et al.* (2012) resaltaron la utilización de materiales como la computadora, programas y software, para complementar la enseñanza de la derivada, en cuyo caso la técnica de cálculo cambiaría radicalmente. Lo anterior, permitiría centrar la atención en el proceso de modelización y análisis de la derivada, en lugar de centrar la atención sobre las técnicas de cálculo o en el desarrollo algoritmos. Asimismo, la importancia de adaptar la tecnología en los procesos educativos representa una gran oportunidad para que estudiantes, profesores e investigadores tengan acceso a apoyos visuales o interactivos para favorecer el aprendizaje (Celaya, Lozano y Ramírez, 2010). De modo que lo anterior toma sentido e importancia considerar el número de alumnos, el horario, las condiciones del aula y el tiempo didáctico, tanto presencial como no presencial (Arteaga *et al*., 2017).

4.3.4.5. Conclusiones

De acuerdo con los componentes identificados en la faceta mediacional, se pudieron conocer y describir los recursos técnicos y temporales usados durante el proceso de instrucción. Donde los materiales utilizados fueron los tradicionales como el libro de texto, escritura y cálculo manual en cuadernos y pizarra. Se consideró importante la descripción de los recursos didácticos (material manipulativo, libros y apuntes, tecnología y tiempo disponible) que se utilizaron o deberían utilizarse en la enseñanza de un contenido matemático; con la intención de que el profesor o futuro profesor de matemáticas reconozca los medios o materiales a utilizar para la enseñanza de cualesquier tema, y ser capaz de reconocer la presencia o ausencia de los mismos, durante el proceso de estudio propuesto, así como su adecuado uso o aplicación.

4.3.5. Faceta ecológica

Finalmente la faceta ecológica del CDM, que se vincula con el conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares (escuela y sociedad). El objetivo es verificar que los contenidos implementados se corresponden con las directrices curriculares propuestas; y que éstos contribuyan con la formación socio-profesional de los estudiantes; de modo que los mismos tengan relación con otros contenidos matemáticos y con otras disciplinas. Para ello, se identificaron los componentes: adaptación al currículo, apertura hacia la innovación didáctica, adaptación socio- profesional y cultural, educación en valores y conexiones intra e interdisciplinares.

4.3.5.1. Adaptación al currículo

Es importante recordar que se realizó una revisión de la propuesta curricular para el NMS de la UAGro, donde se describieron los contenidos matemáticos y los objetos matemáticos de la derivada presentes en la misma; realizando lo propio sobre dos libros de texto, ambas revisiones permitieron identificar los significados pretendidos del objeto matemático derivada.

Cabe mencionar que los significados implementados, se identificaron con base en los contenidos matemáticos que efectivamente implementó el profesor; observando que éstos se corresponden con las directrices curriculares, aunque no en su totalidad como se muestra en la tabla 19. Una de las razones declaradas por el profesor de no abordar la totalidad de tales contenidos, fue por las condiciones presentadas en la escuela (suspensiones inusuales de clases) y por las características de los estudiantes (presentan dificultades en la disciplina). En consecuencia, el tiempo no fue suficiente para implementar la totalidad de los contenidos propuestos.

Tabla 19

Contenidos del Plan y Programa de estudio

Contenidos establecidos en el Plan y programa de estudios de NMS de la UAGro	
Contenidos propuestos	Contenidos implementados en el aula
I. Función, razón de cambio y derivada.	I. Límites de funciones.
II. Derivación de funciones.	II. La derivada.
III. Comportamiento de una función.	III. Derivación de funciones.

En la tabla 20 se presentan; el significado global de referencia para la derivada, retomado de una investigación realizada previamente; los significados pretendidos en el bachillerato de la UAGro; y los significados efectivamente implementados por el profesor en el aula de clase sobre la misma noción. Con la intención de identificar el grado de aplicación de los significados efectivamente implementados, en la enseñanza con la derivada.

Tabla 20

Significados de la derivada

	La derivada	
Significado global de referencia	Significados pretendidos en el bachillerato	Significados implementados en el aula
CE1: Trazado de tangentes en la matemática griega. CE2: Problemas sobre la variación en la Edad Media. CE3: Cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra. CE4: Trazado de tangentes mediante consideraciones cinemáticas. CE5: Cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite. CE6: Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales. CE7: El cálculo de fluxiones.	**CE9: La derivada como límite**. - Razón de cambio promedio e instantánea. - Derivadas a partir de fórmulas de derivación. - Tangentes y normal. - Aplicaciones de la derivada (máximos, mínimos).	**CE9: La derivada como límite**. - La derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. - La derivada como razón de cambio instantánea (regla de los cuatro pasos). - Cálculo de derivadas a partir de fórmulas de derivación.

CE8: El cálculo de diferencias.
CE9: La derivada como límite.

Como bien se ha mencionado a lo largo de esta investigación, el significado que prevalece en el NMS, frente al significado global de referencia, es el tratamiento de la derivada como límite (CE9); por lo que era de esperarse que el profesor oriente la enseñanza hacia el mismo significado (la derivada como límite). Sin embargo, aunque los significados pretendidos e implementados apunten al mismo significado (CE9), las prácticas matemáticas que se desarrollaron fueron un tanto diferentes de las pretendidas, lo que conlleva a interpretar nuevos significados para el mismo objeto matemático, como se puede observar en la tabla 20. Para el NMS se identificaron cuatro formas de abordar o de tratar a la derivada, mientras que en la práctica del profesor se identificó tres formas de tratamiento para la misma noción; es decir, en la práctica se implementó menor contenido matemático de lo establecido en los documentos oficiales para el NMS.

4.3.5.2. Apertura hacia la innovación (creación) didáctica

En el Plan de Estudios por Competencias de EMS, se establecen las competencias disciplinares de Matemáticas; donde se determina que los estudiantes deben argumentar la solución de problemas, mediante métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, lenguajes verbal y matemático, así como el uso de las tecnologías de la información y la comunicación[39]. En cuanto a las competencias de los profesores, se mencionó que éstos deben organizar su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional, particularmente, mantenerse actualizado en el uso de la tecnología de la información y la comunicación[40].

Con base en la experiencia realizada y vivida durante esta investigación, se identificó que el profesor promovió la interpretación de los conceptos que presentó; formuló, y resolvió diferentes tipos de ejercicios matemáticos de manera algebraica y gráfica; y argumentó soluciones a través de explicaciones y en el desarrollo de procedimientos aritméticos,

[39] Universidad Autónoma de Guerrero (2010) Modelo curricular y plan de estudios por competencias de educación media superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. P. 85.
[40] RIEMS. Acuerdo 447 Consultado el 03 de junio de 2018 en http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/work/sites/riems/resources/LocalContent/165/1/acuerdo442.pdf.

algebraicos, gráficos y variacionales, utilizando los lenguajes verbal y matemático. Sin embargo, se limitó a la utilización de materiales como pintarrón y marcadores, de modo que implementó los contenidos matemáticos de forma tradicional; no se observó innovación durante la enseñanza, pues no se realizaron actividades donde se pudieran integrar a la totalidad de los estudiantes y no se integraron las nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) como se establece en el Plan y Programa de estudios.

4.3.5.3. Adaptación socio- profesional y cultural

Dado que el Plan y Programa de Estudios se sustenta bajo el enfoque por Competencias; enfatiza una educación integral para los estudiantes. Por ello, el área de conocimiento de Matemáticas y particularmente los contenidos propuestos en la Uap Matemáticas V, contribuyen a las competencias genéricas, es decir, los conocimientos, valores y actitudes (componentes de las competencias) permitirán a los estudiantes a lo largo de toda la vida a: aprender por sí mismos, a comunicarse con sus semejantes, cuidar a la naturaleza y a sí mismos, así como a colaborar solidariamente en actividades del medio social donde viven y asumir cabalmente sus obligaciones como ciudadanos, entre otras competencias[41]. Es por ello, que los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.

4.3.5.4. Educación en valores

Dado que los contenidos de la Uap Matemáticas V están planificados para desarrollar competencias y los componentes de éstas son los conceptos (saber), procedimientos (saber hacer) y las actitudes (saber convivir). Estos componentes se pudieron identificar en la presentación y enunciación de conceptos/definiciones respecto a la noción derivada; procedimentales con las explicaciones y el desarrollo de procedimientos gráficos y algebraicos (interpretación geométrica de la derivada y cálculo de la derivada de funciones); y actitudinal en la forma en cómo se desarrollaron las clases, respeto con las participaciones de los estudiantes-profesor y entre los estudiantes, se observa que éstos reconocen de forma crítica su desempeño personal durante la interpretación de problemas matemáticos, reconociendo sus limitaciones y fortalezas.

[41] Universidad Autónoma de Guerrero (2010) Modelo curricular y Plan de estudios por Competencias de Educación Media Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. P. 83.

4.3.5.5. Conexiones intra e interdisciplinares

Durante el desarrollo de las clases, se observó que los contenidos implementados por el profesor estuvieron relacionados con contenidos de otras unidades de aprendizaje, pero en la misma área de conocimiento (intra). Lo anterior cuando el profesor, estimuló a que los estudiantes recordaran conocimientos previos o conocimientos vistos en cursos anteriores, tales como: localizar puntos en el plano cartesiano, pendiente de una recta, ángulo de inclinación de una recta, razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, rectas en una circunferencia, cálculo de la pendiente de una recta conocidos dos de sus puntos (Matemáticas I, II, III y IV), aunque no relacionó a éstos con otras áreas de conocimiento; dado que los ejercicios presentados fueron descontextualizados, lo que no permitió relacionarlos con otras disciplinas ni con aspectos sociales (sociales, políticos y económicos). Por ejemplo en el Programa de estudio y los libros de texto, se proponen ejercicios para introducir a la derivada, como calcular velocidades instantáneas de móviles; incremento de una función (tasa de crecimiento poblacional, costos). Con lo cual, el profesor pudo relacionar a la derivada con el estudio de fenómenos físicos, económicos y químicos (interdisciplinares).

4.3.5.6. Discusión de la Faceta Ecológica

Con base en los componentes de la faceta ecológica, se verificó el grado de correspondencia entre los contenidos implementados con las directrices curriculares propuestas; así como las conexiones intra e interdisciplinares (escuela y sociedad). Identificando que el profesor implementó tres significados para la derivada de los cuatro propuestos, haciendo uso del menor contenido matemático establecido en el Programa de Estudio; limitándose además, a la implementación de los contenidos matemáticos de forma tradicional sin innovar, pudiendo integrar las nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.). Además, se observó que los contenidos implementados se relacionaban con contenidos de otras unidades de aprendizaje, pero en la misma área de conocimiento (intra), sin considerar otras áreas de conocimiento. Por lo que los ejercicios presentados fueron descontextualizados, es decir, solo se resolvieron en el contexto matemático, lo que no permitió relacionarlos con situaciones de la vida cotidiana.

Algunos autores como Martínez, Giné, Fernandez, Figueiras y Piquet (2011), han mencionado que realizar conexiones inter e intradisciplinares permite articular otros subdominios de conocimiento del profesor. Dando oportunidad a que el profesor desarrolle su propio dominio en la disciplina; pues la conexión constituye una exposición de los diferentes contenidos matemáticos y de los conocimientos pedagógicos de los mimos. En este sentido, un resultado del trabajo es que no se identificó en el profesor una articulación de sus conocimientos (conexión interdisciplinar), observando la ausencia de un conocimiento didáctico que le permitiera elegir las situaciones más idóneas para ejemplificar un objeto matemático (Gamboa y Figueiras, 2014). De acuerdo con García-García y Dolores (2017) las conexiones matemáticas, ayudan a establecer relaciones entre las matemáticas y otras asignaturas disciplinares o con situaciones de la vida real, para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Lo que fortalece nuestra postura, de dar a conocer a los profesores el conocimiento didáctico matemático, pues esto implicaría identificar qué se puede mejorar del conocimiento del contenido y del conocimiento pedagógico del mismo, para lograr un aprendizaje idóneo.

Capítulo 5

Síntesis de los resultados

Capítulo 5. Síntesis de los resultados

5.1. Introducción

En este último capítulo, se presenta una síntesis de los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta investigación. Como producto de la respuesta a la pregunta de investigación, planteada en la misma, tomando como base el objetivo general y los cuatro objetivos particulares propuestos. En ese sentido, se recapitula la intención de los objetivos particulares para relacionarlos con los resultados obtenidos; presentando la síntesis de la caracterización de las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del CDM. Es importante mencionar, que el presente trabajo contribuye al campo de la formación de profesores de matemáticas, considerando que existen diferentes cuestiones aún por responder, desde nuestro punto de vista. Las investigaciones de este campo, se enfocan en pro de la mejora de la calidad de los procesos de formación del profesorado. Por último, se presentan las limitaciones de la investigación, y se mencionan algunas cuestiones abiertas a desarrollar en la mencionada línea de investigación.

5.2. El logro de los objetivos particulares y su repercusión en la investigación

Como bien se ha mencionado en capítulos anteriores de este trabajo de investigación, una de las problemáticas que ha preocupado a la comunidad de investigadores e instituciones educativas encargadas de la formación inicial (y permanencia) de profesores de matemáticas, es la relacionada con identificar los conocimientos que éstos requieren para que su enseñanza sea de calidad, en relación con los aprendizajes de los estudiantes. Al respecto, se han realizado investigaciones cuya intención ha sido caracterizar el complejo de dichos conocimientos, lo que ha dado oportunidad de reportar algunos modelos con los que se intenta caracterizar los componentes que deberían integrar dicho conocimiento.

La pretensión de esta investigación, fue a partir de la observación conocer el CDM que implementa un profesor cuando aborda el tema de la derivada, tomando como base los desarrollos de Godino (2009); Godino *et al*. (2007); Font *et al*. (2013); Pino-Fan *et al*. (2015); Godino *et al*. (2016); Godino *et al*. (2017). Lo que permitió plantear la problemática y la justificación del trabajo, así como la pregunta de investigación:

¿Cuáles son los conocimientos de las facetas epistémicas, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático, que implementa un profesor del tema derivada?

La cual dio pie al objetivo general de:

Caracterizar las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático, que evidencia un profesor del tema derivada

Además se plantearon cuatro objetivos particulares que ayudaron al logro del objetivo general y a dar respuesta a la pregunta de investigación. Los cuales se describen a continuación.

5.2.1 Los significados pretendidos de la derivada en el NMS (OP1)

Como la intención fue explorar el conocimiento didáctico matemático que evidenció un profesor, al implementar el tema de la derivada; se hizo necesario estudiar los significados que se le atribuyen a dicha noción, identificando los propuestos en el NMS donde se aborda, en nuestro caso de la UAGro. Y contrastarlos con los significados que se tienen como referencia global del objeto matemático derivada presentado por Pino-Fan *et al* (2011), por ello, se propuso como primer objetivo particular:

Identificar los significados de la derivada pretendidos en el Plan y programa de estudio de la UAGro y de dos libros de texto del Nivel Medio Superior, para conocer el grado de aplicación de los significados de la derivada que se tienen como referencia.

Para el logro de este objetivo, se hizo un análisis del contenido matemático derivada del Programa de estudio y de dos libros de texto de bachillerato. Mediante la descripción sistemática de configuraciones epistémicas de objetos matemáticos, identificados en las distintas prácticas propuestas con el tema de la derivada. El resultado, permitió identificar cuatro significados parciales para la derivada (razones de cambio promedio e instantánea; derivadas a partir de fórmulas de derivación, tangentes y normales; y aplicaciones de la derivada), los cuales aluden a un mismo significado: la derivada como límite del cociente de incrementos. Correspondiente al significado de la derivada como límite, del significado global (de referencia) de la derivada (CE9).

5.2.2 Los significados de la derivada efectivamente implementados (OP2)

El segundo objetivo fue de vital importancia, dado que interesó identificar el CDM que implementó un profesor del tema derivada; y una de las componentes del modelo refiere al estudio de los significados (institucionales) que se abordan en el aula de clases del tema de la derivada (faceta epistémica). De ahí la importancia de conocer los significados atribuidos al tema de interés y con ello, contrastarlos con los propuestos en el NMS:

> *Identificar los significados de la derivada que efectivamente implementa un profesor en el aula de clases, para conocer el grado de aplicación de los significados pretendidos.*

Para el logro de este objetivo, se describieron de manera sistemática configuraciones de objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas que desarrolló el profesor, al implementar el contenido matemático de la derivada. Con ello, se identificaron tres configuraciones epistémicas que dieron lugar a tres significados parciales para el objeto derivada, los cuales también apuntaron al tratamiento de la derivada como el límite del cociente de incrementos. Estos fueron: la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto, la derivada como el límite del cociente incremental (método de los cuatro pasos y el cálculo de derivadas a partir de fórmulas de derivación).

5.2.3 Los significados de la derivada con base en el currículo de bachillerato y los significados implementados (OP3)

El tercer objetivo particular, permitió conocer el grado de aplicación de los significados pretendidos (Programa de estudio-dos libros de texto) con el tema derivada, con los significados efectivamente implementados por el profesor en el aula de clases.

> *Describir los significados de la derivada con base en el currículo de NMS y los significados efectivamente implementados en el aula de clase*

Contrastando dichos significados de la derivada. Se conoció el alcance de los significados y contenidos implementados, respecto de los significados y contenidos propuestos en currículo de la UAGro.

Donde se pudo identificar que las prácticas, objetos matemáticos y con ello, los significados que implementó el profesor son limitados de las prácticas, objetos matemáticos y los significados matemáticos que se tienen propuestos tanto en el programa de estudio como en los dos libros de texto que se revisaron para dicho nivel. Como se puede ver en las tablas 21 y 22.

5.2.3. Gestión del conocimiento en el aula (OP4)

Este objetivo, dio cuenta de cómo se implementaron las clases, es decir, como se gestionó la enseñanza con la derivada, la interacción que generó el profesor (estudiantes-profesor, estudiantes-estudiantes) y los recursos o materiales usados por él mismo.

> *Describir cómo se gestiona el conocimiento en el aula de clases, cuando el profesor aborda el tema de la derivada.*

Para conseguir este objetivo, se analizó la comunicación sucedida en el aula de clases; se descompusieron las configuraciones epistémicas en unidades de análisis (trayectoria epistémica); asimismo se describieron las actividades (trayectoria docente) que realizó el profesor en cada configuración epistémica. La relación de ambas trayectorias (epistémica, docente) permitió identificar el tipo de interacción dada en el aula de clases.

5.3 Caracterización de las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica

Para conocer la actividad matemática implementada, se procedió a caracterizar las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático del contenido matemático de la derivada.

Con la realización de OP2, se caracterizó la faceta epistémica, equivalente a identificar los significados que el profesor le atribuyó a la derivada a partir de las prácticas, objetos y procesos matemáticos que efectivamente implementó (Tabla 21).

Tabla 21
Conocimiento de la faceta epistémica

Faceta epistémica	
Reconocimiento de sistemas de prácticas, objetos y procesos en cada significado. Identificación de prácticas matemáticas. Identificación de objetos matemáticos primarios.	Significados institucionales (profesor) de la derivada 1. La derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

	2. La derivada como el límite del cociente incremental (método de los cuatro pasos). 3. Cálculo de derivadas a partir de fórmulas de derivación.
Procesos matemáticos: comunicación, definición, enunciación, problematización y argumentación.	

Con la realización de los objetivos OP1 y OP2, se caracterizó la faceta ecológica del CDM, vinculado con el conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares, como se presenta en la tabla 22.

Tabla 22
Conocimiento de la faceta ecológica

Faceta ecológica		
Componentes de la faceta	*Propuestos en el currículo de NMS*	*Implementados en el aula*
	CE9: La derivada como límite.	
Adaptación al currículo.	-Razón de cambio promedio e instantánea. -Derivadas a partir de fórmulas de derivación. -Tangentes y normal. -Aplicaciones de la derivada (máximos, mínimos).	-La derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. -La derivada como razón de cambio instantánea (regla de los cuatro pasos). -Cálculo de derivadas a partir de fórmulas de derivación.
	Contenidos propuestos en el Plan y programa de estudios de NMS de la UAGro	
	Contenidos propuestos	Contenidos implementados
	I. Función, razón de cambio y derivada. II. Derivación de funciones. III. Comportamiento de una función.	I. Límites de funciones. II. La derivada. III. Derivación de funciones.
Componentes de la faceta	*Propuestos en el Plan y Programa de estudios*	*Implementados*
Apertura hacia la innovación didáctica.	Se establecen las competencias disciplinares de Matemáticas; donde se determina que los estudiantes deben argumentar la solución de problemas, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático, así y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	El profesor promovió la interpretación de los conceptos que presentó; formuló, y resolvió diferentes tipos de problemas matemáticos de manera algebraica y gráfica; y argumentó las soluciones a través de explicaciones y desarrollo de procedimientos aritméticos, algebraicos, gráficos y variacionales, utilizando el lenguaje verbal y matemático.

	Las competencias docentes resaltan que éstos deben organizar su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional, particularmente, mantenerse actualizado en el uso de la tecnología.	Sin embargo, se limitó a la utilización del pintarrón; no se observó innovación durante la enseñanza, pues no se diseñaron actividades para involucrar a todos los estudiantes y no se integraron las nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.).
Componentes de la faceta	*Propuestos en el Plan y Programa de estudios e implementados*	
Adaptación socio-profesional y cultural.	Dado que el Plan y programa de Estudios se sustenta bajo el enfoque por Competencias; enfatiza una educación integral para los estudiantes. Por ello, los contenidos que establece la U.Ap Matemáticas V, contribuyeron con las competencias genéricas y a la formación socio-profesional de los estudiantes, es decir, los conocimientos, valores y actitudes permitirán a los estudiantes a: aprender por sí mismos, a comunicarse con sus semejantes, así como a colaborar solidariamente en actividades del medio social donde viven y asumir cabalmente sus obligaciones como ciudadanos, entre otras competencias.	
Conexiones intra e interdisciplinares.	Los contenidos implementados, se relacionaron con contenidos de otras unidades de aprendizaje pero en la misma área de conocimiento (Matemáticas I, II, III y IV) (intra) sin relacionar a éstos con otras áreas de conocimiento; dado que los ejercicios presentados fueron descontextualizados, lo que no permitió relacionarlos con otras disciplinas ni con aspectos sociales (sociales, políticos y económicos). Por ejemplo en el programa de estudio y los libros de texto, se proponen ejercicios introductorios para la derivada, como calcular velocidades instantáneas de móviles; incremento de una función (tasa de crecimiento poblacional, costos). Donde el profesor pudo relacionar a la derivada con fenómenos físicos, económicos y químicos.	

Y finalmente con el logro de OP4 se caracterizó la faceta interaccional del CDM, que refiere al diálogo, interacción y comunicación que sucedió en el aula de clase (Tabla 23); asimismo con la realización del cuarto objetivo, se dio cuenta de la faceta mediacional, que refiere los recursos o materiales que fueron usados por el profesor (Tabla 24).

Tabla 23
Conocimiento de la faceta interaccional

Faceta interaccional					
CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teórica

CE1	1	Conceptual	1	Regulación	Dialógica/ Magistral	Magistral Adidáctica Personal Dialógica
	2	Lingüístico	2	Regulación		
	3	Proposicional	3	Regulación		
	4	Conceptual	4	Regulación		
	5	Lingüístico	5	Regulación		
	6	Conceptual	6	Regulación		
	7	Lingüístico	7	Regulación		
	8	Conceptual	8	Regulación		
	9	Lingüístico	9	Motivación		
	10	Conceptual	10	Evaluación		
	11	Actuativo	11	Regulación		
	12	Argumentativo	12	Regulación		
	13	Conceptual	13	Regulación		
	14	Argumentativo	14	Evaluación		
	15	Conceptual	15	Motivación		
			16	Regulación		
			17	Regulación		
			18	Regulación		
			19	Asignación		
CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teórica	
CE2	16	Conceptual	20	Regulación	Magistral	Magistral Adidáctica Personal Dialógica
	17	Lingüístico	21	Regulación		
	18	Actuativo	22	Regulación		
	19	Lingüístico	23	Regulación		
	20	Proposicional	24	Regulación		
	21	Argumentativo	25	Regulación		
	22	Situacional	26	Regulación		
	23	Proposicional	27	Evaluación		
	24	Argumentativo	28	Asignación		
	25	Actuativo	29	Evaluación		
	26	Proposicional	30	Asignación		
	27	Argumentativo	31	Regulación		
			32	Regulación		
			33	Regulación		
			34	Regulación		
CE	Trayectoria Epistémica Unidad Epistémica	Estado Potencial	Trayectoria Docente Unidad Docente	Estado Potencial	Configuración Teóricas	
CE3	28	Proposicional	35	Planificación	Magistral	Magistral Adidáctica Personal Dialógica
	29	Lingüístico	36	Motivación		
	30	Actuativo	37	Regulación		
	31	Argumentativo	38	Regulación		
	32	Actuativo	39	Regulación		
	33	Argumentativo	40	Regulación		
	34	Actuativo	41	Regulación		
	35	Proposicional	42	Regulación		
	36	Argumentativo	43	Evaluación		
	37	Actuativo	44	Regulación		
	38	Proposicional	45	Regulación		
	39	Argumentativo	46	Regulación		
	40	Actuativo	47	Regulación		

41	Proposicional	48	Regulación
42	Argumentativo	49	Regulación
43	Situacional	50	Evaluación
44	Proposicional	51	Regulación
45	Argumentativo	52	Regulación
46	Actuativo	53	Regulación
47	Proposicional	54	Evauación
48	Argumentativo	55	Regulación
49	Situacional	56	Regulación
50	Proposicional	57	Asignación
51	Argumentativo	58	Regulación
52	Actuativo	59	Asignación
53	Argumentativo	60	Regulación
		61	Evaluación
		62	Regulación
		63	Regulación
		64	Regulación
		65	Asignación
		66	Regulación
		67	Asignación
		68	Regulación
		69	Regulación
		70	Regulación

Tabla 24
Conocimiento de la faceta mediacional

Faceta mediacional	
Componentes de la faceta	*Componentes implementados*
Recursos o materiales didácticos temporales para la enseñanza de la derivada.	Los materiales que usó el profesor, fueron: el pintarrón, marcadores para representar los objetos matemáticos (elementos lingüísticos, situaciones/problemas, conceptos, proposiciones y argumentos). Cabe resaltar que las situaciones/problemas no fueron contextualizadas en ningún momento, mientras que para los objetos matemáticos que intervinieron en las prácticas se recurrió a la visualización mediante el uso del plano cartesiano.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula.	El grupo estuvo conformado por 35 estudiantes y el profesor; la cantidad de estudiantes pudo ser un factor de que no se lograra involucrar en las actividades a la totalidad de ellos; y menos aún, de que el profesor tuviera una atención personalizada. La implementación de cada una de las clases se llevaron a cabo bajo un horario asignado por la escuela, en el cual se programaron cuatro sesiones semanales acordes con lo indicado en el Plan y programa de estudio; el horario fue apropiado, pues las sesiones estuvieron programadas entre las 8:00hrs y las 11:00hrs. El proceso de instrucción tuvo lugar en el aula de clase, se contó con suficientes butacas móviles para los estudiantes. Sólo se disponía de un pintarrón y para

	proyectar información, el profesor mencionó que se tenía que solicitar un proyector previamente con la dirección escolar.
Componentes de la faceta	*Componentes implementados*
Tiempo didáctico.	El Plan y Programa de estudio establecen cuatro horas semanales, es decir, 240 minutos. La duración que el profesor dedicó a las actividades de la enseñanza fue de cuatro sesiones de 50 minutos. Y la distribución del tiempo; el profesor dedicó el tiempo suficiente para las explicaciones del contenido matemático; sin embargo, priorizó a ejemplificar y resolver ejercicios, haciendo que el tratamiento de la derivada se redujera al desarrollo de cálculos y procedimientos meramente aritméticos, más que propiciar o desarrollar el análisis en los estudiantes. No se dedicó tiempo para tratar todas las actividades propuestas en el Plan y Programa de estudio, tales como: búsqueda de la información por parte de los estudiantes, trabajar en equipo, exposición de contenidos, desarrollos y resultados. Tampoco se dedicó tiempo para la retroalimentación de los aprendizajes adquiridos, y no se puso atención a las dificultades que pudieron presentar los estudiantes, situación que se recalcan en el programa de estudios.

5.4. Reflexiones finales

Con el logro de los cuatro objetivos particulares se pudo asegurar el cumplimiento del objetivo general, pues en conjunto permitieron caracterizar las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del Conocimiento Didáctico Matemático; y con ello se respondió a la pregunta de investigación.

La caracterización de algunas facetas del CDM, permitió identificar y saber parte del conocimiento especializado del profesor. Con lo cual se puede resumir en lo siguiente:

El profesor presentó la interpretación geométrica de la derivada, haciendo uso de gráficos y procedimientos algebraicos, prevaleciendo el significado de la derivada como el límite del cociente de incrementos; enunció otros conceptos que contribuyeron con la misma interpretación: pendiente, ángulo de inclinación, tangente de un ángulo, triángulo rectángulo, rectas en la circunferencia. La presentación fue clara, enfatizó conceptos clave del tema y en ocasiones se favoreció el diálogo entre los estudiantes, propiciando la participación de éstos durante la construcción del concepto y en la resolución de ejercicios.

También se observó, que el profesor dedicó la mayor parte del tiempo de enseñanza a la realización de ejercicios, enfocándose a que los estudiantes se apropiaran del concepto derivada como la aplicación de las fórmulas de derivación. Lo anterior, fue un factor de que no se abordaran la totalidad de los contenidos establecidos; se usaron materiales tradicionales como el pintarrón, marcadores y un formulario para derivar funciones; presentando la totalidad de los ejercicios descontextualizados, no dando opción de visualizar los contenidos y relacionarlos con otras áreas de conocimiento. Por lo cual, el aprendizaje de los estudiantes pudo ser limitado, debido a la dinámica empleada (presentación magistral), al enfocarse en la realización de algoritmos y al mismo tiempo, se evidenció una desconexión de los significados parciales de la derivada implementados por el profesor.

La información obtenida de la investigación, se considera importante para los profesores o los futuros profesores; pues como se pudo observar, primeramente la comparación de los significados globales, pretendidos y efectivamente implementados de la derivada, permitió conocer que éstos últimos están un tanto limitados en relación con los que se tienen como pretendidos, así como la dinámica en que se llevaron a cabo las clases, los materiales, las condiciones del aula, también se identificaron limitados, todo ello en relación con lo establecido por el Plan y Programa de estudio de la UAGro. Es importante mencionar que uno de los factores que pudo influenciar en lo sucedido, es que en un cuestionario (información general) que se le aplicó al profesor se evidenció un total desconocimiento del Plan de estudios por competencias 2010 por parte del mismo (Anexos).

El conocer esta información resultó importante, porque comunicar lo que ocurrió en el aula de clases, podría ayudar a los profesores que trabajan con la derivada, a reflexionar sobre la propia práctica al abordar cualesquier tópico. Con la intención de que ellos mismos identifiquen, lo que haría falta por completar en su enseñanza o sugerir acciones de mejora si así se considera necesario.

5.5 Limitaciones, aportaciones y cuestiones abiertas para investigar

A continuación se presentan algunas limitaciones, aportaciones y cuestiones abiertas a desarrollar.

Limitaciones

Dado que la presente investigación, se desarrolló con base en la observación de las sesiones de clase impartidas por un profesor del tema de la derivada, se permitió identificar parte del Conocimiento Didáctico Matemático; sin embargo la limitación es que la mera observación no fue suficiente para analizar las demás facetas del CDM. Específicamente, no se lograron estudiar las facetas cognitiva; referida a los significados personales del profesor sobre el contenido matemático de la derivada, es decir, la comprensión del profesor de los objetos matemáticos implicados en el tema, aunque pudieran estar relacionados con los significados implementados, pero según la literatura no necesariamente. Y afectiva, referida al estudio de conocimientos sobre aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias del profesor relacionadas con el tema de la derivada.

Aportaciones

La identificación de los significados pretendidos de la derivada en el Nivel Medio Superior de la UAGro. Para ello, se realizaron configuraciones epistémicas con base en los sistemas de prácticas declarados en los documentos curriculares, que permitieron identificar los significados parciales, apuntando a la derivada como límite del cociente de incrementos frente al significado global de la derivada (presentado en el capítulo 3). El hecho de conocer los significados pretendidos de la derivada, fue importante para saber el grado de aplicación que sucede en el aula de clases.

Desarrollo de una metodología que permitió la exploración y caracterización de las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del CDM, de un profesor cuando enseñó la derivada. Tomando como referencia consideraciones teóricas y metodológicas del marco de referencia (EOS), y aportes de la literatura sobre didáctica del Cálculo; dicha metodología, permitió caracterizar el conocimiento de un profesor (evidenciado durante la clase) mediante la observación. Al mismo tiempo, con la identificación de las configuraciones epistémicas del conocimiento didáctico matemático, dieron oportunidad de estudiar la pertinencia de éstas en la enseñanza de la derivada. Dado que con la identificación de dichas configuraciones, los significados y los procesos involucrados, durante la implementación de una clase, podrían ayudar al profesor a mejorar su práctica docente, buscando completar los elementos de una configuración epistémica. Con la intención de sugerir acciones de mejora al enseñar la derivada.

Cuestiones abiertas para investigar

A pesar de los resultados relacionados con la descripción de las facetas epistémica, interaccional, mediacional y ecológica del CDM del tema de la derivada que evidenció un profesor. Estos componentes se caracterizaron mediante la observación; pues se pensó al profesor como la parte institucional, los significados atribuidos a la derivada se consideraron como institucionales, es decir, aceptados o acordados por las personas involucradas en el aula (estudiantes y profesor) con base a los tipos de significados que enuncia el EOS. Aún quedan cuestiones abiertas que dan pie a posteriores investigaciones que podrían ser la continuidad de éste estudio.

Por ejemplo: caracterizar todas las facetas de CDM, es decir, la descripción y caracterización de las facetas cognitiva y afectiva. Esto mediante el diseño de actividades sobre la derivada, que podrían evidenciar los significados personales que muestra el profesor; así como test sobre las actitudes, afectos y motivaciones que reporta el profesor al inicio, durante y al finalizar cada una de las clases con el tema de la derivada.

Otra cuestión que puede ser considerada como una oportunidad de investigación, es aumentar la población de estudio, es decir, identificar y caracterizar el CDM de la derivada que implementan dos o más profesores en el aula de clases, para mostrar similitudes y diferencias en sus formas de enseñar dicho objeto matemático.

Realización de diseños didácticos para potenciar el conocimiento especializado del profesor (considerar los 9 significados de la derivada), y retomar las configuraciones epistémicas pretendidas para el NMS, resultado de esta investigación. Pues se muestra la necesidad, por parte de este profesor, de un mayor dominio sobre dicho conocimiento; ya que el profesor debe ser capaz de movilizar y relacionar los significados de la derivada; así como resolver situaciones problema usando distintos procedimientos, mostrando diversas justificaciones y explicaciones y adaptarlos con los conocimientos de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Araya, R., y Dartnell, P. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media. *Chile, Ministerio de Educación (Ed.), Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación*, 157-198.

Arteaga, P., Batanero, C., y Gea, M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de sobre Estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educação Matemática Debate, Montes Claros.*, 1(1), 54-75.

Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at postsecondary level. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 1011-1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f´(a)* y *f´(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V., y Martínez, M. (2013). Visualización Gráfica y Análisis Comparativo de la Práctica Matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 207-225.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Banfi, I. (2015). De la derivada al límite. *Una propuesta didáctica en la enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio*. (Trabajo final integrador). Universidad Nacional de Quilmes, Bernal, Argentina. Disponible en RIDAA Repositorio Institucional de Acceso Abierto http://ridaa.unq.edu.ar/handle/20.500.11807/145

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA*, 13(6), 1893-1918.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in mathematics (Didactique des mathematiques, 1970-1990). (N. Balacheff & M. Cooper & R. Sutherland & V. Warfield, Trans.).

Contreras de la Fuente, Á., García, M., y Font, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42 B).

Gordillo, W. F. C., Arango, G. C., y Fan, L. R. P. (2015, March). Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas. *In XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.*

Celaya Ramírez, R., Lozano Martínez, F., y Ramírez Montoya, M. S. (2010). Apropiación tecnológica en profesores que incorporan recursos educativos abiertos en educación media superior. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(45), 487-513.

Cuevas, B. y Bermúdez, R. (2016.). *Cálculo diferencial Bajo el enfoque por competencias en estricto apego a la RIEMS* México: GAFRA.

Dolores Flores, C., García González, M. D. R., Hernández Sánchez, J. A., y Sosa Guerrero, L. (2014). Matemática Educativa: La formación de profesores. Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C., y García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57), 158-180.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa,* 8(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Gamboa, G. de, Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVIII (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, 12(01), 70-92.

Godino, J. (2002). Un enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284.

Godino, J. D., Contreras, Á., y Font, V. (2006). Análisis de Procesos de Instrucción basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (20), 13-31.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 247-265.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 08(1), 46-74.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Disponible en, http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf.

Godino, J., Batanero, C., Font, V., y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. *Investigación en Educación Matemática*, 288-297.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro* (SP), 31(57), 90-113.

Gordillo, I., Movilla, F. M., y Parra, H. (2015). Conocimiento didáctico del contenido en profesores de educación superior. Una mirada desde la virtualización de los objetos matemáticos. *RECME*, 1(1), 380-385.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

Grugeon-Allys, B., Godino, J. D. & Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. En A. Kuzniak, B. R. Hodgson and J-B. Lagrange (Eds.). *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57- 86). Berlin: Springer.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). Metodología de la Investigación. *Ciudad de México: Mc Graw Hill.*

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Descargado el 3 de octubre de 2017, http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Ibáñez, P. y García, G. (2007). *Matemáticas V Cálculo Diferencial*. Puebla, México: CENGAGE Learning.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Mares, G., Guevara, Y., Rueda, E., y Rivas, O. (2004). Análisis de las interacciones maestra-alumnos durante la enseñanza de las ciencias naturales en primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 9(22), 721-745.

Mateus, E. (2016). Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 30(55), 559-585.

Martínez, M., Giné, C. G., Fernández, S., Figueiras, L., y Piquet, J. D. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. In *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438).

Navarro, L. P. (2007). *Autoeficacia del profesor universitario: eficacia percibida y práctica docente* (Vol. 15). Narcea Ediciones.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada.* Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J., y Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. *Educ. Matem. Pesq., São Paulo*., 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis doctoral, Granada, España.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513 - 522). Salamanca: SEIEM.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Castro Gordillo, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers´ Didactic-Mathematical knowledge.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J., y Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. *Bolema, Río Claro (SP)*, 29(51), 60-89.

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. In *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Granada.

Pinto Sosa, J. E., y González Astudillo, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿Una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, 20(3), 83-100.

Pochulu, M., y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 361-394.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.

Preiss, D., Valenzuela, S., y Larraín, A. (2011). Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena. *Psykhe*, 20(2), 131-146.

Radovic, D., y Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico en Chile. *Psykhe (Santiago)*, 19(2), 65-79.

Ramos, A., y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *Las Matemáticas y su Enseñanza*, 20(4), 535-556.

RIEMS. La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. Consultado el 23 de agosto de 2017 en http://www.ofmx.com.mx/documentos/pdf/RIEMS_Creacion_Sistema_Nacional_de_Bachillerato.pdf.

RIEMS. Acuerdo 447 Consultado el 23 de agosto de 2017 en http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_447_competencias_docentes_EMS.pdf.

Robles, M., Del Castillo, A., y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 35-71.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

SEP. Competencias Disciplinares Básicas del Sistema Nacional de Bachillerato. Consultado el 23 de agosto de 2017 en http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf.

SEP. Competencias que expresan el perfil del docente de la educación media superior. Consultado el 4 de agosto de 2016 en http://www.ofmx.com.mx/documentos/pdf/Competencias_que_expresan_el_Perfil_Docente.pdf.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9(2).

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Sullivan, P. & Wood, Terry (Eds.) (2008). The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.

Universidad Autónoma de Guerrero (2010) Modelo curricular y Plan de estudios por Competencias de Educación Media Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Universidad Autónoma de Guerrero (2010) Plan de estudios por Competencias. Matemáticas V.

ANEXOS

UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Facultad de Matemáticas
Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa

CUESTIONARIO PARA EL PROFESOR

Nacionalidad:	MEXICANA
Lugar de nacimiento:	MEXCALA, GRO.
Lugar de residencia:	CHILPANCINGO, GRO.
Sexo:	HOMBRE
Edad:	59 AÑOS

DATOS LABORALES	
¿Cuál es la especialización que tiene usted?	MATEMÁTICAS
¿Qué estudios ha realizado?	NORMAL BÁSICA, NORMAL SUPERIOR LICENCIATURA EN EDUCACIÓN, LIC. MAT. EDUCATIVA
¿De qué instituciones ha egresado?	AYOTZINAPA, UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL, NORMAL SUPERIOR UAG, FACULTAD DE MATEMATICAS UAG
Escuela(s) donde labora o ha laborado (especifique el nivel educativo)	NIVEL PRIMARIA BACHILLERATO PREPARATORIA 1 UAG
¿Qué materias ha dado a los largo de su actividad como maestro?	MATEMATICAS I, II, III, IV, V, VI, INGLES I, II, III, IV ESTADISTICA, FISICA I, II, III, IV, SEMINARIO ACADEMICO
¿Cuánto tiempo ha trabajado como maestro de matemáticas?	30 AÑOS
¿Cuenta con alguna especialidad en la didáctica?	NORMAL SUPERIOR Y MATEMATICA EDUCATIVA
¿Qué grados y materias atiende en la escuela o las escuelas que labora actualmente?	MATEMATICAS II, III, V, VI PRIMERO, SEGUNDO Y TERCER GRADO
¿Elabora un plan de clase al iniciar su semestre?	SE INFORMA A LOS ALUMNOS ACERCA DEL PROGRAMA A DESARROLLAR ASI COMO LOS ELEMENTOS PARA LA EVALUACION: EXÁMENES, TAREAS [illegible]
Conoce el plan de estudios	NO MUCHO, SE CUBRE EL TEMARIO DEL SEMESTRE CORRESPONDIENTE