



Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Modelación del rendimiento escolar de los estudiantes
mexicanos en PISA 2015 mediante ecuaciones
estructurales**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Dannier Rafael Milanes Cabrera

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Flaviano Godínez Jaime

Dra. María Guzmán Martínez

Enero del 2019

Dedicatoria

A:

Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Mi Comandante en Jefe Fidel Castro Ruz por haber dedicado toda su vida a luchar por el bien de la humanidad y por su preocupación en crear hombres de ciencia.

A mi hija Melody María Milanés Hechavarría por tu afecto y tu cariño son los detonantes de mi felicidad, de mi esfuerzo, de mis ganas de buscar lo mejor para ti. Aun a tu corta edad, me has enseñado y me sigues enseñando muchas cosas de esta vida.

Mi madre Idelaida Cabrera Pacheco, por darme la vida, quererme mucho, creer en mi y porque siempre me apoyaste. Mamá gracias por darme una carrera para mi futuro, todo esto te lo debo a ti.

Mi hermana, Dailén Cabrera Cabrera por estar conmigo y apoyarme siempre, te quiero mucho mi hermanita.

Agradecimientos

Mi asesor Flaviano Godínez Jaime pues durante la realización de este proyecto, usted ha sido mi mano derecha y quien me ha guiado en el complicado proceso. Es cierto, no ha sido nada fácil, ni mucho menos, sin embargo gracias a su ayuda, esto ha parecido un tanto menos complicado. El resultado de mi tesis ha sido mejor de lo que esperaba y una gran parte del desarrollo de ese trabajo se lo debo a usted. Que Dios lo bendiga.

Mi asesora María Guzmán Martínez por su paciencia y dedicación para este trabajo, pues supo dedicarme parte de su tiempo para que lograra un buen proyecto, además con su exigencia logró fomentar en mi muchas habilidades de las que carecía.

Mi novia Safira Amigai Pech Chi por compartir parte de sus conocimientos sobre aspectos metodológicos e investigación educativa. Con su paciencia logró que aterrizará muchas de mis ideas a la hora de redactar este documento.

A mis compañeros de la maestría por haber sido durante todo este tiempo como una familia para mi, en especial a Laima Imbert Rodríguez, Alexey Figueroa Ferrer y Edgar Alejandro Antonio Martínez.

A Elizabeth Solís Alonso pues fue quien llevó todo el proceso de mi selección y documentación para que yo ingresara a la maestría.

Mis maestros quienes nunca desistieron al enseñarme, aun sin importar que muchas veces no ponía atención en clase, a ellos que depositaron sus esperanzas en mí.

A todos los que de una forma u otra me apoyaron en este proceso muchas gracias desde lo más profundo de mi corazón.

Resumen

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo de ecuaciones estructurales para explicar los factores que influyen en el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos de edad comprendida entre 15 y 16 años, participantes en la prueba PISA 2015. Se definió el modelo de medida y estructural, y se utilizó estadística clásica y bayesiana para estimar los efectos entre los factores y los efectos de los factores en las variables observadas. Los resultados muestran que el conocimiento, el dominio afectivo, las habilidades que tenga en el uso de las tecnologías y las diferencias en la extracción socioeconómica de los estudiantes, además, la influencia de la familia y del maestro sobre el estudiante, son los factores que influyen en el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos participantes en PISA 2015, donde el que determina mayor rendimiento es el factor conformado por las variables que describen el conocimiento del alumno.

Palabras clave: análisis factorial confirmatorio, cadenas de Markov Monte Carlo, distribución a priori.

Summary

The objective of this paper is to propose a structural equation model to explain the factors that influence the school performance of Mexican students aged within 15 and 16 years, participants in the PISA test, 2015. The measurement and structural model was defined and classical and Bayesian statistics were used to estimate the effects between the factors and the effects of the factors in the observed variables. The results show that the knowledge, the affective domain, the abilities that have in the use of the technologies and the differences in the socioeconomic extraction of the students, in addition, the influence of the family and the teacher on the student, are the factors that they influence in the scholastic yield of the Mexican students participants in PISA 2015, where the which determinate greater performance is the factor conformed by the variables that describe the knowledge of the student.

Keywords: Confirmatory factorial analysis, Markov Monte Carlo chains, a priori distribution

Índice general

| | |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Antecedentes | 5 |
| 3. Fundamentación teórica | 11 |
| 3.1. Rendimiento escolar | 11 |
| 3.2. Fundamentación estadística | 12 |
| 3.2.1. Regresión múltiple multivariada | 12 |
| 3.2.2. Análisis factorial | 14 |
| 3.2.3. Modelo de ecuaciones estructurales (MEE) | 29 |
| 3.2.4. Estimación de los parámetros de un MEE | 36 |
| 3.2.5. Modelos de ecuaciones estructurales bayesianos (MEEB) | 38 |
| 4. Metodología | 45 |
| 4.1. Población y muestra | 45 |
| 4.2. Base de datos | 45 |
| 4.3. Métodos para la selección de variables y obtención del MEE | 48 |
| 4.3.1. Modelo de regresión múltiple multivariado | 48 |
| 4.3.2. Análisis factorial exploratorio | 49 |
| 4.3.3. Análisis factorial confirmatorio | 49 |
| 4.3.4. Estimación del modelo | 50 |
| 4.3.5. Estimación clásica | 50 |
| 4.3.6. Estimación bayesiana | 50 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5. Resultados | 51 |
| 5.1. Selección de variables y construcción del modelo | 51 |
| 5.1.1. Análisis factorial exploratorio | 52 |
| 5.1.2. Análisis factorial confirmatorio | 57 |
| 5.2. MEE obtenido para estudiar el rendimiento escolar en PISA 2015 | 58 |
| 5.2.1. Estimación del modelo estadístico planteado | 60 |
| 5.3. MEE 3 para estudiar el rendimiento escolar en PISA 2015 | 65 |
| 5.3.1. Estimación del MEE 3 propuesto | 67 |
| 6. Conclusiones | 71 |
| 6.1. Discusión | 71 |
| 6.2. Conclusiones | 72 |
| Referencias | 74 |
| Anexos | 78 |

Índice de figuras

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Variable exógena (V_3) y endógenas (V_1, V_2). | 30 |
| 3.2. Elementos de la representación visual de un MEE. | 32 |
| 3.3. Relaciones directa entre variables. | 32 |
| 3.4. Relaciones espuria entre variables. | 32 |
| 3.5. Relaciones indirecta entre variables. | 33 |
| 3.6. Relaciones conjunta entre variables. | 33 |
| 3.7. Ilustración de un modelo de medida de dos factores. | 33 |
| 3.8. MEE con tres factores. | 36 |
| 3.9. Efecto total de un factor en otro factor en un MEE. | 38 |
| 3.10. Efecto total de un factor en otro factor en un MEEB. | 42 |
| | |
| 5.1. Gráfica de sedimentación. | 53 |
| 5.2. Diagrama estructural con 7 variables latentes y 31 variables observadas . . . | 59 |
| 5.3. Resultados de la estimación clásica vía MV. | 60 |
| 5.4. Gráfica de convergencia de cada una de las cadenas de MCMC para $\lambda_{9,1}$. . . | 63 |
| 5.5. Resultados de la estimación del MEE bajo el enfoque bayesiano. | 63 |
| 5.6. Diagrama estructural con 7 variables latentes y 31 variables observadas. . . . | 66 |
| 5.7. Efecto directo e indirecto en el rendimiento escolar. | 67 |
| 5.8. Efecto total de cada una de los factores en el rendimiento escolar. | 68 |
| 5.9. Gráfica de convergencia de cada una de las cadenas de MCMC para $\lambda_{9,1}$. . . | 69 |
| 5.10. Diagrama de los resultados de la ecuación estructural del Modelo 3. | 69 |
| 5.11. Efecto total de cada una de los factores en el rendimiento escolar. | 70 |

Índice de Cuadros

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Resultados en el rendimiento académico para México de acuerdo a PISA. | 3 |
| 3.1. Clasificación del KMO según su valor. | 17 |
| 3.2. Adecuación del tamaño muestral para realizar AFE. | 18 |
| 3.3. Clasificación del $\alpha - Cronbach$ (Corral de Franco, 2009). | 22 |
| 3.4. Clasificación del índice RMSEA (Lévy y Varela, 2006). | 28 |
| 3.5. Clasificación del índice TLI (Montaño, 2014). | 28 |
| 3.6. Clasificación del índice CFI. | 29 |
| 4.1. Variables utilizadas de la base de datos PISA 2015. | 45 |
| 4.2. Valores descriptivos de las variables sin estandarizar. | 47 |
| 5.1. Variables eliminadas en la regresión. | 51 |
| 5.2. Variables con comunalidad menor que 0.3 en el ACP. | 53 |
| 5.3. Resultado de la agrupación de las variables observadas por CP. | 53 |
| 5.4. Agrupación de las variables observadas de acuerdo a su descripción. | 54 |
| 5.5. Definición de los factores de acuerdo a la descripción de las variables observadas que lo conforman. | 54 |
| 5.6. Fiabilidad de escala $\alpha - Cronbach$ por factores. | 55 |
| 5.7. Variables que incrementan el $\alpha - Cronbach$ si son eliminadas. | 55 |
| 5.8. Fiabilidad de escala $\alpha - Cronbach$ por factores luego de la eliminación de variables. | 56 |
| 5.9. Variables que conforman cada uno de los modelos obtenidos. | 56 |
| 5.10. Bondad de ajuste del AFC para cada uno de los modelos obtenidos | 57 |
| 5.11. Resultado de la selección de variables. | 57 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.12. Resultados de la estimación del MEE frecuentista y bayesiana. | 64 |
| 5.13. Resultados de la estimación clásica y bayesiana del modelo estructural. . . . | 70 |

Introducción

Así como los objetos más fáciles de ver no son lo demasiado grandes ni lo demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son lo demasiado complejas ni lo demasiado simples.

Bertrand Arthur William Russell

Desde el año 2000, y hasta la actualidad, se han presenciado esfuerzos importantes de los países y de organismos internacionales para conocer la calidad de los sistemas educativos. Por ello, se han desarrollado pruebas de rendimiento escolar en las que se han evaluado los resultados de aprendizaje que obtienen los estudiantes de ciertas edades o grados escolares. Algunos ejemplos de estos estudios donde ha participado la población estudiantil de México son los realizados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Existen diversos instrumentos para medir la calidad educativa, en el marco internacional destacan el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) y el Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés). En México se desarrolla el examen nacional de ingreso (EXANI), examen para la calidad y el logro educativo (EXCALE), Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE) y el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). Cada una de las pruebas tiene propósitos diferentes e inclusive utilizan escalas de medición y cuestionarios de contexto diferentes.

La prueba PISA evalúa lo que los jóvenes de 72 países (entre ellos México) saben y son capaces de hacer a los 15 años de edad. Este programa se centra en tres competencias consideradas troncales: *Ciencias*, *Lectura* y *Matemáticas*. Evalúa no sólo lo que el alumno ha aprendido en el ámbito escolar, sino también lo adquirido por otras vertientes de aprendizaje, fuera del centro escolar. Se valora cómo pueden extrapolar su conocimiento, sus destrezas cognitivas y sus actitudes a contextos en principio extraños al propio alumno, pero con los que se tendrá que enfrentar a diario en su vida.

El INEE pone a disposición de los investigadores y estadísticos las bases de datos de PISA, estas bases permiten consultar los resultados cuantitativos obtenidos por los estudiantes a nivel nacional (en el ciclo 2015 no hay resultados por entidad) en cada uno de los exámenes.

PISA 2015 profundizó en la evaluación de ciencias, es decir, las pruebas presentaron mayor cantidad de preguntas de esta área. En México se evaluó una muestra representativa a nivel nacional de 7568 estudiantes de 15 años de edad, ubicados en 275 escuelas de nivel secundaria o instituciones equivalentes de todas las regiones del país; se incluyó instituciones públicas, privadas, urbanas y rurales.

A partir del año 2015, PISA definió que los países miembros de la OCDE debían aplicar la evaluación por computadora. Se aplicaron los cuestionarios obligatorios, además los cuestionarios de familia y el cuestionario sobre el uso de la tecnología de la información y la comunicación.

Los objetivos específicos de PISA son:

- Orientar las políticas educativas, al enlazar los resultados de los alumnos en las pruebas cognitivas con su contexto socio-económico y cultural, además de considerar sus actitudes y disposiciones, y establecer rasgos comunes y diferentes en los sistemas educativos, los centros escolares y los alumnos.
- Profundizar en el concepto de competencia, referida a la capacidad del alumno para aplicar el conocimiento adquirido dentro y fuera de su entorno escolar, en las tres áreas clave objeto de evaluación del estudio.
- Relacionar los resultados de los alumnos con sus capacidades para el auto-aprendizaje y el aprendizaje a lo largo de la vida, se incluye su motivación e interés, su autopercepción y sus estrategias de aprendizaje.

- Elaborar tendencias longitudinales para mostrar la evolución de los sistemas educativos en un plano comparativo internacional.

En las tres últimas ediciones de la prueba PISA 2009, 2012 y 2015, de acuerdo a las medias de los valores plausibles, se observa para México un retroceso en el rendimiento escolar (Cuadro 1.1).

Cuadro 1.1: Resultados en el rendimiento académico para México de acuerdo a PISA.

| Habilidad | Año | | |
|------------|------|------|------|
| | 2009 | 2012 | 2015 |
| Matemática | 419 | 413 | 408 |
| Lectura | 425 | 424 | 423 |
| Ciencias | 416 | 415 | 416 |

Ante esta situación se plantea el siguiente objetivo general:

Proponer un modelo de ecuaciones estructurales (MEE) para medir el efecto de los factores identificados en el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos participantes en la prueba PISA 2015.

En consecuencia, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las variables que influyen en el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos participantes en la prueba PISA 2015.
- Diseñar, validar, estimar e interpretar un MEE que ayude a explicar el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos participantes en la prueba PISA 2015.

Este trabajo tiene la siguiente estructura:

Capítulo 1. Introducción: muestra al lector el objeto de investigación, se describe la problemática que da lugar a la formulación del problema del trabajo. En este apartado se encuentran los objetivos a desarrollar.

Capítulo 2. Antecedentes: se muestran estudios realizados por distintos autores en el ámbito del rendimiento escolar y las diversas técnicas estadísticas, además de los resultados obtenidos de estas investigaciones.

Capítulo 3. Fundamentación Teórica: se presenta la teoría referente a lo que se ha hecho para resolver el problema planteado; primero se plantean algunos conceptos sobre el rendimiento escolar, luego se proponen métodos de selección de variables y finalmente se propusieron los aspectos generales para la estimación de un MEE.

Capítulo 4. Marco Metodológico: en este capítulo se explica todo el procedimiento a seguir para cumplir con los objetivos propuestos. Primero se enuncian las diversas características de la base de datos PISA 2015 y luego se describe el procedimiento realizado para llevar a cabo la selección de variables, la obtención del modelo y la estimación del mismo.

Capítulo 5. Resultados: se muestran los resultados obtenidos que dan respuesta a cada uno de los objetivos propuestos.

Capítulo 6. Conclusiones: primero se presenta la discusión de los resultados obtenidos en este trabajo, luego se dan las conclusiones del trabajo relacionadas con los objetivos propuestos y finalmente se hacen dos propuestas para estudios futuros.

Antecedentes

Escudero *et al.* (2007) realizaron un estudio con el propósito de identificar aquellas variables que ayudaron a entender las diferencias en los niveles de desempeño académico de los estudiantes del sistema educativo mexicano, una vez que se toman en cuenta sus características sociales e individuales. Para ello utilizaron cinco modelos jerárquicos de dos niveles para analizar la influencia que tienen las variables de proceso escolar sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Dichas variables se analizaron en forma consecutiva y acumulativa en el siguiente orden: primero se introdujeron los factores escolares y después las variables de los alumnos. Los datos que analizaron corresponden al cuestionario de contexto de EXCALE en el ciclo escolar 2005–2006. En este estudio se utilizaron modelos de regresión y se comentaron dos tipos de problemas, uno tiene que ver con la definición de variables que se utilizan en los modelos explicativos y el otro tiene que ver con el poder explicativo de los modelos de regresión lineal, ya sean simples o jerárquicos.

Entre sus resultados se destaca que las variables del estudiante a nivel individual son las que mayormente impactan el aprendizaje, además se identificaron las variables estructurales (infraestructura escolar, equipamiento escolar, violencia dentro y fuera de la escuela, motivación del estudiante, escolaridad del docente, experiencia del docente, actualización del docente, cobertura curricular, prácticas pedagógicas, disciplina en la escuela, inasistencias del docente) que tuvieron una buena relación con el logro educativo. Hay que señalar que en este estudio no se utilizan métodos de selección de variables, más bien las proponen y las utilizan en cinco modelos para ver su incidencia en el logro educativo.

En la investigación los autores señalan que el modelo de logro educativo propuesto es muy general y no es suficiente para hacer una selección más puntual de las variables del proceso educativo.

Flores *et al.* (2008) utilizaron MEE para realizar un estudio con los datos procedentes de la prueba PISA 2006 para verificar e interpretar el modelo de calidad educativa propuesta por el INEE; utilizaron 11 factores independientes (se propuso en MEE por cada factor) y 52 variables observadas independientes, además el factor dependiente tiene efecto en 3 valores plausibles. A continuación se describen cada uno de los modelos propuestos.

El modelo de la situación del estudiante fue explicado con las variables observadas que describen el nivel del estudiante, el tipo de sostenimiento de la escuela, el tipo de comunidad donde se encuentra la escuela, el sexo del estudiante y el rezago del estudiante.

El modelo de la dimensión de equidad de nivel 1, que está formado por el índice de estatus socioeconómico del estudiante (ESCS), la ocupación de mayor jerarquía entre los padres del estudiante, el grado académico de mayor jerarquía entre los padres del estudiante y la ubicación decilar del ESCS del estudiante. El modelo de la dimensión de equidad de nivel 2 está formado por las variables definidas como: la media del ESCS a nivel escuela, el tipo de sostenimiento de la escuela, la calidad de los recursos educativos de la escuela, el porcentaje de computadoras para trabajo académico por estudiante, la autonomía de la escuela para establecer y evaluar el currículum, el nivel de estudios que imparte la escuela y el tipo de comunidad en la que se encuentra la escuela.

El modelo de la dimensión de eficiencia nivel 1 está formado por el índice de posesiones en el hogar, el tipo de sostenimiento de la escuela, los recursos educativos en el hogar, el índice de bienestar familiar y las posesiones culturales en el hogar. El modelo para la dimensión de eficiencia nivel 2 está formado por el porcentaje de computadoras para trabajo académico por estudiante, el promedio del tamaño de clase, los estratos en los que se dividió la muestra para formar grupos de estudiantes homogéneos que permitieran reducir la varianza, el tipo de comunidad en la que se encuentra la escuela y la autonomía de la escuela para establecer y evaluar el currículum.

El modelo de la dimensión de impacto nivel 1 está constituido por la autoeficacia en relación con las ciencias, el disfrute al aprender temas relacionadas con las ciencias, el conocimiento de aspectos del medio ambiente, la motivación orientada hacia las ciencias, la

información sobre carreras relacionadas con las ciencias y el autoconcepto en ciencias. El modelo de la dimensión de impacto nivel 2 está formado por la conciencia del estudiante para el desarrollo sustentable, el valor que tiene la ciencia para el estudiante, la formación que proporciona la escuela para las carreras relacionadas con las ciencias, y el valor personal del estudiante hacia las ciencias.

El modelo de la dimensión de eficacia nivel 2 compuesto por el nivel de estudios que imparte la escuela, la proporción de los profesores con licenciatura y el promedio del tamaño de clase. El modelo de la dimensión de eficacia nivel 3 está formado por el producto interno bruto per cápita en dólares en 2004, el índice de Desarrollo Humano, la cociente del grado de escolaridad entre el analfabetismo, el índice de marginación en 2005, la tasa neta de cobertura en 2005, el porcentaje de escuelas públicas sin computadora y el porcentaje de escuelas privadas sin computadora.

El modelo de la dimensión de pertinencia y relevancia nivel 1 está formado por la enseñanza de las ciencias a través de aplicaciones o modelos realizados por el docente, la enseñanza de la ciencia con actividades manuales y la enseñanza de la ciencia basada en trabajos de investigaciones. Por último el modelo de la dimensión de pertinencia y relevancia nivel 2 formado por las actividades en la escuela para aprender temas sobre el medio ambiente y las actividades de la escuela para promover el aprendizaje de las ciencias entre los estudiantes.

Sus resultados muestran que todos los modelos de medida ajustan de manera aceptable pues el índice de bondad de ajuste (AGFI, por sus siglas en inglés) fue mayor que 0.84. En 10 de los modelos ajustados se evidenció una asociación positiva entre la variable latente independiente y dependiente, donde no ocurrió esto fue en el modelo de la dimensión de pertinencia y relevancia nivel 1, además este modelo fue el que menor efecto tuvo en valor absoluto sobre la variable latente dependiente. El modelo de la situación del estudiante fue el que proporcionó el mayor efecto (positivo) entre la variable latentes dependiente e independiente.

Hernández y González-Montesinos (2011) utilizaron MEE y evaluaron los efectos que los factores económicos, sociales y culturales tuvieron sobre el logro académico. Definieron el modelo de medida de los factores y estiman un modelo estructural, bajo el enfoque clásico. El modelo cuenta con 3 factores y 24 variables observadas. De las variables observadas 19 forman las variables latentes independientes y cinco forman la variable latente dependiente,

de las 19 variables independientes 2 son compartidas por los factores independientes. Los datos analizados provienen de EXCALE y su cuestionario de contexto correspondiente al ciclo escolar 2006-2007, aplicado a estudiantes de primaria. A continuación se enuncian las variables que componen cada uno de los factores evaluados.

El factor logro académico tiene efecto sobre cinco valores plausibles en el área evaluada en el EXCALE 2010. El factor capital cultural y escolar afecta el estatus laboral de los padres, las expectativas educativas y la escolaridad de los mismos, además del nivel de lectura de los padres y del alumno, los libros que poseen en el hogar, los eventos culturales en los que participan, las computadoras que poseen en el hogar y si tienen internet.

El factor nivel económico comparte con el factor capital cultural y escolar a las variables posesión de internet y computadoras en la casa respectivamente, además de tener a las variables piso de la casa, drenaje, posesión de teléfono, cable o satélite, automóvil, lavadora, microondas y oportunidades respectivamente.

Los resultados obtenidos muestran que el modelo de medida ajusta bien pues la raíz del error cuadrado medio de aproximación (RMSEA, por sus siglas en inglés) es de 0.04 y el índice de bondad de ajuste comparativo (CFI, por sus siglas en inglés) es de 0.97 lo que indica que el modelo ajusta un 97 % mejor que un modelo hipotético nulo. Los factores evidenciaron una asociación positiva con el aprendizaje, y el factor cultural tiene mayor influencia que el económico. En el estudio no se utilizaron procedimientos para la selección de variables. Los autores sugirieron que en investigaciones posteriores se considere la valoración de más variables observables, así como la inclusión de otras variables latentes en el modelo.

Reyes *et al.* (2014) propusieron un modelo empírico que explica las relaciones entre factores y variables observadas, que influyen en el desempeño académico de alumnos de bachillerato, para ello utilizaron 5 factores independientes y 57 variables observadas independientes. El factor dependiente tuvo efecto sobre 4 variables observadas. Se utilizó la información contenida en el cuestionario de contexto del examen EXANI-II aplicado en el año 2010. En este estudio se partió del supuesto de que los cinco factores están correlacionados entre sí, y que todos influyen significativamente en el desempeño académico. A continuación se mencionan las variables que componen los 5 factores independientes.

El factor personal tiene efecto en las variables sexo del alumno, estudio de apuntes, si habla lengua indígena, la consulta de libros que no son de texto, los días al mes que faltó a

clases, las horas semanales de estudio, si estudia con amigos, si lee libros de texto y utiliza enciclopedia, el apoyo de amigos mientras estudia, el número de exámenes extras en bachillerato, la expectativa de ingreso mensual si termina posgrado, número de exámenes extras en secundaria, la expectativa de ingreso mensual si termina la licenciatura, si planea actividades con anticipación y el estudio máximo a alcanzar.

El factor socioeconómico tiene efecto en las variables observadas ingreso mensual familiar, tipo de empleo del padre, recibe beca en bachillerato, persona que supervise calificaciones, estatus laboral de la madre, estatus laboral del padre, vive con la madre, vive con el padre, tipo de empleo de la madre, con quién vive, número de personas en casa, horas semana de trabajo mientras estudia en bachillerato y si el alumno trabaja.

El factor capital cultural y escolar tiene efecto en las variables escolaridad de la madre, escolaridad del padre, participación en eventos de la escuela, número de películas en la casa, si asiste al museo o al cine y la disponibilidad de revistas y libros en su casa.

El factor servicios en la casa tiene efecto en las variables observadas dispone de cuarto propio, dispone de lugar de estudio, servicio de internet, servicio de calculadora, servicio de alumbrado, agua potable, servicio de pavimento, excusado con agua, servicio de basura, servicio de TV, servicio de auto, y por último el factor escolar tiene efecto en las variables observadas secundaria de procedencia, porcentaje de profesores que dejan tareas, cantidad de tareas, entrega de tareas, examen departamental, puntualidad de profesores, asistencia de profesores, asistencia a eventos de la escuela y actividades deportivas.

Los resultados obtenidos muestran que el modelo de medida ajusta bien pues el RMSEA es de 0.06 y el índice de bondad de ajuste es de 0.80 lo que indica que el modelo ajusta un 80 % mejor que un modelo hipotético nulo. En este trabajo se concluyó que el desempeño académico está determinado principalmente por características personales del alumno y aquéllas que caracterizan el proceso escolar.

Fernández (2017) utilizó MEE y evaluó la hipótesis causal de que el estatus socioeconómico de los estudiantes y la actitud de los mismos hacia las matemáticas son factores que determinan en gran medida los resultados académicos de los estudiantes costarricenses. Para ello utilizó la prueba PISA 2012. El autor definió el modelo de medida y estimó un MEE, desde el enfoque clásico y bayesiano. El modelo propuesto consta de 3 variables latentes y 9 variables observadas.

El factor rendimiento en matemáticas tuvo efecto en los valores plausibles en matemáticas mientras que el factor extracción socioeconómica mostró el efecto que tuvo sobre las variables observadas índice de posesiones en el hogar, índice del estatus ocupacional más alto de los padres y el índice del nivel educativo más alto de los padres respectivamente.

El factor actitud hacia las matemáticas tuvo efecto en las variables observadas confianza propia del alumno en matemáticas, la ansiedad del estudiante ante las matemáticas y el autoconcepto que tenga el alumno en matemáticas. Los resultados obtenidos mostraron que el modelo de medida ajustó de manera aceptable pues el RMSEA fue de 0.06, además muestra que la relación estructural entre las variables latentes aporta evidencia en favor de la hipótesis causal que se evaluó. En el enfoque bayesiano la solución converge y se obtienen estimaciones de los parámetros muy parecidas a las obtenidas por el enfoque clásico. La actitud de los estudiantes hacia las matemáticas es la variable latente que más influye en los resultados académicos en matemáticas de los estudiantes costarricenses.

En la literatura no hay artículos que analicen el desempeño escolar de los estudiantes mexicanos evaluados en la prueba PISA 2015 mediante MEE, es por ello que se desarrolla esta investigación con el fin de proponer un MEE en el cual se identifiquen las variables observadas y latentes que influyen en rendimiento escolar.

Fundamentación teórica

Las leyes de la matemática no son meramente invenciones o creaciones humanas. Simplemente “son”: existen independientemente del intelecto humano. Lo más que puede hacer un hombre de inteligencia aguda es descubrir que esas leyes están allí y llegar a conocerlas.

Maurits Cornelis Escher

3.1. Rendimiento escolar

Para la sociedad, la educación del individuo es un tema de preocupación e interés actual. Por medio de la educación el hombre y por consiguiente la sociedad puede tener un desarrollo en los diversos ámbitos como, el económico, político, social y educativo (Ruiz de Miguel, 2002).

Torres *et al.* (2006) señalaron que el rendimiento escolar no es un sinónimo de capacidad intelectual, aptitudes o competencias; éste va más allá ya que involucra diversos factores que van a influir en el rendimiento ya sea de forma negativa o positiva. Se puede decir que el rendimiento escolar es el producto del proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual no se pretende ver cuánto el alumno ha memorizado acerca de algún tema en concreto, sino de aquellos conocimientos aprendidos en dicho proceso y como los incorpora a su conducta.

El rendimiento escolar es el nivel de conocimiento de un alumno medido en una prueba de evaluación donde intervienen, además del nivel intelectual, variables de personalidad (extroversión, introversión, ansiedad) y motivacionales, cuya relación con el rendimiento académico

no siempre es lineal, sino que está modulada por factores como nivel de escolaridad, sexo y actitud (Cortéz, 1998).

Ruiz de Miguel (2002) define el rendimiento escolar como el parámetro por el cual se puede determinar la calidad y la cantidad del aprendizaje de los alumnos, el cual es de carácter social, ya que no abarca solamente a los alumnos, sino a toda la situación docente y a su contexto.

Al tomar de referencia cada una de las definiciones anteriores sobre el rendimiento escolar, se puede plantear a este como un nivel medible con un valor numérico en el cual intervienen distintos factores. En esta investigación se utilizarán como definiciones bases para el rendimiento académico las dadas por Cortéz (1998) y Ruiz de Miguel (2002).

3.2. Fundamentación estadística

3.2.1. Regresión múltiple multivariada

En la práctica suelen encontrarse problemas cuya solución está determinada por un modelo de regresión múltiple multivariada. Las $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p$ pueden ser predicho por las variables $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q$. Para n observaciones se tiene:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^T \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En 3.1, \mathbf{Y} es una matriz $n \times p$, donde cada fila contiene los valores de las p variables dependientes y cada columna está formada por las n observaciones en las p variables dependientes. La matriz \mathbf{X} de $n \times (q + 1)$ está dada por:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nq} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

\mathbf{B} es una matriz $(q + 1) \times p$ y es la que se desea estimar.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \cdots & \beta_{qp} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Ξ es una matriz $n \times p$, donde cada fila contiene los valores de los errores asociados a cada una de las p variables dependientes y cada columna está formada por las n observaciones en una de las p variables dependientes.

$$\Xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1p} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{np} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Finalmente el modelo de regresión múltiple multivariado está dado por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \Xi \quad (3.5)$$

tiene los siguientes supuestos:

1. $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{XB}$ y $E(\Xi) = \mathbf{0}$
2. $\text{Var}(\mathbf{y}_i) = \Sigma$ $i = 1, 2, \dots, n$.
3. $\text{Cov}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \mathbf{0} \forall i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$.

Una estimación para \mathbf{B} (ecuación 3.5), está dada por:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (3.6)$$

En 3.6 se asume que $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ es una matriz no singular (Rencher y Christensen, 2012).

Selección de variables

La selección de variables por pasos consiste en agregar y/o eliminar de manera iterativa los predictores, en el modelo, para encontrar el subconjunto de variables que da como resultado un modelo que reduce el error de predicción.

Hay tres estrategias de selección de variables (James *et al.*, 2013)

- Selección hacia adelante (*Forward*): comienza sin predictores en el modelo, agrega iterativamente los predictores que más contribuyen, y se detiene cuando la mejora ya no es estadísticamente significativa.
- La selección hacia atrás (*Backward*): comienza con todos los predictores en el modelo (modelo completo), elimina de forma iterativa los predictores que menos contribuyen, y se detiene cuando se tiene un modelo en el que todos los predictores son estadísticamente significativos.
- Selección por pasos (*Stepwise*): es una combinación de la selección hacia adelante y hacia atrás. Se comienza sin predictores, luego agrega secuencialmente los predictores que más contribuyen (como la selección hacia adelante). Después de agregar cada nueva variable, elimina cualquier variable que ya no proporcione una mejora en el ajuste del modelo (como la selección hacia atrás).

3.2.2. Análisis factorial

El Análisis Factorial (AF) es una técnica estadística multivariada que se incorpora a la metodología cuantitativa que involucra factores. Como los factores, no pueden medirse de manera directa, entonces se estiman a través de variables observadas (Zamora *et al.*, 2009).

Hay dos tipos de AF: el análisis factorial exploratorio (AFE) y el análisis factorial confirmatorio (AFC). Tanto el AFE como el AFC pretenden medir las relaciones entre un grupo de variables observadas y un conjunto (más pequeño) de variables latentes. El AFE y el AFC se diferencian fundamentalmente por el número y la naturaleza de las especificaciones a priori y restricciones hechas en el modelo de factores (Jöreskog, 1969).

Análisis factorial exploratorio

El AFE es una técnica estadística que permite explorar con mayor precisión las dimensiones subyacentes, de las variables latentes con respecto a las variables observadas. El AFE se realiza con el objetivo de determinar cuál o cuáles son los factores de mayor efecto en las variables observadas.

Dado x_1, x_2, \dots, x_p variables observadas el modelo que determina el AFE se representa como sigue:

$$x_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \xi_j + \delta_i$$

donde:

- λ_{ij} es el peso de la variable latente ξ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, sobre la variable observada x_i , $i = 1, 2, \dots, p$.
- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ son las variables latentes.
- $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ son los errores de medida.

En 3.7 se muestra el modelo del AFE en forma matricial.

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Delta} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \cdots & \lambda_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \cdots & \lambda_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix}$$

El proceso que sigue el AFE se puede resumir en los siguientes dos pasos:

- Determinar la pertinencia de un AF.
- Elegir el método para extraer los factores.

Para la pertinencia del AF se analizan criterios y se realizan contrastes de hipótesis previos a la extracción de los factores. Algunos de estos son:

- La evaluación del coeficiente de correlación de Pearson para las variables observadas altamente significativas.
- Que el determinante de la matriz de correlación de las variables observadas sea próximo a cero.
- Que el índice de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) sea mayor que 0.60.

- Que el resultado de la prueba de Bartlett sea significativo.

Matriz de correlación de Pearson de las variables observadas. Se trata de comprobar si existe un gran número de altas correlaciones entre las variables observadas. Para saber si estas correlaciones son significativas se hacen pruebas de hipótesis sobre los coeficientes de correlación. La hipótesis de la prueba es:

$$H_0 : \rho = 0 \quad vs \quad H_1 : \rho \neq 0$$

Se acepta la hipótesis nula cuando el valor p es menor que un nivel de significancia α dado (Lévy y Varela, 2006).

Determinante. El valor del determinante de la matriz de correlación de las variables observadas puede indicar el grado de intercorrelaciones. Si el determinante próximo a cero, entonces las correlaciones son altas (Lévy y Varela, 2006).

KMO: Estadístico de Kaiser-Meyer-Olkin es un coeficiente de correlación parcial mide la correlación existente entre dos variables observadas una vez que se han descontado los efectos lineales de otras variables. En un modelo factorial se pueden interpretar esos efectos de otras variables como los correspondientes a factores comunes (Lévy y Varela, 2006). El estadístico KMO está dado por:

$$KMO = \frac{\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} a_{ij}^2}$$

donde:

- r_{ij} representa el coeficiente de correlación entre las variables i -ésima y j -ésima.
- a_{ij} representa la correlación parcial entre las variables i -ésima y j -ésima.

El KMO varía entre 0 y 1, y su clasificación se muestra en el Cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Clasificación del KMO según su valor.

| KMO | Clasificación |
|-----------------------|---------------|
| $0.9 \leq KMO \leq 1$ | Muy bueno |
| $0.8 \leq KMO < 0.9$ | Bueno |
| $0.7 \leq KMO < 0.8$ | Aceptable |
| $0.6 \leq KMO < 0.7$ | Regular |
| $0.5 \leq KMO < 0.6$ | Malo |
| $0 \leq KMO < 0.5$ | Muy malo |

La prueba de esfericidad de Bartlett contrasta, bajo el supuesto de normalidad multivariante, si la matriz de correlación de las p variables observadas (\mathbf{R}_p) es la matriz identidad, es decir, $H_0 : \mathbf{R}_p = \mathbf{I}$ vs $H_1 : \mathbf{R}_p \neq \mathbf{I}$. El estadístico de la prueba está dado por:

$$\chi^2 = -(n - 1 - \frac{2p+5}{6}) \log |\mathbf{R}_p| = -(n - 1 - \frac{2p+5}{6}) \sum_{i=1}^p \log \lambda_i$$

donde:

- n es el tamaño de la muestra.
- p es el número de variables observadas que entran a formar parte de la matriz de correlaciones.
- λ_j son los valores propios de \mathbf{R}_p .

Estándares para la aplicación del AFE

En la aplicación del AFE es necesario considerar dos estándares fundamentales que se relacionan con: el tamaño muestral, y el mínimo número de observaciones por variable.

El tamaño muestral ha sido objeto de numerosos estudios empíricos y de simulación, dónde se distinguen dos enfoques diferentes:

1. Los que sugieren un tamaño mínimo de la muestra.
2. Los que defienden la proporción del tamaño de la muestra con relación al número de variables.

Algunos estudios del primer enfoque sugieren que el tamaño de muestra mínimo debe oscilar entre 50 y 400 observaciones (Barrett *et al.*, 1981). La adecuación del tamaño de muestra puede ser evaluada con la escala del Cuadro 3.2 (Comrey y Lee, 1992). Una de las recomendaciones es que un tamaño de muestra de 200 observaciones o más es suficiente para los análisis descriptivos y psicométricos de las variables. Se recomienda sin embargo alcanzar las 500 o más observaciones, siempre que sea posible (Comrey y Lee, 1992).

Cuadro 3.2: Adecuación del tamaño muestral para realizar AFE.

| Tamaño de muestra | Clasificación |
|-------------------|----------------|
| 50 – 99 | Muy deficiente |
| 100 – 199 | Deficiente |
| 200 – 299 | Aceptable |
| 300 – 499 | Bueno |
| 500 – 999 | Muy bueno |
| 1000 o más | Excelente |

En lo que se refiere al número de observaciones por variable, se sugiere que sea por lo menos de 10-20 observaciones por cada variable observada. Si las comunalidades ¹ son bajas, entonces se recomienda 20 observaciones al menos por cada variable observada (MacCallum *et al.*, 2001).

Las proposiciones antes mencionadas se han criticado por su simplicidad puesto que el tamaño de la muestra requerido no puede establecerse independientemente del grado de representatividad de los factores y el valor de las comunalidades. La cantidad mínima de 3 variables observadas por factor constituye un umbral necesario para la adecuación de un MEE. Ciertas distorsiones pueden ocurrir, cuando las comunalidades de las variables son relativamente bajas (menor que 0.3), debido a errores de medición o problemas de fiabilidad de los instrumentos utilizados (MacCallum *et al.*, 1999).

Conseguir soluciones estables y hacer estimaciones más precisas de los parámetros poblacionales es posible siempre que la variable latente esté determinada por un mínimo de tres variables observadas y las comunalidades sean altas; esto independientemente del tamaño

¹Proporción de la varianza explicada por las variables observadas comunes en una variable latente.

muestral, el nivel de determinación de los factores o la presencia de error (MacCallum *et al.*, 2001).

MacCallum *et al.* (1999) dieron dos observaciones adicionales, la primera tiene que ver con la naturaleza y la composición de la muestra. Como explican estos autores, cuando la muestra presenta mayor homogeneidad en comparación con la población de la que se ha extraído, aumenta la probabilidad de que el rango de valores de las variables medidas a partir de esta muestra sea muy restringido y, por tanto, aumenta también la probabilidad de obtener correlaciones bajas entre las variables; tal atenuación dará lugar a bajos estimadores de las cargas factoriales y de las correlaciones entre los factores.

La segunda cuestión tiene que ver con la calidad y la naturaleza de las variables observadas. MacCallum *et al.* (1999) plantearon que estas variables deben ser relevantes en función del dominio que se estudia, en caso contrario, existe el riesgo de que el AFE no revele factores importantes o que conduzca a la obtención de factores espurios y no bien definidos. El número de estas variables debería considerarse en función del número de los factores esperados, al menos cuando se tiene alguna expectativa sobre la cantidad de los factores.

Método de extracción de factores

Para la extracción de factores se acostumbra utilizar el método de máxima verosimilitud (MV), este método es muy demandante en el número de supuestos que deben cumplir las variables bajo estudio. Un método menos demandante en supuestos, y por lo tanto más recomendable para las variables que se incorporarán en el modelo, es el de factorización de ejes principales (FEP) (Mavrou, 2015).

FEP: es un método que consiste en la extracción de aquellas variables latentes que explican la mayor parte de la varianza común. La FEP tiene la ventaja de recuperar variables latentes débiles y es recomendable para soluciones factoriales en las que se cuenta con pocas variables observadas (De Winter y Dodou, 2012; citado por Mavrou 2015). Con tamaños de muestra pequeños y correlaciones moderadas entre las variables, la FEP ofrece soluciones más estables. La principal limitación de este método es que no proporciona índices de ajuste, ni permite calcular la significancia de las pruebas y de los intervalos de confianza (Mavrou, 2015).

Obtención del número de variables latentes que serán retenidas

Cuando se tienen algunas ideas sobre como se agruparán las variables, se puede solicitar la extracción de un número de factores determinado. Este criterio es útil para probar una teoría o para replicar los resultados de investigaciones previas. En este caso, se adopta una aproximación para evaluar el grado en que los datos proporcionarán la estructura esperada.

Regla de Gutman-Kaiser: consiste en conservar aquellos factores con valores propios mayores que uno. Este criterio se ha criticado por proporcionar resultados imprecisos a la hora de mostrar la capacidad explicativa de la solución factorial. Para resolver este problema se propone aplicar la regla de Gutman-Kaiser con un límite más pequeño a la unidad (por ejemplo, 0.80). Para esto se debe consultar el gráfico de sedimentación; y además de aquellos factores que se encuentren antes del punto de inflexión de dicho gráfico, y retener otros siempre que su varianza se pueda considerar relativamente alta. El criterio del gráfico de codo consiste en analizar el comportamiento de los eigenvalores asociados a los factores extraídos, para determinar un punto de corte entre la pendiente pronunciada de los eigenvalores altos y la pendiente de los eigenvalores bajos (Zwick y Velicer, 1986, citado por Mavrou 2015).

El porcentaje total de la varianza explicada por los componentes es otro criterio que se utiliza para decidir el número de factores que serán retenidos. Este porcentaje no se ha establecido de manera unánime. Como umbral para la extracción de los factores se suele establecer un mínimo de 60 % (Mavrou, 2015) o del 70-80 % (Rietveld y Van Hout, 1993, citado por Mavrou 2015).

Se considera como una práctica aceptable variar el número de los factores antes de optar por la estructura más adecuada (Costello y Osborne, 2005, citado por Mavrou 2015). Retener un mayor número de factores es mejor que eliminarlos (Fava y Velicer, 1996, citado por Mavrou 2015).

Significación de las cargas factoriales

Mavrou (2015) señala que cargas factoriales de 0.50 pueden considerarse fuertes para el efecto de las variables latentes en sus variables observadas. Field (2009) propone elevar al cuadrado las cargas factoriales con la finalidad de obtener una estimación de la cantidad de varianza de la variable que se explica por un factor determinado. Es recomendado interpretar solo aquellas cargas factoriales con un valor absoluto superior a 0.40. Como la aplicación del

AFE requiere tamaños de muestra relativamente grandes, se puede afirmar que la identificación de un factor por medio de 3 variables que presentan cargas de 0.60 son suficiente para asumir que son buenos indicadores de la variable latente de interés.

Valoración de las comunales

Además del análisis de la matriz de cargas factoriales, es importante verificar si cada una de las variables incluidas en el análisis son explicadas aceptablemente por el modelo. Esto puede lograrse con el análisis de la estimación final de las comunales. Puesto que la comunalidad representa la proporción de la varianza de la variable indicadora que es explicada por los factores comunes del modelo, Hair et al. (1998) proponen que las variables con una comunalidad menor a 0.3 carecen de una explicación suficiente y no deberían ser consideradas en la interpretación final del análisis.

Coefficiente α – Cronbach

El coeficiente α es un indicador de la confiabilidad de una prueba basada en su grado de consistencia interna. Este coeficiente indica el grado en que las variables de un cuestionario covarían. Es común emplear el coeficiente α – Cronbach cuando se trata de alternativas de respuestas policotómicas (Corral de Franco, 2009). El coeficiente α – Cronbach puede ser calculado de dos formas:

1. Mediante la suma de la varianza de las variables y la varianza del puntaje total (Cervantes, 2005):

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right] \quad (3.8)$$

donde:

- α : coeficiente de confiabilidad de la prueba o cuestionario.
- k : número de variables del instrumento.
- S_i : varianza individual de las variables.
- S_t : varianza total del instrumento.

2. Mediante la matriz de correlación de las variables observadas (Morales, 2007).

$$\alpha = \frac{k\bar{p}}{1 + \bar{p}(k - 1)} \quad (3.9)$$

donde:

- α : coeficiente de confiabilidad de la prueba o cuestionario.
- k : número de variables del instrumento.
- \bar{p} : promedio de las correlaciones entre cada una de las variables.

Interpretación del coeficiente de confiabilidad $\alpha - Cronbach$

Sus valores oscilan entre 0 y 1. Una manera práctica de interpretar la magnitud de un coeficiente de confiabilidad esta dada en el Cuadro 3.3 (Bravo, 1997).

Cuadro 3.3: Clasificación del $\alpha - Cronbach$ (Corral de Franco, 2009).

| $\alpha - Cronbach$ | Magnitud |
|---------------------|--------------|
| 0.70 a 1.00 | Muy fuerte |
| 0.50 a 0.69 | Sustancial |
| 0.30 a 0.49 | Moderada |
| 0.10 a 0.29 | Baja |
| 0.01 a 0.09 | Despreciable |

Este coeficiente de confiabilidad puede interpretarse de 4 maneras (Cervantes, 2005):

- Expresa la proporción de la varianza, por ejemplo un coeficiente de 0.70 indica que el 70 % de la varianza (diferencia en los totales) se debe a lo que las variables tienen en común (de coherencia en las respuestas) y el 30 % de la varianza se debe a errores de medición.
- Es una estimación del coeficiente de correlación que podemos esperar con una prueba similar, con el mismo número y tipo de variables. Esta interpretación se deriva directamente del modelo teórico propuesto por Cronbach.
- En términos generales nos dice si una prueba clasifica bien a las variables que conforman un factor.

- Índice de precisión, el coeficiente de confiabilidad expresa una proporción de la varianza verdadera debida a lo que las variables tienen en común. Este coeficiente expresa el máximo valor que puede alcanzar el índice de confiabilidad.

Análisis Factorial Confirmatorio

La intención fundamental del AFC es determinar el número y la naturaleza de las variables latentes ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$) que explican la variación y covariación entre un conjunto de variables observadas (x_1, x_2, \dots, x_p) donde $m < p$ (Fernández, 2017).

En el AFC, se especifica el número de variables latentes (ξ_m) y el patrón de relación entre la variable observable (x_p) y las cargas factoriales (λ_{pm}), así como otros parámetros. El factor de solución pre-especificado se evalúa en términos de lo bien que éste reproduce la matriz de varianzas y covarianzas de la muestra de las variables observadas. Por lo tanto, a diferencia del AFE, el AFC requiere de una sólida base empírica o conceptual para guiar la especificación y evaluación del modelo de factores.

Pasos del análisis factorial confirmatorio

El AFC tiene como objetivo determinar si un modelo de medida especificado por el investigador, basándose en hipótesis teóricas o en un AFE previo, es consistente con el fenómeno observado. Para llegar a obtener alguna conclusión al respecto, es preciso realizar una serie de pasos comunes al conjunto de los procedimientos que operan con los MEE. Los pasos esenciales en la ejecución del AFC son (Arias, 2008):

- La especificación del modelo.
- La identificación del modelo.
- La estimación de parámetros.
- La evaluación del ajuste del modelo.

Especificación del modelo:

Para establecer la estructura del modelo, el investigador se basa en estudios previos (AFE) o en un sólido sustento teórico. Establecer formalmente un modelo implica tomar decisiones respecto a los siguientes aspectos:

- Número de variables latentes independientes (m).
- Número de variables observadas (p).
- Relación, λ_{ij} , entre la variable observada x_i , $i = 1, 2, \dots, p$ y la variables latentes independientes ξ_j , $j = 1, 2, \dots, m$.
- Relación entre las variables latentes independientes ϕ_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots, m$.

Si se observa la ecuación 3.7 se puede notar la relación existente entre los factores y las variables observadas. Se asume que $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\Lambda}_x) = 0$. Se asume además la independencia entre los factores exógenos: $Cov(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j) = 0; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m$.

Si se denota con $\boldsymbol{\Sigma}$ a la matriz de covarianzas entre las variables observadas \mathbf{X} del modelo 3.7 se tiene que :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathbb{E}(\mathbf{X})[\mathbb{E}(\mathbf{X})]^T \\ &= \mathbb{E}((\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Delta})(\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Delta})^T) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_x\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T)\boldsymbol{\Lambda}_x^T + \boldsymbol{\Lambda}_x\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\Delta}^T) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\xi}^T)\boldsymbol{\Lambda}_x^T + \mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T)\end{aligned}$$

Si hacemos $\boldsymbol{\Phi} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T)$ y $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T)$ entonces $\boldsymbol{\Sigma}$ se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_x^T + \boldsymbol{\Theta} \quad (3.10)$$

De la expresión 3.10 se tiene:

- La matriz $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \sigma_{ij}$, $\sigma_{ii} = Var(x_i)$ y $\sigma_{ij} = Cov(x_i, x_j)$ con $i, j = 1, \dots, p$. El número de elementos distintos de $\boldsymbol{\Sigma}$ es $\frac{p(p-1)}{2}$.
- La matriz $\boldsymbol{\Lambda}_x$ contiene las $p-m$ cargas factoriales, λ_{ij} es la carga factorial que relaciona la variable observada x_i con la variable latente independiente ξ_j .
- $\boldsymbol{\Phi} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T)$, $\phi_{rr} = Var(\xi_r)$ y $\phi_{rs} = Cov(\xi_r, \xi_s)$ con $r, s = 1, 2, \dots, m$. El número de elementos distintos es $\frac{m(m-1)}{2}$.
- La matriz $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^T) = \theta_{ij}$, $\theta_{ii} = Var(\delta_i)$ y $\theta_{ij} = Cov(\delta_i, \delta_j)$ con $i, j = 1, 2, \dots, p$. El número de elementos distintos es $\frac{p(p-1)}{2}$.

Por lo tanto, 3.10 permite saber la cantidad de parámetros a estimar:

$$cpe = 2p + \frac{m(m-1)}{2} \quad (3.11)$$

Identificabilidad del modelo

Si el modelo teórico es correcto, se procede a la identificación del modelo, en donde se debe asegurar que los parámetros del modelo pueden ser estimados.

El modelo está identificado si todos los parámetros lo están, es decir, si existe una solución única para cada uno de los parámetros estimados. Para determinar si un modelo está identificado se debe analizar antes de la recolección de datos, se verifica que al menos se disponga para cada parámetro de una expresión algebraica que lo exprese en función de las varianzas y covarianzas muestrales.

Existe una serie de reglas generales aplicables para identificar un modelo, una de ellas es la regla de los grados de libertad (gl). Se espera que los grados de libertad del modelo sean mayores o iguales a cero. Esto corresponde a lo que se denomina como modelo identificado o modelo sobreidentificado. Un modelo identificado tiene exactamente cero grados de libertad ($gl = 0$). Aunque esto ofrece un ajuste perfecto del modelo, la solución no tiene interés puesto que no se puede generalizar.

Un modelo sobreidentificado es el objetivo de todos los MEE, pues tiene más información en la matriz de datos que el número de parámetros a estimar, lo que significa que tiene un número positivo de grados de libertad ($gl > 0$). Un modelo infraestimado tiene grados de libertad negativo ($gl < 0$), lo que significa que se intentan estimar más parámetros de los que permite la información disponible (Cupani, 2012).

Para determinar gl se utiliza la siguiente ecuación:

$$gl = \frac{p(p+1)}{2} - cpe = \frac{p(p-3) - m(m-1)}{2} \quad (3.12)$$

donde p es la cantidad de variables observadas, m es la cantidad de variables latentes y cpe la cantidad de parámetros a estimar (Werts et al., 1973, citado por Cupani, 2012).

Estimación del modelo

Los métodos de estimación de parámetros habitualmente utilizados son: mínimos cuadrados no ponderados, mínimos cuadrados generalizados y máxima verosimilitud.

La estimación por mínimos cuadrados no ponderados toma como estimadores a los valores que minimizan la siguiente función:

$$F_{ULS}(\mathbf{S}, \hat{\Sigma}) = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{S} - \hat{\Sigma})^2] \quad (3.13)$$

donde:

- \mathbf{S} es la matriz de covarianzas observada.
- $\hat{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas reproducida por el modelo.

La estimación por mínimos cuadrados generalizados se basa en ponderar la matriz cuya traza se calcula en la ecuación 3.13 mediante la inversa de la matriz de covarianzas muestral, esto es:

$$F_{GLS}(\mathbf{S}, \hat{\Sigma}) = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{S} - \hat{\Sigma})\mathbf{S}^{-1}]^2 \quad (3.14)$$

Para la estimación por máxima verosimilitud se debe minimizar la siguiente función:

$$F_{MV}(\mathbf{S}, \hat{\Sigma}) = \text{tr}(\mathbf{S}\hat{\Sigma}^{-1}) + [\ln|\hat{\Sigma}| - \ln|\mathbf{S}|] - p \quad (3.15)$$

El método de estimación más común en los MEE es el de máxima verosimilitud, ya que proporciona estimaciones coherentes, eficientes, invariante al tipo de escala y no sesgadas cuando se cumple el supuesto de normalidad multivariada.

En la práctica un modelo no está identificado cuando la función que lo minimiza no converge y es incapaz de llegar a un mínimo y encontrar un estimador para cada parámetro. Cuando el proceso iterativo es exitoso, se podrá proceder a la evaluación del ajuste del modelo y, en el caso de que sea aceptable, a la interpretación de los parámetros estimados (Lévy y Varela, 2006).

Evaluación del ajuste del modelo

Antes de interpretar los resultados del AFC que se ha efectuado, es necesario determinar hasta qué punto el modelo asumido se ajusta a los datos muestrales.

En cuanto a la evaluación de la calidad del modelo, el escalar obtenido como resultado de la función de ajuste empleada, junto con la matriz residual resultante de la diferencia entre la matriz observada y la predicha por el modelo, serán el punto de partida para la

obtención de los índices de bondad de ajuste, que informarán hasta qué punto la estructura definida a través de los parámetros del modelo reproduce la matriz de covarianzas de los datos muestrales.

En este sentido el modelado mediante estructuras de covarianzas no se sustenta en un único estadístico que describa la adecuación de las predicciones realizadas por el modelo. Es por ello que la evaluación de la bondad de ajuste de un modelo es más un proceso relativo que un criterio absoluto, por lo que se recomienda la evaluación complementaria de tres índices de ajuste:

Índices de ajuste global: evalúan el modelo en general, sin tener en cuenta un posible sobre ajuste, de entre los cuales se tiene Chi-cuadrado y RMSEA.

Estadístico χ^2 para el contraste global del modelo

El índice de ajuste por excelencia en los modelos AFC es el estadístico χ^2 . La idea es comparar la matriz de covarianzas observada (\mathbf{S}) y la de covarianzas reproducida ($\hat{\Sigma}$). El modelo está perfectamente identificado si el estadístico arroja como resultado cero grados de libertad (Lévy y Varela, 2003). El juego de hipótesis que se establece para este estadístico es:

$$H_0 : \mathbf{S} = \hat{\Sigma} \quad vs \quad H_1 : \mathbf{S} \neq \hat{\Sigma}$$

Este estadístico se distribuye χ^2 con $\frac{p(p+1)}{2} - k$ grados de libertad, donde p es la cantidad de variables observadas y k es la cantidad de parámetros a estimar.

Índice RMSEA

Este índice ha sido desarrollado como una medida absoluta de la diferencia de la estructura de relaciones entre el modelo propuesto y los valores de covarianza en la población medida (Steiger, 1990, citado por González-Montesinos y Escudero, 2010). En el Cuadro 3.4 se muestra la clasificación de dicho índice. Para determinar el *RMSEA* se utiliza 3.16:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\hat{\delta}_T}{gl_{teorico}(N - 1)}} \quad (3.16)$$

donde $\hat{\delta}_T = \max(\chi_{teorico}^2 - gl_{teorico}, 0)$ y N es la cantidad de observaciones.

Índices de ajuste comparativo: estos índices comparan el modelo propuesto con el modelo de independencia o de ausencia de relación entre las variables; dentro de estos índices están

Cuadro 3.4: Clasificación del índice RMSEA (Lévy y Varela, 2006).

| Resultado | Clasificación |
|--------------|----------------------|
| 0 – 0.05 | Muy bueno |
| 0.051 – 0.08 | Razonable |
| 0.081 – 0.1 | Mediocre |
| 0.11 o más | El modelo se rechaza |

el índice de Tucker-Lewis (TLI) y el índice de ajuste comparativo (CFI).

Índice TLI

Este índice compara el ajuste por grados de libertad del modelo propuesto con el modelo de ausencia de relación entre las variables. En el Cuadro 3.5 se puede ver como se clasifica este índice de acuerdo a su valor.

Cuadro 3.5: Clasificación del índice TLI (Montaño, 2014).

| Resultado | Clasificación |
|--------------|---------------------|
| 0.95 – 1.00 | Muy buen ajuste |
| 0.80 – 0.94 | Ajuste aceptable |
| 0.79 o menos | Ajuste no aceptable |

Índice CFI

Este índice compara el estadístico χ^2 de dos modelos: el modelo independiente que mantiene que no existe relación entre las variables, y el modelo teórico propuesto por el investigador. Esta comparación se corrige con los grados de libertad de los modelos (Bentler *et al.*, 1980). En el Cuadro 3.6 se muestra la clasificación del CFI.

$$CFI = \left| 1 - \frac{\chi_{teorico}^2 - gl_{teorico}}{\chi_{indep}^2 - gl_{indep}} \right| \quad (3.17)$$

Índices de parsimonia: evalúan la calidad del ajuste del modelo en función del número de coeficientes estimados para conseguir dicho nivel de ajuste, en esta categoría tenemos la razón de estadístico χ^2 entre los grados de libertad y el criterio de información de Akaike (AIC).

Cuadro 3.6: Clasificación del índice CFI.

| Resultado | Clasificación |
|--------------|---------------------|
| 0.95 – 1.00 | Muy buen ajuste |
| 0.80 – 0.94 | Ajuste aceptable |
| 0.79 o menos | Ajuste no aceptable |

AIC: es una medida comparativa entre modelos con diferente número de variables. Los valores cercanos a 0 indican un mejor ajuste y una mayor parsimonia, se tiene que el modelo es mejor por ser una medida comparativa (Fang, 2011).

$$AIC(k) = -2\ln L(\hat{\theta}(k)) + 2k \quad (3.18)$$

donde $\hat{\theta}(k)$ es el máximo de la función máximo verosímil y k es el número de parámetros independientes estimados dentro del modelo.

3.2.3. Modelo de ecuaciones estructurales (MEE)

Frecuentemente, el AFC es utilizado como análisis previo para los MEE que especifican relaciones estructurales (regresiones) entre las variables latentes. Los MEE se pueden separar en dos componentes:

- El modelo de medida, especifica el número de factores, y cómo se relacionan las variables observadas con los factores, y las relaciones entre los errores de las variables observables es decir, el AFC.
- El modelo estructural, especifica cómo se relacionan las distintas variables latentes (efectos directos o indirectos, ninguna relación, relaciones espurias).

De esta manera, un MEE basa la relación estructural de las variables latentes en los resultados obtenidos del modelo de medición del AFC, por lo que se encuentran estrechamente relacionados. Los resultados de un AFC son la antesala de un MEE, que intenta reproducir las relaciones entre variables latentes con un conjunto de parámetros estructurales más parsimonioso que el mismo AFC.

A diferencia de los AFE, los MEE se centran en probar hipótesis en modelos con ciertas restricciones sobre los parámetros previamente identificadas por el modelo. El objetivo es probar si el modelo con estas restricciones ajusta bien a los datos con los cuáles se buscará realizar la prueba.

Tipos de variables en un MEE

En los MEE se distinguen distintos tipos de variables según sea su medición o el papel que realizan dentro del modelo (Fernández, 2017):

- Variables latentes, reciben también el nombre de constructos, factores o variables no observadas según los diversos autores. Son normalmente el objeto de interés en el análisis de los MEE. Las variables latentes son conceptos abstractos que se pueden medir indirectamente a través de sus efectos en las variables observadas.
- Variables observadas, son aquellas variables que pueden ser medidas.

Entre las variables latentes, se pueden destacar tres tipos:

- Variables exógenas, son aquellas que afectan a otras variables y no reciben efecto alguno de otras variables. En la Figura 3.1 se observa como V_3 es una variable exógena, puesto que no recibe información de V_1 ni de V_2 , pero si aporta información a estas variables.
- Variables endógenas, son aquellas que reciben efecto de otras variables. Estas variables están afectadas por un término de perturbación o de error. En la Figura 3.1, se tiene que V_1 y V_2 reciben información, por lo que son variables endógenas.
- Variable error, este término tiene en cuenta todas las fuentes de variación que no están consideradas en el modelo, por ejemplo en la medición de las variables. Se denominan variables de tipo latente al no ser observadas.

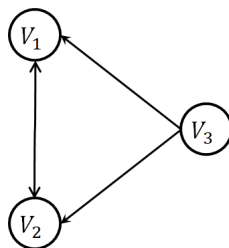


Figura 3.1: Variable exógena (V_3) y endógenas (V_1, V_2).

Representación visual de un MEE

Los sistemas de ecuaciones estructurales se suelen representar de forma visual en diagramas causales o “path diagrams”. Esta técnica construye grafos acorde a las ecuaciones que reflejan el proceso.

1. Las relaciones entre las variables se indican con una flecha cuyo sentido va desde la variable causa hacia la variable efecto. Cada una de las relaciones está afectada por un coeficiente, que indica la magnitud del efecto entre ambas variables, si entre dos variables no se ha especificado ninguna relación (flecha) se entiende que no hay efecto entre ellas (Figura 3.2).
2. La relación entre dos variables exógenas o de dos términos de perturbación sin una interpretación causal, se representa con una flecha bidireccional que une a ambas variables, y el parámetro asociado se indica con una covarianza (Figura 3.2).
3. En los sistemas de ecuaciones estructurales se suele incluir dos tipos de variables, observables y latentes. Las variables observadas suelen ir enmarcadas en los diagramas mediante cuadrados y las variables latentes están representadas con círculos u óvalos (Figura 3.2).
4. Los parámetros del modelo se representan sobre la flecha correspondiente.

Con estas reglas se suelen representar todas las teorías causales y de medición de forma equivalente a la que lo hacen los sistemas de ecuaciones, mientras que cumplan:

1. Todas las relaciones causales deben estar representadas en el diagrama.
2. Todas las variables que son causas de las variables endógenas deben de estar incluidas en el diagrama.
3. El diagrama debe ser sencillo, y solo contener relaciones que puedan justificarse con bases teóricas.

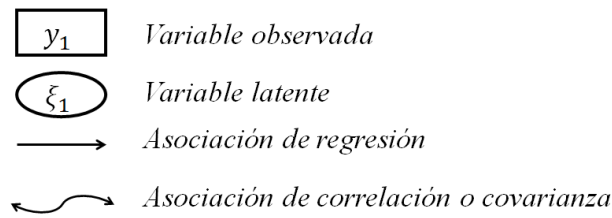


Figura 3.2: Elementos de la representación visual de un MEE.

Tipos de relaciones entre las variables

Relaciones causales que pueden establecerse entre dos variables V_1 y V_2 (Ruiz, 2010):

- Si V_1 causa a V_2 entonces se asume un modelo de regresión de V_2 hacia V_1 , también pueden estar relacionadas si V_2 causa a V_1 , lo que asumiría el modelo de regresión de V_1 sobre V_2 , como se puede observar en Figura 3.3. En ambos casos se tienen relaciones directas, aunque estas relaciones también pueden ser recíprocas, como se observa en Figura 3.3, en este caso la casualidad es bidireccional.

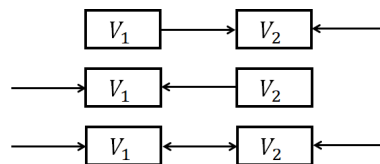


Figura 3.3: Relaciones directa entre variables.

- V_1 y V_2 están relacionadas si ambas tienen una causa en común con una tercera variable V_3 . A esta relación se le denomina relación espuria, y se puede observar en Figura 3.4.

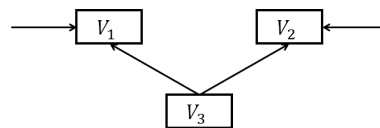


Figura 3.4: Relaciones espuria entre variables.

- V_1 y V_2 están relacionadas si ambas tienen en común una tercera variable V_3 . Este tipo de relación se le llama indirecta y se representa en Figura 3.5.

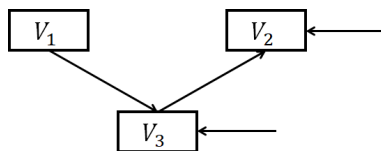


Figura 3.5: Relaciones indirecta entre variables.

- Existe un último tipo de relación, y que puede asociarse con la relación espuria y la relación indirecta. Esta última relación se muestra en Figura 3.6 donde se deriva la dificultad de determinar si la relación entre V_1 y V_2 es por vía espuria o indirecta. Por este motivo, se define este nuevo efecto como conjunto.

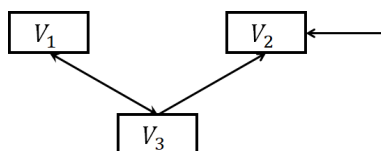


Figura 3.6: Relaciones conjunta entre variables.

Estructura de un MEE

Los MEE están formados por dos modelos: el modelo de medida y el modelo de estructura. En el modelo de medida se representan las relaciones de los factores con las variables observadas que lo conforman, y la relación entre los factores (Figura 3.7). El modelo de medida permite corroborar la idoneidad de las variables observadas en la medición de las variables latentes. En el diagrama causal de un modelo de medida las variables latentes están relacionadas por flechas bidireccionales, como en la Figura 3.7.

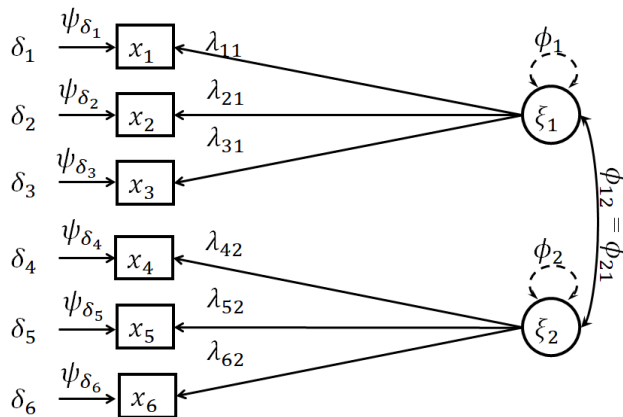


Figura 3.7: Ilustración de un modelo de medida de dos factores.

donde:

ξ_j son variables latentes exógenas; x_i variables observadas; λ_{ij} son cargas factoriales que determinan cuánto influye una variable latente (ξ_j) sobre una variable observada (x_i); δ_i son los errores de medición; $\phi_{jk} = \phi_{kj} = Cov(\xi_j, \xi_k)$ y ψ_{δ_i} es el efecto del error de medición en la variable observada x_i , donde $j, k = 1, 2$ y $i = 1, \dots, 6$.

En el MEE las variables latentes están relacionadas con las variables observadas a través del modelo de medida 3.19, que está definido por variables endógenas y variables exógenas a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \Lambda_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{y} &= \Lambda_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde:

- \mathbf{x} es un vector $p \times 1$ formado por las variables observadas independientes.
- $\Lambda_{\mathbf{x}}$ es una matriz $p \times m$ de coeficientes de variables latentes exógenas.
- $\boldsymbol{\xi}$ es un vector $m \times 1$ de variables latentes exógenas.
- $\boldsymbol{\delta}$ es un vector $p \times 1$ de errores de medición para las variables observadas independientes.
- \mathbf{y} es un vector $q \times 1$ formado por las variables observadas dependientes.
- $\Lambda_{\mathbf{y}}$ es una matriz $q \times k$ de coeficientes de variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\eta}$ es un vector $k \times 1$ de variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un vector $q \times 1$ de errores de medición para las variables observadas dependientes.

Dado que en el modelo de medida las variables latentes exógenas siempre están relacionadas, entonces se tiene una matriz $\boldsymbol{\Phi}$ de dimensión $\frac{m(m-1)}{2}$, cuyos elementos están dados por $Cov(\xi_k, \xi_j) = \phi_{ij}$ $j, k = 1, \dots, m$.

Como también existe un efecto del error de medida en las variables observada exógenas, entonces se obtiene la matriz $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\delta}}$ de dimensión $p \times p$, cuyos elementos de la diagonal están dados por ψ_{δ_j} y fuera de ésta son ceros.

El modelo de estructura especifica las relaciones que se establecen entre las variables latentes endógenas y las exógenas. Este modelo se identifica con la ecuación (3.20).

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3.20)$$

donde:

- $\boldsymbol{\eta}$ es un vector $k \times 1$ de variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\Pi}$ es una matriz $k \times k$ de coeficientes que relacionan las variables latentes endógenas entre si.
- $\boldsymbol{\xi}$ es un vector $m \times 1$ de variables latentes exógenas.
- $\boldsymbol{\Gamma}$ es una matriz $k \times m$ de coeficientes que relacionan las variables latentes exógenas con las variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\zeta}$ es un vector $k \times 1$ de errores.

Se asume que $\mathbf{I}_{k \times k} - \boldsymbol{\Pi}$ es invertible, donde $\mathbf{I}_{k \times k}$ es la matriz identidad, $E(\boldsymbol{\zeta}^T) = \mathbf{0}$ y $E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}^T) = \mathbf{0}$ por $\boldsymbol{\zeta}$ y $\boldsymbol{\xi}$ no estar correlacionados.

Sean $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}_\zeta$, $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ y $\boldsymbol{\Psi}_\varepsilon$ las matrices de covarianza de $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ respectivamente, entonces la matriz de covarianza de $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ es:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_y(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi})^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi}_\zeta)(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi})^{-T}\boldsymbol{\Lambda}_y^T + \boldsymbol{\Psi}_\varepsilon & \boldsymbol{\Lambda}_y(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_x^T \\ \boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^T(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi})^{-T}\boldsymbol{\Lambda}_y^T & \boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_x^T + \boldsymbol{\Psi}_\delta \end{bmatrix}$$

El MEE contiene los efectos y relaciones entre las variables latentes, es parecido a un modelo de regresión pero puede contener efectos concatenados y bucles entre variables. Además, contienen los errores de predicción. En la Figura 3.8 se puede distinguir el modelo de relaciones estructurales al tener las variables latentes de regresión relaciones entre sí.

Como existe un efecto del error de medida en las variables observadas dependientes, entonces se obtiene la matriz $\boldsymbol{\Psi}_\varepsilon$ de dimensión $q \times q$, cuyos elementos de la diagonal están dados por ψ_{ε_i} y fuera de ésta son ceros. El planteamiento del modelo de medida para la

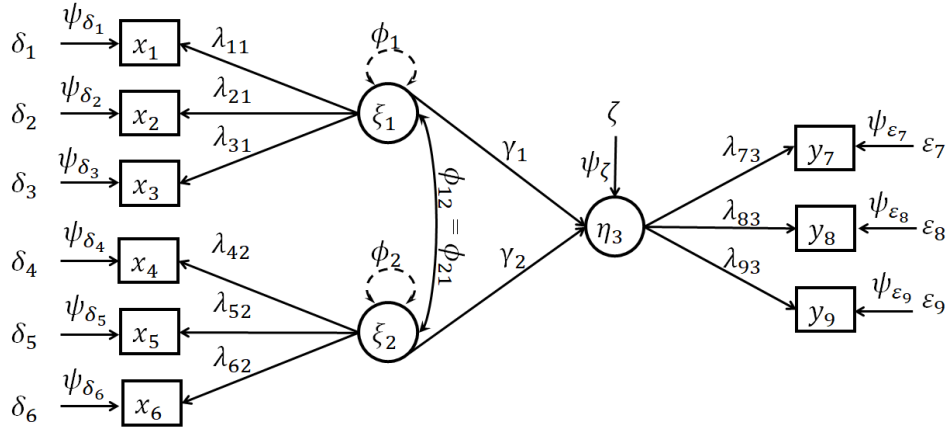


Figura 3.8: MEE con tres factores.

Figura 3.8 es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ 0 & \lambda_{42} \\ 0 & \lambda_{52} \\ 0 & \lambda_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{73} \\ \lambda_{83} \\ \lambda_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}$$

El modelo estructural es:

$$\begin{bmatrix} \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_3 \end{bmatrix}$$

3.2.4. Estimación de los parámetros de un MEE

Para la estimación de los parámetros de los MEE se pueden utilizar los métodos: máxima verosimilitud (MV), mínimos cuadrados ponderados (WLS, por sus siglas en inglés) y mínimos cuadrados generalizados (GLS, por sus siglas en inglés). El método de MV proporciona estimaciones consistentes, eficientes y no sesgadas con tamaños de muestra suficientemente grandes. La estimación de θ por MV requiere que las variables observadas sigan una distribución normal, sin embargo la violación de la condición de normalidad multivariante no afecta

la capacidad del método para estimar de forma no sesgada los parámetros del modelo; si no se cumple con el supuesto de normalidad, los métodos más recomendados son WLS y GLS (Lee, 2007).

Estimación por MV

Si la muestra aleatoria $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ tiene distribución normal multivariada $\mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$, la distribución de la matriz de covarianza muestral \mathbf{S} tiene distribución de Wishart:

$$f(\mathbf{S} \mid \Sigma_0) = \frac{C \exp[-(n-1)/2] \text{tr}(\mathbf{S}\Sigma_0^{-1})}{|\Sigma_0|^{(n-1)/2}}$$

donde C es una constante apropiada. Por lo tanto, la función de probabilidad log-verosimilitud negativa está dada por (Lee, 2007):

$$\frac{1}{2}(n-1)\{\log |\Sigma(\boldsymbol{\theta})| + \text{tr}(\mathbf{S}\Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1})\} - c \quad (3.21)$$

donde:

- n es el tamaño de la muestra.
- $\boldsymbol{\theta} = (\Lambda_x, \Lambda_y, \Phi, \Pi, \Gamma, \Psi_\delta, \Psi_\varepsilon, \Psi_\zeta)$.
- \mathbf{S} es la matriz de covarianzas de la muestra.
- $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de covarianzas del MEE.
- c es una constante.

Para obtener $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se calculan las derivadas parciales de la ecuación 3.21 con respecto a cada uno de los elementos del vector $\boldsymbol{\theta}$, cada una de las expresiones obtenidas se iguala a cero y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido, de forma tal que el resultado sea un máximo.

Efecto total de un factor en otro factor en un MEE

Dado los factores F_1, F_2 y F_3 , los efectos directos entre los factores γ_{21}, γ_{23} y π_{31} , se define el efecto total del factor F_2 en el factor F_1 como la suma del efecto directo γ_{21} más el efecto indirecto, $\gamma_{23} \times \pi_{31}$. Así el efecto total estimado está dado por $\hat{E}_{T_{F_2 F_1}} = \hat{\gamma}_{21} + \hat{\gamma}_{23} \times \hat{\pi}_{31}$, Figura 3.9 (Patiño, 2017).

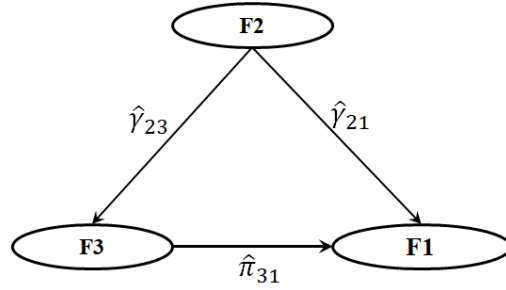


Figura 3.9: Efecto total de un factor en otro factor en un MEE.

3.2.5. Modelos de ecuaciones estructurales bayesianos (MEEB)

La estimación clásica vía máxima verosimilitud asume que el vector de parámetros desconocidos no es aleatorio. Por el contrario, en el enfoque bayesiano el vector de parámetros desconocidos se considera aleatorio con una distribución a priori asociada.

Supongamos que M es un MEE con un vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$. El conjunto de datos observados se denota por \mathbf{Z} . Se define a $p(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta} \mid M)$ como la función de densidad probabilística de la distribución conjunta de \mathbf{Z} y $\boldsymbol{\theta}$ dado M . El comportamiento de $\boldsymbol{\theta}$ dados los datos es descrito completamente por la distribución condicional de $\boldsymbol{\theta}$ dado \mathbf{Z} . A esta distribución condicional se le llama distribución a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$. Se define a $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}, M)$ como la función de densidad de la distribución a posteriori para $\boldsymbol{\theta}$ (Fernández, 2017).

De acuerdo con el teorema de Bayes, se introduce el MEE (M) y se puede verificar 3.22:

$$p(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta} \mid M) = p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\theta}, M)p(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}, M)p(\mathbf{Z} \mid M) \quad (3.22)$$

Como $p(\mathbf{Z} \mid M)$ no depende de $\boldsymbol{\theta}$ se puede tratar como una constante para un \mathbf{Z} fijo. Se aplica logaritmo a 3.22 y se obtiene:

$$\log p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}, M) \propto \log p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\theta}, M) + \log p(\boldsymbol{\theta})$$

donde $p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\theta}, M)$ es la función de verosimilitud y $p(\boldsymbol{\theta})$ es la función de densidad a priori para $\boldsymbol{\theta}$. La función de densidad a posteriori, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Z}, M)$, depende de ambas funciones.

Como la función de verosimilitud depende de los datos y la función de densidad a priori no, entonces entre más grande sea el tamaño de la muestra más parecidos van a ser los resultados obtenidos entre la estimación bayesiana y la estimación frecuentista, en este caso la función a priori no juega un papel importante. Por el contrario, entre más pequeño sea el tamaño de

muestra, la función a priori es más importante que la función de verosimilitud, y por lo tanto, la selección de la distribución a priori es un tema fundamental en la teoría bayesiana. Esto es de hecho, una de las ventajas de la estimación bayesiana sobre la frecuentista (Fernández, 2017).

MEE bajo el enfoque bayesiano

Bajo el enfoque bayesiano el modelo de medida está dado por la ecuación 3.23 (Lee, 2007):

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, i = 1, \dots, k \quad (3.23)$$

donde:

- \mathbf{z}_i , es un vector de $s \times 1$ cuyos elementos corresponden a la i -ésima fila de la matriz $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ de dimensión $n \times s$, donde $s = p + q$.
- $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz de todas las cargas factoriales de dimensión $s \times l$, donde $l = m + k$, la cual está dada por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_y \end{bmatrix}_{s \times l}$$

- $\boldsymbol{\omega}_i = (\boldsymbol{\xi}_i^T, \boldsymbol{\eta}_i^T)^T$ es un vector $l \times 1$ compuesto por las variables latentes exógenas y endógenas.
- $\boldsymbol{\epsilon}_i$ es un vector de errores de medición de $s \times 1$, el cual es independiente de $\boldsymbol{\omega}_i$.

De acuerdo con esto, entonces la representación matricial para el modelo de medida (Figura 3.8) está dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 \\ 0 & \lambda_{52} & 0 \\ 0 & \lambda_{62} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{73} \\ 0 & 0 & \lambda_{83} \\ 0 & 0 & \lambda_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}$$

Bajo el enfoque bayesiano el modelo de estructura está dado por 3.24 (Lee, 2007):

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\eta}_i + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\zeta}_i \quad (3.24)$$

donde:

- $\boldsymbol{\eta}_i$ es un vector de $k \times 1$ compuesto por las variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\Pi}$ es una matriz de $k \times k$ compuesta por cargas factoriales entre las variables latentes endógenas.
- $\boldsymbol{\Gamma}$ es una matriz de $k \times m$ compuesta por cargas factoriales entre las variables latentes endógenas y exógenas.
- $\boldsymbol{\xi}_i$ es un vector de $m \times 1$ compuesto por las variables latentes exógenas.
- $\boldsymbol{\zeta}_i$ es un vector de $k \times 1$ compuesto por los errores de medición.

Sea $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$ la matriz de datos observada, $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n)$ la matriz de los efectos de las variables latentes y $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros desconocidos que contiene los elementos $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Psi}_\epsilon$, $\boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Psi}_\zeta$. Se considera la distribución posterior conjunta $[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega} \mid \mathbf{Z}]$. El muestreo de *Gibbs* genera una cantidad suficientemente grande de observaciones a partir de esta distribución posterior, que se implementa de la siguiente manera. En la iteración ($j+1$) con valores actuales de $\boldsymbol{\Omega}^{(j)}$ y $\boldsymbol{\theta}^{(j)}$:

1. Generar $\boldsymbol{\Omega}^{(j+1)}$ de $p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}^{(j)}, \mathbf{Z})$
2. Generar $\boldsymbol{\theta}^{(j+1)}$ de $p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\Omega}^{(j+1)}, \mathbf{Z})$

Para $i = 1, \dots, n$, los $\boldsymbol{\omega}_i$ y los \mathbf{z}_i son mutuamente independientes dados $(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\theta})$. Entonces, se tiene la siguiente ecuación para la distribución condicional $p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z})$:

$$p(\boldsymbol{\Omega} \mid \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n p(\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{i=1}^n p(\boldsymbol{\omega}_i \mid \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{z}_i \mid \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\theta})$$

Además dado que la distribución condicional de $[\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{z}_i]$ y $[\mathbf{y}_i \mid (\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\theta})]$ son $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi})$ y $\mathcal{N}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\Psi}_\epsilon)$ respectivamente se puede demostrar que la distribución condicional de $(\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta})$ es igual a:

$$[\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}] \sim \mathcal{N}[(\boldsymbol{\Sigma}_\omega^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_\epsilon^{-1} \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_\epsilon^{-1} \mathbf{z}_i, (\boldsymbol{\Sigma}_\omega^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Psi}_\epsilon^{-1} \boldsymbol{\Lambda})^{-1}]$$

donde:

- $\boldsymbol{\Psi}_\epsilon = (\boldsymbol{\Psi}_\delta, \boldsymbol{\Psi}_\epsilon)$ es una matriz diagonal de dimensión $(p+q) \times (p+q)$, cuyos elementos de la diagonal principal están dados por $\psi_{\epsilon_i}, i = 1, \dots, p+q$.
- $\boldsymbol{\Sigma}_\omega$ es la matriz de covarianzas de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_\omega = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_0^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^T + \boldsymbol{\Psi}_\zeta)\boldsymbol{\Pi}_0^{-T} & \boldsymbol{\Pi}_0^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Pi}_0^{-T} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{\Psi}_\zeta$ es una matriz diagonal de dimensión $k \times k$, cuyos elementos de la diagonal principal están dado por $\psi_{\zeta_i}, i = 1, \dots, k$.
- $\boldsymbol{\Pi}_0 = |I - \boldsymbol{\Pi}|$.

Por otra parte, la distribución condicional de $\boldsymbol{\theta}$ dados $(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Omega})$ es proporcional a $p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{Z}, \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta})$, por lo que resulta necesario establecer una distribución a priori $p(\boldsymbol{\theta})$.

Sea $\boldsymbol{\theta}_z$ el parámetro desconocido asociado a $\boldsymbol{\Lambda}$ y $\boldsymbol{\Psi}_\epsilon$ en el modelo de medida; y $\boldsymbol{\theta}_\omega$ el parámetro desconocido asociado a $\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Psi}_\zeta$ en el modelo de estructura. Se asume que la distribución a priori de $\boldsymbol{\theta}_z$ es independiente de la distribución a priori de $\boldsymbol{\theta}_\omega$; esto es $p(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta}_z)p(\boldsymbol{\theta}_\omega)$. Haciendo $p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}_z)$ y $p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}_\omega)$ tenemos:

$$p(\boldsymbol{\theta}_z, \boldsymbol{\theta}_\omega \mid \mathbf{Z}, \boldsymbol{\Omega}) \propto [p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}_z)p(\boldsymbol{\theta}_z)][p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}_\omega)p(\boldsymbol{\theta}_\omega)]$$

Dado que el primer término del producto en el lado derecho depende solo de $\boldsymbol{\theta}_z$, mientras que el segundo término depende solo de $\boldsymbol{\theta}_\omega$, entonces:

$$p(\boldsymbol{\theta}_z) \propto p(\mathbf{Z} \mid \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta}_z)p(\boldsymbol{\theta}_z)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}_\omega) \propto p(\boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{\theta}_\omega)p(\boldsymbol{\theta}_\omega)$$

Sea $\psi_{\epsilon k}$ el k -ésimo elemento de la diagonal de $\boldsymbol{\Psi}_\epsilon$ y $\boldsymbol{\Lambda}_k^T$ la k -ésima fila de $\boldsymbol{\Lambda}$, entonces se asume que (Lee, 2007):

$$[\boldsymbol{\Lambda}_k \mid \psi_{\epsilon k}] \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\Lambda}_{0k}, \psi_{\epsilon k} \mathbf{H}_{0zk})$$

$$\psi_{\epsilon k}^{-1} \sim \text{Gamma}(\alpha_{0\epsilon k}, \beta_{0\epsilon k})$$

donde $\alpha_{0\epsilon z}, \beta_{0\epsilon z}, \Lambda_{0z}$ y \mathbf{H}_{0yz} son los hiperparámetros y \mathbf{H}_{0yz} es una matriz definida positiva.

Además se consideran las siguientes distribuciones a priori:

$$\Phi^{-1} \sim \text{Wishart}_l(\mathbf{R}_0, \rho_0)$$

$$\omega_i \sim \mathcal{N}(0, \Phi)$$

$$\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \Psi_\epsilon)$$

donde \mathbf{R}_0 es una matriz definida positiva y Ψ_ϵ es una matriz diagonal con $\psi_{\epsilon k}$ en la diagonal principal, con ϵ y ω independientes.

Este enfoque para manejar las covarianzas de las variables latentes puede conducir a una convergencia lenta en los modelos con muchas variables latentes correlacionadas. Para estimar a θ_z y θ_ω se utiliza muestreo *Gibbs* con JAGS (sólo otro muestreo de Gibbs) (Rosseel, 2012). En estos casos, se ha encontrado que es mejor en JAGS muestrear las variables latentes de distribuciones normales multivariadas.

Efecto total de un factor en otro factor en un MEEB

Dado los factores F_1, F_2 y F_3 , las cadenas con las que fueron obtenidos los efectos directos entre los factores $c_{\gamma_{21}}, c_{\gamma_{23}}$ y $c_{\pi_{31}}$, se define el efecto total del factor F_2 en el factor F_1 como la media de la suma de las cadenas del efecto directo $c_{\gamma_{21}}$ más el efecto indirecto, $c_{\gamma_{23}} \times c_{\pi_{31}}$. Así el efecto total estimado está dado por $\hat{E}_{T_{F_2 F_1}} = \frac{c_{\hat{\gamma}_{21}} + c_{\hat{\gamma}_{23}} \times c_{\hat{\pi}_{31}}}{n}$, donde n es la cantidad de elementos de cada cadena (Figura 3.10).

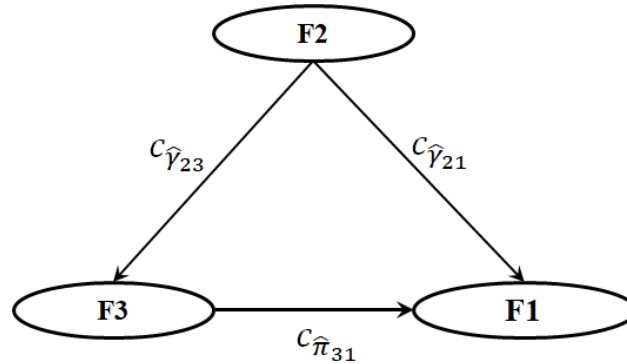


Figura 3.10: Efecto total de un factor en otro factor en un MEEB.

Diagnósticos de convergencia

Cuando se utilizan los métodos de MCMC se espera que las cadenas alcancen la convergencia a una distribución estacionaria, sin embargo, esto no siempre ocurre, es por esto que se recurre a varias pruebas estadísticas que me garanticen la convergencia de las cadenas.

Diagnóstico de Gelman-Rubin

Al generar múltiples cadenas de Markov, cada una con condiciones iniciales diferentes, un diagnóstico de convergencia es el de Gelman y Rubin, ellos proponen una prueba de convergencia basada en 2 o más cadenas paralelas, cada una inicia en diferentes valores que están sobre-dispersos con respecto a la verdadera distribución posterior (Gelman *et al.*, 1992). Su método se basa en una comparación de las varianzas dentro y entre cadenas para cada variable. De acuerdo con esto el estadístico de Gelman y Rubin está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Estadístico de Gelman y Rubin} \quad \sqrt{\hat{R}} &= \sqrt{\frac{\widehat{Var}(\theta)}{W}} \\ \text{Varianza dentro de las cadenas} \quad W &= \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\theta_j^i - \bar{\theta}_j)^2 \\ \text{Varianza estimada} \quad \widehat{Var}(\theta) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) W + \frac{1}{n} B \\ \text{Varianza entre cadenas} \quad B &= \frac{n}{(m-1)} \sum_{j=1}^m (\theta_j - \bar{\theta})^2 \end{aligned}$$

donde:

- m es la cantidad de cadenas.
- n es el tamaño de cada cadena.

que se puede interpretar como la medición del factor por el cual la desviación estándar de θ podría reducirse al extender la cadena. El factor \hat{R} disminuye a 1 cuando la longitud de la cadena tiende al infinito, por lo que \hat{R} debería estar cerca de 1 si las cadenas han convergido aproximadamente a la distribución objetivo. Gelman *et al.* (1992) sugieren que \hat{R} debe ser menor que 1.2.

Cuando declaramos la convergencia aproximada, se concluye que cada secuencia individual parece estacionaria y que las secuencias observadas se han mezclado bien entre sí.

Los diagnósticos de Gelman y Rubin reportados por la librería *coda* del software R son el 50 % y el 97,5 % cuantiles de la distribución de muestreo para este factor de reducción de escala (PSRF, por sus siglas en inglés).

Diagnóstico de Geweke

El diagnóstico de Geweke que se calcula para cada parámetro, verifica la convergencia de la media de estos con una sola cadena. Esta prueba realiza una comparación de las medias estimadas a partir de dos submuestras, la primera contiene el 10 % inicial de la muestra total y la segunda contiene el 50 % final.

Para la varianza asintótica de la media muestral se usa una estimación de la densidad de la teoría espectral. Sean ψ_a y ψ_b las submuestras antes mencionadas entonces:

$$Z = \frac{\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_b}{\sqrt{Var(\bar{\psi}_a) + Var(\bar{\psi}_b)}}$$

Asintóticamente Z tiene distribución normal estándar. Si $|Z| > 2.5$ entonces las medias son diferentes y por lo tanto no hay convergencia (Geweke, 1992).

Metodología

4.1. Población y muestra

La muestra de PISA está diseñada sobre una población de estudiantes con edades entre los 15 años y tres meses y 16 años y dos meses que asisten a las instituciones educativas oficiales y que cursan un grado equivalente al séptimo o superior para todos los países participantes. La prueba aplicada en el año 2015 evaluó un total de 7568 estudiantes de los distintos estados e instituciones educativas en México.

4.2. Base de datos

La base de datos (BD) PISA 2015 cuenta con un total de 732 variables, de estas habían grupos que respondían a una sola variable denominada índice, es por ello que se decidió trabajar solo con la variable índice y no con el grupo de variables que lo forman. Habían variables que tenían más del 20% de los datos perdidos por lo que se decidió eliminarlas. En el Cuadro 4.1 se listan las 52 variables con las cuales se da inicio al estudio.

Cuadro 4.1: Variables utilizadas de la base de datos PISA 2015.

| Variabes | Notación en BD | Descripción de la variable según PISA |
|--------------|----------------|---------------------------------------|
| x_1 (Adin) | ADINST | Adaptación de instrucción. |
| x_2 (Anxt) | ANXTEST | Personalidad: prueba de ansiedad. |

| | | |
|-----------------|-----------|--------------------------------------------------------------|
| x_3 (Auti) | AUTICT | Autonomía de los alumnos relacionada con el uso de las TIC. |
| x_4 (Belo) | BELONG | Bienestar subjetivo: sentido de pertenencia a la escuela. |
| x_5 (Bfm2) | BFMJ2 | Índice del estado ocupacional del padre. |
| x_6 (Bsmj) | BSMJ | Estado ocupacional esperado de los estudiantes. |
| x_7 (Comp) | COMPIC | Competencia de las TIC percibida por los estudiantes. |
| x_8 (Coop) | COOPERATE | Disfrutar de la cooperación y trabajo en equipo. |
| x_9 (Cpsv) | CPSVALUE | Cooperación de valor y trabajo en equipo. |
| x_{10} (Cult) | CULTPOSS | Bienes culturales en el hogar. |
| x_{11} (Curs) | CURSUPP | Apoyo parental actual para aprender en casa. |
| x_{12} (Disc) | DISCLISCI | Clima disciplinario en las clases de ciencias. |
| x_{13} (Emop) | EMOSUPP | Apoyo emocional de la familia. |
| x_{14} (Emos) | EMOSUPS | Apoyo emocional de los padres. |
| x_{15} (Entu) | ENTUSE | Uso de TIC fuera del ocio escolar. |
| x_{16} (Enva) | ENVAWARE | Conciencia ambiental. |
| x_{17} (Envo) | ENVOPT | Optimismo ambiental. |
| x_{18} (Epis) | EPIST | Creencias epistemológicas. |
| x_{19} (Escs) | ESCS | Índice de estatus económico, social y cultural. |
| x_{21} (Home) | HOMEPOS | Posesiones de la casa. |
| x_{22} (Hedr) | HEDRES | Recursos educativos en el hogar. |
| x_{23} (Hise) | hisei | Índice del mayor estatus ocupacional familiar. |
| x_{24} (Homs) | HOMESCH | Uso de las TIC fuera de la escuela para el trabajo escolar . |
| x_{25} (Ibte) | IBTEACH | Enseñanza de ciencias basada en la indagación. |
| x_{26} (Icth) | ICTHOME | Índice de las TIC disponibles en el hogar.. |
| x_{27} (Ictr) | ICTRES | Recursos tecnológicos. |
| x_{28} (Icts) | ICTSCH | Índice de las TIC disponible en la escuela. |
| x_{29} (Inst) | INSTSCIE | Motivación instrumental. |
| x_{30} (Intb) | INTBRSCI | Interés en temas amplios de ciencia. |
| x_{31} (Inti) | INTICT | Interés de los estudiantes por las TIC. |
| x_{32} (Joys) | JOYSCIE | El disfrute de la ciencia. |
| x_{33} (Lmin) | LMINS | Tiempo total dedicado a la lectura por semana. |
| x_{34} (Mmin) | MMINS | Tiempo dedicado a las matemáticas por semana. |
| x_{35} (Moti) | MOTIVAT | Actitudes del estudiante. |
| x_{36} (Outh) | OUTHOURS | Tiempo de estudio fuera de la escuela por semana. |
| x_{37} (Pasc) | PASCHPOL | Políticas escolares para la participación de los padres. |

| | | |
|-----------------|--------------|---------------------------------------------------------------|
| x_{38} (Perf) | PERFEED | Retroalimentación percibida. |
| x_{39} (Pqnp) | PQENPERC | Preocupación de los padres por los temas ambientales. |
| x_{40} (Pqen) | PQENVOPT | La visión de los padres sobre los futuros temas ambientales. |
| x_{41} (Pqge) | PQGENSCI | La visión de los padres sobre la ciencia. |
| x_{42} (Pqsc) | PQSCHOOL | Los padres perciben la calidad escolar. |
| x_{43} (Pres) | PRESUPP | Actividades científicas pasadas del niño. |
| x_{44} (Scie) | SCIEACT | Índice de actividades de ciencias. |
| x_{45} (Scif) | SCIEEFF | Autoeficacia de la ciencia. |
| x_{47} (Smin) | SMINS | Tiempo dedicado a la lectura de libros de ciencia. |
| x_{48} (Soia) | SOIAICT | Las TIC en los alumnos como un tema en la interacción social. |
| x_{49} (Tdte) | TDTEACH | Instrucción de ciencia dirigida por el maestro. |
| x_{50} (Teah) | TEACHSUP | Apoyo docente en una clase de elección de estudiantes. |
| x_{51} (Unte) | unfarteacher | Equidad del maestro. |
| x_{52} (Uses) | USESCH | Uso de las TIC en la escuela en general. |
| x_{53} (Weal) | WEALTH | Riqueza familiar. |
| y_1 (Pv1s) | PV1SCIE | Primer valor plausible en ciencias. |
| y_2 (Pv1m) | PV1MATH | Primer valor plausible en matemáticas. |
| y_3 (Pv1r) | PV1READ | Primer valor plausible en lectura. |

En el Cuadro 4.2 se muestra la media y la varianza de las 54 variables sin estandarizar; como se puede observar hay algunas varianzas muy grandes comparadas con las demás. Dado que para la estimación de un MEE, las variables observadas que serán incluidas en el modelo deben tener varianzas parecidas, entonces se estandarizó cada una de ellas.

Cuadro 4.2: Valores descriptivos de las variables sin estandarizar.

| Variable | Media | Varianza | Variable | Media | Varianza | Variable | Media | Varianza |
|----------|-------|----------|----------|-------|----------|----------|-------|----------|
| x_1 | 0.33 | 0.92 | x_2 | 0.23 | 0.85 | x_3 | -0.28 | 0.95 |
| x_4 | -0.09 | 1.20 | x_5 | 38.27 | 423.71 | x_6 | 66.38 | 216.17 |
| x_7 | 0.01 | 1.06 | x_8 | 0.22 | 1.07 | x_9 | 0.23 | 0.90 |
| x_{10} | -0.30 | 0.77 | x_{11} | 0.07 | 1.43 | x_{12} | 0.08 | 0.74 |
| x_{13} | 0.03 | 1.04 | x_{14} | 0.05 | 1.34 | x_{15} | -0.29 | 1.16 |
| x_{16} | 0.13 | 1.02 | x_{17} | -0.45 | 1.69 | x_{18} | -0.12 | 0.83 |

| | | | | | | | | |
|----------|--------|---------|----------|--------|----------|----------|--------|----------|
| x_{19} | -1.00 | 1.41 | x_{21} | -1.39 | 1.58 | x_{22} | -0.93 | 0.99 |
| x_{23} | 42.73 | 461.66 | x_{24} | 0.33 | 0.77 | x_{25} | 0.46 | 0.85 |
| x_{26} | 6.09 | 7.90 | x_{27} | -1.21 | 1.30 | x_{28} | 5.25 | 6.05 |
| x_{29} | 0.54 | 0.76 | x_{30} | 0.49 | 0.62 | x_{31} | -0.12 | 0.92 |
| x_{32} | 0.48 | 0.88 | x_{33} | 227.93 | 18886.27 | x_{34} | 237.88 | 8900.38 |
| x_{35} | 0.30 | 0.63 | x_{36} | 20.14 | 202.68 | x_{37} | 0.31 | 1.21 |
| x_{38} | 0.31 | 1.10 | x_{39} | 0.63 | 0.53 | x_{40} | -0.29 | 1.45 |
| x_{41} | 0.70 | 1.09 | x_{42} | 0.63 | 1.29 | x_{43} | 0.18 | 0.98 |
| x_{44} | 0.53 | 0.91 | x_{45} | 0.30 | 1.11 | x_{47} | 242.88 | 12590.90 |
| x_{48} | 0.22 | 0.77 | x_{49} | 0.13 | 0.85 | x_{50} | 0.47 | 0.82 |
| x_{51} | 8.15 | 8.90 | x_{52} | -0.11 | 0.97 | x_{53} | -1.28 | 1.72 |
| y_1 | 436.59 | 4663.69 | y_2 | 429.06 | 5456.40 | y_3 | 449.01 | 5437.37 |

4.3. Métodos para la selección de variables y obtención del MEE

El procedimiento realizado para la identificación de las variables observadas (Cuadro 4.1) y latentes que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos evaluados en PISA 2015, es el siguiente:

- Regresión múltiple multivariada.
- Análisis factorial exploratorio.
- Análisis factorial confirmatorio.

4.3.1. Modelo de regresión múltiple multivariado

Se utilizó el modelo de regresión múltiple multivariada:

$$E(y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} \mid X_{i1} = x_{i1}, \dots, X_{i53} = x_{i53}) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_{53} x_{i53} \quad (4.1)$$

para identificar las variables observadas exógenas que influyen en el rendimiento académico.

Para la selección de variables se utilizó la función *mStep* del paquete *qtlmt* (Cheng, 2017) del software estadístico R, con el método de selección hacia adelante y criterio de información bayesiana (BIC, por sus siglas en inglés).

4.3.2. Análisis factorial exploratorio

Para determinar si es pertinente el AF, además de calcular el determinante de la matriz de correlaciones, se realizó la prueba de esfericidad de Bartlett y se calculó el KMO. Para ello se utilizaron las funciones *cortest.bartlett* y *KMO* ambas del paquete *psych* (Revelle, 2017).

Una vez que se ha determinado la pertinencia de la aplicación del AF se procedió a determinar la cantidad de variables latentes que serán utilizadas en el MEE, para ello se realizó el siguiente procedimiento:

1. Se calculó los valores propios de la matriz de correlación de las variables observadas exógenas, para ello se utilizó la función *eigen* del paquete *base* (R Core Team, 2017).
2. Se obtuvo el gráfico de sedimentación, con la función *princomp* del paquete *stats* (R Core Team, 2017).
3. Se realizó un análisis de componentes principales para 9 factores, para ello se utilizó la función *principal* del paquete *psych* (Revelle, 2017).

Se calculó el grado de consistencia interna de cada variable latente y además se determinó la variación de esta consistencia al eliminar una variable observada, esto se hizo con el cálculo del coeficiente α – *Cronbach* con la función *cronbach* del paquete *multilevel* (Bliese, 2016).

4.3.3. Análisis factorial confirmatorio

Del AFE se obtuvo posibles modelos que explican el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos evaluados en PISA 2015. Para determinar las correlaciones entre las variables observadas en términos de las variables latentes se realizó el AFC y se utilizó la función *cfa* del paquete *lavaan* (Rosseel, 2012). Esta función da los resultados de varios estadísticos de bondad de ajuste que permitieron la comparación de los modelos existentes. Una vez obtenido el modelo se determinó la cantidad de parámetros a estimar y su identificabilidad (3.11 y 3.12).

4.3.4. Estimación del modelo

4.3.5. Estimación clásica

Para hacer la estimación de los parámetros del modelo vía MV se utilizó la función *sem* del paquete *lavaan* (Rosseel, 2012). Esta función mostró el valor numérico de las estimaciones de cada uno de los parámetros presentes en el modelo. Se calculó el efecto total de cada uno de los factores independientes en el factor dependiente.

4.3.6. Estimación bayesiana

En la estimación de los parámetros del modelo bajo el enfoque bayesiano se utilizó la función *bsem* del paquete *blavaan* (Merkle y Rosseel, 2016). El vector de parámetros considerado es $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}_\omega, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}_\epsilon, \boldsymbol{\Psi}_\zeta)$

Distribución a priori:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &\sim \mathcal{N}(\alpha_1, \beta_1) \\ \Psi_{\epsilon_i} &\sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta_2) \\ \Psi_\zeta &\sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta_2) \\ \Lambda_{\omega_i} &\sim \mathcal{N}(\alpha_3, \beta_3) \\ \boldsymbol{\Phi} &\sim \text{Wishart}(I_{(m+1) \times (m+1)}, m + 1)\end{aligned}$$

donde: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ y m son los hiperparámetros.

Las distribuciones posteriores generadas mediante MCMC se obtuvieron con 4000 iteraciones de las que se eliminaron las primeras 1500.

Se calculó el efecto total de cada uno de los factores independientes en el factor dependiente.

Se utilizó la función *plot* del paquete *blavaan* (Merkle y Rosseel, 2016) para mostrar de forma gráfica el comportamiento de las cadenas MCMC para cada uno de los parámetros estimados.

Para determinar el PSRF se utiliza la función *blavInspect* del paquete *blavaan* (Merkle y Rosseel, 2016).

Resultados

5.1. Selección de variables y construcción del modelo

Los resultados de la función *mStep* con el modelo de regresión múltiple multivariada (4.1) indica eliminar las variables $x_1, x_{15}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{37}, x_{39}$ y x_{41} (Cuadro 5.1) ya que sus p -valor son mayor que 0.05, por lo que no se utilizarán en los análisis sucesivos, el resultado para todas las variables se muestra en el Anexo 1.

Cuadro 5.1: Variables eliminadas en la regresión.

| Variable | Descripción | $p - \text{valor} > 0.05$ |
|----------|---------------------------------------------------------|---------------------------|
| x_1 | Adaptación de instrucción | 0.51 |
| x_{15} | Uso de TIC fuera del ocio escolar | 0.28 |
| x_{23} | Índice del mayor estatus ocupacional familiar | 0.34 |
| x_{33} | Tiempo total dedicado a la lectura por semana | 0.13 |
| x_{34} | Tiempo dedicado a las matemáticas por semana | 0.80 |
| x_{37} | Políticas escolares para la participación de los padres | 0.06 |
| x_{39} | Preocupación de los padres por los temas ambientales | 0.27 |
| x_{41} | La visión de los padres sobre la ciencia | 0.44 |

5.1.1. Análisis factorial exploratorio

El determinante de la matriz de correlación de las variables observadas exógenas es próximo a cero ($|\mathbf{R}| = 9.45 \times 10^{-8}$); además al aplicar la prueba de esfericidad de Bartlett se obtiene un $p\text{-valor} < 0.05$, por lo que se acepta la hipótesis alternativa de que la matriz de correlación de las variables observadas exógenas es distinta a la matriz identidad; el índice KMO es de 0.82 (Anexo 2) el cual es considerado como un buen resultado ($KMO \geq 0.8$). Por lo antes planteado se puede concluir que es recomendable realizar el AF.

La base de datos que se utilizó en el estudio cumple con los estándares propuestos por los autores para la realización del AFE en cuanto a la proporción existente entre el tamaño de la muestra y la cantidad de variables, ya que tiene 7568 alumnos y para el AFE se tienen 43 variables observadas exógenas.

Extracción de variables latentes

De acuerdo con el AFE, si se considera la naturaleza de las variables observadas, su significado en el contexto y los resultados de la literatura (Reyes *et al.*, 2014; Escudero *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2011) se deben considerar 7 factores para estudiar el efecto que estos tienen en el rendimiento académico. Por otra parte de acuerdo a los valores propios de la matriz de correlación de las variables observadas exógenas, (Anexo 3), se deben utilizar 11 factores, por ser la cantidad de valores propios con resultado mayor que 1 (Kaiser, 1970).

El gráfico de sedimentación y codo (Figura 5.1), sugiere que se usen solo 5 factores pues es donde evidencia mayor cambio de pendiente, no obstante por los valores numéricos próximos a 1 sugiere que con 9 factores es suficiente (Anexo 4).

Al hacer el análisis de componentes principales (ACP) para 9 factores, se tiene una capacidad explicativa del 50 % de la varianza total de los datos; este análisis sugiere eliminar las variables: x_4 , x_6 y x_{29} (Cuadro 5.2), ya que la *comunalidad* (h_2) es menor que 0.3 (Anexo 5). El ACP, también permite determinar el efecto de cada uno de los 9 factores propuestos en las variables observadas y así agrupar cada una de estas en el factor que más incide. El Cuadro 5.3 muestra las variables observadas con la variable latente que más efecto tiene sobre ella.

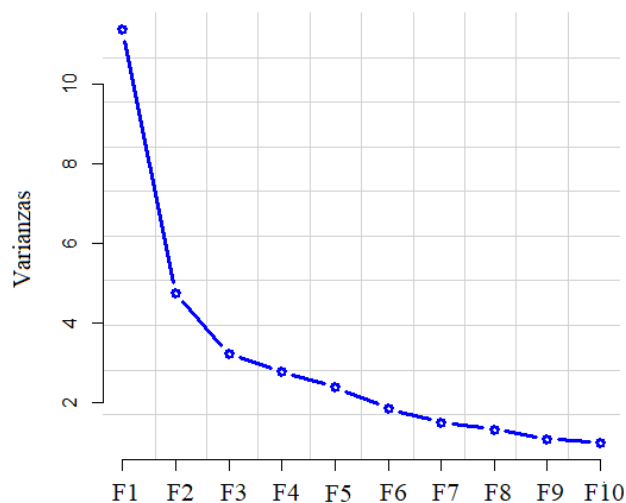


Figura 5.1: Gráfica de sedimentación.

Cuadro 5.2: Variables con comunalidad menor que 0.3 en el ACP.

| Variable | Descripción | Comunalidad |
|----------|-----------------------------------------------------------|-------------|
| x_4 | Bienestar subjetivo: sentido de pertenencia a la escuela. | 0.27 |
| x_6 | Estado ocupacional esperado de los estudiantes. | 0.21 |
| x_{29} | Motivación instrumental. | 0.25 |

Cuadro 5.3: Resultado de la agrupación de las variables observadas por CP.

| Factor | Variabes |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| PC1 | $x_3, x_5, x_7, x_{10}, x_{19}, x_{21}, x_{22}, x_{24}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{52}, x_{53}$ |
| PC2 | $x_8, x_{16}, x_{25}, x_{30}, x_{32}, x_{38}, x_{44}, x_{45}, x_{49}, x_{50}$ |
| PC3 | $x_{12}, x_{31}, x_{48}, x_{51}$ |
| PC4 | x_{14}, x_{35} |
| PC5 | x_{43} |
| PC6 | $x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{42}$ |
| PC7 | x_2, x_9 |
| PC8 | x_{17}, x_{40} |
| PC9 | x_{36}, x_{47} |

El Cuadro 5.3 muestran las variables observadas con comunalidad mayor que 0.3 y de acuerdo a lo que mide cada una de éstas variables se proponen 6 factores (Cuadro 5.4).

Cuadro 5.4: Agrupación de las variables observadas de acuerdo a su descripción.

| Factor | VARIABLES |
|--------|--------------------------------------------------------------------------|
| F1 | $x_2, x_8, x_9, x_{12}, x_{16}, x_{17}, x_{35}$ |
| F2 | $x_{18}, x_{30}, x_{32}, x_{36}, x_{38}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{47}$ |
| F3 | $x_3, x_7, x_{24}, x_{31}, x_{48}, x_{52}$ |
| F4 | $x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{40}, x_{42}$ |
| F5 | $x_{25}, x_{49}, x_{50}, x_{51}$ |
| F6 | $x_5, x_{10}, x_{19}, x_{21}, x_{22}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{53}$ |

De acuerdo a la descripción de las variables que fueron agrupadas en el Cuadro 5.4 se decidió denominar a los factores como se muestra en el Cuadro 5.5.

Cuadro 5.5: Definición de los factores de acuerdo a la descripción de las variables observadas que lo conforman.

| Factor | Descripción |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Afectivo (FEA $\rightarrow \xi_1$) | Actitudes, emociones, concepciones y creencias del estudiante. |
| Cognitivo (FEC $\rightarrow \xi_2$) | Habilidades y antecedentes del estudiante relacionados con el conocimiento. |
| Tecnológico (FET $\rightarrow \xi_3$) | Competencia del estudiante en el uso de las TIC. |
| Familia (FFA $\rightarrow \xi_4$) | Vínculo entre el estudiante y la familia. |
| Profesor (FPR $\rightarrow \xi_5$) | Vínculo entre el estudiante y el profesor. |
| Socioeconómico (FSE $\rightarrow \xi_6$) | Nivel socioeconómico del estudiante. |
| Rendimiento (FRE $\rightarrow \eta_7$) | Rendimiento escolar del estudiante. |

Fiabilidad

El Cuadro 5.6 muestra el $\alpha - Cronbach$ para cada uno de los factores obtenidos.

El Cuadro 5.7 muestra que si se eliminan las variables observadas $x_2, x_5, x_{10}, x_{12}, x_{16}, x_{17}, x_{22}, x_{28}, x_{36}, x_{40}, x_{47}$ y x_{51} el valor del $\alpha - Cronbach$ aumenta para cada uno de sus factores correspondientes.

Cuadro 5.6: Fiabilidad de escala $\alpha - Cronbach$ por factores.

| Factor | No. variables observadas | $\alpha - Cronbach$ |
|--------|--------------------------|---------------------|
| FEA | 7 | 0.38 |
| FEC | 9 | 0.60 |
| FET | 6 | 0.77 |
| FFA | 5 | 0.40 |
| FPR | 4 | 0.40 |
| FSE | 9 | 0.91 |

Cuadro 5.7: Variables que incrementan el $\alpha - Cronbach$ si son eliminadas.

| Variable | Descripción | Factor | α con x_i | α sin x_i |
|----------|--------------------------------------------------------------|--------|--------------------|--------------------|
| x_2 | Personalidad: prueba de ansiedad. | FEA | 0.38 | 0.60 |
| x_5 | Índice del estado ocupacional del padre. | FSE | 0.91 | 0.96 |
| x_{10} | Bienes culturales en el hogar. | FSE | 0.61 | 0.96 |
| x_{12} | Clima disciplinario en las clases de ciencias. | FEA | 0.38 | 0.60 |
| x_{16} | Conciencia ambiental. | FEA | 0.38 | 0.60 |
| x_{17} | Optimismo ambiental. | FEA | 0.38 | 0.60 |
| x_{22} | Recursos educativos en el hogar. | FSE | 0.91 | 0.96 |
| x_{28} | Índice de las TIC disponible en la escuela. | FSE | 0.91 | 0.96 |
| x_{36} | Tiempo de estudio fuera de la escuela por semana. | FEC | 0.60 | 0.64 |
| x_{40} | La visión de los padres sobre los futuros temas ambientales. | FFA | 0.40 | 0.50 |
| x_{47} | Tiempo dedicado a la lectura de libros de ciencia. | FEC | 0.60 | 0.64 |
| x_{51} | Equidad del maestro. | FPR | 0.40 | 0.66 |

El Cuadro 5.8 muestra el $\alpha - Cronbach$ para cada uno de los factores obtenidos, luego de eliminar las variables del Cuadro 5.7.

Cuadro 5.8: Fiabilidad de escala $\alpha - Cronbach$ por factores luego de la eliminación de variables.

| Factor | No. variables observadas | $\alpha - Cronbach$ |
|--------|--------------------------|---------------------|
| FEA | 3 | 0.60 |
| FEC | 7 | 0.64 |
| FET | 6 | 0.77 |
| FFA | 4 | 0.50 |
| FPR | 3 | 0.66 |
| FSE | 5 | 0.96 |

Hasta este momento se cuentan con 2 propuestas de modelos, cada uno con 7 factores, pero con 43 y 31 variables observadas respectivamente, en el Cuadro 5.9 se muestran las variables que conforman estos modelos.

Cuadro 5.9: Variables que conforman cada uno de los modelos obtenidos.

| Factor | Modelo 1 | Modelo 2 |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| ξ_1 | $x_2, x_8, x_9, x_{12}, x_{16}$ x_{17}, x_{35} | x_8, x_9 x_{35} |
| ξ_2 | $x_{18}, x_{30}, x_{32}, x_{36}, x_{38}$ $x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{47}$ | $x_{18}, x_{30}, x_{32}, x_{38}$ x_{43}, x_{44}, x_{45} |
| ξ_3 | $x_3, x_7, x_{24}, x_{31}, x_{48}, x_{52}$ | $x_3, x_7, x_{24}, x_{31}, x_{48}, x_{52}$ |
| ξ_4 | $x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{40}, x_{42}$ | $x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{42}$ |
| ξ_5 | $x_{25}, x_{49}, x_{50}, x_{51}$ | x_{25}, x_{49}, x_{50} |
| ξ_6 | $x_5, x_{10}, x_{19}, x_{21}, x_{22}$ $x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{53}$ | x_{19}, x_{21} x_{26}, x_{27}, x_{53} |
| η_7 | y_1, y_2, y_3 | y_1, y_2, y_3 |

Al observar el Cuadro 5.9 se puede plantear la siguiente estructura para el modelo:

Modelo de medida:

$$x_i = \sum \lambda_{ij} \xi_j + \delta_i, \quad i = 1, \dots, 53 \text{ y } j = 1, \dots, 6$$

$$y_i = \lambda_{i7} \eta_7 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Modelo estructural:

$$\eta_7 = \sum_{i=1}^6 \gamma_i \xi_i + \zeta_7$$

donde las variables x_i y y_i están en el Cuadro 5.9 para ambos modelos.

5.1.2. Análisis factorial confirmatorio

En el Cuadro 5.10 se muestran los resultados de 5 estadísticos (*CFI*, *TLI*, *RMSEA*, *AIC*, *BIC*) luego de hacer el AFC a los modelos obtenidos, estos resultados sugieren utilizar el Modelo 2 pues su *AIC*, *BIC* es el menor y el *CFI*, *TLI*, *RMSEA* son aceptables.

Cuadro 5.10: Bondad de ajuste del AFC para cada uno de los modelos obtenidos

| Criterio | Modelo 1 | Modelo 2 |
|----------|----------|----------|
| CFI | 0.7410 | 0.8800 |
| TLI | 0.7210 | 0.8650 |
| AIC | 378414 | 337792 |
| BIC | 379005 | 338252 |
| RMSEA | 0.0750 | 0.0640 |

El Modelo 2, el cual es el que se va a estimar cuenta con 31 variables observadas y 7 factores, el mismo está sobreidentificado pues $gl = 413$, esto permite estimar los 83 parámetros involucrados del modelo.

El Cuadro 5.11 muestra las variables resultantes del AFE y el AFC, estas variables son las que conforman el Modelo 2.

Cuadro 5.11: Resultado de la selección de variables.

| Variabes | Notación en BD | Descripción de la variable según PISA |
|-----------------|----------------|-------------------------------------------------------------|
| x_3 (Auti) | AUTICT | Autonomía de los alumnos relacionada con el uso de las TIC. |
| x_7 (Comp) | COMP ICT | Competencia de las TIC percibida por los estudiantes. |
| x_8 (Coop) | COOPERATE | Disfrutar de la cooperación y trabajo en equipo. |
| x_9 (Cpsv) | CPSVALUE | Cooperación de valor y trabajo en equipo. |
| x_{11} (Curs) | CURSUPP | Apoyo parental actual para aprender en casa. |
| x_{13} (Emop) | EMOSUPP | Apoyo emocional de la familia. |
| x_{14} (Emos) | EMOSUPS | Apoyo emocional de los padres. |

| | | |
|-----------------|----------|---------------------------------------------------------------|
| x_{18} (Epis) | EPIST | Creencias epistemológicas. |
| x_{19} (Escs) | ESCS | Índice de estatus económico, social y cultural. |
| x_{21} (Home) | HOMEPOS | Posesiones de la casa. |
| x_{24} (Homs) | HOMESCH | Uso de las TIC fuera de la escuela para el trabajo escolar . |
| x_{25} (Ibte) | IBTEACH | Enseñanza de ciencias basada en la indagación. |
| x_{26} (Icth) | ICTHOME | Índice de las TIC disponibles en el hogar. |
| x_{27} (Ictr) | ICTRES | Recursos tecnológicos. |
| x_{30} (Intb) | INTBRSCI | Interés en temas amplios de ciencia. |
| x_{31} (Inti) | INTICT | Interés de los estudiantes por las TIC. |
| x_{32} (Joys) | JOYSCIE | El disfrute de la ciencia. |
| x_{35} (Moti) | MOTIVAT | Actitudes del estudiante. |
| x_{38} (Perf) | PERFEED | Retroalimentación percibida. |
| x_{42} (Pqsc) | PQSCHOOL | Los padres perciben la calidad escolar. |
| x_{43} (Pres) | PRESUPP | Actividades científicas pasadas del niño. |
| x_{44} (Scie) | SCIEACT | Índice de actividades de ciencias. |
| x_{45} (Scif) | SCIEEFF | Autoeficacia de la ciencia. |
| x_{48} (Soia) | SOIAICT | Las TIC en los alumnos como un tema en la interacción social. |
| x_{49} (Tdte) | TDTEACH | Instrucción de ciencia dirigida por el maestro. |
| x_{50} (Teah) | TEACHSUP | Apoyo docente en una clase de elección de estudiantes. |
| x_{52} (Uses) | USESCH | Uso de las TIC en la escuela en general. |
| x_{53} (Weal) | WEALTH | Uso de las TIC en la escuela en general. |
| y_1 (Pv1s) | PV1SCIE | Primer valor plausible en ciencias. |
| y_2 (Pv1m) | PV1MATH | Primer valor plausible en matemáticas. |
| y_3 (Pv1r) | PV1READ | Primer valor plausible en lectura. |

5.2. MEE obtenido para estudiar el rendimiento escolar en PISA 2015

En la Figura 5.2 se muestra el diagrama estructural del modelo formado por las variables presentadas en la sección anterior. Se puede observar que hay 6 factores independientes que tienen efecto en el rendimiento escolar (factor dependiente).

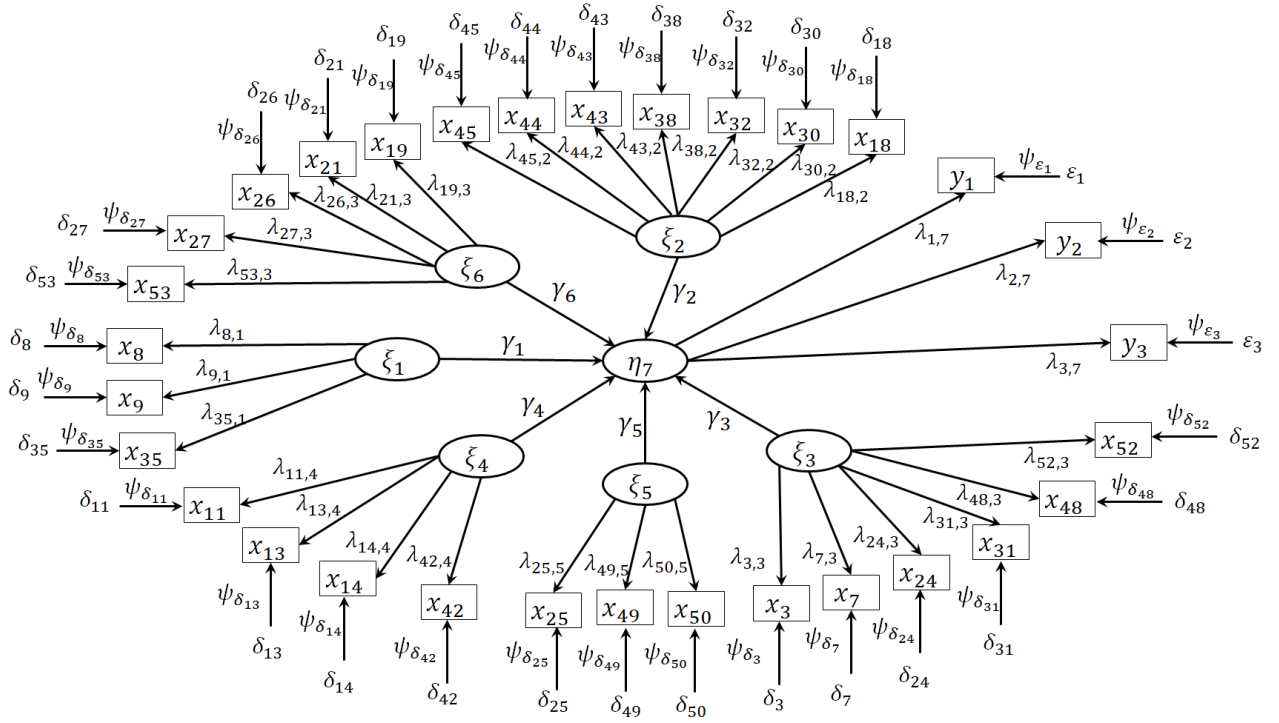


Figura 5.2: Diagrama estructural con 7 variables latentes y 31 variables observadas

El diagrama representado en la Figura 5.2 se traduce en el siguiente MEE:

Modelo de medida:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \lambda_{i1}\xi_1 + \delta_i, \quad i = \{8, 9, 35\} \\
 x_i &= \lambda_{i2}\xi_2 + \delta_i, \quad i = \{18, 30, 32, 38, 43, 44, 45\} \\
 x_i &= \lambda_{i3}\xi_3 + \delta_i, \quad i = \{3, 7, 24, 31, 48, 52\} \\
 x_i &= \lambda_{i4}\xi_4 + \delta_i, \quad i = \{11, 13, 14, 42\} \\
 x_i &= \lambda_{i5}\xi_5 + \delta_i, \quad i = \{25, 49, 50\} \\
 x_i &= \lambda_{i6}\xi_6 + \delta_i, \quad i = \{19, 21, 26, 27, 53\} \\
 y_i &= \lambda_{i7}\eta_7 + \varepsilon_i, \quad i = \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

Modelo estructural:

$$\eta_7 = \sum_{i=1}^6 \gamma_i \xi_i + \zeta_7$$

5.2.1. Estimación del modelo estadístico planteado

Estimación vía MV

Los resultados del $CFI = 0.88$ y el $TLI = 0.87$ para el modelo planteado son mayores que el valor de referencia 0.80, lo cual significa un buen ajuste del modelo. El $RMSEA = 0.06$ es menor al también valor de referencia 0.08 (González-Montesinos y Escudero, 2010). Dichos resultados significan que existe un ajuste razonable entre el modelo y los datos.

La Figura 5.3 muestra la estimación clásica vía MV y el efecto de cada una de las variables latentes sobre sus respectivas variables observadas, todos los parámetros estimados son estadísticamente significativos. Los resultados completos se encuentran en el Anexo 6.

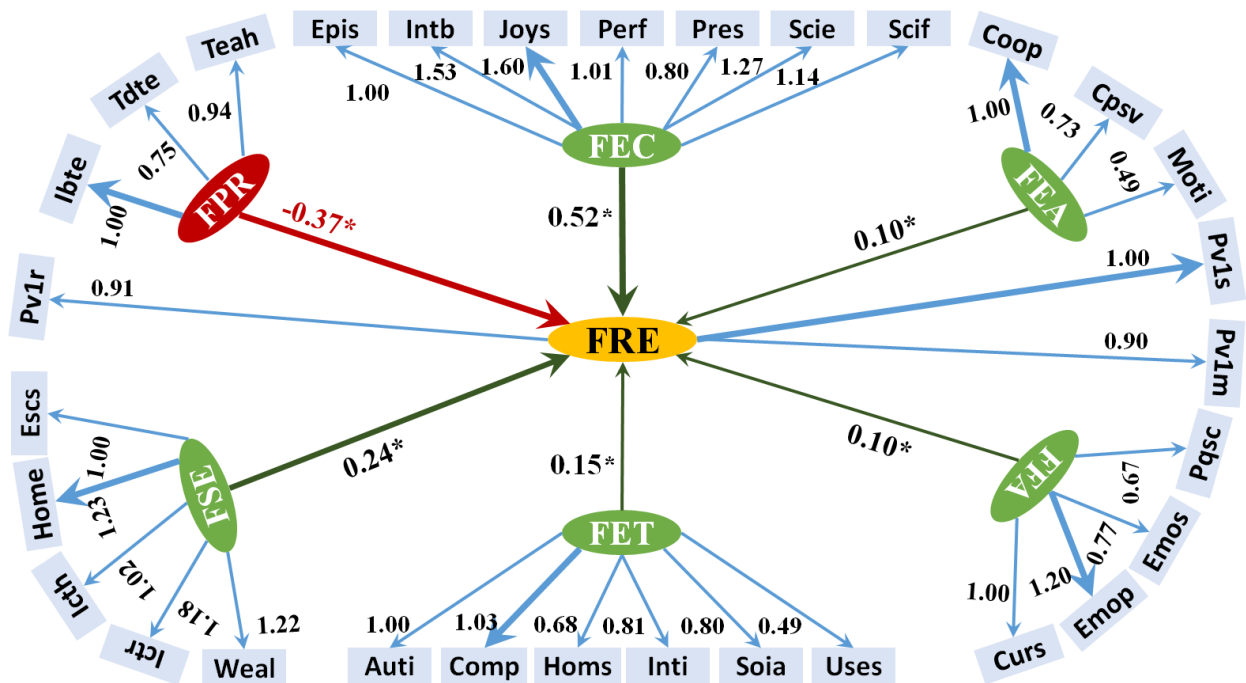


Figura 5.3: Resultados de la estimación clásica vía MV.

El efecto del rendimiento escolar en los valores plausibles en ciencias, matemáticas y lectura muestra coeficientes de regresión que oscilan entre 0.90 y 1.00, el efecto correspondiente a ciencias es el mayor y el de matemáticas el menor, no obstante hay que señalar que son valores altos.

En el factor afectivo del alumno, los coeficientes de regresión están en un rango de 0.49 a 1.00 donde la colaboración y disposición de trabajo en equipo es la que mayor efecto recibe

(1.00), seguida de la cooperación en la colaboración y disposición de trabajo en equipo (0.73) y por último la variable correspondiente a la motivación en la autopreparación del alumno (0.49).

En el factor relacionado con el conocimiento del alumno los coeficientes de regresión tuvieron un efecto que oscila entre 0.80 y 1.60. Los efectos más débiles fueron sobre las variables relacionada con las actividades científicas pasadas del niño (0.80), las creencias epistemológicas del alumno (1.00), la retroalimentación percibida (1.01) y la autoeficacia en ciencias (1.14) mientras que los efectos más fuerte los tuvieron el disfrute por las ciencias (1.60), el interés en temas altos de ciencia (1.53) y el índice de actividad científica del niño (1.27).

El factor que relaciona al estudiante con el uso que este le de a las tecnologías muestra una relación con sus variables observadas que va desde 0.40 hasta 1.03. En las variables que menos efectos tuvo dicho factor fue en el uso de las TIC en la escuela en general (0.49), el uso de las TIC fuera de la escuela para el trabajo escolar (0.68), las TIC en los estudiantes como un tema de interacción social (0.80) y el interés de las TIC del estudiante (0.81). Los efectos más fuerte los tuvieron las competencias de las TIC percibidas por los estudiantes (1.03) y la autonomía percibida en el trabajo con las TIC (1.00).

El factor influencia de la familia sobre el alumno presenta coeficientes de regresión que se encuentran entre 0.67 y 1.20. Las variables en las que menor efecto tuvo este factor fueron donde cómo los padres perciben la calidad de la escuela (0.67) y el apoyo emocional de la familia (0.77). Los mayores efectos fueron recibidos sobre el apoyo emocional de los padres (1.20) y el apoyo actual de los padres para el aprendizaje en el hogar (1.00).

El factor influencia del profesor sobre el alumno tiene efectos en sus variables observadas que se encuentran entre 0.75 y 1.00, este factor donde menos efecto tuvo fue en la instrucción del maestro en una clase de ciencias (0.75) y el apoyo docente en una clase de elección del estudiante (0.96), mientras que donde mayor efecto tuvo fue en la enseñanza de ciencias basada en la práctica del aprendizaje (1.00).

El factor socioeconómico tiene coeficientes de regresión altos que se encuentran entre 1.00 y 1.23. Las variables en las que menor efecto hubo fue en el índice del estatus económico, social y cultural del estudiante (1.00), el índice de las TIC disponibles en el hogar (1.02) y los recursos tecnológicos del estudiante (1.18). Las variables que mayor efecto recibieron fueron

las posesiones en el hogar (1.23) y la riqueza familiar (1.22).

Las cargas factoriales se interpretan de la siguiente manera: cuando cambia la variable latente en una unidad, entonces cambia el efecto de esta en la variable observada si se fijan los demás efectos del factor en las restantes variables observadas. En la Figura 5.3 si se aumenta en una unidad la variable latente profesor y se fijan los efectos sobre la instrucción en ciencias dirigida por el profesor y el apoyo del profesor en una clase de ciencias a elección de los estudiantes entonces la variable enseñanza de ciencias basada en la práctica del aprendizaje del estudiante aumenta en una unidad. Todos los efectos fueron significativos para el modelo.

En la Figura 5.3 se observa el efecto directo y significativo de cada uno de los factores exógenos en el factor endógeno (FRE). Se puede observar además que el factor de mayor efecto es el que contiene las variables relacionadas con el conocimiento del estudiante (0.52) el cual influye en su rendimiento de manera positiva, seguido por el factor correspondiente a las variables del profesor (-0.37) que influye de manera negativa. Los resultados muestran que si se incrementa el conocimiento del estudiante entonces incrementa el rendimiento escolar de éste.

Estimación bayesiana

Las distribuciones a priori utilizadas para cada uno de los parámetros fueron:

$$\Lambda_i \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\gamma_i \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\Psi_{\epsilon_i} \sim \text{Gamma}(1, 0.5)$$

$$\Psi_{\zeta} \sim \text{Gamma}(1, 0.5)$$

$$\Lambda_{w_i} \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\Phi \sim \text{Wishart}(I_{7 \times 7}, 7)$$

Los valores del PSRF son menores que 1.2 (Anexo 7) para todos los parámetros estimados, lo que muestra que hay convergencia de las cadenas (Gelman *et al.*, 1992).

Se aplicó la prueba de Geweke donde se obtuvo que para todos los parámetros estimados $|Z| < 2.5$ lo que indica convergencia (Geweke, 1992). En la Figura 5.4 se observa que hay buena mezcla entre las cadenas del MCMC para $\lambda_{9,1}$. Las estimaciones de todos los parámetros fueron estadísticamente significativas.

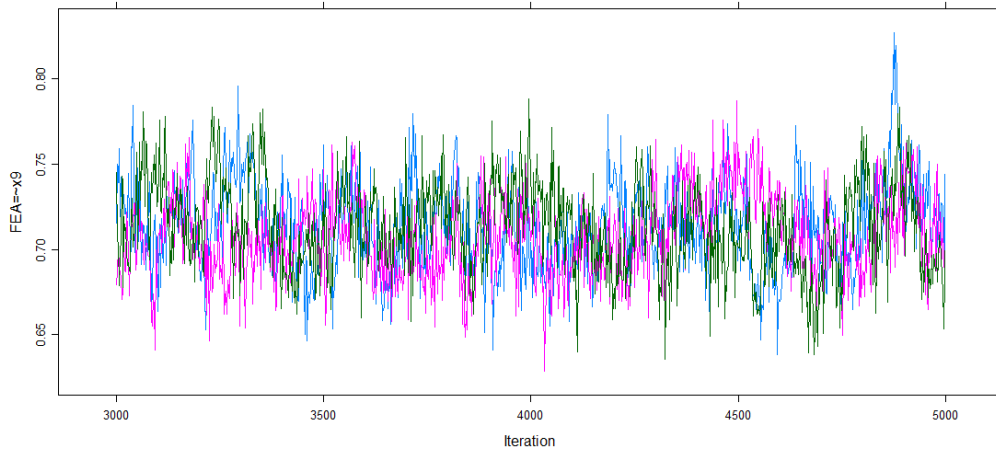


Figura 5.4: Gráfica de convergencia de cada una de las cadenas de MCMC para $\lambda_{9,1}$.

La Figura 5.5 muestra el diagrama del MEE luego de hacer la estimación bayesiana del MEE, los mismos se encuentran detallados en el Anexo 7. El comportamiento de los coeficientes de regresión entre las variables observadas con sus variables latentes es parecido al obtenido en la estimación clásica.

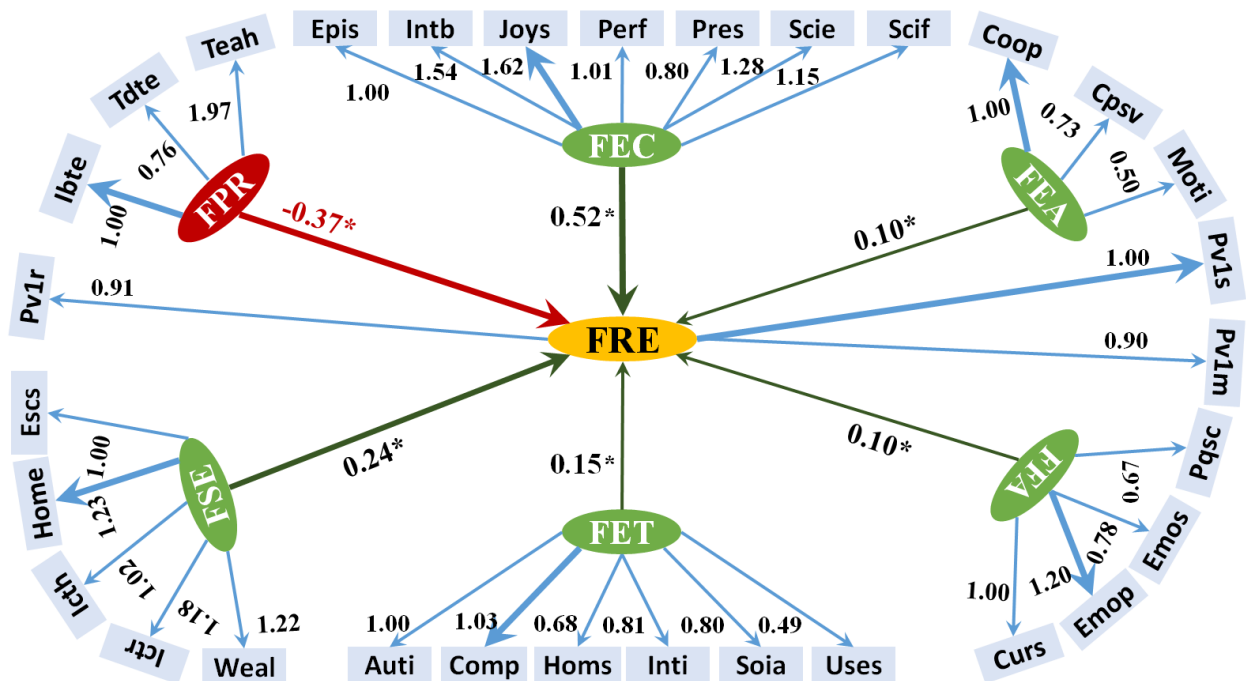


Figura 5.5: Resultados de la estimación del MEE bajo el enfoque bayesiano.

En la Figura 5.5 se observa el efecto directo de cada uno de los factores exógenos en el

factor endógeno. Se observan resultados semejantes a los obtenidos en la sección anterior, aunque se utilizaron métodos distintos de estimación, resultados que eran de esperarse pues la muestra es suficientemente grande y la función de verosimilitud es la que domina sobre las a distribuciones a priori propuestas.

El Cuadro 5.12 muestra los resultados obtenidos con la estadística clásica vía MV y la estadística bayesiana para el MEE propuesto, así como los intervalos de confianza y creíbles respectivamente para cada uno de los parámetros estimados. Para el MEE y el MEEB se estimó un total de 83 parámetros, los resultados se encuentran detallados en el Anexo 6 y Anexo 7.

Cuadro 5.12: Resultados de la estimación del MEE frecuentista y bayesiana.

| Factor | Parámetros | EMV | | | Estimación bayesiana | | |
|---------------|---------------------------------|------|-------|--------|----------------------|-------|--------|
| | | MV | 2.5 % | 97.5 % | Media | 2.5 % | 97.5 % |
| ξ_1 (FEA) | $\lambda_{8,1} (x_8)$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| | $\hat{\lambda}_{9,1} (x_9)$ | 0.73 | 0.67 | 0.78 | 0.73 | 0.69 | 0.78 |
| | $\hat{\lambda}_{35,1} (x_{35})$ | 0.49 | 0.45 | 0.54 | 0.50 | 0.45 | 0.54 |
| ξ_2 (FEC) | $\lambda_{18,2} (x_{18})$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| | $\hat{\lambda}_{30,2} (x_{30})$ | 1.53 | 1.38 | 1.68 | 1.54 | 1.41 | 1.66 |
| | $\hat{\lambda}_{32,2} (x_{32})$ | 1.60 | 1.45 | 1.76 | 1.62 | 1.48 | 1.75 |
| | $\hat{\lambda}_{38,2} (x_{38})$ | 1.01 | 0.89 | 1.13 | 1.01 | 0.90 | 1.13 |
| | $\hat{\lambda}_{43,2} (x_{43})$ | 0.80 | 0.69 | 0.91 | 0.80 | 0.71 | 0.91 |
| | $\hat{\lambda}_{44,2} (x_{44})$ | 1.27 | 1.14 | 1.40 | 1.28 | 1.14 | 1.39 |
| | $\hat{\lambda}_{45,2} (x_{45})$ | 1.14 | 1.02 | 1.27 | 1.15 | 1.03 | 1.26 |
| ξ_3 (FET) | $\lambda_{3,3} (x_3)$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| | $\hat{\lambda}_{7,3} (x_7)$ | 1.03 | 0.99 | 1.08 | 1.03 | 0.99 | 1.08 |
| | $\hat{\lambda}_{24,3} (x_{24})$ | 0.68 | 0.64 | 0.73 | 0.68 | 0.64 | 0.73 |
| | $\hat{\lambda}_{31,3} (x_{31})$ | 0.81 | 0.77 | 0.85 | 0.81 | 0.77 | 0.86 |
| | $\hat{\lambda}_{48,3} (x_{48})$ | 0.80 | 0.75 | 0.84 | 0.80 | 0.76 | 0.84 |
| | $\hat{\lambda}_{52,3} (x_{52})$ | 0.49 | 0.44 | 0.53 | 0.49 | 0.45 | 0.53 |
| ξ_4 (FFA) | $\lambda_{11,4} (x_{11})$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| | $\hat{\lambda}_{13,4} (x_{13})$ | 1.20 | 1.07 | 1.33 | 1.20 | 1.07 | 1.33 |
| | $\hat{\lambda}_{14,4} (x_{14})$ | 0.77 | 0.68 | 0.87 | 0.78 | 0.68 | 0.88 |
| | $\hat{\lambda}_{42,4} (x_{42})$ | 0.67 | 0.58 | 0.77 | 0.67 | 0.58 | 0.77 |

| | | | | | | | |
|----------------------|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $\lambda_{25,5} (x_{25})$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| $\xi_5(\text{FPR})$ | $\hat{\lambda}_{49,5} (x_{49})$ | 0.75 | 0.69 | 0.81 | 0.76 | 0.69 | 0.82 |
| | $\hat{\lambda}_{50,5} (x_{50})$ | 0.96 | 0.89 | 1.03 | 0.97 | 0.89 | 1.04 |
| | $\lambda_{19,6} (x_{19})$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| | $\hat{\lambda}_{21,6} (x_{21})$ | 1.23 | 1.20 | 1.25 | 1.23 | 1.20 | 1.25 |
| $\xi_6(\text{FSE})$ | $\hat{\lambda}_{26,6} (x_{26})$ | 1.02 | 0.99 | 1.05 | 1.02 | 0.99 | 1.05 |
| | $\hat{\lambda}_{27,6} (x_{27})$ | 1.18 | 1.15 | 1.21 | 1.18 | 1.15 | 1.21 |
| | $\hat{\lambda}_{53,6} (x_{53})$ | 1.22 | 1.19 | 1.25 | 1.22 | 1.20 | 1.25 |
| | $\lambda_{1,7} (y_1)$ | 1.00 | - | - | 1.00 | - | - |
| $\eta_7(\text{FRE})$ | $\hat{\lambda}_{2,7} (y_2)$ | 0.90 | 0.88 | 0.92 | 0.90 | 0.89 | 0.92 |
| | $\hat{\lambda}_{3,7} (y_3)$ | 0.91 | 0.89 | 0.93 | 0.91 | 0.89 | 0.93 |
| | $\hat{\gamma}_1 (\xi_1)$ | 0.10 | 0.06 | 0.15 | 0.10 | 0.06 | 0.15 |
| | $\hat{\gamma}_2 (\xi_2)$ | 0.52 | 0.37 | 0.67 | 0.52 | 0.38 | 0.65 |
| $\eta_8(\text{FRE})$ | $\hat{\gamma}_3 (\xi_3)$ | 0.15 | 0.09 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.20 |
| | $\hat{\gamma}_4 (\xi_4)$ | 0.10 | 0.01 | 0.18 | 0.10 | 0.01 | 0.18 |
| | $\hat{\gamma}_5 (\xi_5)$ | -0.37 | -0.44 | -0.30 | -0.37 | -0.44 | -0.30 |
| | $\hat{\gamma}_6 (\xi_6)$ | 0.24 | 0.19 | 0.28 | 0.24 | 0.20 | 0.28 |

5.3. MEE 3 para estudiar el rendimiento escolar en PI-SA 2015

Se propone un tercer modelo, la diferencia con el anterior es que ahora hay 3 factores independientes que pasan a ser dependientes razón por la cual la estimación de los parámetros del modelo de medida se mantiene pero en el modelo estructural cambian, pues la cantidad de parámetros a estimar aumenta.

En la Figura 5.6 se muestra el diagrama estructural del modelo formado por: las variables del Cuadro 5.11, 3 factores independientes y 3 dependientes que tienen efecto en el rendimiento escolar del alumno (factor endógeno).

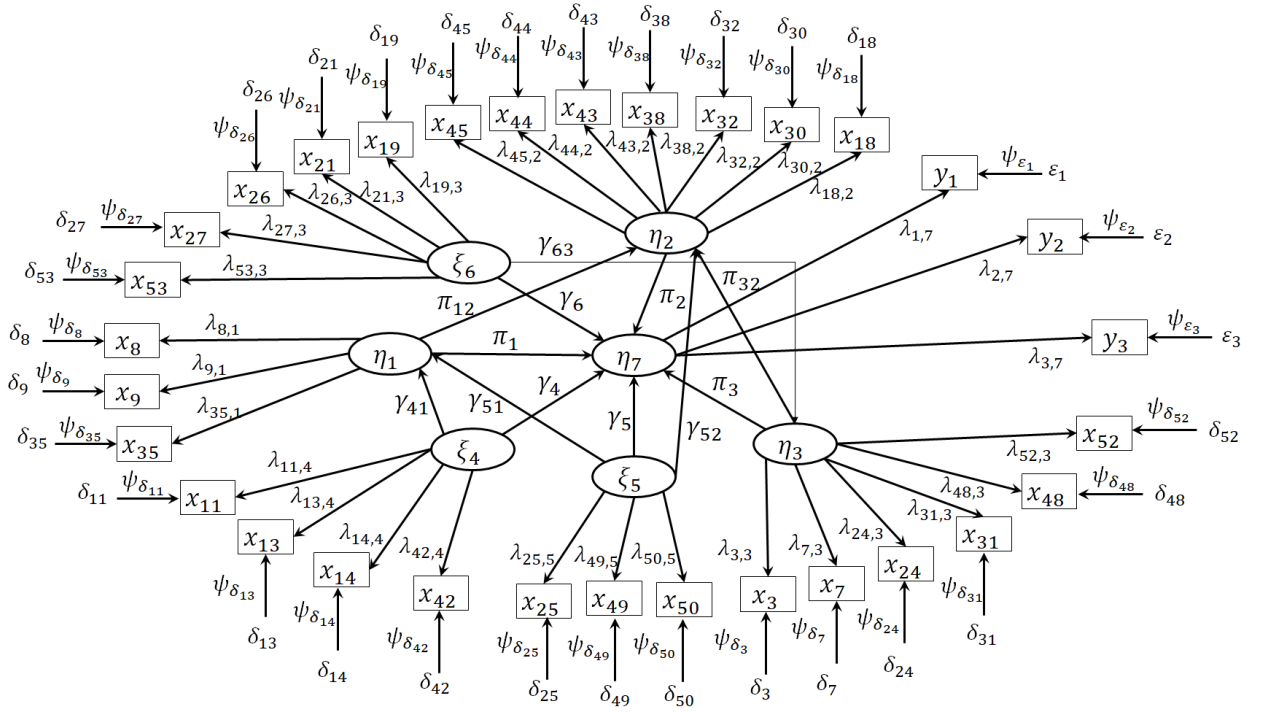


Figura 5.6: Diagrama estructural con 7 variables latentes y 31 variables observadas.

El diagrama representado en la Figura 5.6 incluye los efectos directos e indirectos entre los factores. El sistema de ecuaciones estructurales para el Modelo 3 está dado por:

Modelo de medida:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \lambda_{i1}\eta_1 + \delta_i, \quad i = \{8, 9, 35\} \\
 x_i &= \lambda_{i2}\eta_2 + \delta_i, \quad i = \{18, 30, 32, 38, 43, 44, 45\} \\
 x_i &= \lambda_{i3}\eta_3 + \delta_i, \quad i = \{3, 7, 24, 31, 48, 52\} \\
 x_i &= \lambda_{i4}\xi_4 + \delta_i, \quad i = \{11, 13, 14, 42\} \\
 x_i &= \lambda_{i5}\xi_5 + \delta_i, \quad i = \{25, 49, 50\} \\
 x_i &= \lambda_{i6}\xi_6 + \delta_i, \quad i = \{19, 21, 26, 27, 53\} \\
 y_i &= \lambda_{i7}\eta_7 + \varepsilon_i, \quad i = \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}$$

Modelo estructural:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \gamma_{41}\xi_4 + \gamma_{51}\xi_5 + \zeta_1 \\
 \eta_2 &= \pi_{12}\eta_1 + \pi_{32}\eta_3 + \gamma_{52}\xi_5 + \zeta_2 \\
 \eta_3 &= \gamma_{63}\xi_6 + \zeta_3 \\
 \eta_7 &= \sum_{i=1}^3 \pi_i \eta_i + \sum_{i=4}^6 \gamma_i \xi_i + \zeta_7
 \end{aligned}$$

En total se van a estimar 77 parámetros para el Modelo 3.

5.3.1. Estimación del MEE 3 propuesto

Estimación vía MV

La estimación de los parámetros del modelo de medida y de estructura por MV, fueron todas estadísticamente significativas. Los resultados muestran que el CFI=0.88 y el TLI=0.87 son mayores que el valor de referencia 0.80 (González-Montesinos y Escudero, 2010), lo cual significa un buen ajuste del Modelo 3. El RMSEA=0.07 es menor al valor de referencia 0.08 (González-Montesinos y Escudero, 2010). Dichos resultados significan que existe un buen ajuste entre el modelo propuesto y los datos (Anexo 8). En la Figura 5.7 se muestran los efectos directos e indirectos de los factores dependientes e independientes en el factor correspondiente al rendimiento escolar.

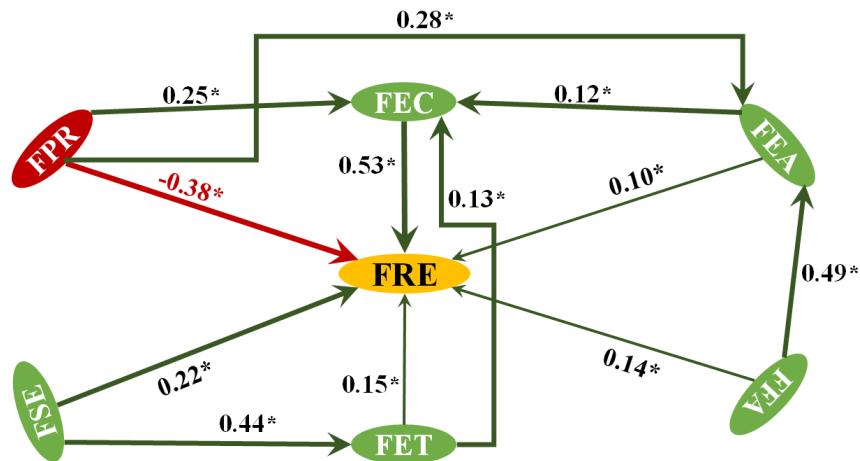


Figura 5.7: Efecto directo e indirecto en el rendimiento escolar.

En la Figura 5.8 se observa el efecto total de cada una de los factores independiente y dependientes en el rendimiento escolar. La interpretación de los resultados es similar a la dada en la sección anterior para el Modelo 2.

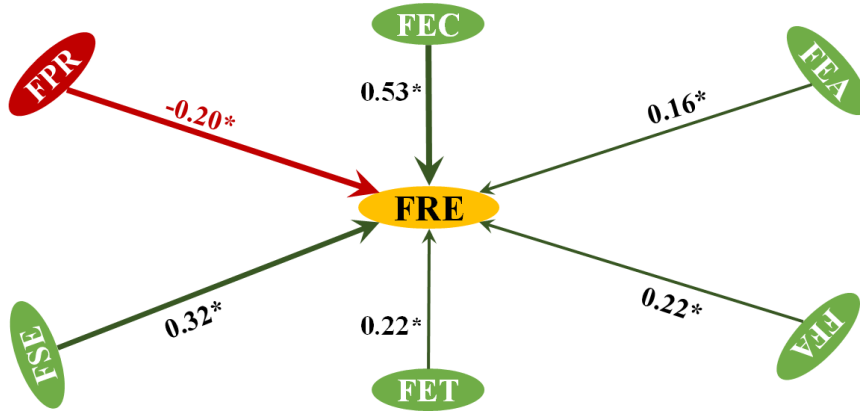


Figura 5.8: Efecto total de cada una de los factores en el rendimiento escolar.

Estimación bayesiana

Las distribuciones a priori utilizadas para cada uno de los parámetros fueron:

$$\Lambda_i \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\gamma_i \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\pi_i \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$$

$$\Psi_{\epsilon_i} \sim \text{Gamma}(1, 0.5)$$

$$\Psi_{\zeta_i} \sim \text{Gamma}(1, 0.5)$$

$$\Lambda_{w_i} \sim \mathcal{N}(0, 10^{-3})$$

$$\Phi \sim \text{Wishart}(I_{4 \times 4}, 4)$$

Los valores de PSRF son menores que 1.2 (Anexo 7) para todos los parámetros estimados, lo que muestra que hay convergencia en las cadenas de MCMC (Gelman *et al.*, 1992).

Se aplicó la prueba de Geweke y se obtuvo que para todos los parámetros estimados $|Z| < 2.5$ lo que indica convergencia en las cadenas (Geweke, 1992). En la Figura 5.9 se observa que hay buena mezcla entre las cadenas del MCMC para $\lambda_{9,1}$. Las estimaciones de todos los parámetros fueron significativas.

En la Figura 5.10 se observa el efecto directo e indirecto de cada una de los factores exógenos y endógenos en el rendimiento escolar. Estas estimaciones obtenidas por el método bayesiano son semejantes a las obtenidas por MV, resultado que era de esperarse pues la muestra es suficientemente grande y la función de verosimilitud es la que predomina en la a posteriori de los parámetros.

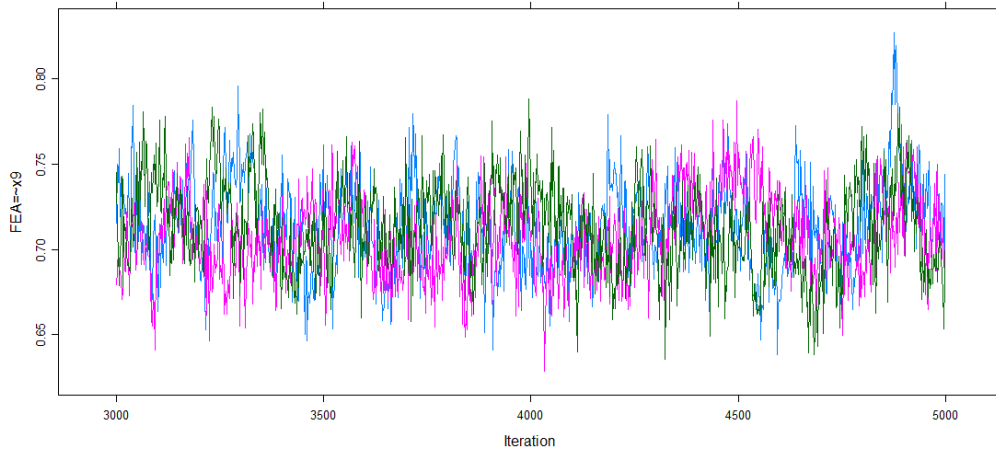


Figura 5.9: Gráfica de convergencia de cada una de las cadenas de MCMC para $\lambda_{9,1}$.

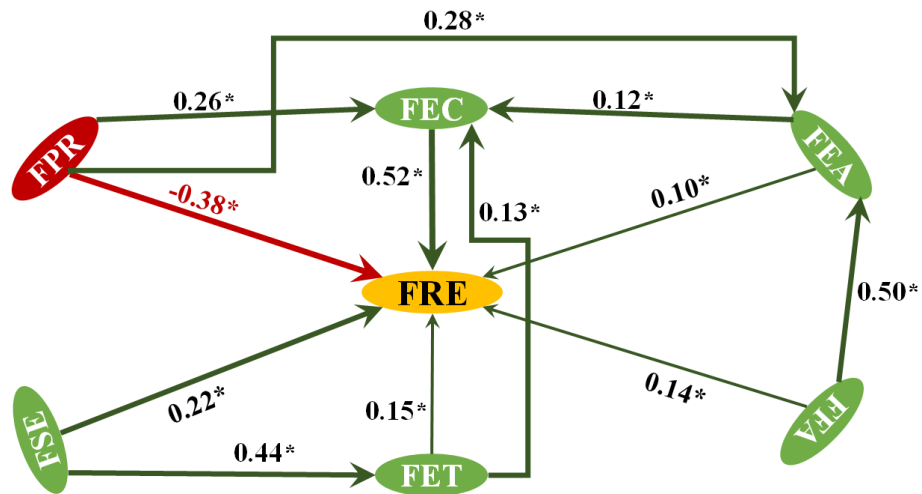


Figura 5.10: Diagrama de los resultados de la ecuación estructural del Modelo 3.

En la Figura 5.11 se observa el efecto total de cada una de los factores independiente y dependientes en el rendimiento escolar.

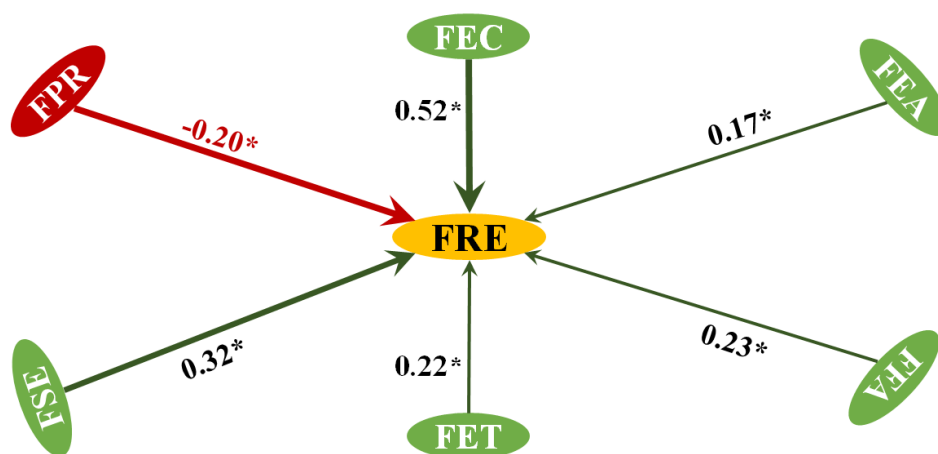


Figura 5.11: Efecto total de cada una de los factores en el rendimiento escolar.

El Cuadro 5.13 muestra los resultados obtenidos para el modelo estructural al utilizar estadística clásica vía MV y estadística bayesiana, así como los intervalos de confianza y creíbles respectivamente. Fueron estimados un total de 77 parámetros los resultados se encuentran más detallados en el Anexo 8 y Anexo 9.

Cuadro 5.13: Resultados de la estimación clásica y bayesiana del modelo estructural.

| Factor | Parámetro | EMV | | | Estimación bayesiana | | |
|----------------------|------------------------------|-------|-------|--------|----------------------|-------|--------|
| | | MV | 2.5 % | 97.5 % | Media | 2.5 % | 97.5 % |
| $\eta_1(\text{FEA})$ | $\hat{\gamma}_{41} (\xi_4)$ | 0.49 | 0.41 | 0.58 | 0.50 | 0.41 | 0.58 |
| | $\hat{\gamma}_{51} (\xi_5)$ | 0.28 | 0.22 | 0.33 | 0.28 | 0.22 | 0.33 |
| $\eta_2(\text{FEC})$ | $\hat{\gamma}_{52} (\xi_5)$ | 0.25 | 0.22 | 0.29 | 0.26 | 0.22 | 0.29 |
| | $\hat{\gamma}_{32} (\eta_3)$ | 0.13 | 0.11 | 0.15 | 0.13 | 0.11 | 0.15 |
| | $\hat{\gamma}_{12} (\eta_1)$ | 0.12 | 0.10 | 0.14 | 0.12 | 0.10 | 0.15 |
| $\eta_3(\text{FET})$ | $\hat{\gamma}_{63} (\xi_6)$ | 0.44 | 0.40 | 0.47 | 0.44 | 0.41 | 0.47 |
| | $\hat{\gamma}_1 (\xi_1)$ | 0.10 | 0.05 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.15 |
| | $\hat{\gamma}_2 (\xi_2)$ | 0.53 | 0.38 | 0.67 | 0.52 | 0.37 | 0.66 |
| $\eta_T(\text{FRE})$ | $\hat{\gamma}_3 (\xi_3)$ | 0.15 | 0.10 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.20 |
| | $\hat{\gamma}_4 (\xi_4)$ | 0.14 | 0.05 | 0.23 | 0.14 | 0.06 | 0.23 |
| | $\hat{\gamma}_5 (\xi_5)$ | -0.38 | -0.45 | -0.31 | -0.38 | -0.45 | -0.31 |
| | $\hat{\gamma}_6 (\xi_6)$ | 0.22 | 0.18 | 0.26 | 0.22 | 0.18 | 0.26 |

Los resultados obtenidos para la estimación de cada uno de los parámetros del modelo vía MV y con el enfoque bayesiano son parecidas.

Conclusiones

6.1. Discusión

El presente trabajo se enfocó en determinar los factores que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos participantes en la prueba PISA 2015. Los resultados obtenidos concuerdan con los hallazgos reportados en investigaciones previas. Para estimar el efecto de las variables latentes independientes sobre el rendimiento escolar se utilizó un MEE al igual que Hernández *et al.* (2011) y Reyes *et al.* (2014), también se propuso un MEEB como hizo Fernández (2017). En esta investigación se encontró que el socioeconómico tiene un efecto positivo y significativo sobre el rendimiento escolar, mismo resultado que obtuvieron Fernández (2017) y Hernández *et al.* (2011), aunque ellos no usaron las mismas variables observadas para medir el factor socioeconómico. Se utilizó regresión múltiple multivariada al igual que Reyes *et al.* (2014) como método de selección de variables para identificar cuáles eran las más importantes para emplear en el MEE. También se utilizó el AFE en el estudio, proceso que no fue utilizado por los demás autores. Del AFE se encontró que el índice del nivel económico, social y cultural del estudiante (ESCS), el cual es construida por PISA, tiene en cuenta un grupo de variables en el cual está HISEI y PARED variables utilizadas por Fernández (2017) en el factor socioeconómico, además el 89 % de las variables observadas independientes utilizadas por Hernández *et al.* (2011) también están relacionadas con ESCS, el 38 %, 100 % y 100 % de las variables observadas utilizadas por Reyes *et al.* (2014) en

los factores socioeconómico, capital cultural escolar y servicios en casa respectivamente son utilizadas para la construcción de ESCS.

Fernández (2017) evalúa el efecto que tienen el nivel socioeconómico-cultural y la actitud hacia las matemáticas en el rendimiento en matemáticas en los estudiantes costarricenses evaluados en PISA 2012, para ello propone 9 variables observadas (3 para cada una de las variables latentes), la variable latente dependiente tiene efecto en 3 variables denominadas valores plausibles de matemáticas (I, III, V), en la presente investigación se encontró 6 factores que tienen efecto en el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos evaluados en PISA 2015 y un total de 28 variables observadas independientes, se utilizaron 3 variables observadas dependientes cada una relacionada con el primer valor plausible en ciencias, matemáticas y lectura respectivamente. Fernández (2017) obtuvo un buen ajuste de su MEE así como convergencia en el MEEB lo que le permitió interpretar los efectos de las variables latentes en las variables observadas y entre las variables latentes, además le permitió comparar los resultados obtenidos por ambos métodos de estimación y concluyó que son resultados prácticamente iguales, donde mayor diferencia hubo fue en el modelo de medida; en la presente investigación también se obtuvo un buen ajuste del MEE propuesto y convergencia del MEEB propuesto y al comparar los parámetros estimados son semejantes tanto en el modelo de medida como en el modelo estructural. Por otra parte Flores *et al.* (2008) utilizaron los MEE para realizar un estudio con los datos procedentes de la prueba PISA 2006 para verificar e interpretar el Modelo de Calidad Educativa propuesto por el INEE. En esta investigación se centraron en medir la calidad educativa en México pero desde la perspectiva de explicar el rendimiento de los estudiantes en el área de Ciencias, deja como áreas menores Lectura y Matemáticas. En este trabajo los MEE no se utilizaron para medir efecto entre factores dependientes e independientes si no que se utilizaron como AFC y cada uno de ellos fue obtenido con el AFE.

6.2. Conclusiones

El presente trabajo de investigación dio cumplimiento al objetivo establecido en un inicio: la propuesta de un modelo de ecuaciones estructurales para determinar los factores que afectan el rendimiento escolar de los estudiantes mexicanos que participaron en la prueba

PISA, 2015. Con la metodología implementada se logró la identificación de 6 factores y 31 variables observadas (28 independientes y 3 dependientes) que inciden en el rendimiento escolar de los estudiantes. La estimación y ajuste del MEE se pudo realizar sin problema bajo el enfoque clásico vía MV y el enfoque bayesiano. En ambos enfoques, los criterios de bondad de ajuste indicaron que el modelo propuesto de ecuaciones estructurales es bueno, ya que explica más del 88 % de la variabilidad total de los datos. Se observó que independientemente del procedimiento que se utilice para estimar los parámetros del MEE (MV o bayesiana), el factor cognitivo es el que mayor efecto tiene en el rendimiento escolar de los estudiantes, después están los factores socioeconómico, profesor, familia, tecnológico y afectivo. El único factor que tiene un efecto negativo en el rendimiento escolar del estudiante fue el factor profesor, sin embargo esto no significa que el rendimiento del estudiante disminuya a causa del efecto de este factor.

El MEE identificado en este trabajo de investigación es el primero que se propone para explicar el rendimiento escolar del estudiante a partir de la base de datos PISA, 2015. Los resultados de este trabajo son importantes porque permiten realizar una interpretación de cómo la relación y variación de los seis factores identificados logran influir en el rendimiento escolar del alumno.

Del presente trabajo hay dos recomendaciones importantes, la primera es hacer uso y exploración de más métodos de selección de variables para una identificación más precisa de las variables observadas independientes; de tal manera que la ecuación de mediad que se proponga logre explicar la mayor variabilidad posible presente en los datos. La segunda recomendación es llevar la modelación a una estructura multinivel, para poder así incorporar al modelo variables como el centro educativo.

Referencias

- Arias, M. B. (2008). Desarrollo de un ejemplo de análisis factorial confirmatorio con LISREL, AMOS y SAS. Publicaciones del INICO, 75.
- Barrett, P. T. y Kline, P. (1981). The observation to variable ratio in factor analysis. *Personality Study in Group Behavior*, 1, 23-33.
- Bentler, P. M., & Bonett, D. G. (1980). Significance tests and goodness of fit in the analysis of covariance structures. *Psychological bulletin*, 88(3), 588.
- Bliese (2016). multilevel: Multilevel Functions. R package version 2.6.
- Bravo, R. S. (1997). Técnicas de investigación social: teoría y ejercicios (Vol. 12). Madrid: Paraninfo.
- Cervantes, V. H. (2005). Interpretaciones del coeficiente alpha de Cronbach. *Avances en medición*, 3(1), 9-28.
- Cheng (2017). qtlmt: Tools for Mapping Multiple Complex Traits.
- Comrey, A. L., & Lee, H. B. (1992). Interpretation and application of factor analytic results. Comrey AL, Lee HB. *A first course in factor analysis*, 2, 1992.
- Corral de Franco, Y. J. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos.
- Cortéz, B. M. M. (1998). Definición de rendimiento escolar.
- Cupani, M. (2012). Análisis de Ecuaciones Estructurales: conceptos, etapas de desarrollo y un ejemplo de aplicación. *Revista Tesis*, 1, 186-199.

- Escudero, E. B., Riaño, A. B., Contreras, C., Hernández, E., & García, M. (2007). Factores escolares y aprendizaje en México. El caso de la educación.
- Fernández, A. A. (2017). Un modelo de ecuaciones estructurales bayesiano: aplicación al rendimiento matemático en PISA 2012. *Estadística Española*, 59(192), 5-27.
- Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS*. Sage publications.
- Flores, G., Solís, R., Canales, D., Morelos, P., De la Cruz, Y., & Tristán, A. (2008). Análisis multinivel de la calidad educativa en México ante los datos de PISA 2006.
- Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). A single series from the Gibbs sampler provides a false sense of security. *Bayesian statistics*, 4, 625-631.
- Geweke, J. (2005). *Contemporary Bayesian econometrics and statistics* (Vol. 537). John Wiley & Sons.
- González-Montesinos, M. J., & Escudero, B. (2010). Validación de un cuestionario de contexto para evaluar sistemas educativos con Modelos de Ecuaciones Estructurales. RE-LIEVE. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 16(2).
- Hair, J., Anderson, R., Tatham, R.L., & Black, W.C. (1998). *Multivariate data analysis*, (5th ed.), NJ: Upper Saddle River, Prentice-Hall.
- Hernández, P. E., & González-Montesinos, M. J. (2011). Modelo de ecuación estructural que evalúa las relaciones entre el estatus cultural y económico del estudiante y el logro educativo. *Revista electrónica de investigación educativa*, 13(2), 188-203.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2013). *An introduction to statistical learning* (Vol. 112). New York: springer.
- Jöreskog, K. G. (1969). A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 34(2), 183-202.
- Kaiser, H. F. (1970). Second generation little jiffy. *Psychometrik*, 35(4), p. 401-405.
- Lee, S. Y. (2007). *Structural equation modeling: A Bayesian approach* (Vol. 711). John Wiley & Sons.

- Lévy, J. P., & Varela, J. (2003). *Análisis multivariable para las ciencias sociales*. Madrid, Editorial Pearson Educación.
- Lévy, J. P., & Varela, J. (2006). *Modelización con estructuras de covarianzas en ciencias sociales. Temas esenciales, avanzados y aportaciones especiales*. A Coruña: Netbiblo.
- MacCallum, R. C., Widaman, K. F., Zhang, S. y Hong, S. (1999). Sample size in factor analysis. *Psychological Methods*, 4, 84-99.
- MacCallum, R. C., Widaman, K. F., Preacher, K. J., & Hong, S. (2001). Sample size in factor analysis: The role of model error. *Multivariate Behavioral Research*, 36(4), 611-637.
- Mavrou, I. (2015). Análisis factorial exploratorio: cuestiones conceptuales y metodológicas. *Revista Nebrija de Lingüística Aplicada a la Enseñanza de Lenguas*, (19).
- Merkle, E. C., & Rosseel, Y. (2016). blavaan: Bayesian structural equation models via parameter expansion. arXiv preprint arXiv:1511.05604.
- Montaño, A. (2014). *Modelo de desarrollo económico local para la diversificación de la estructura Productiva y la Articulación del Tejido Empresarial en Baja California Sur*. Universidad Autonoma de Baja California.
- Morales, P. (2007). *Estadística aplicada a las Ciencias Sociales: La fiabilidad de los test y escalas* [Statistics applied to social science: The reliability of the test and scales].
- Patiño, A. P. M. (2017). *Introducción a los modelos de ecuaciones estructurales*.
- R Core Team (2017). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rencher, A. C., & Christensen, W. F. (2012). *Wiley Series in Probability and Statistics. Methods of Multivariate Analysis, Third Edition*, 759-768.
- Revelle, W. R. (2017). *psych: Procedures for personality and psychological research*.
- Reyes, C. R., Godínez, J. F., Hernández, F. J. A., Rosas, F. S., & Ignacio, O. F. T. (2014). Un modelo empírico para explicar el desempeño académico de estudiantes de bachillerato. *Perfiles educativos*, 36(146), 45-62.

Rosseel, Y. (2012). Lavaan: An R package for structural equation modeling and more. Version 0.5–12 (BETA). *Journal of statistical software*, 48(2), 1-36. *Journal of Statistical Software*, 48(2), 1-36.

Ruiz de Miguel, C. (2002). Factores familiares vinculados al bajo rendimiento. *Revista Complutense de Educación*. 12 (1) 81-113.

Ruiz, M. A., Pardo, A., & San Martín, R. (2010). Modelos de ecuaciones estructurales. *Papeles del psicólogo*, 31(1).

Torres, V.L.E. y Rodríguez, S.N.Y. (julio-diciembre, 2006). Rendimiento académico y contexto familiar en estudiantes universitarios. *Enseñanza e investigación en Psicología*. 11 (002) 255-270.

Zamora, S., Monroy, L., & Chávez, C. (2009). Análisis factorial: una técnica para evaluar la dimensionalidad de las pruebas. *Cuaderno técnico*, 6.

Anexo 1: Resultado de la regresión múltiple multivaria- da

| | Df | Pillai | approx F | num Df | den Df | Pr(>F) |
|-------------|----|----------|----------|--------|--------|---------------|
| (Intercept) | 1 | 0.000000 | 0.000 | 3 | 3416 | 1.0000000 |
| x1 | 1 | 0.000677 | 0.772 | 3 | 3416 | 0.5097577 |
| x2 | 1 | 0.067417 | 82.315 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x3 | 1 | 0.077385 | 95.507 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x4 | 1 | 0.014759 | 17.058 | 3 | 3416 | 5.395e-11 *** |
| x5 | 1 | 0.054107 | 65.134 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x6 | 1 | 0.015055 | 17.405 | 3 | 3416 | 3.260e-11 *** |
| x7 | 1 | 0.025564 | 29.873 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x8 | 1 | 0.016178 | 18.724 | 3 | 3416 | 4.812e-12 *** |
| x9 | 1 | 0.024599 | 28.717 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x10 | 1 | 0.014489 | 16.740 | 3 | 3416 | 8.547e-11 *** |
| x11 | 1 | 0.004570 | 5.227 | 3 | 3416 | 0.0013385 ** |
| x12 | 1 | 0.024954 | 29.142 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x13 | 1 | 0.013927 | 16.082 | 3 | 3416 | 2.220e-10 *** |
| x14 | 1 | 0.003483 | 3.980 | 3 | 3416 | 0.0076567 ** |
| x15 | 1 | 0.001130 | 1.288 | 3 | 3416 | 0.2767825 |
| x16 | 1 | 0.031134 | 36.590 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x17 | 1 | 0.060277 | 73.038 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x18 | 1 | 0.023246 | 27.100 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x19 | 1 | 0.018906 | 21.943 | 3 | 3416 | 4.521e-14 *** |
| x21 | 1 | 0.002358 | 2.692 | 3 | 3416 | 0.0446460 * |
| x22 | 1 | 0.002901 | 3.313 | 3 | 3416 | 0.0192010 * |
| x23 | 1 | 0.000989 | 1.127 | 3 | 3416 | 0.3367667 |
| x24 | 1 | 0.014065 | 16.244 | 3 | 3416 | 1.754e-10 *** |
| x25 | 1 | 0.038219 | 45.248 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 *** |
| x26 | 1 | 0.004017 | 4.593 | 3 | 3416 | 0.0032618 ** |
| x27 | 1 | 0.004982 | 5.701 | 3 | 3416 | 0.0006863 *** |

| | | | | | | | |
|-----|---|----------|--------|---|------|-----------|-----|
| x28 | 1 | 0.005837 | 6.685 | 3 | 3416 | 0.0001698 | *** |
| x29 | 1 | 0.002366 | 2.700 | 3 | 3416 | 0.0441488 | * |
| x30 | 1 | 0.012512 | 14.428 | 3 | 3416 | 2.439e-09 | *** |
| x31 | 1 | 0.026128 | 30.550 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 | *** |
| x32 | 1 | 0.017982 | 20.850 | 3 | 3416 | 2.205e-13 | *** |
| x33 | 1 | 0.001663 | 1.897 | 3 | 3416 | 0.1279053 | |
| x34 | 1 | 0.000294 | 0.335 | 3 | 3416 | 0.8001945 | |
| x35 | 1 | 0.014556 | 16.819 | 3 | 3416 | 7.624e-11 | *** |
| x36 | 1 | 0.002848 | 3.252 | 3 | 3416 | 0.0208827 | * |
| x37 | 1 | 0.002140 | 2.442 | 3 | 3416 | 0.0624302 | . |
| x38 | 1 | 0.033097 | 38.977 | 3 | 3416 | < 2.2e-16 | *** |
| x39 | 1 | 0.001132 | 1.290 | 3 | 3416 | 0.2760689 | |
| x40 | 1 | 0.006504 | 7.454 | 3 | 3416 | 5.666e-05 | *** |
| x41 | 1 | 0.000787 | 0.897 | 3 | 3416 | 0.4419183 | |
| x42 | 1 | 0.003517 | 4.019 | 3 | 3416 | 0.0072521 | ** |
| x43 | 1 | 0.021886 | 25.479 | 3 | 3416 | 2.688e-16 | *** |
| x44 | 1 | 0.012433 | 14.336 | 3 | 3416 | 2.787e-09 | *** |
| x45 | 1 | 0.005631 | 6.448 | 3 | 3416 | 0.0002377 | *** |
| x47 | 1 | 0.004257 | 4.868 | 3 | 3416 | 0.0022192 | ** |
| x48 | 1 | 0.008089 | 9.286 | 3 | 3416 | 4.099e-06 | *** |
| x49 | 1 | 0.018154 | 21.053 | 3 | 3416 | 1.642e-13 | *** |
| x50 | 1 | 0.004748 | 5.432 | 3 | 3416 | 0.0010030 | ** |
| x51 | 1 | 0.009796 | 11.265 | 3 | 3416 | 2.368e-07 | *** |
| x52 | 1 | 0.002872 | 3.279 | 3 | 3416 | 0.0201123 | * |
| x53 | 1 | 0.006464 | 7.409 | 3 | 3416 | 6.050e-05 | *** |

Residuals 3418

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Anexo 2: KMO de la base de datos

Kaiser-Meyer-Olkin factor adequacy

Overall MSA = 0.82

MSA for each item =

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | x13 | x14 | x16 | x17 | x18 |
| 0.56 | 0.89 | 0.85 | 0.79 | 0.87 | 0.88 | 0.78 | 0.69 | 0.57 | 0.74 | 0.76 | 0.74 | 0.82 | 0.90 | 0.55 | 0.93 |
| x19 | x21 | x22 | x24 | x25 | x26 | x27 | x28 | x29 | x30 | x31 | x32 | x35 | x36 | x38 | x40 |
| 0.88 | 0.73 | 0.70 | 0.93 | 0.84 | 0.97 | 0.97 | 0.93 | 0.88 | 0.87 | 0.88 | 0.86 | 0.87 | 0.81 | 0.84 | 0.54 |
| x42 | x43 | x44 | x45 | x47 | x48 | x49 | x50 | x51 | x52 | x53 | | | | | |
| 0.78 | 0.84 | 0.83 | 0.88 | 0.64 | 0.88 | 0.84 | 0.81 | 0.76 | 0.87 | 0.73 | | | | | |

Anexo 3: Valores propios de la matriz de correlación de las variables observadas

[1] 6.91886191 3.88511303 2.00340758 1.89324031 1.71555316 1.50139547 1.35166116
[8] 1.23996039 1.09567902 1.08841164 1.00115341 0.96438153 0.94600848 0.92380873
[15] 0.89721986 0.86923174 0.85129950 0.82968536 0.79870933 0.77989249 0.76228427
[22] 0.75218942 0.73749954 0.72032782 0.70063494 0.66034005 0.60192708 0.59960267
[29] 0.57494718 0.56617838 0.54646448 0.53058060 0.51715841 0.50960983 0.49980456
[36] 0.47711390 0.42813891 0.41725237 0.36776793 0.24893021 0.13039833 0.08477952
[43] 0.01139551

Anexo 4: Valores numéricos del gráfico de sedimentación

Standard deviations:

| | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Comp.1 | Comp.2 | Comp.3 | Comp.4 | Comp.5 | Comp.6 | Comp.7 |
| 3.37416910 | 2.17752780 | 1.79295497 | 1.66268283 | 1.54117312 | 1.35452901 | 1.21776122 |
| Comp.8 | Comp.9 | Comp.10 | Comp.11 | Comp.12 | Comp.13 | Comp.14 |
| 1.14516495 | 1.03417536 | 0.98906500 | 0.95927876 | 0.92540504 | 0.91364511 | 0.89661235 |
| Comp.15 | Comp.16 | Comp.17 | Comp.18 | Comp.19 | Comp.20 | Comp.21 |
| 0.88051727 | 0.81403457 | 0.79925038 | 0.75754097 | 0.72616675 | 0.71424288 | 0.70284187 |
| Comp.22 | Comp.23 | Comp.24 | Comp.25 | Comp.26 | Comp.27 | Comp.28 |
| 0.66396494 | 0.63824590 | 0.61271904 | 0.55767042 | 0.54606098 | 0.54258503 | 0.52503979 |
| Comp.29 | Comp.30 | Comp.31 | Comp.32 | Comp.33 | Comp.34 | Comp.35 |
| 0.51190152 | 0.49958579 | 0.47315297 | 0.45298213 | 0.44718294 | 0.43546549 | 0.41001049 |
| Comp.36 | Comp.37 | Comp.38 | Comp.39 | Comp.40 | Comp.41 | Comp.42 |
| 0.38427687 | 0.29992722 | 0.27252799 | 0.14367911 | 0.08889071 | 0.04694029 | 0.02858676 |
| Comp.43 | | | | | | |
| 0.00000000 | | | | | | |

43 variables and 43 observations.

Anexo 5: Análisis de componentes principales para nueve factores

Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation matrix

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 | h2 | u2 | com |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-----|
| x2 | -0.02 | -0.04 | -0.13 | -0.17 | 0.11 | 0.08 | 0.52 | -0.37 | -0.12 | 0.49 | 0.508 | 2.6 |
| x3 | 0.54 | 0.13 | -0.48 | -0.10 | 0.06 | 0.00 | -0.29 | 0.04 | 0.04 | 0.64 | 0.362 | 2.8 |
| x4 | 0.14 | 0.15 | 0.01 | -0.19 | 0.21 | 0.01 | -0.23 | 0.30 | 0.03 | 0.27 | 0.733 | 4.8 |
| x5 | 0.55 | -0.24 | 0.16 | -0.09 | -0.08 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.22 | 0.45 | 0.549 | 2.1 |
| x6 | 0.16 | 0.04 | 0.16 | -0.17 | -0.19 | -0.06 | 0.07 | 0.16 | 0.24 | 0.21 | 0.790 | 5.7 |
| x7 | 0.54 | 0.11 | -0.48 | -0.20 | 0.12 | -0.03 | -0.26 | 0.04 | 0.05 | 0.66 | 0.344 | 3.0 |
| x8 | 0.24 | 0.42 | 0.06 | -0.40 | 0.11 | 0.04 | 0.36 | 0.17 | 0.13 | 0.58 | 0.417 | 4.4 |
| x9 | 0.10 | 0.38 | -0.06 | -0.31 | 0.26 | 0.16 | 0.43 | 0.10 | 0.09 | 0.55 | 0.450 | 4.4 |
| x10 | 0.51 | -0.06 | 0.17 | 0.11 | -0.24 | -0.07 | 0.04 | -0.03 | -0.03 | 0.37 | 0.628 | 1.9 |
| x11 | 0.21 | 0.22 | 0.21 | -0.01 | -0.23 | 0.54 | -0.19 | -0.28 | 0.11 | 0.61 | 0.391 | 3.6 |
| x12 | -0.02 | 0.23 | 0.32 | -0.02 | 0.20 | -0.12 | -0.29 | 0.24 | -0.01 | 0.35 | 0.646 | 4.9 |
| x13 | 0.20 | 0.13 | 0.27 | -0.31 | -0.03 | 0.44 | -0.23 | -0.23 | -0.05 | 0.54 | 0.459 | 4.7 |
| x14 | 0.18 | 0.21 | 0.24 | -0.30 | 0.18 | 0.26 | 0.07 | -0.08 | 0.04 | 0.34 | 0.661 | 5.7 |
| x16 | 0.31 | 0.42 | 0.04 | -0.08 | -0.22 | -0.24 | -0.05 | 0.02 | -0.14 | 0.41 | 0.592 | 3.6 |
| x17 | 0.00 | 0.03 | -0.09 | 0.37 | 0.14 | 0.46 | 0.14 | 0.46 | -0.05 | 0.62 | 0.383 | 3.4 |
| x18 | 0.26 | 0.28 | -0.07 | -0.24 | -0.07 | -0.13 | 0.07 | 0.10 | -0.22 | 0.30 | 0.703 | 5.1 |
| x19 | 0.80 | -0.32 | 0.19 | -0.04 | -0.06 | -0.02 | 0.03 | 0.02 | 0.11 | 0.80 | 0.198 | 1.5 |
| x21 | 0.89 | -0.31 | 0.19 | 0.05 | 0.02 | -0.08 | 0.04 | 0.04 | -0.04 | 0.94 | 0.065 | 1.4 |
| x22 | 0.71 | -0.13 | 0.23 | 0.04 | 0.00 | -0.05 | 0.01 | 0.04 | -0.05 | 0.59 | 0.413 | 1.3 |
| x24 | 0.55 | 0.07 | -0.25 | 0.16 | 0.14 | 0.06 | 0.02 | -0.15 | -0.07 | 0.44 | 0.558 | 2.1 |
| x25 | 0.15 | 0.51 | 0.17 | 0.38 | 0.24 | -0.04 | 0.06 | -0.14 | 0.08 | 0.55 | 0.447 | 3.2 |
| x26 | 0.78 | -0.31 | 0.07 | 0.10 | 0.06 | -0.03 | 0.07 | 0.03 | -0.04 | 0.74 | 0.261 | 1.4 |
| x27 | 0.84 | -0.33 | 0.15 | 0.02 | 0.08 | -0.05 | 0.04 | 0.04 | -0.06 | 0.85 | 0.154 | 1.4 |
| x28 | 0.44 | -0.05 | 0.00 | 0.25 | 0.16 | 0.06 | 0.13 | -0.04 | -0.18 | 0.34 | 0.661 | 2.6 |
| x29 | 0.10 | 0.43 | 0.06 | -0.04 | -0.17 | -0.06 | 0.07 | 0.09 | 0.05 | 0.25 | 0.752 | 1.7 |
| x30 | 0.17 | 0.52 | -0.04 | -0.02 | -0.30 | -0.16 | 0.03 | 0.08 | -0.26 | 0.49 | 0.507 | 2.7 |

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-----|
| x31 | 0.43 | 0.03 | -0.48 | -0.24 | 0.23 | -0.04 | -0.19 | -0.09 | 0.03 | 0.57 | 0.431 | 3.4 |
| x32 | 0.17 | 0.56 | 0.00 | -0.10 | -0.31 | -0.11 | 0.06 | 0.14 | -0.20 | 0.53 | 0.472 | 2.5 |
| x35 | 0.26 | 0.32 | 0.04 | -0.37 | -0.04 | 0.03 | 0.25 | -0.03 | 0.12 | 0.39 | 0.609 | 4.0 |
| x36 | 0.12 | 0.17 | -0.11 | 0.22 | -0.15 | 0.05 | 0.06 | 0.02 | 0.42 | 0.31 | 0.690 | 2.8 |
| x38 | 0.07 | 0.56 | 0.10 | 0.36 | 0.25 | -0.07 | 0.03 | -0.15 | 0.06 | 0.55 | 0.451 | 2.5 |
| x40 | 0.02 | 0.01 | -0.11 | 0.28 | 0.06 | 0.40 | 0.11 | 0.51 | 0.03 | 0.53 | 0.469 | 2.8 |
| x42 | 0.07 | 0.22 | 0.19 | -0.11 | 0.10 | 0.32 | -0.23 | -0.06 | -0.16 | 0.30 | 0.704 | 5.0 |
| x43 | 0.34 | 0.16 | 0.00 | 0.14 | -0.37 | 0.29 | -0.16 | -0.16 | 0.15 | 0.46 | 0.542 | 4.9 |
| x44 | 0.22 | 0.42 | -0.08 | 0.36 | -0.41 | 0.10 | 0.08 | -0.07 | -0.07 | 0.55 | 0.448 | 3.9 |
| x45 | 0.27 | 0.38 | -0.01 | 0.05 | -0.33 | -0.08 | -0.05 | 0.19 | -0.09 | 0.39 | 0.613 | 3.7 |
| x47 | 0.04 | 0.09 | -0.06 | 0.06 | -0.09 | -0.18 | -0.01 | 0.05 | 0.63 | 0.45 | 0.547 | 1.3 |
| x48 | 0.38 | 0.29 | -0.49 | -0.05 | 0.13 | 0.07 | -0.13 | -0.05 | 0.06 | 0.52 | 0.483 | 3.0 |
| x49 | 0.17 | 0.46 | 0.18 | 0.20 | 0.26 | -0.28 | -0.08 | -0.17 | 0.10 | 0.50 | 0.496 | 4.3 |
| x50 | 0.04 | 0.51 | 0.27 | 0.23 | 0.43 | -0.13 | -0.04 | -0.07 | 0.02 | 0.59 | 0.409 | 3.2 |
| x51 | 0.09 | -0.16 | -0.39 | 0.19 | -0.23 | -0.01 | 0.29 | -0.17 | 0.03 | 0.38 | 0.616 | 4.2 |
| x52 | 0.36 | 0.13 | -0.26 | 0.27 | 0.17 | 0.13 | 0.07 | -0.08 | -0.11 | 0.36 | 0.640 | 4.5 |
| x53 | 0.83 | -0.35 | 0.14 | 0.04 | 0.08 | -0.07 | 0.05 | 0.05 | -0.04 | 0.86 | 0.143 | 1.5 |

| | PC1 | PC2 | PC3 | PC4 | PC5 | PC6 | PC7 | PC8 | PC9 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| SS loadings | 6.92 | 3.89 | 2.00 | 1.89 | 1.72 | 1.50 | 1.35 | 1.24 | 1.10 |
| Proportion Var | 0.16 | 0.09 | 0.05 | 0.04 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| Cumulative Var | 0.16 | 0.25 | 0.30 | 0.34 | 0.38 | 0.42 | 0.45 | 0.48 | 0.50 |
| Proportion Explained | 0.32 | 0.18 | 0.09 | 0.09 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.06 | 0.05 |
| Cumulative Proportion | 0.32 | 0.50 | 0.59 | 0.68 | 0.76 | 0.83 | 0.89 | 0.95 | 1.00 |

Mean item complexity = 3.2

Test of the hypothesis that 9 components are sufficient.

Anexo 6: Resultados obtenidos de la estimación clásica MV del Modelo 2

Latent Variables:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|--------|----------|---------|---------|---------|
| FEA =~ | | | | |
| x8 | 1.000 | | | |
| x9 | 0.727 | 0.028 | 26.042 | 0.000 |
| x35 | 0.491 | 0.023 | 21.248 | 0.000 |
| FEC =~ | | | | |
| x18 | 1.000 | | | |
| x30 | 1.531 | 0.074 | 20.759 | 0.000 |
| x32 | 1.603 | 0.076 | 21.054 | 0.000 |
| x38 | 1.009 | 0.058 | 17.251 | 0.000 |
| x43 | 0.799 | 0.053 | 14.953 | 0.000 |
| x44 | 1.269 | 0.066 | 19.331 | 0.000 |
| x45 | 1.142 | 0.062 | 18.406 | 0.000 |
| FET =~ | | | | |
| x3 | 1.000 | | | |
| x7 | 1.032 | 0.022 | 47.419 | 0.000 |
| x24 | 0.683 | 0.021 | 32.408 | 0.000 |
| x31 | 0.810 | 0.021 | 38.336 | 0.000 |
| x48 | 0.796 | 0.021 | 37.650 | 0.000 |
| x52 | 0.486 | 0.021 | 23.070 | 0.000 |
| FFA =~ | | | | |
| x11 | 1.000 | | | |
| x13 | 1.198 | 0.064 | 18.688 | 0.000 |
| x14 | 0.774 | 0.047 | 16.533 | 0.000 |
| x42 | 0.668 | 0.044 | 15.051 | 0.000 |
| FPR =~ | | | | |
| x25 | 1.000 | | | |

| | | | | |
|--------|-------|-------|---------|-------|
| x49 | 0.751 | 0.030 | 24.815 | 0.000 |
| x50 | 0.964 | 0.035 | 27.339 | 0.000 |
| FSE =~ | | | | |
| x19 | 1.000 | | | |
| x21 | 1.225 | 0.014 | 87.651 | 0.000 |
| x26 | 1.021 | 0.015 | 66.520 | 0.000 |
| x27 | 1.178 | 0.014 | 82.293 | 0.000 |
| x53 | 1.218 | 0.014 | 86.893 | 0.000 |
| FRE =~ | | | | |
| y1 | 1.000 | | | |
| y2 | 0.900 | 0.009 | 99.996 | 0.000 |
| y3 | 0.907 | 0.009 | 102.048 | 0.000 |

Regressions:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|-------|----------|---------|---------|---------|
| FRE ~ | | | | |
| FEA | 0.103 | 0.024 | 4.249 | 0.000 |
| FEC | 0.520 | 0.073 | 7.137 | 0.000 |
| FET | 0.146 | 0.027 | 5.459 | 0.000 |
| FFA | 0.098 | 0.042 | 2.302 | 0.021 |
| FPR | -0.372 | 0.035 | -10.572 | 0.000 |
| FSE | 0.236 | 0.021 | 11.219 | 0.000 |

Covariances:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|--------|----------|---------|---------|---------|
| FEA ~~ | | | | |
| FEC | 0.140 | 0.009 | 15.976 | 0.000 |
| FET | 0.161 | 0.012 | 13.535 | 0.000 |
| FFA | 0.138 | 0.011 | 12.895 | 0.000 |
| FPR | 0.163 | 0.012 | 13.438 | 0.000 |
| FSE | 0.052 | 0.011 | 4.736 | 0.000 |
| FEC ~~ | | | | |
| FET | 0.106 | 0.007 | 14.623 | 0.000 |

| | | | | |
|---------|-------|-------|--------|-------|
| FFA | 0.064 | 0.006 | 11.208 | 0.000 |
| FPR | 0.139 | 0.008 | 16.424 | 0.000 |
| FSE | 0.024 | 0.005 | 4.382 | 0.000 |
| FET ~ ~ | | | | |
| FFA | 0.074 | 0.009 | 8.606 | 0.000 |
| FPR | 0.070 | 0.010 | 6.943 | 0.000 |
| FSE | 0.278 | 0.011 | 24.472 | 0.000 |
| FFA ~ ~ | | | | |
| FPR | 0.074 | 0.009 | 8.589 | 0.000 |
| FSE | 0.081 | 0.008 | 9.623 | 0.000 |
| FPR ~ ~ | | | | |
| FSE | 0.002 | 0.010 | 0.191 | 0.849 |

Variances:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|------|----------|---------|---------|---------|
| .x8 | 0.330 | 0.024 | 14.035 | 0.000 |
| .x9 | 0.646 | 0.018 | 35.888 | 0.000 |
| .x35 | 0.838 | 0.018 | 45.641 | 0.000 |
| .x18 | 0.853 | 0.018 | 46.154 | 0.000 |
| .x30 | 0.655 | 0.017 | 39.551 | 0.000 |
| .x32 | 0.622 | 0.016 | 38.017 | 0.000 |
| .x38 | 0.850 | 0.018 | 46.088 | 0.000 |
| .x43 | 0.906 | 0.019 | 47.418 | 0.000 |
| .x44 | 0.763 | 0.018 | 43.597 | 0.000 |
| .x45 | 0.808 | 0.018 | 44.959 | 0.000 |
| .x3 | 0.440 | 0.012 | 35.836 | 0.000 |
| .x7 | 0.404 | 0.012 | 33.699 | 0.000 |
| .x24 | 0.739 | 0.016 | 45.665 | 0.000 |
| .x31 | 0.632 | 0.015 | 43.267 | 0.000 |
| .x48 | 0.646 | 0.015 | 43.615 | 0.000 |
| .x52 | 0.868 | 0.018 | 47.752 | 0.000 |
| .x11 | 0.745 | 0.020 | 36.429 | 0.000 |

| | | | | |
|------|-------|-------|--------|-------|
| .x13 | 0.635 | 0.023 | 28.188 | 0.000 |
| .x14 | 0.848 | 0.020 | 42.789 | 0.000 |
| .x42 | 0.886 | 0.020 | 44.708 | 0.000 |
| .x25 | 0.549 | 0.019 | 29.472 | 0.000 |
| .x49 | 0.746 | 0.018 | 41.371 | 0.000 |
| .x50 | 0.581 | 0.018 | 31.732 | 0.000 |
| .x19 | 0.363 | 0.008 | 47.576 | 0.000 |
| .x21 | 0.044 | 0.002 | 25.851 | 0.000 |
| .x26 | 0.336 | 0.007 | 47.350 | 0.000 |
| .x27 | 0.116 | 0.003 | 41.467 | 0.000 |
| .x53 | 0.055 | 0.002 | 29.871 | 0.000 |
| .y1 | 0.062 | 0.005 | 12.564 | 0.000 |
| .y2 | 0.240 | 0.006 | 38.513 | 0.000 |
| .y3 | 0.228 | 0.006 | 37.496 | 0.000 |
| FEA | 0.670 | 0.030 | 22.635 | 0.000 |
| FEC | 0.147 | 0.012 | 11.835 | 0.000 |
| FET | 0.559 | 0.020 | 27.882 | 0.000 |
| FFA | 0.254 | 0.019 | 13.172 | 0.000 |
| FPR | 0.451 | 0.023 | 19.960 | 0.000 |
| FSE | 0.637 | 0.019 | 33.510 | 0.000 |
| .FRE | 0.780 | 0.019 | 41.760 | 0.000 |

Anexo 7: Resultados de la estimación bayesiana del Modelo 2

Latent Variables:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|--------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FEA =~ | | | | | | |
| x8 | 1.000 | | | | | |
| x9 | 0.733 | 0.025 | 0.686 | 0.782 | 1.019 | dnorm(0,1e-2) |
| x35 | 0.496 | 0.024 | 0.451 | 0.544 | 1.009 | dnorm(0,1e-2) |
| FEC =~ | | | | | | |
| x18 | 1.000 | | | | | |
| x30 | 1.541 | 0.068 | 1.405 | 1.664 | 1.008 | dnorm(0,1e-2) |
| x32 | 1.615 | 0.068 | 1.48 | 1.746 | 1.010 | dnorm(0,1e-2) |
| x38 | 1.014 | 0.059 | 0.896 | 1.129 | 1.017 | dnorm(0,1e-2) |
| x43 | 0.804 | 0.051 | 0.712 | 0.912 | 1.005 | dnorm(0,1e-2) |
| x44 | 1.278 | 0.062 | 1.144 | 1.392 | 1.008 | dnorm(0,1e-2) |
| x45 | 1.148 | 0.060 | 1.032 | 1.262 | 1.009 | dnorm(0,1e-2) |
| FET =~ | | | | | | |
| x3 | 1.000 | | | | | |
| x7 | 1.034 | 0.022 | 0.992 | 1.076 | 1.006 | dnorm(0,1e-2) |
| x24 | 0.684 | 0.022 | 0.641 | 0.727 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| x31 | 0.813 | 0.021 | 0.772 | 0.855 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| x48 | 0.798 | 0.021 | 0.757 | 0.841 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| x52 | 0.487 | 0.021 | 0.448 | 0.53 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| FFA =~ | | | | | | |
| x11 | 1.000 | | | | | |
| x13 | 1.197 | 0.068 | 1.067 | 1.331 | 1.005 | dnorm(0,1e-2) |
| x14 | 0.780 | 0.052 | 0.678 | 0.882 | 1.014 | dnorm(0,1e-2) |
| x42 | 0.673 | 0.048 | 0.582 | 0.766 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| FPR =~ | | | | | | |
| x25 | 1.000 | | | | | |
| x49 | 0.755 | 0.032 | 0.69 | 0.816 | 1.007 | dnorm(0,1e-2) |
| x50 | 0.971 | 0.036 | 0.894 | 1.037 | 1.017 | dnorm(0,1e-2) |

```

FSE =~
  x19          1.000
  x21          1.226  0.013  1.201  1.251  1.034 dnorm(0,1e-2)
  x26          1.023  0.015  0.992  1.051  1.018 dnorm(0,1e-2)
  x27          1.179  0.013  1.153  1.205  1.033 dnorm(0,1e-2)
  x53          1.220  0.013  1.196  1.247  1.035 dnorm(0,1e-2)
FRE =~
  y1          1.000
  y2          0.902  0.009  0.886  0.921  1.010 dnorm(0,1e-2)
  y3          0.910  0.009  0.892  0.926  1.019 dnorm(0,1e-2)

```

Regressions:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|-------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FRE ~ | | | | | | |
| FEA | 0.103 | 0.024 | 0.055 | 0.15 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| FEC | 0.518 | 0.070 | 0.383 | 0.654 | 1.016 | dnorm(0,1e-2) |
| FET | 0.146 | 0.027 | 0.095 | 0.197 | 1.000 | dnorm(0,1e-2) |
| FFA | 0.098 | 0.043 | 0.012 | 0.182 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FPR | -0.372 | 0.035 | -0.438 | -0.303 | 1.006 | dnorm(0,1e-2) |
| FSE | 0.236 | 0.021 | 0.197 | 0.278 | 1.001 | dnorm(0,1e-2) |

Covariances:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|--------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FEA ~~ | | | | | | |
| FEC | 0.139 | 0.008 | 0.123 | 0.156 | 1.012 | dwish(iden,7) |
| FET | 0.160 | 0.012 | 0.136 | 0.184 | 1.001 | dwish(iden,7) |
| FFA | 0.138 | 0.011 | 0.118 | 0.159 | 1.003 | dwish(iden,7) |
| FPR | 0.161 | 0.012 | 0.138 | 0.186 | 1.002 | dwish(iden,7) |
| FSE | 0.052 | 0.011 | 0.031 | 0.073 | 1.001 | dwish(iden,7) |
| FEC ~~ | | | | | | |
| FET | 0.105 | 0.007 | 0.09 | 0.118 | 1.006 | dwish(iden,7) |
| FFA | 0.064 | 0.006 | 0.052 | 0.075 | 1.003 | dwish(iden,7) |
| FPR | 0.137 | 0.008 | 0.12 | 0.153 | 1.004 | dwish(iden,7) |
| FSE | 0.024 | 0.006 | 0.012 | 0.034 | 1.001 | dwish(iden,7) |
| FET ~~ | | | | | | |

| | | | | | | |
|--------|-------|-------|--------|-------|-------|---------------|
| FFA | 0.074 | 0.009 | 0.058 | 0.091 | 1.003 | dwish(iden,7) |
| FPR | 0.070 | 0.010 | 0.051 | 0.091 | 1.000 | dwish(iden,7) |
| FSE | 0.278 | 0.011 | 0.255 | 0.3 | 1.001 | dwish(iden,7) |
| FFA ~~ | | | | | | |
| FPR | 0.074 | 0.009 | 0.057 | 0.092 | 1.002 | dwish(iden,7) |
| FSE | 0.081 | 0.008 | 0.066 | 0.099 | 1.000 | dwish(iden,7) |
| FPR ~~ | | | | | | |
| FSE | 0.002 | 0.010 | -0.018 | 0.019 | 1.000 | dwish(iden,7) |

Intercepts:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| .x8 | -0.000 | 0.014 | -0.03 | 0.025 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x9 | -0.000 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x35 | -0.000 | 0.014 | -0.03 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x18 | 0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.026 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x30 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x32 | 0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x38 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x43 | -0.000 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x44 | -0.000 | 0.014 | -0.027 | 0.028 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x45 | -0.000 | 0.014 | -0.027 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x3 | -0.001 | 0.014 | -0.03 | 0.026 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x7 | -0.000 | 0.014 | -0.026 | 0.029 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x24 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x31 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x48 | -0.000 | 0.014 | -0.026 | 0.029 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x52 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.029 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x11 | -0.000 | 0.015 | -0.029 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x13 | -0.000 | 0.015 | -0.03 | 0.026 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x14 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x42 | -0.000 | 0.015 | -0.029 | 0.028 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x25 | 0.000 | 0.014 | -0.027 | 0.03 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x49 | 0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x50 | 0.001 | 0.014 | -0.027 | 0.029 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |

| | | | | | | |
|------|--------|-------|--------|-------|-------|---------------|
| .x19 | -0.002 | 0.014 | -0.029 | 0.025 | 1.004 | dnorm(0,1e-3) |
| .x21 | -0.002 | 0.014 | -0.03 | 0.028 | 1.006 | dnorm(0,1e-3) |
| .x26 | -0.002 | 0.014 | -0.029 | 0.026 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x27 | -0.002 | 0.014 | -0.031 | 0.026 | 1.006 | dnorm(0,1e-3) |
| .x53 | -0.002 | 0.014 | -0.031 | 0.027 | 1.007 | dnorm(0,1e-3) |
| .y1 | -0.001 | 0.014 | -0.025 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .y2 | -0.001 | 0.014 | -0.027 | 0.027 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .y3 | -0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.026 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| FEA | 0.000 | | | | | |
| FEC | 0.000 | | | | | |
| FET | 0.000 | | | | | |
| FFA | 0.000 | | | | | |
| FPR | 0.000 | | | | | |
| FSE | 0.000 | | | | | |
| .FRE | 0.000 | | | | | |

Variances:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|------|----------|---------|---------|---------|-------|--------------|
| .x8 | 0.337 | 0.022 | 0.294 | 0.379 | 1.028 | dgamma(1,.5) |
| .x9 | 0.645 | 0.016 | 0.614 | 0.678 | 1.006 | dgamma(1,.5) |
| .x35 | 0.838 | 0.019 | 0.801 | 0.874 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x18 | 0.854 | 0.018 | 0.819 | 0.89 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x30 | 0.656 | 0.017 | 0.624 | 0.69 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x32 | 0.621 | 0.017 | 0.587 | 0.655 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x38 | 0.851 | 0.019 | 0.814 | 0.888 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x43 | 0.907 | 0.019 | 0.871 | 0.946 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x44 | 0.763 | 0.018 | 0.727 | 0.797 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x45 | 0.809 | 0.018 | 0.776 | 0.845 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x3 | 0.442 | 0.012 | 0.417 | 0.466 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x7 | 0.405 | 0.012 | 0.382 | 0.43 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x24 | 0.739 | 0.017 | 0.708 | 0.772 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x31 | 0.632 | 0.014 | 0.605 | 0.661 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x48 | 0.646 | 0.014 | 0.618 | 0.674 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x52 | 0.869 | 0.018 | 0.835 | 0.905 | 1.001 | dgamma(1,.5) |

| | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| .x11 | 0.747 | 0.021 | 0.707 | 0.789 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x13 | 0.641 | 0.023 | 0.594 | 0.687 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x14 | 0.847 | 0.021 | 0.807 | 0.888 | 1.004 | dgamma(1,.5) |
| .x42 | 0.887 | 0.020 | 0.849 | 0.927 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x25 | 0.552 | 0.018 | 0.517 | 0.589 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| .x49 | 0.746 | 0.018 | 0.709 | 0.781 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x50 | 0.580 | 0.019 | 0.544 | 0.619 | 1.013 | dgamma(1,.5) |
| .x19 | 0.364 | 0.008 | 0.348 | 0.379 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x21 | 0.045 | 0.002 | 0.042 | 0.048 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| .x26 | 0.336 | 0.007 | 0.322 | 0.349 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x27 | 0.116 | 0.003 | 0.111 | 0.122 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x53 | 0.055 | 0.002 | 0.051 | 0.059 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .y1 | 0.065 | 0.005 | 0.056 | 0.073 | 1.094 | dgamma(1,.5) |
| .y2 | 0.238 | 0.006 | 0.227 | 0.25 | 1.017 | dgamma(1,.5) |
| .y3 | 0.226 | 0.006 | 0.215 | 0.238 | 1.014 | dgamma(1,.5) |
| FEA | 0.662 | 0.028 | 0.608 | 0.719 | 1.025 | dwish(iden,7) |
| FEC | 0.146 | 0.011 | 0.126 | 0.168 | 1.015 | dwish(iden,7) |
| FET | 0.558 | 0.020 | 0.518 | 0.597 | 1.005 | dwish(iden,7) |
| FFA | 0.253 | 0.021 | 0.212 | 0.294 | 1.010 | dwish(iden,7) |
| FPR | 0.447 | 0.022 | 0.405 | 0.49 | 1.015 | dwish(iden,7) |
| FSE | 0.636 | 0.018 | 0.602 | 0.672 | 1.019 | dwish(iden,7) |
| .FRE | 0.779 | 0.019 | 0.742 | 0.817 | 1.001 | dgamma(1,.5) |

Anexo 8: Resultados de la estimación clásica MV del Modelo 3

Latent Variables:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|--------|----------|---------|---------|---------|
| FEA =~ | | | | |
| x8 | 1.000 | | | |
| x9 | 0.709 | 0.028 | 25.057 | 0.000 |
| x35 | 0.473 | 0.023 | 20.532 | 0.000 |
| FEC =~ | | | | |
| x18 | 1.000 | | | |
| x30 | 1.524 | 0.076 | 20.176 | 0.000 |
| x32 | 1.590 | 0.078 | 20.438 | 0.000 |
| x38 | 1.001 | 0.060 | 16.745 | 0.000 |
| x43 | 0.789 | 0.055 | 14.460 | 0.000 |
| x44 | 1.267 | 0.067 | 18.823 | 0.000 |
| x45 | 1.145 | 0.064 | 17.966 | 0.000 |
| FET =~ | | | | |
| x3 | 1.000 | | | |
| x7 | 1.028 | 0.022 | 47.453 | 0.000 |
| x24 | 0.672 | 0.021 | 32.112 | 0.000 |
| x31 | 0.809 | 0.021 | 38.524 | 0.000 |
| x48 | 0.784 | 0.021 | 37.368 | 0.000 |
| x52 | 0.477 | 0.021 | 22.797 | 0.000 |
| FFA =~ | | | | |
| x11 | 1.000 | | | |
| x13 | 1.247 | 0.068 | 18.359 | 0.000 |
| x14 | 0.815 | 0.049 | 16.538 | 0.000 |
| x42 | 0.690 | 0.046 | 14.907 | 0.000 |
| FPR =~ | | | | |
| x25 | 1.000 | | | |

| | | | | |
|---------|-------|-------|---------|-------|
| x49 | 0.749 | 0.030 | 24.713 | 0.000 |
| x50 | 0.973 | 0.036 | 27.386 | 0.000 |
| FSE = ~ | | | | |
| x19 | 1.000 | | | |
| x21 | 1.225 | 0.014 | 87.764 | 0.000 |
| x26 | 1.021 | 0.015 | 66.542 | 0.000 |
| x27 | 1.178 | 0.014 | 82.322 | 0.000 |
| x53 | 1.218 | 0.014 | 86.915 | 0.000 |
| FRE = ~ | | | | |
| y1 | 1.000 | | | |
| y2 | 0.900 | 0.009 | 99.840 | 0.000 |
| y3 | 0.907 | 0.009 | 101.891 | 0.000 |

Regressions:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|-------|----------|---------|---------|---------|
| FET ~ | | | | |
| FSE | 0.436 | 0.016 | 28.058 | 0.000 |
| FEA ~ | | | | |
| FFA | 0.494 | 0.043 | 11.533 | 0.000 |
| FPR | 0.275 | 0.027 | 10.173 | 0.000 |
| FEC ~ | | | | |
| FPR | 0.254 | 0.017 | 15.091 | 0.000 |
| FET | 0.132 | 0.010 | 12.797 | 0.000 |
| FEA | 0.123 | 0.011 | 11.319 | 0.000 |
| FRE ~ | | | | |
| FEA | 0.101 | 0.024 | 4.210 | 0.000 |
| FEC | 0.527 | 0.072 | 7.343 | 0.000 |
| FET | 0.145 | 0.025 | 5.812 | 0.000 |
| FFA | 0.139 | 0.043 | 3.213 | 0.001 |
| FPR | -0.379 | 0.036 | -10.429 | 0.000 |
| FSE | 0.222 | 0.020 | 10.834 | 0.000 |

Covariances:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|--------|----------|---------|---------|---------|
| FFA ~~ | | | | |
| FPR | 0.078 | 0.008 | 9.292 | 0.000 |
| FSE | 0.081 | 0.008 | 9.896 | 0.000 |
| FPR ~~ | | | | |
| FSE | -0.003 | 0.009 | -0.370 | 0.712 |

Variances:

| | Estimate | Std.Err | z-value | P(> z) |
|------|----------|---------|---------|---------|
| .x8 | 0.311 | 0.025 | 12.385 | 0.000 |
| .x9 | 0.653 | 0.018 | 35.689 | 0.000 |
| .x35 | 0.846 | 0.018 | 45.839 | 0.000 |
| .x18 | 0.851 | 0.018 | 46.031 | 0.000 |
| .x30 | 0.656 | 0.017 | 39.294 | 0.000 |
| .x32 | 0.625 | 0.017 | 37.855 | 0.000 |
| .x38 | 0.851 | 0.018 | 46.021 | 0.000 |
| .x43 | 0.907 | 0.019 | 47.398 | 0.000 |
| .x44 | 0.762 | 0.018 | 43.386 | 0.000 |
| .x45 | 0.805 | 0.018 | 44.749 | 0.000 |
| .x3 | 0.433 | 0.012 | 35.167 | 0.000 |
| .x7 | 0.400 | 0.012 | 33.205 | 0.000 |
| .x24 | 0.744 | 0.016 | 45.704 | 0.000 |
| .x31 | 0.629 | 0.015 | 43.085 | 0.000 |
| .x48 | 0.652 | 0.015 | 43.676 | 0.000 |
| .x52 | 0.871 | 0.018 | 47.771 | 0.000 |
| .x11 | 0.761 | 0.020 | 37.349 | 0.000 |
| .x13 | 0.628 | 0.023 | 27.472 | 0.000 |
| .x14 | 0.841 | 0.020 | 42.363 | 0.000 |
| .x42 | 0.886 | 0.020 | 44.654 | 0.000 |
| .x25 | 0.553 | 0.019 | 29.829 | 0.000 |
| .x49 | 0.749 | 0.018 | 41.535 | 0.000 |
| .x50 | 0.577 | 0.018 | 31.484 | 0.000 |

| | | | | |
|------|-------|-------|--------|-------|
| .x19 | 0.363 | 0.008 | 47.577 | 0.000 |
| .x21 | 0.044 | 0.002 | 25.575 | 0.000 |
| .x26 | 0.336 | 0.007 | 47.355 | 0.000 |
| .x27 | 0.117 | 0.003 | 41.504 | 0.000 |
| .x53 | 0.055 | 0.002 | 30.071 | 0.000 |
| .y1 | 0.062 | 0.005 | 12.571 | 0.000 |
| .y2 | 0.240 | 0.006 | 38.509 | 0.000 |
| .y3 | 0.228 | 0.006 | 37.488 | 0.000 |
| .FEA | 0.576 | 0.029 | 19.943 | 0.000 |
| .FEC | 0.083 | 0.008 | 10.916 | 0.000 |
| .FET | 0.446 | 0.016 | 27.256 | 0.000 |
| FFA | 0.239 | 0.019 | 12.773 | 0.000 |
| FPR | 0.446 | 0.022 | 19.896 | 0.000 |
| FSE | 0.637 | 0.019 | 33.525 | 0.000 |
| .FRE | 0.779 | 0.019 | 41.602 | 0.000 |

Anexo 9: Resultados de la estimación bayesiana del Modelo 3

Latent Variables:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|--------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FEA =~ | | | | | | |
| x8 | 1.000 | | | | | |
| x9 | 0.712 | 0.026 | 0.661 | 0.762 | 1.013 | dnorm(0,1e-2) |
| x35 | 0.474 | 0.024 | 0.429 | 0.524 | 1.009 | dnorm(0,1e-2) |
| FEC =~ | | | | | | |
| x18 | 1.000 | | | | | |
| x30 | 1.525 | 0.076 | 1.379 | 1.67 | 1.025 | dnorm(0,1e-2) |
| x32 | 1.590 | 0.077 | 1.442 | 1.738 | 1.033 | dnorm(0,1e-2) |
| x38 | 1.001 | 0.064 | 0.874 | 1.126 | 1.013 | dnorm(0,1e-2) |
| x43 | 0.789 | 0.055 | 0.683 | 0.896 | 1.008 | dnorm(0,1e-2) |
| x44 | 1.266 | 0.072 | 1.123 | 1.401 | 1.016 | dnorm(0,1e-2) |
| x45 | 1.144 | 0.066 | 1.018 | 1.271 | 1.019 | dnorm(0,1e-2) |
| FET =~ | | | | | | |
| x3 | 1.000 | | | | | |
| x7 | 1.029 | 0.021 | 0.99 | 1.069 | 1.004 | dnorm(0,1e-2) |
| x24 | 0.673 | 0.021 | 0.63 | 0.714 | 1.001 | dnorm(0,1e-2) |
| x31 | 0.809 | 0.021 | 0.766 | 0.849 | 1.005 | dnorm(0,1e-2) |
| x48 | 0.784 | 0.021 | 0.744 | 0.827 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| x52 | 0.477 | 0.021 | 0.438 | 0.519 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| FFA =~ | | | | | | |
| x11 | 1.000 | | | | | |
| x13 | 1.258 | 0.068 | 1.138 | 1.395 | 1.001 | dnorm(0,1e-2) |
| x14 | 0.820 | 0.053 | 0.718 | 0.925 | 1.004 | dnorm(0,1e-2) |
| x42 | 0.696 | 0.048 | 0.603 | 0.789 | 1.007 | dnorm(0,1e-2) |
| FPR =~ | | | | | | |
| x25 | 1.000 | | | | | |

| | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| x49 | 0.755 | 0.032 | 0.689 | 0.815 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| x50 | 0.980 | 0.037 | 0.908 | 1.053 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FSE =~ | | | | | | |
| x19 | 1.000 | | | | | |
| x21 | 1.227 | 0.013 | 1.202 | 1.252 | 1.004 | dnorm(0,1e-2) |
| x26 | 1.023 | 0.015 | 0.995 | 1.053 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| x27 | 1.180 | 0.013 | 1.155 | 1.207 | 1.004 | dnorm(0,1e-2) |
| x53 | 1.220 | 0.013 | 1.193 | 1.245 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FRE =~ | | | | | | |
| y1 | 1.000 | | | | | |
| y2 | 0.901 | 0.009 | 0.884 | 0.918 | 1.004 | dnorm(0,1e-2) |
| y3 | 0.909 | 0.009 | 0.892 | 0.926 | 1.006 | dnorm(0,1e-2) |

Regressions:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|-------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FET ~ | | | | | | |
| FSE | 0.437 | 0.015 | 0.405 | 0.465 | 1.002 | dnorm(0,1e-2) |
| FEA ~ | | | | | | |
| FFA | 0.496 | 0.046 | 0.405 | 0.583 | 1.007 | dnorm(0,1e-2) |
| FPR | 0.277 | 0.028 | 0.222 | 0.332 | 1.001 | dnorm(0,1e-2) |
| FEC ~ | | | | | | |
| FPR | 0.255 | 0.017 | 0.221 | 0.29 | 1.016 | dnorm(0,1e-2) |
| FET | 0.132 | 0.011 | 0.111 | 0.154 | 1.010 | dnorm(0,1e-2) |
| FEA | 0.124 | 0.012 | 0.1 | 0.148 | 1.010 | dnorm(0,1e-2) |
| FRE ~ | | | | | | |
| FEA | 0.100 | 0.024 | 0.052 | 0.145 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FEC | 0.524 | 0.073 | 0.369 | 0.659 | 1.005 | dnorm(0,1e-2) |
| FET | 0.145 | 0.026 | 0.095 | 0.197 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FFA | 0.143 | 0.044 | 0.056 | 0.229 | 1.001 | dnorm(0,1e-2) |
| FPR | -0.379 | 0.036 | -0.451 | -0.311 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |
| FSE | 0.222 | 0.020 | 0.183 | 0.263 | 1.003 | dnorm(0,1e-2) |

Covariances:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|--------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| FFA ~~ | | | | | | |
| FPR | 0.077 | 0.009 | 0.061 | 0.094 | 1.001 | dwish(iden,4) |
| FSE | 0.080 | 0.008 | 0.064 | 0.096 | 1.003 | dwish(iden,4) |
| FPR ~~ | | | | | | |
| FSE | -0.003 | 0.009 | -0.022 | 0.014 | 1.000 | dwish(iden,4) |

Intercepts:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|------|----------|---------|---------|---------|-------|---------------|
| .x8 | -0.001 | 0.014 | -0.029 | 0.025 | 1.006 | dnorm(0,1e-3) |
| .x9 | -0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x35 | -0.000 | 0.014 | -0.029 | 0.028 | 1.003 | dnorm(0,1e-3) |
| .x18 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x30 | -0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.004 | dnorm(0,1e-3) |
| .x32 | -0.001 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x38 | -0.001 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.003 | dnorm(0,1e-3) |
| .x43 | -0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x44 | -0.001 | 0.014 | -0.03 | 0.026 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x45 | -0.001 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x3 | -0.002 | 0.014 | -0.03 | 0.025 | 1.005 | dnorm(0,1e-3) |
| .x7 | -0.002 | 0.014 | -0.029 | 0.025 | 1.005 | dnorm(0,1e-3) |
| .x24 | -0.002 | 0.014 | -0.029 | 0.025 | 1.003 | dnorm(0,1e-3) |
| .x31 | -0.002 | 0.014 | -0.03 | 0.026 | 1.004 | dnorm(0,1e-3) |
| .x48 | -0.001 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.002 | dnorm(0,1e-3) |
| .x52 | -0.001 | 0.014 | -0.03 | 0.026 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x11 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x13 | -0.001 | 0.014 | -0.027 | 0.028 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x14 | -0.001 | 0.015 | -0.029 | 0.028 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x42 | -0.000 | 0.014 | -0.029 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x25 | -0.000 | 0.014 | -0.027 | 0.029 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |
| .x49 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.028 | 1.001 | dnorm(0,1e-3) |
| .x50 | -0.000 | 0.014 | -0.028 | 0.027 | 1.000 | dnorm(0,1e-3) |

| | | | | | | |
|------|--------|-------|--------|-------|-------|---------------|
| .x19 | -0.004 | 0.013 | -0.029 | 0.021 | 1.008 | dnorm(0,1e-3) |
| .x21 | -0.004 | 0.013 | -0.027 | 0.021 | 1.017 | dnorm(0,1e-3) |
| .x26 | -0.004 | 0.013 | -0.029 | 0.022 | 1.010 | dnorm(0,1e-3) |
| .x27 | -0.004 | 0.013 | -0.026 | 0.023 | 1.013 | dnorm(0,1e-3) |
| .x53 | -0.004 | 0.013 | -0.028 | 0.021 | 1.015 | dnorm(0,1e-3) |
| .y1 | -0.002 | 0.014 | -0.031 | 0.025 | 1.011 | dnorm(0,1e-3) |
| .y2 | -0.002 | 0.014 | -0.029 | 0.026 | 1.006 | dnorm(0,1e-3) |
| .y3 | -0.002 | 0.014 | -0.03 | 0.026 | 1.009 | dnorm(0,1e-3) |
| .FEA | 0.000 | | | | | |
| .FEC | 0.000 | | | | | |
| .FET | 0.000 | | | | | |
| FFA | 0.000 | | | | | |
| FPR | 0.000 | | | | | |
| FSE | 0.000 | | | | | |
| .FRE | 0.000 | | | | | |

Variiances:

| | Estimate | Post.SD | HPD.025 | HPD.975 | PSRF | Prior |
|------|----------|---------|---------|---------|-------|--------------|
| .x8 | 0.312 | 0.024 | 0.268 | 0.358 | 1.025 | dgamma(1,.5) |
| .x9 | 0.652 | 0.017 | 0.618 | 0.685 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x35 | 0.846 | 0.019 | 0.81 | 0.885 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x18 | 0.852 | 0.018 | 0.815 | 0.885 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| .x30 | 0.655 | 0.017 | 0.622 | 0.689 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x32 | 0.625 | 0.017 | 0.592 | 0.658 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| .x38 | 0.851 | 0.019 | 0.815 | 0.89 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x43 | 0.908 | 0.019 | 0.871 | 0.947 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x44 | 0.763 | 0.018 | 0.727 | 0.797 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x45 | 0.806 | 0.018 | 0.77 | 0.84 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x3 | 0.433 | 0.012 | 0.409 | 0.458 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x7 | 0.401 | 0.012 | 0.377 | 0.425 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x24 | 0.744 | 0.016 | 0.712 | 0.776 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x31 | 0.630 | 0.015 | 0.601 | 0.659 | 1.001 | dgamma(1,.5) |

| | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| .x48 | 0.652 | 0.015 | 0.622 | 0.682 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x52 | 0.871 | 0.018 | 0.837 | 0.909 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x11 | 0.763 | 0.020 | 0.724 | 0.802 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x13 | 0.627 | 0.025 | 0.58 | 0.677 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x14 | 0.842 | 0.020 | 0.803 | 0.882 | 1.001 | dgamma(1,.5) |
| .x42 | 0.887 | 0.020 | 0.848 | 0.926 | 1.007 | dgamma(1,.5) |
| .x25 | 0.556 | 0.019 | 0.52 | 0.593 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x49 | 0.749 | 0.019 | 0.715 | 0.787 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| .x50 | 0.577 | 0.019 | 0.542 | 0.614 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x19 | 0.363 | 0.008 | 0.349 | 0.38 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x21 | 0.044 | 0.002 | 0.041 | 0.048 | 1.006 | dgamma(1,.5) |
| .x26 | 0.336 | 0.007 | 0.323 | 0.351 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .x27 | 0.117 | 0.003 | 0.111 | 0.122 | 1.002 | dgamma(1,.5) |
| .x53 | 0.056 | 0.002 | 0.052 | 0.059 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .y1 | 0.064 | 0.004 | 0.055 | 0.072 | 1.017 | dgamma(1,.5) |
| .y2 | 0.239 | 0.006 | 0.227 | 0.251 | 1.000 | dgamma(1,.5) |
| .y3 | 0.227 | 0.006 | 0.215 | 0.238 | 1.004 | dgamma(1,.5) |
| .FEA | 0.575 | 0.029 | 0.521 | 0.634 | 1.020 | dgamma(1,.5) |
| .FEC | 0.084 | 0.008 | 0.069 | 0.099 | 1.026 | dgamma(1,.5) |
| .FET | 0.445 | 0.016 | 0.415 | 0.477 | 1.003 | dgamma(1,.5) |
| FFA | 0.237 | 0.019 | 0.2 | 0.272 | 1.006 | dwish(iden,4) |
| FPR | 0.442 | 0.022 | 0.396 | 0.484 | 1.003 | dwish(iden,4) |
| FSE | 0.636 | 0.018 | 0.601 | 0.674 | 1.003 | dwish(iden,4) |
| .FRE | 0.779 | 0.019 | 0.742 | 0.816 | 1.005 | dgamma(1,.5) |