UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato

TESIS

Que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa

Presenta:

Melby Guadalupe Cetina Vázquez

Director de tesis

Dra. María Guadalupe Cabañas-Sánchez

Co-director

Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa

Chilpancingo, Guerrero Noviembre, 2015

Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato

Melby Guadalupe Cetina Vázquez

A mis padres,

Melby y Gabriel

A quienes les debo todo lo que soy

A mis hermanos,

Gabriel y Rubén

Personas incondicionales en mi vida

A mis sobrinos

Aracelly y Adán

La chispa de mi alegría

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología** por
el apoyo financiero otorgado para la realización de mis
estudios de maestría y una estancia de investigación
en la Universidad de Antioquia, Colombia.

Becaria No. **297662**

Al proyecto **FOMIX** con Clave: **GUE: 2014-C01-249670**
por el apoyo otorgado para mi titulación.

Al Centro de Investigación en Matemática
Educativa de la Universidad Autónoma
de Guerrero por formarme
académicamente y profesionalmente.

Al Grupo de investigación MATHEMA-Formación en
Investigación en Educación Matemática de la
Universidad de Antioquia por permitirme
realizar una pasantía y por hacerme
parte del mismo.

Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecerme y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio de la maestría.

A mis Padres, por haberme forjado como la persona que soy; muchos de los logros se los debo a ustedes, en los que incluyo este. Gracias por motivarme con constancia para alcanzar mis sueños y por estar siempre para mí, sin su apoyo hubiese sido difícil.

A mis hermanos, sobrinos y demás familiares, por su cariño, amor y sus muestras de afecto, por compartir mi felicidad y mis alegrías.

A mi directora de tesis, Dra. Guadalupe Cabañas-Sánchez, por su esfuerzo y dedicación, por sus conocimientos y orientaciones, por su paciencia y motivación, lo cual ha sido fundamental para mi formación y para el culmen de mi trabajo. Gracias por apoyarme y por ofrecerme su amistad, la aprecio y estimo.

A mi co-director, Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa, por permitirme pasar una estancia de investigación con su grupo de investigación, por sus sabias orientaciones y contribuciones a mi persona y a mi trabajo.

A mis sinodales, Mtro. Miguel Díaz Cárdenas y Dra. Avenilde Romo Vázquez, por tomarse el tiempo de leer mi trabajo y por haberla enriquecido con su experiencia.

A mis profesores y compañeros de la maestría, por su amistad, enseñanzas, tiempo y por compartir sus experiencias y conocimientos, lo cual contribuyo sin duda a mi formación profesional.

A Esteban Mendoza, por su aprecio, apoyo y compañía, porque siempre tuve de él a un amigo y un colega de discusiones académicas.

A Mónica Parra, por estar al pendiente durante mi estancia de investigación y por enriquecer con comentarios a mi trabajo.

Al Mtro. Sixto Sánchez, por haberme prestado uno de sus grupos y darme las herramientas necesarias para llevar a cabo el estudio a nivel de experiencia del aula.

Y por último, a Victoria Gutiérrez, por su grata atención y por hacer que las cuestiones administrativas sean de lo más sencillo.

Gracias a todos!

Índice

Contenido Pág.

Abreviaturas

A	Estudiante
DA	Diferencia de Áreas
E	Equipo
EMR	Educación Matemática Realista
P	Profesor
PF	Producto entre dos Factores
S1	Situación 1
S2	Situación 2
TP	Teorema de Pitágoras

Introducción

En esta investigación se discuten los resultados de un estudio que exploró el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática. El interés de llevar a cabo este trabajo fue el aportar evidencia a que una manera de promover tanto las competencias de modelar, como el aprendizaje de la función cuadrática en lo escolar, es mediante la *modelación matemática* vista como un *proceso de matematización* de la realidad o de la matemática misma.

Este estudio se llevó a cabo en el marco de la Educación Matemática Realista, perspectiva teórica que admite a las matemáticas como una *actividad humana*, donde los estudiantes deben aprenderlas mediante la actividad *de organizar* la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a eso le llama *matematización.* Aceptando además, que ellos transitan, por diferentes niveles de compresión, partiendo de una matemática informal relacionada con el contexto hasta una matemática más formal.

Para el logro del objetivo investigativo, se diseñaron las situaciones y la forma de organizar el aula bajo los requerimientos establecidos por la Educación Matemática Realista. Previo a su implementación en el aula, se anticiparon (análisis preliminar) los modelos matemáticos, así como las reflexiones que se llevarían a cabo en torno a su solución. En su exploración con estudiantes de bachillerato, se obtuvo como resultados un uso de modelos matemáticos, así como de reflexiones asociadas a las características y representaciones de la función cuadrática. Se evidenció al proceso de matematización como un trayecto gradual que partió de contextos realistas de variación hasta el reconocimiento de la matemática implicada, función cuadrática.

El reporte de la investigación se estructuro en cinco capítulos:

El capítulo uno presenta los antecedentes y el planteamiento del problema. En los antecedentes se abordan: (1) los requerimientos de la educación en México en el contexto de la matemática escolar y como éstos se vinculan con la modelación matemática; (2) una revisión de la literatura especializada sobre la modelación matemática y (3) una serie de trabajos realizados en torno al concepto matemático función cuadrática. En la conjunción de estos tres elementos se fundamentó el problema de investigación.

El capítulo dos está dedicado a la Educación Matemática Realista, perspectiva teórica en la que se enmarcó la investigación. El capítulo se organizó de tal forma que se muestra un poco de su origen y evolución, así como sus seis principios fundamentales: de actividad, de realidad, de reinvención guiada, de niveles de comprensión, de interacción y de interconexión. Se finaliza estableciendo los objetivos específicos de este estudio.

El capítulo tres describe los elementos que conformaron la metodología de la investigación. Como son el método, los instrumentos para la recolección de los datos, la población de estudio, el diseño y propuesta de las situaciones de variación y de la forma de organizar el aula; así como su análisis preliminar de los modelos que los estudiantes pueden generar, con el fin de anticipar los posibles caminos a seguir en su proceso de matematización. Al final del capítulo se presentan los datos obtenidos en el estudio y el cómo fueron analizados.

El capítulo cuatro presenta los resultados de la investigación. Se presenta la caracterización de los niveles de compresión de modelo (situacional, referencial, general y formal) por cada una de las situaciones, en donde se reconocen cuáles son las reflexiones y los modelos generados. Y por último, se muestra una breve reflexión en torno a los aspectos matemáticos que de manera transversal, tuvieron presencia en la actividad matemática de los estudiantes.

El capítulo cinco discute los resultados obtenidos en el estudio. Éstos se centran en tres aspectos: a) el diseño de las dos situaciones de variación en el marco de la función cuadrática y de la forma de organizar el aula, b) el análisis preliminar de los modelos matemáticos anticipados, así como las reflexiones que los estudiantes llevarían a cabo en torno a su solución, y; c) el proceso de matematización desarrollado por los estudiantes. El capítulo se finaliza, presentando un contraste del estudio empírico vs teoría sobre el proceso de matematización y se plantean ideas para futuras investigaciones.

Capítulo 1

Antecedentes y Problema de Investigación

1.1. La matemática escolar en México y la modelación matemática

La educación en México en estos últimos años, ha estado involucrada en varios movimientos de reforma educativa (e. g. SEMS, 2008; SEP, 2004, 2006, 2009, 2011a; UAGro, 2013) que se caracterizan fundamentalmente, por la transformación de la gestión y por una renovación en el ámbito pedagógico, con la intención de contribuir en una formación integral en los estudiantes, en diferentes etapas de su escolaridad. Los enfoques de enseñanza de las actuales orientaciones curriculares están planteados en términos de competencias, cuyo propósito es precisamente desarrollar competencias[1] en los estudiantes mediante un trayecto formativo congruente plasmado en los planes y programas de estudios de todos los niveles del sistema educativo, Preescolar (3 a 6 años), Primaria (6 a 12 años), Secundaria (12 a 15 años), Medio Superior (15 a 18 años) y Superior (18 años en adelante). Se espera que al concluir estos ciclos educativos los estudiantes sean capaces de resolver eficaz y creativamente los problemas cotidianos y profesionales a los que se enfrenten a lo largo de su vida (SEP, 2011a, 2011b, 2013; UAGro, 2010, 2013).

En el contexto de la matemática escolar, el desarrollo de competencias se traduce en que los estudiantes le den sentido y significado a la matemática mientras interpretan y explican situaciones o fenómenos de su cotidiano. Es decir, que en el aula de matemáticas se planteen situaciones problemáticas reales que promuevan el desarrollo de aprendizajes funcionales que permitan a los estudiantes afrontar los desafíos de la realidad que viven (Cabrera y Cantoral, 2010).

Una manera de favorecer el desarrollo de competencias es mediante la **modelación matemática** (Cetina-Vázquez, Cabañas-Sánchez, y Villa-Ochoa, 2015). En el contexto de la modelación, una distinción que se hace comúnmente en la literatura (Ärlebäck y Doerr, 2015; Niss, Blum, y Galbraith, 2007; Stillman, 2012) es entre modelación y aplicación. Como aplicación, la ruta que siguen quienes la conciben de este modo es *matemáticas* → *realidad* y se preguntan ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, se entiende al menos hipotéticamente, que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, estos investigadores sostienen, que la dirección que se sigue es contraria, es *realidad* → *matemáticas* y la pregunta central es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificación y matematización de una situación del mundo real.

[1] Competencia: es la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes) (SEP, 2011a, p. 29).

Las situaciones problemáticas que se estudian siguiendo estas dos rutas, han ocupado un lugar importante en el aula de clases, distinguiendo así, entre situaciones de aplicación o bien las de modelación. Este tipo de situaciones no se contraponen, por el contrario, son complementarias.

Las reformas curriculares actuales sugieren que en el proceso de enseñanza de la matemática, la construcción de conocimiento matemático se constituya mediante la implementación de situaciones de modelación, que promuevan la construcción y uso de modelos matemáticos (relativo al concepto a abordar) que ayuden en la interpretación y explicación de determinada realidad.

Es en el marco de las situaciones de modelación que se formuló la presente investigación, en el interés de fomentar en el aula de clase, la posición de la Matemática como un medio para interpretar y explicar parte de nuestra realidad.

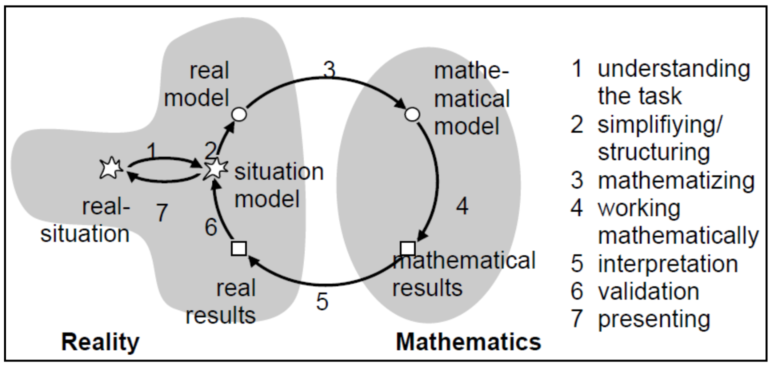
1.2. La modelación matemática en Matemática Educativa

En Matemática Educativa, la modelación matemática surgió a partir de los intentos de matemáticos educativos por esclarecer en el aula escolar la funcionalidad y los usos de la matemática en nuestra realidad. Existe una gran variedad de investigaciones internacionales basadas en la modelación matemática (e. g. Biembengut y Hein, 2004; Córdoba, 2011; Doorman y Gravemeijer, 2009; García, Gascón, Ruiz, y Bosch, 2006; Larsen, 2013; Pierce y Stacey, 2006, entre otros) que han sido sustento de experiencias de aulas, como las siguientes.

En Barbosa (2009) se concibe a la modelación matemática como un entorno de aprendizaje, el cual consiste en plantear una situación problemática con referencia a la vida cotidiana, profesional o en áreas científicas. Con base en ello, se busca que los estudiantes pregunten o investiguen mientras trabajan con la situación, a la vez, promover discusiones reflexivas sobre el papel de la matemática en su solución. En su estudio, reconoce que los estudiantes son capaces de producir tres tipos de debates en el entorno de modelación que plantea. Los debates se centran en lo m*atemático*, referente a ideas, conceptos y algoritmos matemáticos; *de técnicas* usadas para la representación de la situación-problema en términos matemáticos; y *reflexiones* sobre a la relación entre los criterios utilizados en la construcción de un modelo matemático y sus resultados.

En Borromeo (2006), la modelación matemática se estudia desde un punto de vista cognitivo-psicológico. Se toma como base el proceso de modelado de una situación real desarrollado por un estudiante, a fin de analizar cómo transita por un ciclo de modelado. El marco de análisis de ese ciclo es el ciclo de modelación de Blum y Leiss (2007), a fin de contrastarlos y reconstruir uno de tipo empírico. Este último ciclo presenta las fases por las que transitaron los estudiantes al desarrollar tareas de modelado; y son consideradas para la generación y análisis de otras nuevas. A partir de ello, distinguen y diferencian las fases de los modelos confrontados, el de Blum y Leiss y el empírico (véase figura 1.1).

a) Ciclo de modelación de Blum y Leiss (2007).



b) Ciclo de modelación empírico.

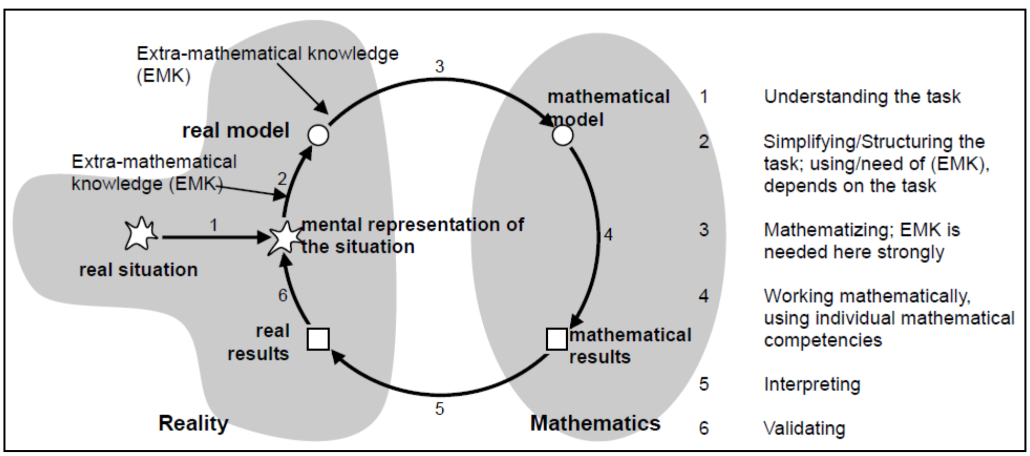


Figura 1.1. Ciclos de modelación contrastados por Borromeo (2006).

Otro estudio en ese contexto es el de Heuvel-Panhuizen (2003), quien concibe a la modelación matemática como un proceso de matematización de la realidad, (en el sentido de Freudenthal, 1968 citado en Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 11). El punto de partida de este proceso, es una situación con contexto experiencialmente real para el estudiante, es decir, contextos de la vida cotidiana o contextos reales en la mente del estudiante, para luego ser organizada matemáticamente. Con esa mirada de la modelación, diseña un conjunto de situaciones problemáticas que promueven el uso del modelo de barra, dentro de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje y la pone en funcionamiento con estudiantes de secundaria media de Estados Unidos de América. Los profesores que participaron en la experiencia se identificaron con la trayectoria propuesta. Por cuanto a las soluciones a las que arribaron los estudiantes, la investigadora reconoció, que se asemejaban a las pronosticadas en la trayectoria (figura 1.2).

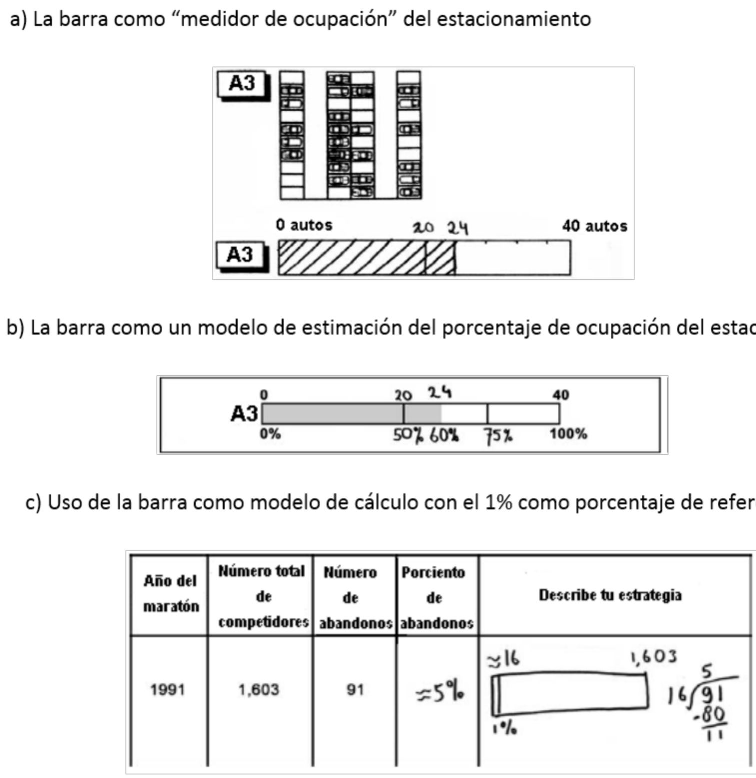


Figura 1.2. Ejemplos de algunos modelos usados por los estudiantes durante la trayectoria longitudinal sobre porcentaje, tomado de Heuvel-Panhuizen (2003).

La revisión sobre los estudios desarrollados en el marco de la modelación matemática, sin ser exhaustiva, evidencia que es vista como sigue:

a) *Entorno de aprendizaje*. El énfasis es una comprensión crítica del papel de la matemática en su solución de una situación de la realidad.

b) *Ciclo de modelado*. El énfasis es dar un seguimiento a la trayectoria cognitiva que siguen los estudiantes mientras modelan determinada realidad, basándose de un ciclo de modelado que a fin de analizar las fases por las que pasan los estudiantes en el desarrollo de tareas de modelado.

c) *Proceso de matematización*. El énfasis se encuentra en matematizar (u organizar) la realidad mediante el uso de herramientas y procedimientos matemáticos.

Estas miradas de la modelación matemática y el proceso implicado, permiten reconocer también, variantes en la concepción de realidad, que van (o hacen referencia) desde contextos de la vida cotidiana o de impacto para la sociedad (en los cuales se toman los datos con o sin ajuste); hasta contextos que sean experiencialmente reales para los estudiantes, es decir, contextos que puedan ser imaginados en la mente de ellos.

1.2.1. Clasificaciones y perspectivas de la modelación matemática

Diversos investigadores (Doerr y Pratt, 2008; Kaiser y Sriraman, 2006; Kaiser-Messmer 1996; Villa-Ochoa, 2013) han analizado la heterogeneidad de trabajos sobre la investigación en Modelación Matemática, por la gran influencia que han tenido alrededor del mundo. Estos investigadores han propuesto clasificaciones, tomando en cuenta diferentes características.

Una de las primeras clasificaciones que se reconoce es la de Kaiser-Messmer (1986, p.83 citado en Kaiser y Sriraman, 2006), quien distingue dos perspectivas de modelación:

a) **Perspectiva pragmática**: se centra en objetivos utilitaristas o pragmáticos. El énfasis se encuentra en la capacidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas en la resolución de problemas prácticos.

b) **Perspectiva científico-humanista:** se orienta hacia las matemáticas como una ciencia con ideales humanistas de la educación, con especial atención a la capacidad de los estudiantes para crear relaciones entre las matemáticas y la realidad.

Posteriormente, a partir de un llamado de la ZDM publicada en los números 2 y 3 del volumen 38, Kaiser y Sriraman (2006) retoman la clasificación de Kaiser-Messmer (1986) y proponen otra, que toma como base los objetivos centrales de la educación, en conexión con la modelación matemática. Esta clasificación se ha venido discutiendo en la comunidad de investigadores en Educación Matemática (o Matemática Educativa, o Didáctica de la Matemática), lo que ha dado lugar a incorporar aspectos como: a) La perspectiva teórica desde la que se estudia a la modelación matemática y los antecedentes de cada perspectiva. Esta clasificación con las consideraciones actuales (véase, Kaiser y Schwarz, 2010), se resume en la tabla 1.1.

Nombre de la perspectiva	Objetivos centrales	Antecedentes
Modelación realista o aplicada	Metas Pragmático-utilitaria, es decir, resolución de problemas del mundo real, la comprensión del mundo real y la promoción de competencias de modelación	Pragmatismo anglosajón y la matemática aplicada
Modelación contextual	Temas relacionados al sujeto y objetivos psicológicos, es decir, la resolución de problemas matemáticos	Debate americano sobre la resolución de problemas, así como la práctica escolar cotidiana y experimentos de laboratorio psicológicos.
Eliciting model (Situaciones que provocan modelos)	Objetivos psicológicos, transferencia de modelos a un nuevo problema	Debate americano sobre la resolución de problemas
Modelación educacional **(a)** Modelación didáctica **(b)** Modelación conceptual	Objetivos Pedagógicos y relacionados con el sujeto. **(a)** La estructuración y promoción de los procesos de aprendizaje **(b)** Introducción y desarrollo de conceptos	Teorías didácticas y teorías del aprendizaje
Modelación socio-crítico	Objetivos pedagógicos tal como la comprensión crítica del mundo circundante	Enfoques socio-críticos en sociología política
Epistemológica o modelación teórica	Objetivos orientados a la teoría, es decir, la promoción del desarrollo de la teoría	Epistemología romana
La siguiente perspectiva se puede describir como una especie de meta-perspectiva centrada en la investigación, tiene como objetivo un contraste con los enfoques anteriores:		
Modelación cognitiva	La investigación tiene como objetivo: analizar y comprender los procesos cognitivos que toman lugar durante los procesos de modelación. Objetivos psicológicos: promoción de los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos como imágenes mentales o incluso imágenes físicas; haciendo hincapié en el modelado como un proceso mental, como la abstracción o la generalización	Psicología cognitiva

Tabla 1.1. Clasificación de perspectivas sobre la modelación matemática, versión original en inglés, Kaiser y Schwarz (2010, p. 54)

Doerr y Pratt (2008) por su parte, establecen una clasificación que distingue dos tipos de perspectivas:

a) La **epistemológica**. Resalta la relación entre el mundo real y el mundo de los modelos. En esta perspectiva se sugieren dos bases epistemológicas: primero, que el modelo está separado del mundo a ser modelado, su esencia es que el mundo real y el mundo de los modelos se co-construyen mutuamente, obteniendo como producto una explicación de la realidad; y segundo, que la modelación es un proceso cíclico e iterativo entre el mundo real y el mundo de los modelos, pues implica que los modelos sean refinados, sucesivamente, para servir mejor al propósito con el que es construido.

b) La **psicológica**. Se ocupa de cuestiones relacionadas con la naturaleza de las actividades de los estudiantes cuando participan en tareas de modelación. En esta perspectiva se articulan estudios que han rechazado la linealidad o el ciclo de pasos en el proceso de la modelación, pues sostienen que los estudiantes hacen muchos movimientos cuando participan en dicho proceso, a menudo sin ningún orden en particular, y que se caracteriza por muchos ciclos y etapas múltiples. Un segundo aspecto que se desprende de la visión psicológica del estudiante y el aprendizaje es la distinción entre el uso de un modelo pre-construido por un experto y la construcción por parte del estudiante de un modelo que refleje sus propias comprensiones de los fenómenos.

A diferencia de las tres clasificaciones anteriores que apuntan a distinguir las rutas investigativas que se tienen sobre la modelación matemática, Villa-Ochoa (2013) plantea una, que distingue los tipos de situaciones que en la literatura sobre modelación matemática se presentan como maneras de implementar este proceso en el aula de clase. Diferencia cuatro tipos de situaciones:

a) **Idealizadas:** las situaciones presentadas son idealizadas o imaginadas, pues su foco de atención es resaltar las características más importantes de la situación, para con ello matematizarlas y construir una representación matemática, que explique la situación.

b) **Matemática dirigida:** el profesor es quien propone la situación con contexto real, que en algunos casos previamente ha simplificado y establecido pasos para su desarrollo dentro del aula, y pide a los estudiantes la experimentación de la misma con datos reales.

c) **Enunciados verbales o Word problems:** presentan contextos simplificados, idealizados o hasta imaginados, cuya intención es que los estudiantes reconozcan y matematicen las cantidades implicadas.

d) **Algunas relaciones entre matemáticas y cultura:** con el fin de dar evidencia de cómo las matemáticas se relacionan con el contexto del estudiante, se les pide a éstos buscar, proponer y resolver situaciones problemáticas relativas a su comunidad, donde se requiera el uso de herramientas matemáticas para explicar y dar solución.

El punto en común de las clasificaciones discutidas aquí (existiendo la posibilidad de otras más no reportadas en este trabajo), es que responden a la necesidad de resaltar tanto las miradas como las actuaciones de la modelación matemática en la investigación y en el aula de clase. Estas clasificaciones dan más claridad a investigadores y profesores de las diferentes concepciones de modelación matemática. Así también, del cómo y qué considerar para desarrollar una investigación o una situación en el aula, tomando en cuenta la complejidad y las intencionalidades de la misma.

Una concepción de modelación matemática puede categorizarse en una u otra perspectiva dependiendo de la clasificación que se considere. Además, en una clasificación, puede ubicarse en más de una perspectivas, pues suelen no ser disyuntas, ya que comparten características en común.

La presente investigación adopta una concepción de **modelación matemática** como un **proceso de matematización** (u organización) de la realidad. Este proceso fue profundizado (Treffers, 1987 citado en Arcavi, 2006) bajo dos formas: la *matematización horizontal*, que consiste en trasladar una situación problemática con contexto realista a algún tipo de matemáticas, mediante métodos matemáticos informales o preformales; y la *matematización vertical*, que es la formalización de las construcciones y producciones de los estudiantes hacia generalidades de contenido y método matemático. Este proceso suscita la conexión de las situaciones con sus modelos, además que permite legitimar las estrategias adecuadas con los estudiantes (Arcavi, 2006). Esta manera de trabajar la modelación tiene génesis en la **Educación Matemática Realista (EMR**). La EMR es una teoría de instrucción de la educación matemática que establece que el proceso de matematización de situaciones problemáticas realistas, permite un aprendizaje significativo y gradual de la matemática (Gravemeijer, 1999).

La modelación matemática fundamentada en la EMR se puede ubicar considerando la clasificación de:

- Kaiser-Messmer (1986), en la perspectiva *pragmática,* debido a que su centro de interés es que los estudiantes se vean en la necesidad de hacer uso de herramientas y procedimientos matemáticas para organizar y dar solución a situaciones problemáticas realistas.

- Kaiser y Sriraman (2006), en la perspectiva *realista,* dado que proponen que los estudiantes trabajen con situaciones problemáticas con contextos realistas, en donde se promuevan competencias de modelación, donde éstas se ven traducidas en el proceso de matematización. También, se considera dentro de la perspectiva *educativa*, puesto que se persigue el aprendizaje de un contenido u objeto matemático mediante la organización y solución de situaciones problemáticas reales.

- Doerr y Pratt (2008), en la perspectiva *psicológica*, pues se pregunta por lo que hacen los estudiantes, es decir, por su proceso de matematización de la realidad, en el marco de un concepto matemático. Dicho proceso se evidencia por medio de la construcción de modelos matemáticos, los cuales han de transitar por diferentes niveles de compresión, partiendo de un nivel matemático informal hasta uno formal.

- Villa-Ochoa (2013), en las situaciones *idealizadas, dirigidas y Word problems,* porque considera que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en situaciones problemáticas con contextos realistas, es decir, contextos de la vida cotidiana o contextos que sean realizables, imaginables o razonables para los estudiantes. Su fin último es matematizar la realidad.

1.2.2. Dificultades en la implementación de la modelación matemática en el aula escolar

La implementación de la modelación matemática en el aula de clase, como se ha evidenciado, tiende a movilizar en el estudiante formas de pensar, estrategias, competencias, actitudes, acercamiento a la realidad, habilidades y sistemas de conceptos. Sin embargo, también tiende a suscitar dificultades, tal como reportan Biembengut y Hein (2004) y Trigueros (2009). Desde la perspectiva de estos investigadores, estas dificultades tienen que ver con la implementación de la modelación matemática en el contexto escolar, mostrando así la brecha existente entre la investigación en modelación matemática y su implementación en el cotidiano escolar.

Dos primeras dificultades son: **(1)** la **formación de los profesores**, se refiere a que es raro que se dé una orientación de modelación y de su utilización en la enseñanza formal y **(2) referida a los estudiantes que tuvieron una vivencia de enseñanza tradicional**, consiste en la resistencia a la modelación, pues dicho método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto (Biembengut y Hein, 2004).

Otra dificultad **(3)** se basa en **la modelación y sus "técnicas"**, esta se centra en que las "técnicas" pueden y deben ser promovidas cuando se concibe a la enseñanza de las matemáticas por medio de la modelación, en tal caso *el tiempo* que absorbería un curso de esta naturaleza es imposible en una institución escolar con un currículo rígido (Trigueros, 2009).

Una más, **(4)** es relativa al **proceso de solución de problemas**, se basa en que los estudiantes presentan dificultades cuando intentan "traducir" al lenguaje matemático los enunciados de los problemas verbales. Y apunta a que en el caso de la modelación de situaciones reales esta dificultad es un obstáculo, puesto que en esta circunstancia, se les demanda: interpretar la situación, determinar las variables importantes para describir el problema de interés, formular hipótesis para simplificar adecuadamente la situación problemática y representarla matemáticamente. Entonces si los estudiante presentan dificultades al "traducir" al lenguaje matemático será difícil lograr el objetivo de la modelación (Trigueros, 2009).

Cualquier proyecto de investigación en el área de Matemática Educativa que pretenda incidir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, debe considerar las ventajas y dificultades que pueden resultar en el proceso de implementación del enfoque elegido en el diseño y las formas metodológicas para la realización de las actividades del aula. Las ventajas y dificultades pueden resultar en una gama de variedades, en dependencia de la concepción epistemológica sobre "modelación matemática" en que se sustenta el investigador.

La perspectiva epistemológica de modelación matemática asumida en el estudio se fundamenta en el enfoque de la EMR, para lo cual se consideraron algunos aspectos para su desarrollo en el aula de clase y en la investigación. Uno de ellos tiene que ver con el propósito de la modelación. En la perspectiva de la EMR la modelación se orienta hacia el aprendizaje de un contenido u objeto matemático mediante la organización y solución de situaciones problemáticas reales. De ello, se derivan otros aprendizajes del contexto y el desarrollo de competencias relativas al acto de modelar. Con base en lo anterior, en esta investigación se ha adoptado la modelación para la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática, dado que es uno de los contenidos presente en los currículos mexicanos en el nivel de bachillerato, además es un concepto que tiene fuertes raíces en la modelación de situaciones de variación y fenómenos cambiantes.

A continuación se presenta un breve bosquejo de trabajos realizados en Matemática Educativa referentes al concepto de función cuadrática. La intención es mostrar qué se ha hecho hasta el momento en torno a su enseñanza y su aprendizaje; y con base en ello, situar la pertinencia de su estudio en esta investigación.

1.3. Investigaciones en Matemática Educativa en el marco de la función cuadrática

Las funciones proporcionan potentes herramientas para representar y describir el cambio (Ärlebäck, Doerr, y O'Neil, 2013). Sin embargo, diversas investigaciones han evidenciado que los estudiantes encuentran dificultades en su compresión (e.g. Sierpinska, 1992; Tall y Vinner, 1981; Dubinsky, 1992¸Hitt, 2003; Evangelidou, Spyrou, Elia y Gagatsis, 2004), así como en su uso, para crear e interpretar modelos de fenómenos cambiantes (Ärlebäck et al., 2013). Las investigaciones han dicho bastante acerca de las dificultades de los estudiantes, asociadas con este concepto. En el caso de la función cuadrática, son pocas las investigaciones registradas, en las que se distinguen dos enfoques: (1) las que han discutido su historia, epistemología y didáctica (e.g. Mesa y Villa-Ochoa, 2008); (2) y las que se han centrado en la modelación matemática para favorecer su enseñanza y aprendizaje en el aula escolar (e. g. Andrés, Coronel, Di Rico, Fioriti, Guzmán, Kerlakian, Segal y Sessa, 2010; Henao y Vanegas, 2012; Huapaya, 2012; Vargas, 2011; Villa-Ochoa, 2008, 2012; Villarraga, 2012).

En el primer enfoque de investigación, se ubicó el trabajo de Mesa y Villa-Ochoa (2008), que reportó aspectos del **desarrollo histórico de lo "cuadrático",** se indicó que atravesó por, al menos, cuatro momentos: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. Sus conclusiones se basaron en hallazgos, que debieran rescatarse en el aula de clase, para promover la construcción de una concepción de lo cuadrático. Estos hallazgos fueron relativos a (p. 6):

a) *Las situaciones*. Se observó que el concepto de función y en particular la función cuadrática estuvo vinculado a la modelización de fenómenos de variación y cambio.

b) *Los obstáculos y fases importantes de su construcción.* Algunos de ellos son: (1) concepción de cuadrado meramente como área; (2) no concepción de los números negativos; (3) matemática concreta que dificulta la abstracción para ser representada; (4) no trascender del álgebra geométrica; (5) instrumentos de medición de fenómenos naturales ineficientes. (Galileo).

c) Los *aspectos didácticos* que pueden retomarse para su estudio en el aula escolar. La revisión histórica muestra "lo cuadrático" como una sinergia entre geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, teniendo como objeto de estudio el movimiento.

En el segundo enfoque de investigación, el cual trata sobre **la modelación matemática de la función cuadrática**, se han localizado trabajos que estudiaron la promoción de la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto mediante diferentes maneras de concebir y de proceder hacia la modelación matemática de situaciones o fenómenos de variación y cambio.

Los trabajos de Huapaya (2012) y Villarraga (2012) se centraron en el diseño de propuestas didácticas o experimentos de enseñanza en donde se contempló el uso de herramientas tecnológicas (graficador FUCTIONSWIN32, hoja de cálculo EXCEL, simulador MODELLUS, calculadora EMULADOR TI-92, entre otros) como mediación para la modelación de situaciones reales relativas a la función cuadrática. Sus resultados se basaron en que su aplicación de las propuestas didácticas o experimentos de enseñanza en el aula escolar, permitirá a los estudiantes la realización de prácticas de modelación de situaciones problema, donde articulen y coordinen los registros de representación de la función cuadrática, que a la vez, promoverá el aprendizaje y comprensión de dicho concepto matemático.

Villa-Ochoa (2012) enfatiza en el estudio de este concepto desde una mirada covariacional, a partir de la implementación de situaciones de variación (con o sin uso de contextos dinámicos), donde analiza el razonamiento de un estudiante relativo al *qué*, *cómo* y *cuánto* cambian las cantidades y los cambios mismos que intervienen en las situaciones. Su estudio de caso pone en evidencia el hecho de que existen estudiantes que pueden aproximarse a una interpretación variacional de las concavidades de una gráfica, sin que ello exija un estudio previo del cálculo diferencial. También, se desprendieron algunas implicaciones tanto para el marco conceptual abordado en este estudio como para el diseño de situaciones orientadas al aula de clase. Y por último, evidenció que el proceso de razonamiento covariacional no es un proceso lineal pero sí recursivo.

Vargas (2011) se enfocó al fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto función cuadrática, mediante propuestas didácticas cuyo eje central fue la modelación de fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático. La propuesta didáctica motivó a que el estudiante analice las variables que intervienen en los fenómenos físicos propuestos, plantee hipótesis y las verifique, a través de la experimentación directa o el uso de simulaciones, realice predicciones de comportamientos futuros de las variables que afectan el fenómeno en estudio; y analice y construya modelos matemáticos ajustados a las situaciones presentadas.

Villa-Ochoa (2008) planteó una propuesta didáctica que pretende potenciar el entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional. En dicha propuesta se resalta una caracterización del concepto y ocho aspectos que han de considerarse para su compresión desde una mirada variacional (véase Capitulo 3 de este documento). Este autor, además presentó un ejemplo de una situación de modelación de un fenómeno físico (caída libre) mediante su simulación (experimental y con el uso tecnología) que le permitió ilustrar la forma en cómo se pudiera abordar este concepto al interior del aula de clase con base a su propuesta didáctica.

Andrés, et al. (2010) y en Henao y Vanegas (2012) trabajaron con el proceso de matematización de situaciones realistas relativas a contextos de conteo. El proceso les permitió un primer acercamiento a la función cuadrática mediante la producción de modelos cuadráticos, utilizados para contar colecciones. Con la producción de modelos se desplegó un trabajo matemático, dotado de sentido y significado para los estudiantes. Se concluyó que esquemáticamente: observaron, caracterizaron, buscaron regularidades, definieron la secuencia, calcularon, produjeron fórmulas, transformaron y probaron la equivalencia, entre otras acciones matemáticas que conformaron su proceso de matematización de situaciones realistas.

Este breve bosquejo sobre investigaciones realizadas en torno al concepto de función cuadrática, evidenció que:

a) Las investigaciones vinculadas con la modelación matemática, trabajan de manera aislada aspectos como: lo variacional, prácticas de modelación, proceso de matematización, el uso de herramientas tecnológicas, registros de representación.

b) Las investigaciones realizadas en la línea de la EMR respecto a este concepto, se han centrado hasta el momento en situaciones de conteo, que conllevan a una introducción del mismo.

La presente investigación, busca contribuir en la comprensión del concepto función cuadrática, mediante considerar:

a) *Su estudio desde una mirada variacional*. Lo cual implica proponer situaciones de variación relativas a la función cuadrática y centrar su análisis en el estudio del qué, cómo y cuánto varía, *eso que varía*.

b) *Aportar hacia el desarrollo de competencias de modelación*. El proceso de matematización de situaciones de variación con contexto realista asociadas a la función cuadrática, aporta hacia el desarrollo de competencias relativas al acto de modelar, así como al tránsito de los modelos matemáticos construidos, por diferentes niveles de compresión, que va desde una matemática informal, a una formal.

c) *Dar sentido y significado a su actividad matemática*. Las situaciones de variación con contexto realistas, permiten dar a los estudiantes contextos que sean cercanos para ellos, lo cual promueve que el uso que hagan de herramientas y procedimientos matemáticos tenga sentido y significado.

d) *El análisis de sus características y sus diferentes representaciones*. El proceso de matematización de situaciones de variación y el estudio de la función cuadrática desde una mirada variacional, contempla (o considera) el análisis de sus características, así como la construcción de sus diferentes representaciones de dicho concepto matemático.

Estos cuatro aspectos son los que se buscan conjuntar en esta investigación, mismos que se han mantenido aislados en los estudios registrados sobre el concepto función cuadrática. Se toma en cuenta también, que dentro de la EMR dicho concepto no se ha trabajado como tal. De ahí, que el interés sea realizar investigación con situaciones de variación con contexto realista en el marco de la función cuadrática, en atención al proceso de matematización que desarrollan estudiantes de bachillerato, nivel de estudios donde se aborda el concepto matemático en cuestión.

1.4. Planteamiento del problema de investigación

La matemática, es objeto de estudio en los diferentes niveles educativos. Entre los objetivos de su enseñanza, está el llegar a construirse en una herramienta que pueda ser usada en la explicación y/o resolución de situaciones o fenómenos de la vida circundante o de las otras áreas de las ciencias. Sin embargo, en las aulas de escolares todavía es común observar una enseñanza fundamentada en el desarrollo conjuntista y axiomático de la matemática, en donde se diferencian dos momentos para abordar un concepto matemático: (1) estudio teórico; (2) ejemplos y ejercicios (Font, 2008). Este tipo de enseñanza conlleva una reproducción del conocimiento, donde la emergencia del conocimiento matemático para la explicación o resolución de situaciones o fenómenos de la realidad se ve rota. De modo que en el estudiantado suele quedar la idea de una matemática “formal” (dependiendo el tipo de enseñanza y el nivel de estudio) desconectada de su realidad.

Evidencia de ello (y de otros fenómenos) son las dificultades que estudiantes presentan en el manejo del concepto función. Por ejemplo, ante la aplicación de una prueba de aprovechamiento, se identificaron en los estudiantes dificultades en (Huapaya, 2012):

a) *Resolver problemas de enunciado verbal* que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso del lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones e inecuaciones lineales o modelar, interpretar o graficar situaciones utilizando la noción de función en sus diversas representaciones.

b) *En la noción de función*, pues no han logrado la comprensión de este concepto ni como una regla o fórmula para calcular imágenes y/o preimágenes, ni como una correspondencia entre dos variables, ni como un medio para modelar situaciones.

c) *No pueden interpretar situaciones representadas mediante el uso de funciones lineales, cuadráticas o racionales*, además no interpretan situaciones, ni las modelan, empleando ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, funciones lineales, cuadráticas o racionales.

Estas dificultades, por otra parte evidencian una falta de capacidad de los estudiantes para modelar situaciones. Estos resultados se reafirman en Ärlebäck, Doerr y O'Neil (2013) cuando señalan que a pesar de que las funciones proporcionan potentes herramientas para describir el cambio, la investigación ha demostrado que los estudiantes encuentran dificultades en el uso de las funciones para crear e interpretar modelos de situaciones variacionales o fenómenos cambiantes. Estos autores señalan además, que hay que buscar maneras de desarrollar habilidades en los estudiantes para describir e interpretar las tasas de cambio en los contextos de situaciones variacionales o fenómenos cambiantes.

Si bien estas dificultades no necesariamente son extensibles a la población estudiada, tampoco resultan ajenas a la realidad escolar mexicana. Pues la demanda de la actual reforma curricular de la Educación Media Superior en México, enfatiza que para el caso de las matemáticas, se debe favorecer que los estudiantes desarrollen habilidades de generalización y abstracción, lo cual contribuye a desarrollar su capacidad para resolver situaciones o fenómenos de la vida cotidiana (SEP, 2013). Ello con la ayuda de actividades que los motiven a analizar problemas cotidianos descritos en lenguaje común, a un lenguaje simbólico para explicar y brindarles solución (UAGro, 2010).

La presente investigación parte del contexto de la función cuadrática y apuesta a que una manera de promover tanto las competencias de modelación, como su aprendizaje en el aula de matemáticas, de acuerdo con los planteamientos de la reforma de la Educación Media Superior, es mediante la **modelación matemática** vista como un **proceso de matematización** *(*u organización) de la realidad. Esta manera de ver la modelación matemática permite el desarrollo de competencias relativas al acto de modelar en los estudiantes, así como el tránsito de los modelos matemáticos construido, por diferentes niveles de compresión, partiendo de un nivel matemático informal (que tiene que ver con el contexto realista de las situaciones) hasta uno formal (que se refiere al conocimiento matemático formal).

Por tanto, el propósito de esta investigación implica ofrecer una respuesta a la siguiente **pregunta**:

¿Qué proceso de matematización desarrollan estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contexto realista en el marco de la función cuadrática?

El **objetivo** es:

Caracterizar el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática.

Capítulo 2

Educación Matemática Realista

2.1. Surgimiento de la EMR

La EMR es una corriente didáctica, que surgió en los años 60 en Holanda como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática que se sustentó en los Países Bajos y a la aplicación en las aulas escolares en todo el mundo de la “matemática moderna” o “conjuntista” (Bressan y Gallego, 2011; Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

Como precursor de la EMR se reconoció a Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán considerado como un incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática. Se le distinguió además por su amplia actuación como creador y participante activo en grupos tales como el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión International para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM), reuniones en los que manifestó su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las "innovaciones" en la enseñanza vinculadas a la matemática de aquel momento. La oposición de Freudenthal a la psicología, la pedagogía y la didáctica de la época, se fundamentó en su conocimiento profundo de la disciplina matemática, en su interés por su enseñanza y su experiencia recogida en las aulas (Bressan, Zolkower, y Gallego, 2004).

Freudenthal, tuvo una visión de las matemáticas centrada en dos aspectos (Zulkardi, 2010):

a) Las matemáticas deben estar conectadas a la **realidad**, mantenerse cercanas a los estudiantes y ser relevantes para todas las situaciones de la vida cotidiana. La palabra realidad, dentro de la visión de Freudenthal, no sólo se refiere a la conexión con el mundo real, sino que también se refiere a situaciones reales en la mente de los estudiantes.

b) Las matemáticas como **actividad humana** están estrechamente relacionadas con la idea de ver a la educación matemática como un proceso de **reinvención guiada**, donde los estudiantes pueden experimentar un proceso similar al proceso por el que las matemáticas se inventaron. Teniendo como guía el proceso de **matematización progresiva**, en donde las estrategias informales de los estudiantes se interpretan como una anticipación de procedimientos más formales.

A pesar de sus escasas referencias a autores no matemáticos, Freudenthal reconoció influencias de Decroly, de quien valorizó sus centros de interés (que se asemejan a su propia teoría de aprendizaje de la matemática en el contexto de la vida real), de Dewey, a quien también reconoció similitudes con su idea de reinvención guiada, de Pierre y Dina

Van Hiele de los cuales tomó los niveles de matematización en función de su trabajo de tesis doctoral acerca del Desarrollo del pensamiento geométrico y su didáctica, de Lagenveld (pedagogía fenomenológica), Castelnuovo E. (didáctica intuitiva), Petersen (educación progresiva), Kry Van Perreren y las teorías socioculturales de la Europa del Este (Bressan et al., 2004, p. 2).

Esa actitud crítica y mirada de las matemáticas que tuvo Freudenthal, impulsó en 1968 un movimiento de reforma que dio origen al proyecto Wiskobas (iniciado por Wijdeveld y Goffree), el cual fue desarrollado por un grupo de educadores en matemática del nivel primario y secundario bajo la dirección de Hans Freudenthal en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) en la Universidad estatal de Utrecht. Entre 1970 y 1977 dicho proyecto se impuso desterrando de las escuelas los libros de texto basados en la Matemática Moderna, ocasionado por parte del IOWO la constitución de un proyecto curricular para la enseñanza elemental de las matemáticas, con el objetivo de innovar la educación de esta disciplina a nivel nacional y mediante la formación de profesores en ejercicio como motores del cambio (Santamaria, 2006). Posteriormente, dicho instituto se cerró y las actividades de investigación se continuaron realizando en el Grupo de Investigación sobre la Educación Matemática y Centro Educacional de Computación (OW y OC), que en 1992 fue renombrado como Instituto Freudenthal en honor a su fundador (Gravemeijer, 1994 citado en Santamaria, 2006). Actualmente, en este instituto y en otros países de todo el mundo como Inglaterra, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, EE. UU., Japón, Puerto Rico y Malasia se ha adoptado, discutido y apostado como base de sus currículos las ideas de Freudenthal, lo que ha dado paso a la consolidación de la EMR como una teoría de instrucción de la educación matemática (Bressan y Gallego, 2011; De Lange, 1996 citado en Zulkardi, 2010).

Las consideraciones o transformaciones principales de la EMR, son el establecimiento de sus seis principios fundamentales: *de realidad*, *de interconexión* y *de reinvención*, *de actividad*, *de niveles* y *de interacción*. Principios que a continuación se explican.

2.2. Principios fundamentales de la EMR

La EMR es conocida como una teoría de instrucción específica del dominio de las matemáticas, cuyas ideas han sido producto del trabajo en proceso y del movimiento de reforma derivado en las últimas décadas en la educación de todo el mundo. Esta teoría tiene mucho en común con los enfoques actuales del modelo educativo de diversos países (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014) e implica una serie de principios fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de la EMR, la **enseñanza** de la matemática, toma forma de *reinvención guiada*, es decir, como un proceso en el que los estudiantes re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar situaciones problemáticas reales, en interacción con sus compañeros y bajo la guía del profesor. La negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación son elementos esenciales a considerar en un proceso constructivo de aprendizaje en el cual la *matemática informal*[2] relacionada con el contexto es usada como base para el logro de la *matemática más formal*[3]. En esta enseñanza interactiva los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir, cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas (Bressan y Gallego, 2011).

El **aprendizaje** de las matemáticas es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos (Bressan y Gallego, 2011, p. 6) permitiendo el paso entre la *matemática informal* del estudiante cercana a las situaciones con contextos reales con la *matemática formal* que se espera en lo escolar.

Esta manera de ver a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas da paso a describir los roles esperados del estudiante y el profesor. El **rol del estudiante** como un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos reales, es decir, su actividad principal es *matematizar* la realidad mediante la generación de *modelos matemáticos* que pueden partir desde sus estrategias o conocimientos matemáticos informales hasta concretarse en conocimiento matemático formal. El **rol del profesor** es de un sujeto cuya principal actividad es *didactizar*, entendida esta como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal (los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza y aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros) como a nivel vertical (reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta construir su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización en el aula). Dentro del proceso constructivo del aprendizaje el profesor actúa como un sujeto que media, guía, explicita, interviene, discute, coopera y evalúa la actividad matemática del estudiante sin afectar las producciones libres (modelos matemáticos y decisiones) de los mismos (Bressan et al., 2004).

En estos roles se deja ver la importancia del uso de **modelos matemáticos**, que en la EMR y en el presente estudio se conciben como:

---

[2]Matemática informal: son estrategias o herramientas que se usan en el contexto de una situación, para esquematizar y formular el problema de diferentes formas; reconocer relaciones y/o dependencias, entre otros.

[3]Matemática formal: son construcciones y producciones con generalidades de contenido y método matemático, tales como: procedimientos estándares y notaciones convencionales.

Representaciones de situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones… Materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e incluso símbolos llegan a servir de modelos (Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 13).

Estos conceptos son clave en la EMR. A continuación se aborda cada uno de sus **seis principios fundamentales**. Heuvel-Panhuizen (2002 citado en Santamaria, 2006) menciona que tres de los principios como son el **de realidad**, **de interconexión** y **de reinvención** están asociados a la *enseñanza* y los otros tres principios como son el **de actividad**, **de niveles** y **de interacción** están conectados al *aprendizaje* de las matemáticas.

2.2.1. Principio de actividad

Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1971) de las matemáticas como una *actividad humana*. Para él las matemáticas no eran el cuerpo del conocimiento matemático, sino la actividad de resolver problemas y buscar problemas (1968) y, en términos más generales, la actividad de "organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma" (1973, p.44), es lo que llamó ***matematizar***.

Esta interpretación de las matemáticas basada en la actividad tuvo también consecuencias importantes respecto a cómo se conceptualizaba la educación matemática. De un modo más preciso, afectó tanto los objetivos de la educación matemática como los métodos de enseñanza. Según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemáticas es haciéndola (ibid., 1968, 1971, 1973) y la matematización es la meta central de la educación matemática (Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 11):

Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad, el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p.7).

En la EMR matematizar, involucran dos acciones, generalizar y formalizar. La acción de *generalizar* es entendida en un sentido reflexivo, pues implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se las clasifique dentro de un determinado tipo. Al mismo tiempo el proceso de solución puede ser estructurado y, por lo tanto, la generalización toma forma de una actividad de organización, como una forma de matematización. El proceso de generalización se acompaña por una cierta formalización del lenguaje. De ahí que *formalizar* concierne al proceso de cambio desde el

”lenguaje cotidiano” al lenguaje formal de las matemáticas; involucrando acciones como modelizar, simbolizar, esquematizar y definir (Gravemeijer, 1994 citado en Santamaria, 2006).

2.2.2. Principio de realidad

Basado en la idea de Freudenthal de que las matemáticas deben estar conectadas a la realidad, estar cerca de los estudiantes y debe ser relevante para la sociedad, el uso de *contextos realistas* se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque. Pues los estudiantes deben aprender matemáticas a través del desarrollo y la aplicación de conceptos y herramientas matemáticas en situaciones problemáticas de la vida cotidiana, que tengan sentido para ellos (Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 9).

El adjetivo “realista” dentro de la EMR se refiere a la intención de que a los estudiantes se les debe ofrecer situaciones problemáticas que puedan *imaginar* y/o *realizar*. Dentro de esta perspectiva, los problemas que se presentan a los estudiantes pueden venir del mundo real, pero no se limitan únicamente a éstos, sino también pueden venir desde el mundo de fantasía de los cuentos de hadas, o el mundo formal de las matemáticas, siempre y cuando los problemas sean por experiencia real en la mente de los estudiantes (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

En la búsqueda de estos problemas se debe considerar: (1) que sean significativos para los estudiantes, lo que ofrece la oportunidad de dar significado a las construcciones matemáticas que se desarrollan mientras se da resolución al problema (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014, p. 523); (2) que puedan esquematizarse fácilmente y; (3) que desde el punto de vista de los estudiantes, halla una necesidad para la construcción de modelos. Este último aspecto se refiere a que el problema tiene que incluir actividades modelo inductoras, como por ejemplo, la planificación y ejecución de soluciones, identificar similitudes y diferencias, y hacer predicciones (Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 16).

Ejemplos de contextos realistas que han sido manejados dentro de la EMR son (Bressan, 2011, Principio de Realidad, párr. 8):

- Los patrones en los collares para trabajar regularidades.
- Las situaciones de reparto equitativo para el tratamiento de las fracciones.
- La notación en libreta (usada en los restaurantes) para sistema de ecuaciones.
- La ubicación de un incendio desde distintos miradores, para trabajar coordenadas, rectas y pendientes.

- Buscar regularidades en tablas y tableros.
- Construir pirámides numéricas trabajando operaciones inversas.
- Completar operaciones buscando relaciones entre los números que las integran, etc.

Estos contextos realistas, evidencian una *cualidad* que se toma en cuenta al momento de su búsqueda, y es *contexto* → *conocimiento matemático*. Esto sugiere un papel secundario para el contexto, pues el fenómeno no es de interés por sí mismo, sino que es de interés solo si permite ser "organizado" a la luz del contenido matemático a construir. Los conocimientos interdisciplinares pueden no jugar un papel importante en dicho proceso.

2.2.3. Principio de reinvención guiada

En la EMR, la enseñanza de la matemática toma la forma de reinvención guiada (Freudenthal, 1991), un proceso en el que los estudiantes re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la guía del profesor. La negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación son elementos esenciales en un proceso constructivo de aprendizaje en el cual los métodos informales son usados como base para el logro de los formales. En esta enseñanza interactiva, los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir, cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas (Bressan y Gallego, 2011, p. 6).

En la figura 2.1 se muestra la caracterización del proceso de reinvención, por medio del cual el conocimiento matemático formal en sí mismo puede ser reconstruido.

Este proceso va acompañado de la acción *guiada* del profesor, pues posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los estudiantes y las situaciones problemáticas en juego, entre los estudiantes entre sí, entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina (Bressan y Gallego, 2011, p. 6).

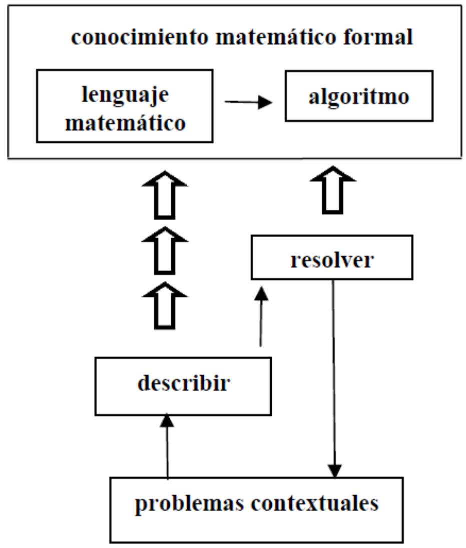


Figura 2.1. Representación esquemática del proceso de reinvención. Tomada de Gravenmeijer, (1994 p. 94) citado en Santamaria (2006)

Para orientar adecuadamente este proceso, es importante la capacidad de anticipación, observación y reflexión del profesor acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus estudiantes. Esto permite conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a esta reinvención y a los cambios de nivel (Freudenthal, 1991 citado en Bressan, 2011, Principio de Reinvención, párr. 6).

Para Freudenthal (1991) el aprendizaje, lejos de ser continuo y gradual, presenta discontinuidades, es decir, saltos repentinos de reinvención (evidenciados por los alumnos en las "experiencias de ajá", en la toma de atajos en sus estrategias, los cambios de puntos de vista, el uso de modelos de distintos niveles de formalización), que van de estructuras complejas del mundo real a las más generales, abstractas y formales de la matemática (Bressan, 2011, Principio de Reinvención, párr. 7) .

2.2.4. Principio de niveles de comprensión

El proceso de *matematización progresiva* en la EMR, radica en que los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática. Este proceso (Freudenthal, 1991) se distingue bajo dos formas:

- **Matematización horizontal**, consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.

- **Matematización vertical**, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba y simbolización, con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En este proceso de matematización, la EMR admite que los estudiantes pasan por cuatro *niveles de comprensión (o de formalización, o de matematización)*: situacional, referencial, general y formal*,* unidos al uso de estrategias, modelos y leguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada (Bressan, 2011). Los niveles de comprensión consisten de (Bressan y Gallego, 2011, pp. 7–8):

- En el **nivel situacional**, se da una interpretación de la situación problemática y un uso de estrategias y conocimientos informales ligados al contexto de la situación. Entre las acciones que se esperan usar, están el sentido común y la experiencia, identificar y describir la matemática que yace en el contexto, visualizar, esquematizar y formular el problema de diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades, entre otras.

- En el **nivel referencial** aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí, que los modelos se consideren como “modelos de” en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.

- El **nivel general** se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. En este nivel, se espera que los estudiantes generalicen mediante reflexiones los modelos encontrados en el nivel anterior y puedan concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los “modelos para” la resolución de los mismos.

- En el **nivel formal**, se comprende y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales, propias de la rama de la matemática con que se está trabajando. En este nivel, se espera que los estudiantes, interpreten y resuelvan otros problemas con el uso de conocimiento matemático formal.

Cabe resaltar que estos niveles son dinámicos y no jerárquicos, por lo que se puede esperar que en el desarrollo de la actividad matemática los estudiantes se encuentren a la vez en diferentes niveles. Estos niveles más que describir en forma exacta qué puede hacer el estudiante en cada uno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje. Los *modelos matemáticos* y la *reflexión colectiva* son instrumentos básicos para el tránsito de un nivel a otro, pues permiten el establecimiento de un puente entre la matemática informal y la formal. Los modelos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada (Bressan y Gallego, 2011; Bressan et al., 2004). Un esquema sobre el proceso de matematización que plantea la EMR se puede ver en la figura 2.2, en la cual se muestra que la matematización horizontal lo constituye el nivel de comprensión situacional; y los niveles restantes corresponden a la matematización vertical.

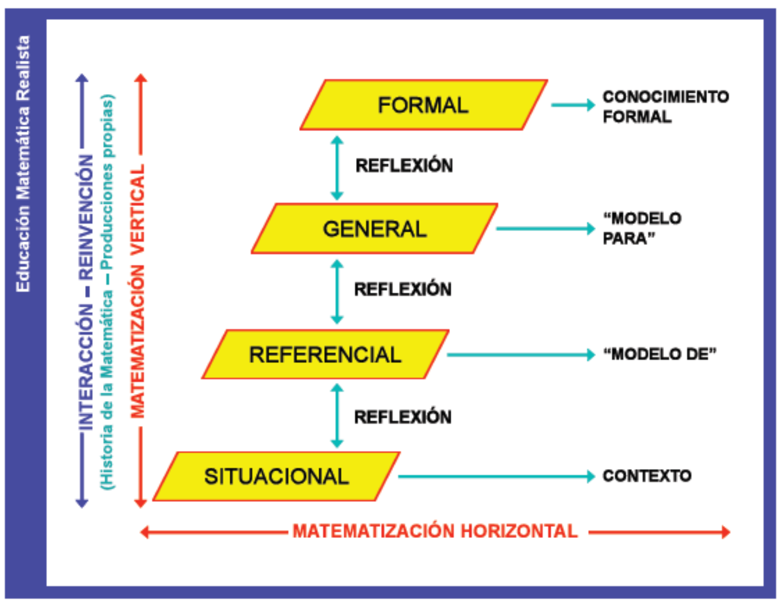
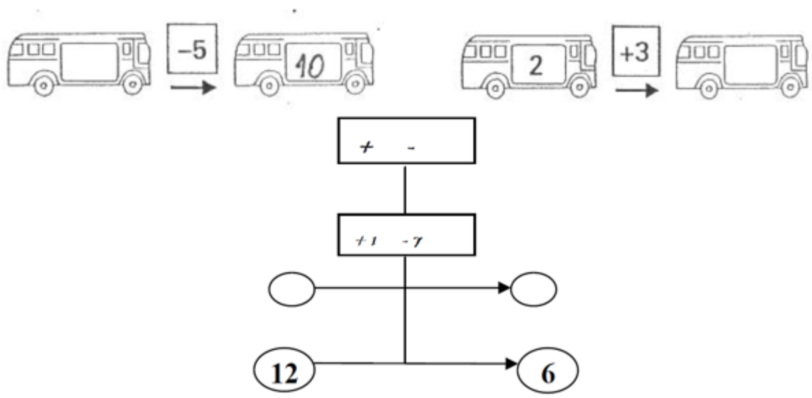


Figura 2.2. Descripción del proceso de matematización progresiva en la EMR (Bressan y Gallego, 2011, p. 7).

Retomando una situación paradigmática que ha sido trabajada en el enfoque de la EMR, se ejemplificará el proceso de matematización que niños de primer grado de una Escuela de Bariloche realizaron. La situación es sobre un contexto del colectivo, que trata del recorrido de un colectivo en el que se van subiendo y bajando pasajeros, trabajándose así simultáneamente la suma y la resta. El proceso de matematización se caracteriza de la siguiente manera: los niños se encuentran en el nivel situacional cuando reconstruyen trayectos en los que suben y bajan pasajeros. Cuando pasan al dibujo y representan dichos trayectos usando el lenguaje de flechas, estarían en el nivel referencial. Paulatinamente, la situación del colectivo evoluciona como modelo de situaciones de subida y bajada (entrada o salida) de personas a otras de la misma naturaleza matemática (nivel general), o donde aparecen operaciones secuenciadas –por ejemplo, los viajes en el ascensor, la confitería, el juego de bolos, etc.– llegando luego el alumno a interpretar y resolver aritméticamente otras situaciones de suma y de resta a nivel enteramente formal (Bressan, 2011; Collado, Bressan, y Gallego, 2003). En la figura 2.3 se presentan algunos ejemplos de modelos de distinto nivel cognitivo, que esperaban ser logrados e interpretados a partir de trabajar con el contexto del colectivo.



SUBEN (+)	BAJAN (-)
15	7
9	1
8	0
13	5
11	3
20	12
17	

1) $12 + 1 - 7 = 6$
2) $12 - 7 + 1 = 6$
3) $6 + 7 - 1 = 12$
4) $6 - 1 + 7 = 12$

Figura 2.3. Modelos de distinto nivel de compresión que pueden ser construidos a partir de trabajar con el contexto del colectivo (Collado et al., 2003).

2.2.5. Principio de interacción

El aprendizaje de las matemáticas dentro de la EMR no es sólo una actividad individual, sino también una **actividad social**. Pues favorece las discusiones de toda la clase y el trabajo en grupo, que ofrecen a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones con los demás. De esta manera, pueden obtener ideas para mejorar sus estrategias y así, mediante la reflexión alcanzar niveles más altos de comprensión (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

2.2.6. Principio de interconexión

Otro aspecto esencial de la EMR es la **fuerte interrelación de los contenidos matemáticos** de varios ejes o unidades de las matemáticas (Alsina, 2009; Gravemeijer, 1999). Es decir, los ejes de contenidos de aprendizaje, como son la aritmética, álgebra, geometría, cálculo, entre otros, no pueden ser tratados como entidades separadas y esto deben ser considerado en las propuestas de las situaciones problemáticas, dado que el estudiante al resolver un problema mediante sus propias estrategias puede hacer uso del álgebra o de la geometría, de ambas o de otros ejes de contenido. Lo que refleja la ingeniosidad del estudiante en la resolución de problemas (Santamaria, 2006). Para ello, es conveniente considerar en las propuestas, situaciones que permitan una diversidad de maneras de resolverla.

2.3. La investigación y el planteamiento de sus objetivos específicos

La investigación se enmarcó en esta perspectiva teórica, puesto que el conjunto de sus seis principios fundamentales de la EMR, permiten el diseño de las situaciones y de la forma de organizar el aula que se han de implementar en los estudiantes de bachillerato, para alcanzar el objetivo investigativo, que es *caracterizar el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato, al modelar situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática*. Este objetivo se ha desagregado en tres específicos con la intensión de delimitar los aspectos que en conjunto ayudaran a caracterizar el proceso de matematización.

Los **objetivos específicos** son:

a) Identificar los *modelos* y las *reflexiones* de los estudiantes de bachillerato durante el proceso de matematización desarrollados al modelar las situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática;

b) Caracterizar los *niveles de comprensión* de modelo que alcanzan los estudiantes de bachillerato al modelar las situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática;

c) Caracterizar las dos formas del *proceso de matematización: horizontal y vertical*, que los estudiantes de bachillerato alcanzan mientras modelan las situaciones de variación con contextos realistas, en el marco de la función cuadrática.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

3.1. Método de investigación

El interés de la presente investigación es estudiar el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contextos realistas, en el marco de la función cuadrática. De ahí que la investigación tomó un carácter *descriptivo cualitativo* (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010), debido a que se buscó una interpretación profunda y detalles con respecto a la actividad matemática desarrollada por los estudiantes ante matematizar situaciones de variación, ello con la intensión de caracterizar los modelos matemáticos y reflexiones que hayan generado, los niveles de comprensión de modelo que hayan alcanzado y las dos formas de matematización por las que hayan transitado durante la misma.

El trabajo se realizó bajo un *estudio de casos*, con la intensión de poder organizar y reportar información acerca de la actividad matemática que un grupo de 15 estudiantes de bachillerato, hizo al matematizar situaciones de variación con contexto realista relativas a la función cuadrática (Hernández et al., 2010).

Para el logro del objetivo general y de los específicos, se propuso *dos situaciones de variación* con contexto realista asociadas con la función cuadrática, cuyo diseño contempló los *requerimientos* que la *EMR* establece, como son un *análisis fenomenológico didáctico* de lo cuadrático y los *seis principios fundamentales* de la EMR.

Una vez elegida la institución de Educación Media Superior de la que se seleccionó la población de estudio, fue necesaria la revisión del programa de estudios de matemáticas para decidir el tamaño de la población que se estudió.

3.2. Instrumentos para la recolección de datos

La exploración de las situaciones se realizó en un ambiente de lápiz y papel. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos son las evidencias escritas de los estudiantes, grabaciones de video y los diarios de clase.

Las *evidencias escritas* de los estudiantes, contienen información sobre sus acciones en el proceso de matematizar las situaciones, así como de sus explicaciones y descripciones escritas.

Las *grabaciones de video*, muestran las herramientas y procedimientos que los estudiantes ponen en juego en cada situación, como también de sus argumentaciones en las discusiones surgidas en los momentos de interacción grupal propiciados por el profesor.

En los *diarios de clase,* se registraron los avances de cada estudiante en cada sesión, con dos propósitos: 1) para en caso necesario orientar sus acciones hacia el objetivo de la actividad y 2) contar con la información necesaria para la descripción del proceso gradual de aprendizaje del concepto función cuadrática.

3.3. Población de estudio

La *población de estudio* se conformó con 15 estudiantes de grado once de entre 16 a 18 años de edad del Colegio de Bachilleres Plantel Dos de Acapulco, Guerrero, México, que se encontraban cursando la asignatura de Matemáticas IV, centrada en el estudio de las funciones matemáticas. La intervención que se tuvo con los estudiantes, fue después de haber abordado parte del Bloque III (figura 3.1) de su programa de estudios. Lo que corresponde a modelos de grados cero y uno.

Los conocimientos previos de los participantes fueron las asignaturas de Matemáticas I, II Y III. En la primera se abordaron aprendizajes y herramientas fundamentales de las matemáticas con relación en Aritmética y Álgebra. En la segunda, de Geometría y la Trigonometría, asimismo se abordaron elementos básicos de la Probabilidad y la Estadística. En la tercera, de Geometría Analítica, lo cual permite al estudiante la interpretación y diseño de las diversas figuras geométricas que sirven para el análisis de diversas funciones motivo de estudio de la asignatura de Matemáticas IV.

DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES

El programa de Matemáticas IV está conformado por ocho bloques que se enuncian con una redacción dirigida al alumnado a continuación:

BLOQUE I RECONOCES Y REALIZAS OPERACIONES CON DISTINTOS TIPOS DE FUNCIONES.

En este bloque se establecen las características matemáticas que definen las relaciones entre dos magnitudes enfatizando las de carácter funcional.

BLOQUE II APLICAS FUNCIONES ESPECIALES Y TRANSFORMACIONES DE GRÁFICAS.

En este bloque se distinguen y describen diferentes tipos de funciones matemáticas, así como operaciones y trasformaciones algebraicas y/o geométricas.

BLOQUE III EMPLEAS FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADOS CERO, UNO Y DOS.

En este bloque se determinan las situaciones de un modelo de cero, uno y dos grados, empleando criterios de comportamiento de datos.

BLOQUE IV UTILIZAS FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO TRES Y CUATRO.

En este bloque se reconocen patrones gráficos, se describen propiedades geométricas y se obtienen soluciones de ecuaciones factorizables.

BLOQUE V UTILIZAS FUNCIONES FACTORIZABLES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En este bloque se efectúa un análisis comparativo de las funciones polinomiales hasta grado cuatro profundizando en el análisis de las características de los modelos lineales y cuadráticos, y se desarrollan procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos para la obtención de los ceros polinomiales, los cuales se definen como los cortes de la gráfica con el eje "x" y las raíces son las soluciones de la ecuación asociada.

BLOQUE VI APLICAS FUNCIONES RACIONALES.

En este bloque se revisan las funciones racionales y la existencia de posibles asíntotas.

BLOQUE VII UTILIZAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

En este bloque se obtienen valores de funciones exponenciales y logarítmicas, asimismo se aplican dichos valores para modelar y resolver problemas.

BLOQUE VIII APLICAS FUNCIONES PERIÓDICAS.

En este bloque se estudian las funciones exponenciales, logarítmicas y periódicas.

Figura 3.1. Distribución de los bloques que conforman la asignatura de Matemáticas IV en el Bachillerato General (SEP, 2013, pp. 9–10).

3.4. Diseño de las situaciones en el marco de la EMR

El diseño de las situaciones de variación con contexto realista en el marco de la EMR, contempló: (1) un análisis fenomenológico didáctico de la función cuadrática; (2) revisión de aspectos de la didáctica de la función cuadrática desde una mirada variacional y (3) selección de contextos realistas que son parte de la realidad inmediata de los estudiantes para que tengan sentido y significado para ellos.

A continuación se presenta cada uno de los aspectos que conformaron parte del diseño de las situaciones de variación.

3.4.1. Análisis fenomenológico didáctico de la función cuadrática

La EMR toma como requerimiento principal realizar un análisis fenomenológico didáctico. Se entiende por análisis fenomenológico de un concepto matemático tal como Puig (1997) define:

El análisis fenomenológico de un concepto matemático o de una estructura matemática consiste en describir cuales son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es medio de organización ha de considerar en la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar la matemática en su desarrollo actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos (p. 63).

Si al análisis de esa relación entre concepto y fenómeno, se le presta atención a cómo se adquiere en un proceso de enseñanza-aprendizaje, se estaría describiendo lo que se entiende por un análisis fenomenológico didáctico de un concepto (Freudenthal, 1983).

Para trabajar el concepto de función cuadrática en un proceso de enseñanza-aprendizaje, en primera instancia se realizó una búsqueda de fenómenos que generan la necesidad de ser organizados matemáticamente en el marco de la función cuadrática. Se recurrió a los trabajos de Mesa y Villa-Ochoa (2008) como fuente de información acerca de los fenómenos que le dieron origen en la historia; y el trabajo de Huapaya (2012) para los fenómenos que en la actualidad se han identificado que promueven su uso como herramienta para organizarlos, explicarlos y resolveros.

Los fenómenos que en la historia fueron medio de organización de la función cuadrática, están asociados a cuatro momentos que cimentaron dicha noción (Mesa y Villa-Ochoa, 2008):

1. **Ecuación.** Las ecuaciones estuvieron presentes en la historia de diversas culturas, como Babilonia, Grecia y Árabe, en donde se presentaron de manera retórica. Las “nociones cuadráticas” se encontraron asociadas a situaciones en donde *el concepto de cuadrado* tuvo una *concepción aritmética* y *geométrica*. En lo *aritmético*, se destacó a la escuela pitagórica quien estableció razonamientos numéricos para *sucesiones y progresiones*, haciendo un *empalme con la geometría* en relación con los *números figurados*. Observándose, en sus trabajos cierta

captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos que siguen un patrón constante o en los números figurados, una cierta distribución de los números. En lo *geométrico*, su representante fue Euclides, quien en su libro de *los Elementos* define el concepto de cuadrado como "…entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular". Esta definición la retomó en su libro *Áreas* en donde evidenció los vínculos entre la aritmética y la geometría, pues la *noción de cuadrado* apareció como *figura* y *área* a la vez.

2. **Cónicas.** Su estudio se encuentra vinculado con la cultura Griega (Apolonio e Hipócrates de Chíos) y con la época del Siglo XVII. Apolonio fue quien formuló las secciones cónicas y a la vez las estudió aproximándose al estudio de coordenadas. El significado de "parábola" en esta época fue como equiparación, similar al concepto de paralelogramo de Euclides en los que por supuesto se encuentra la figura cuadrilátera, donde se deduce que la concepción de cuadrática se refirió a un proceso también de conversión de áreas. Por otro lado, Hipócrates de Chíos afirmó que el problema de la duplicación del cubo "puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble (…)", lo cual condujo a una expresión cuadrática, donde se dedujo *cuadrado es el producto que se desprende de la media proporcional*, pero a la vez ésta se evidenció como un segmento que es nombrado raíz, y también como una solución. La época del Siglo XVII se caracterizó porque se trató de definir las cónicas como curvas correspondientes a *ecuaciones de segundo grado, en* x *e* y, así se estableció el estudio de los lugares geométricos, creando un puente entre la Geometría y el Álgebra, donde la aritmética jugó un papel importante en dicha transición.

3. **Cinemática.** El estudio del movimiento, comenzó con Oresme, uno de sus propósitos era el representar mediante una figura geométrica las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, estas intensidades estaban representadas por segmentos. Ese estudio, lo siguió Galileo Galilei. Sus principales aportes, fueron la *construcción epistemológica del concepto función cuadrática* la cual vinculó de manera explícita con los procesos de modelación de los *fenómenos de variación*. En Galileo se observó el uso de algunas *representaciones como de gráficas rectangulares y la instauración del método experimental*, como una forma de modelación con la que pretendió dar explicaciones a fenómenos de variación en la naturaleza. En su trabajo argumentó como *"lo cuadrático" está vinculado a un proceso de variación de cantidades analizadas desde un punto de vista aritmético*. También afirmó que la parábola es un punto en movimiento, producto de la trayectoria de un cuerpo que se mueve

de acuerdo a una ley, patrón o causas, por ello surgen los modelos que pretenden explicar los fenómenos presentados. La *parábola* la vio como una *representación del movimiento* en la que la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre cantidades.

4. **Funciones.** Newton fue uno de los primeros en cimentar formalmente el concepto de función. Utilizó el álgebra simbólica y la geometría analítica para construir el cálculo diferencial. En su obra, Principia se observa *"lo cuadrático" asociados a fenómenos naturales con carácter más funcional*, aunque no se hace explícito, por ejemplo, *el movimiento de un cuerpo lo representó geométricamente por una parábola y analíticamente por una ecuación de segundo grado*. En el trabajo de Newton se observó que las situaciones cuadráticas eran estudiadas en el plano, donde se representaban mediante una expresión algebraica y después se interpretaban como puntos (en el plano coordenado) que relacionan dos magnitudes variables. Toda vez analizado el comportamiento de la curva construida por medio de una ecuación cuadrática, se distinguió *un tipo de relación unívoca entre magnitudes*, que posteriormente fue llamada *función cuadrática*.

En estos cuatro momentos, se evidenció que el concepto de *función cuadrática* estuvo vinculado a la *modelación de fenómenos de variación y cambio*, tales como *el movimiento*. Por lo que el diseño de situaciones didácticas debería rescatar contextos vinculados a ese tipo de fenómenos, además de presentar una *concepción de "lo cuadrático"* desde diversas interpretaciones, *como una sinergia entre geometría euclidiana, cónicas y geometría analítica*.

Los *fenómenos* que se estudian en la *actualidad* para la promoción de la función cuadrática como herramienta para organizarlos, explicarlos y resolverlos, están asociados a *situaciones de variación y cambio*. En la tabla 3.1 se muestran dichas situaciones, que Huapaya (2012) condensó y presentó, resaltando el área de su aplicación y el modelo que se le asocia a cada una.

Área	Situación	Modelo asociado
Economía y Finanzas	Oferta y demanda	Precio p Cantidad q $p(q) = aq^2 + bq + c; p, q \epsilon Z$ $p > 0 \wedge q > 0$
	Costo-Ingreso Utilidad	x: cantidad de artículos producidos y vendidos $C(x)$: función costo. $I(x)$: función ingreso.

		$U(x)$: función utilidad. $$U(x) = I(x) - C(x)$$ También: Ecuación de demanda $p(q) = aq + b$ p: precio q: cantidad $$I(q) = pq$$ I=Ingreso $$I(q) = (aq + b)q$$ $$I(q) = aq^2 + bq$$ Cuando la demanda es lineal, el Ingreso es cuadrático
Física	Movimiento parabólico	v_0: velocidad inicial t: tiempo de vuelo g: aceleración de la gravedad α ángulo de tiro x: alcance máximo y_{max}: altura máxima $$t = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}$$ $$x = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g}$$ $$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g}$$
	Movimiento vertical en caída libre	s: altura $$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_o$$ s_0: altura inicial v_0: velocidad vertical inicial t: tiempo g: aceleración debida a la gravedad v: velocidad vertical de un objeto en caída libre $$v(t) = -gt + v_0$$
Optimización en la fabricación y	Área máxima/mínima	Un rectángulo cuyos lados son x e y. Perímetro conocido:

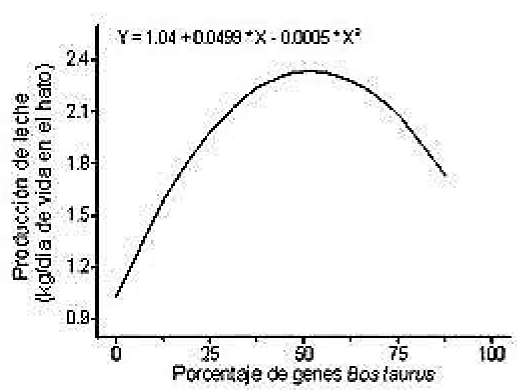
manufactura		$p = 2x + 2y$ Área: $A = xy$ Luego: $A = x\frac{(p-2x)}{2}$
Estadística	Algunas situaciones se describen numéricamente a partir de un registro numérico (tabla)	Vía una regresión de dichos pares de valores puede obtenerse la tendencia y ecuaciones de regresión de dicha situación. En este caso se muestra un conjunto de pares $(x;y)$ los cuales siguen una tendencia $Y = mx + b$ $Y = Ax^2 + Bx + C$ Se tiene en cuenta el R^2 (Índice de correlación al cuadrado)
En biología	Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar efectos nutricionales de los organismos. También niveles de producción.	

Tabla 3.1. Fenómenos de variación y cambio asociados a la función cuadrática, tabla retomada de Huapaya (2012, pp. 41–43).

Los fenómenos que en la historia y en la actualidad han sido reportados en este trabajo, comparten una característica general, y es que presentan procesos de variación que puede ser estudiados mediante la función cuadrática, en la cual la tasa de variación de las dos variables inmersas, varían linealmente; o de otra manera, en aquella función en la cual la segunda tasa de variación, es una constante. Esta característica es la que restringe y a la vez da muestra que los fenómenos asociados con las funciones cuadráticas no se encuentran en todas partes; y a veces hay que buscar y hacer ajustes (de regresión) para encontrar que ahí también hay de ese tipo de función, esto debido a la naturaleza de los datos de nuestra realidad circundante.

De los fenómenos de variación y cambio reportados, dos se retomaron para el diseño de las situaciones de variación. En una se incluyó el contexto de un fenómeno asociado a la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la longitud de la distancia entre los vértices del primero respecto del segundo. En la otra situación se involucró el estudio de un fenómeno relativo a la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club por el incremento que le hace a la cuota mensual que cobra a sus socios.

3.4.2. Didáctica de la función desde una mirada variacional

Al considerar fenómenos de variación y cambio, para el estudio de la función cuadrática como modelo que explica procesos de variación objeto de estudio en las situaciones, se dio paso a adoptar una didáctica de dicha función desde una mirada variacional. En esa dirección, Dolores (2013) y Villa-Ochoa (2008) resaltan ciertos aspectos a considerar. El primero establece los aspectos a nivel general, es decir, para toda función. Y el segundo los establece primero, para la función cuadrática y finaliza, con aspectos para el estudio en lo escolar, de toda función.

Dolores (2013) reporta que para la comprensión de la función, el análisis se debe centrar en dar respuesta al qué, cómo y cuánto varía eso que varía en las situaciones de variación y cambio. Esas tres cuestiones, se centran en analizar aspectos de la variación, los cuales se presentan a continuación:

¿Qué varía?

- Magnitudes variables de la situación o fenómeno de variación
- Intervalo de variación de las magnitudes variables o conjunto de valores que pueden adquirir las variables
- Relación de dependencia entre las variables
- Reconocimiento de la variable dependiente y variable independiente de la relación

¿Cómo varía?

- Regla de correspondencia entre los valores de las variables
- Expresión de una fórmula algebraica, tabla o gráfica que exprese la regla de correspondencia entre los valores de las variables
- Dominio de la función: conjunto de partida constituido por el intervalo de variación de la variable independiente
- Imagen de la función: al conjunto de llegada constituido por el intervalo de variación de la variable dependiente.

- Tipo de curva que describe la variación
- Valores donde se anula o se hace cero la variación
- Intervalo donde la variación es positiva
- Intervalo donde la variación es negativa
- La variación es continua o discontinua
- Si tiene o no asíntotas
- Intervalo donde crece y/o decrece
- Valores máximos o mínimos

¿Cuánto varía?

- Medición del cambio
- Comportamiento del cambio
- Medición del cambio de segundo orden
- Comportamiento del cambio de segundo orden

Desde un nivel particular, Villa-Ochoa (2008) expresa una interpretación de la función cuadrática desde lo variacional, para lo cual propone la siguiente caracterización:

> *"se llama **función cuadrática** a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente" (*p. 248).

Con base en esa definición, establece que para alcanzar un buen entendimiento de dicha función se debe tener en cuenta (p. 248-249):

(1) La descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de características de su gráfica.
(2) La identificación del cambio de la razón de cambio como una constante.
(3) La identificación del producto de dos cantidades que varía linealmente.
(4) La construcción de una función de la cual se conoce que su razón de cambio varía linealmente.
(5) La construcción de una función lineal a partir de una función constante y a partir de ella una función cuadrática de la cual puede provenir.
(6) Asumir una función cuadrática y a partir de ella encontrar la función lineal que representa su cambio y a su vez la función constante que hace referencia al cambio de segundo orden.
(7) La asociación de la forma en cómo varía el cambio con las concavidades de la gráfica de la función.
(8) La generalización de un patrón cuadrático a partir de la interpolación de un conjunto de datos en una tabla.

Este autor, menciona también que para tener en la escuela un buen desarrollo conceptual de la función, se requieren tener en cuenta los siguientes aspectos (p. 253):

(1) La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
(2) La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
(3) La identificación de la razón de cambio y la forma en cómo puede cambiar dicha razón.
(4) El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
(5) El reconocimiento de la variación lineal de la razón de cambio como elemento que identifica las funciones cuadráticas.
(6) La compresión de la función como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.

Estos aspectos, se corresponden con algunos que Dolores (2013) menciona. En el diseño de las situaciones en el marco de la función cuadrática, se apostó que centrando a los estudiantes en el estudio de las tres cuestiones del qué, cómo y cuánto varía, *eso que varía*, presentadas por Dolores, desarrollarían el proceso de matematización de la función cuadrática con sentido y significado.

En esta investigación, se ajustó la caracterización que da Villa-Ochoa (2008) sobre función cuadrática, debido a los intereses perseguidos y al nivel de estudios de los estudiantes participantes. La propuesta de la caracterización es:

> ***Función cuadrática.*** *Relación unívoca entre dos magnitudes variables cuyo cambio de segundo orden (o cuya segunda tasa de variación), es una constante.*

3.4.3. Contextos realistas de las situaciones de variación

Los contextos realistas que fueron considerados para las situaciones de variación, se reconocen con ser parte de la realidad inmediata de los estudiantes y de generar la necesidad de ser organizados matemáticamente, a partir de su conocimiento informal hasta alcanzar la formalización de la función cuadrática.

Situación 1. Cuadrados y áreas[4]

La situación se planteó en un contexto geométrico, de áreas de cuadrados. El propósito es que los estudiantes construyan modelos matemáticos que organicen la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la distancia que hay de sus vértices a los del circunscrito. En este proceso de variación, hay un momento en que el área del cuadrado inscrito es mínima.

Situación 2. La promoción del Video Club

La situación se planteó en un contexto de oferta y demanda. El propósito es que los estudiantes arriben a modelos que matematicen la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club, al variar el precio de la mensualidad que les cobra a sus socios. En este proceso de variación, hay un momento en que la recaudación mensual es máxima.

¿Por qué son contextos cercanos a la realidad de los estudiantes?

El contexto de áreas de cuadrados, si bien se planteó de manera geométrica, y resulta ser un contexto matemático, éste no es ajeno a lo que conocen los estudiantes, pues parte de su realidad escolar, y en ésta el cotidiano que se vive es el de interactuar y aprender matemáticas, así como otras asignaturas como Química, Física, Historia, Biología, entre otras. Además, se presume que el tema de áreas de cuadrados es para ellos un conocimiento previo, y por ello, parte de su realidad experimentada.

El contexto de oferta y demanda, es un contexto de la realidad de los estudiantes, pues en su cotidiano siempre están inmersos en prácticas o situaciones con respecto en compras, ventas, ofertas, promociones, ganancias, pérdidas, etc. Así como en la toma de decisiones respecto a la relación precios–satisfacción del producto.

Los criterios anteriores, evidencian que ambos contextos seleccionados para el diseño de las situaciones de variación, son realidades inmediatas y del cotidiano de los estudiantes de bachillerato participantes en este estudio. El "cotidiano" admitido en este estudio subyace de la relación "social-cultural-escolar", lo cual resulta acorde con el principio de realidad admitida en la EMR.

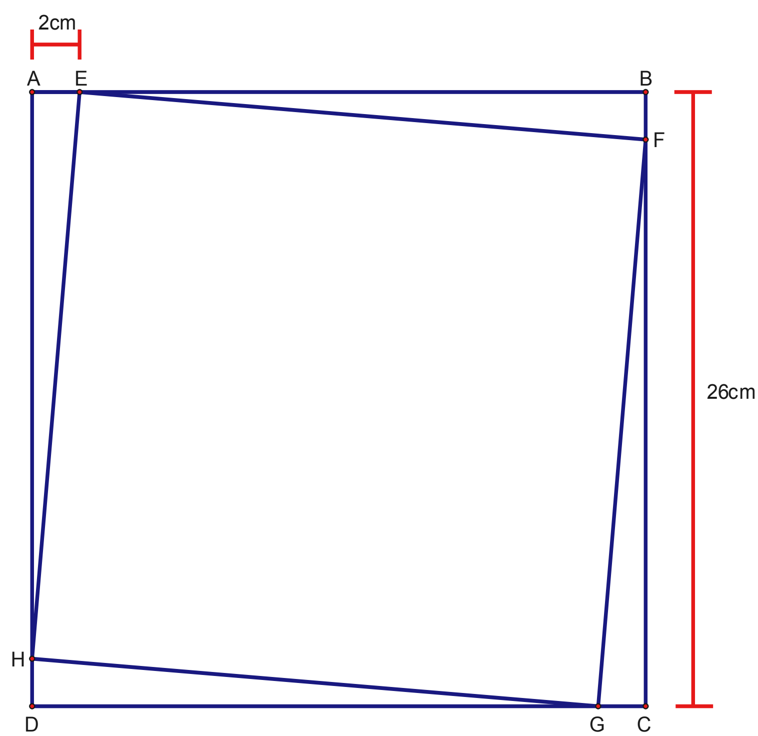
[4] Situación retomada y ajustada de Llluzi y Sessa (2014, p. 39).

3.5. Las situaciones

La propuesta de las situaciones, contempló una serie de cuestiones (inductoras), con el fin de promover en los estudiantes el proceso de matematización progresiva, a partir del análisis del qué, cómo y cuánto varía, *eso que varía* en los procesos de variación de las situaciones.

3.5.1. Situación 1. Cuadrados y áreas

Dado un cuadrado ABCD de 26 cm de lado, se ha inscrito un cuadrado EFGH, cuyos vértices están a 2cm de distancia de los vértices del cuadrado original. Con base en estos datos realiza lo que se te pide.



1. ¿Cuál es el área de EFGH cuando la distancia de A a E es 2cm?
2. Determina cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuya área sea menor al de la primera pregunta. ¿Cuánto miden las distancias AE consideradas para encontrarlos? ¿Cuánto miden sus áreas?
3. Determina cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuya área sea mayor al de la primera pregunta. ¿Cuánto miden las distancias AE consideradas para encontrarlos? ¿Cuánto miden sus áreas?

4. Determina cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuya área sea igual al de la primera pregunta. ¿Cuánto miden las distancias AE consideradas para encontrarlos? ¿Cuánto miden sus áreas?
5. Determina el área de EFGH cuando la distancia de A a E es:
    a) 10cm
    b) 16cm
    c) 13cm
6. Determina cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuyas áreas sean iguales al de la pregunta cinco inciso c) ¿Cuánto miden las distancias AE consideradas para encontrarlos? ¿Cuánto miden sus áreas?
7. Determina cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuyas áreas sean iguales. ¿Cuánto miden las distancias AE consideradas para encontrarlos? ¿Cuánto miden sus áreas?
8. ¿Cuál es el cuadrado de área mínima que se puede inscribir en el cuadrado ABCD? ¿Cuánto mide su distancia de A a E?
9. Describe el comportamiento de la variación del área del cuadrado inscrito mientras se modifica la medida de la distancia AE.
10. ¿Cómo cambia el área del cuadrado mientras se modifica la distancia AE?
11. Conociendo la medida de la distancia AE, ¿cómo se determina el área del cuadrado EFGH?

¿Qué demandan las cuestiones plateadas?

Las cuestiones planteadas orientaron el proceso de matematización de la situación. Se contemplaron cuestiones de la 1 a la 5, que demandan el cálculo de valores puntuales de la variación, para que los estudiantes comiencen a familiarizarse con el contexto, identifiquen las magnitudes variables, su relación de dependencia entre ellas y determinen *procedimientos (geométricos y aritméticos)* que los lleve a las respuestas solicitadas. En particular, las cuestiones de la 2 a la 4 buscan centrar a los estudiantes en comparar y calcular los valores que pueden tomar las áreas de los cuadrados inscritos, que se generan al modificar la distancia AE. Ello, con el fin de que comiencen a identificar ciertas regularidades en el comportamiento de los valores de la variación.

Otras cuestiones, de la 6 a la 10, se centran en el análisis del comportamiento y sus puntos clave de los valores de la variación, en el análisis se espera que el estudiante construya modelos matemáticos como el *tabular* y el *gráfico*. En específico, las cuestiones 6 y 8 solicitan que los estudiantes se den cuenta de que cuando $\overline{AE} = 13$, se genera un único cuadrado inscrito con área mínima de entre todas las que se pueden generar en el proceso de variación. La cuestión 7 orienta a los estudiantes a identificar una característica del proceso de variación, la simetría de sus valores. La cuestión 9 enfoca la atención de los estudiantes a describir de manera general el comportamiento de los valores de la variación; se espera que ellos identifiquen que los valores del área, primero decrecen y luego crecen, que es continúa en el intervalo [0, 26], que la curva que describe la variación es una parábola y que aterricen en ideas sobre su dominio, su imagen y la simetría de sus valores, con respecto al valor mínimo. La cuestión 10 los centra en medir y analizar el comportamiento del cambio de la variación, como es una variación cuadrática se determina la medición y el comportamiento del cambio de segundo orden, cuya conclusión es que este último es constante.

La cuestión 11 se centra en demandar la generalización hacia una *expresión algebraica* que organice la variación, una función cuadrática.

3.5.2. Situación 2. La promoción del Video Club

El dueño de un Video Club decidió emplear un sistema de socios con un cargo fijo durante el mes, para los clientes habituales. El sistema consiste en que los clientes se hacen socios y pagan una cuota fija por mes, que los autoriza a rentar películas en ese periodo bajo cierto reglamento. La cuota mensual es de \$79, y se hicieron socios a 93 personas. Luego de variar el precio de la mensualidad varias veces, el dueño registró que por cada \$1 que le incrementaba, siempre perdía un socio. Con base en estos datos realiza lo que se te pide.

1. ¿Cuánto recaudó, cuando la cuota mensual era de \$79?
2. ¿Con cuántos socios se va a quedar, si le incrementa a la cuota mensual \$4? ¿Cuánto recaudará en ese caso?
3. ¿Cuánto será el costo de la cuota, si le incrementa a la cuota mensual \$7? ¿Cuánto recaudará en ese caso?
4. Determina las recaudaciones mensuales que se obtendrían si el dueño le incrementa a la cuota mensual:
    a) \$10
    b) \$14
    c) \$60
5. ¿De cuánto es el valor de incremento a la cuota mensual para que se tenga cero de recaudación?

6. Propongan otros posibles incrementos e indiquen cuántos socios quedarán y cuándo recaudará el dueño en esos casos.
7. Describe el comportamiento de la variación de la recaudación mensual por el incremento que se le hace a la cuota mensual.
8. ¿Cómo cambia la cantidad de recaudación con respecto al incremento que se le hace a la cuota mensual?
9. ¿Cuánto tiene que incrementar la cuota mensual para obtener la máxima recaudación? ¿Cuál sería esa recaudación?
10. Conociendo la cantidad de incremento de la cuota, ¿cómo se determina la cantidad de recaudación?

¿Qué demandan las cuestiones planteadas?

Las cuestiones de la 1 a la 6, demandan el cálculo de valores puntuales de la variación, se espera que los estudiantes comiencen a familiarizarse con el contexto de la situación, identifiquen las magnitudes variables, su relación de dependencia entre ellas y determinen *procedimientos aritméticos* que los lleven a las respuestas solicitadas. En particular, las cuestiones 1 y 5 centran a los estudiantes en determinar valores claves de la situación, como es el valor inicial y el valor donde se anula la recaudación mensual, respectivamente. La cuestión 6 enfoca a los estudiantes al cálculo de otros valores de la recaudación que se obtienen al variar el incremento que se le hace a la cuota, se persiguió que los estudiantes reconozcan el dominio, rango y algunas regularidades de los valores de la recaudación (simetría de sus valores y que son discretos).

Otras cuestiones, como 7, 8 y 9, se centran en ubicar a los estudiantes en el análisis del comportamiento de los valores y de otros puntos clave de la variación, se espera que el estudiante construya modelos matemáticos como el *tabular* y el *gráfico* para que de dichas explicaciones.

En específico, la cuestión 7 enfoca la atención en que los estudiantes describan de manera general el comportamiento de los valores de la variación. Por ejemplo, se espera que identifiquen que los valores de la recaudación primero crecen y luego decrecen, que la curva que describe el proceso de variación es una parábola y que aterricen en ideas sobre el dominio, imagen y simetría de los valores de la variación. La cuestión 8 los centra en analizar, apoyados en la operación de medición, el comportamiento del cambio de la variación, como es una variación cuadrática se determina la medición y el comportamiento del cambio de segundo orden, cuya conclusión es que este último es constante. Y la 9 solicita que los estudiantes se den cuenta que cuando el incremento a la cuota es de $7, se genera una única recaudación mensual que resulta ser la máxima de entre todas las que se pueden generar en el proceso de variación.

Por último, la cuestión 10 se centra en demandar la generalización hacia una *expresión algebraica* que organice la variación analizada, la cual representa a una función cuadrática.

En el proceso de variación de la Situación 2, las magnitudes variables son discretas y los modelos matemáticos que mejor lo han de organizar son relativos a una función cuadrática, que es continua. Se debe tener presente que los valores que interesan y tienen sentido en la situación son los enteros.

3.6. Diseño de la forma de organizar el aula

La puesta en escena de las situaciones, exige de una forma de organizar el aula. En este estudio la forma de organizar el aula se basó en que *los estudiantes* interactúen entre pares (de manera grupal y en equipo) y tengan la libertad de resolver por varias vías matemáticas las situaciones propuestas, ello bajo la guía del profesor. La negociación explícita, intervención, discusión, cooperación y evaluación entre pares, son elementos a favorecer, pues permiten que sus métodos informales se usen como base para el logro de los formales, y así ellos alcancen niveles más altos en su comprensión de los modelos que construyan.

El *rol del profesor* se consideró como sujeto (Bressan et al., 2004) que guía, explicita, interviene, discute y evalúa la actividad matemática de los estudiantes sin afectar sus producciones libres (modelos matemáticos y decisiones). Además, él debe mediar entre los estudiantes y las situaciones en juego, entre los estudiantes entre sí, entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina (Bressan y Gallego, 2011).

Los *momentos* –contemplados– *de intervención* del profesor con los estudiantes, son:

1. Organizarlos en equipos heterogéneos de tres integrantes.
2. Motivarlos e introducirlos al contexto de las situaciones de variación.
3. Dejarlos que matematicen las situaciones a nivel de equipo.
4. Durante el desarrollo de las situaciones debe abrir espacios (de manera estratégica) para discutir a nivel grupal (en plenaria), los procesos, reflexiones y

modelos arribados por los equipos. Ello, para compartir y comparar lo que cada equipo hizo; y se armen consensos de manera grupal.

5. Generar un espacio de cierre al final de cada una de las situaciones, donde se resalte en conjunto con los estudiantes: (1) el sentido y significado que adquiere la matemática al ponerla en funcionamiento para matematizar situaciones de variación; (2) los aspectos reconocidos de la función cuadrática y sus diferentes modelos a los cuales arriben. La función cuadrática es un concepto que no han abordado como tal, en su curso de matemáticas, es el profesor quien mediante el cierre de la Situación 1, debe orientar a los estudiantes hacia la caracterización –verbal y escrita– del concepto, retomando los aspectos identificados en el estudio del proceso de variación. La caracterización es:

   Función cuadrática. *Relación unívoca entre dos magnitudes variables cuyo cambio de segundo orden (o cuya segunda tasa de variación), es una constante.*

3.7. Modelos matemáticos anticipados. Análisis preliminar

La EMR, admite que para orientar adecuadamente la puesta en escena de las situaciones y dar lugar a los cambios de nivel, es importante la capacidad de anticipación, observación y reflexión del profesor acerca de los aprendizajes de los estudiantes (Bressan, 2011). Con base en dicho requerimiento, la presente investigación recurrió a *anticipar* qué *modelos matemáticos* emergerían en las explicaciones de los estudiantes en el proceso de solución de las situaciones de variación, así como de *reflexiones* que llevarían a cabo en torno a ello.

El análisis preliminar se organizó por las dos formas de matematización (vertical y horizontal) y por los cuatro niveles de comprensión (situacional, referencial, general y formal), donde se ubicó a los modelos y las reflexiones esperadas.

3.7.1. Situación 1. Cuadrados y áreas

Esta situación parte de un contexto geométrico para llegar a modelos que matematicen la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la distancia AE. Durante dicho proceso, se esperaba la presencia de diversos modelos con diferente nivel de comprensión, que a su vez, fueron divididos en las dos formas de matematización: horizontal y vertical.

Matematización Horizontal

Dentro de este tipo de matematización se ubican dos modelos matemáticos: geométrico y aritmético. Estos permiten estructurar matemáticamente, de manera visual y numérica, respectivamente, la variación del área del cuadrado inscrito que se genera cuando se modifica la distancia AE.

Nivel situacional

Los modelos matemáticos y las reflexiones ubicadas en este nivel, se caracterizan por dar una interpretación del proceso de variación, mediante *estrategias y conocimientos informales* ligados al contexto de *cuadrados y áreas*. En los cuales los estudiantes puedan identificar o describir relaciones y regularidades, que los lleve a dar soluciones particulares del problema. Los modelos esperados en este nivel son:

Modelo geométrico. Este modelo permanece en el contexto de la situación y representa de forma geométrica, a la variación del área del cuadrado inscrito $EFGH$ en función a la medida de la distancia AE. Con dicho modelo (figura 3.2) los estudiantes pueden visualizar que a mayor distancia entre los vértices A y E, menor es el área del cuadrado inscrito que genera, sin embargo cuando $\overline{AE} = 13$, se genera un cuadrado inscrito con área menor y luego de esta medida de $\overline{AE}$, los valores del área se vuelven a repetir de manera simétrica. Permite también, reconocer el conjunto de valores que puede tomar la distancia de AE y la búsqueda de relaciones y regularidades entre las figuras que se generan para determinar un procedimiento *ad hoc* para el cálculo del área del cuadrado inscrito.

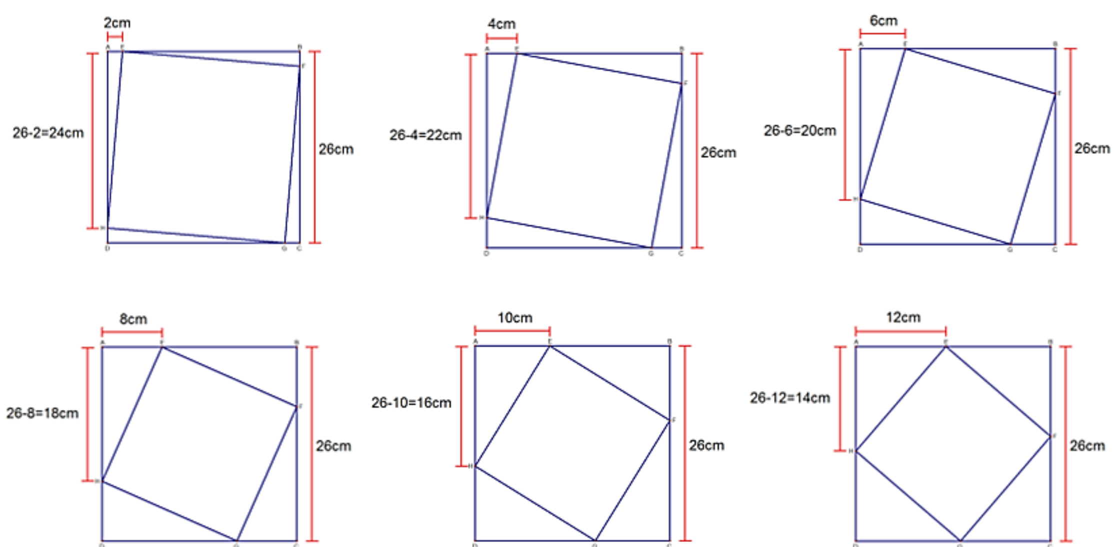
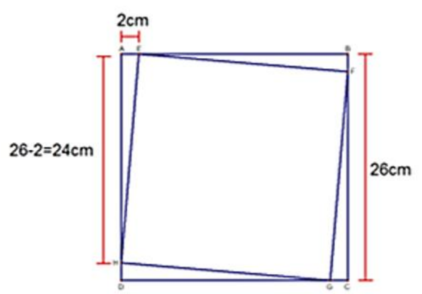


Figura 3.2. Modelo geométrico.

Modelo aritmético obtenido mediante diferencias de áreas. Este modelo (figura 3.3) representa el procedimiento aritmético realizado para calcular el área del cuadrado inscrito que se genera para una cierta medida de la distancia AE, por ejemplo $\overline{AE}$=2cm. Para su contrucción, el estudiante debe observar de forma geometrica que para cualquier valor de la distancia AE, se generan siempre, dentro del cuadrado $ABCD$, cuatro triángulos rectángulos congruentes; y que el área del cuadrado inscrito $EFGH$ se puede obtener mediante la resta del área de los cuatro triángulos al área del cuadrado mayor $ABCD$, resultando:

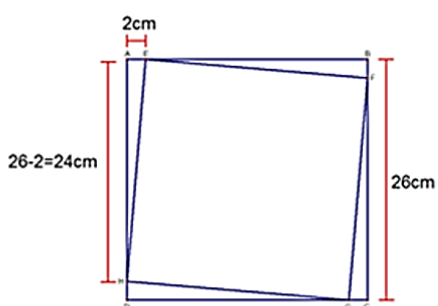


$$A_{\Delta AEH} = \frac{bxh}{2} \qquad A_{\square ABCD} = b \times h$$
$$A_{\Delta AEH} = \frac{2\times 24}{2} \qquad A_{\square ABCD} = 26 \times 26$$
$$A_{\Delta AEH} = \frac{48}{2} \qquad A_{\square ABCD} = 676$$
$$A_{\Delta AEH} = 24$$

$$A_{\square EFGH} = 676 - 4[24]$$
$$A_{\square EFGH} = 676 - 96$$
$$A_{\square EFGH} = 580cm^2$$

Figura 3.3. Modelo aritmético obtenido mediante diferencias de áreas.

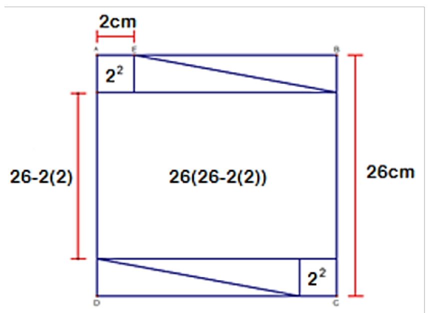
Modelo aritmético obtenido mediante el teorema de Pitágoras. Este modelo es una variante del anterior, cuyo procedimiento aritmético se basa en el teorema de Pitágoras. Para contruir dicho modelo el estudiante debe visualizar que la medida de los lados del cuadrado EFGH son las hipotenusas de los triángulos rectángulos congruentes, que se forman dentro del cuadrado ABCD. El área del cuadrado EFGH, resulta calcularse con el valor de la hipotenusa al cuadrado, por ejemplo:



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 2^2 + (26-2)^2$$
$$c^2 = 2^2 + 24^2$$
$$c^2 = 4 + 576$$
$$c^2 = 580cm^2$$

Figura 3.4. Modelo aritmético obtenido mediante teorema de Pitágoras.

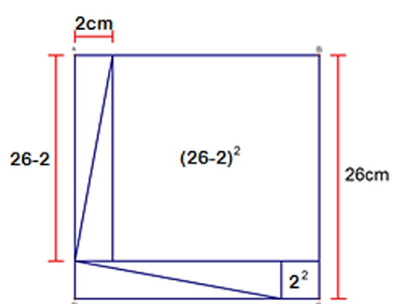
Modelo aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 1). Este modelo se establece al recomponer la figura, de tal forma que se reubican los cuatro triángulos rectángulos iguales. Se calcula aritméticamente el área del cuadrado inscrito como la suma de las áreas de cuadrados y rectángulos, por ejemplo:



$$A_{\square EFGH} = 2^2 + 2^2 + 26\big(26 - 2(2)\big)$$
$$A_{\square EFGH} = 4 + 4 + 26(26 - 4)$$
$$A_{\square EFGH} = 4 + 4 + 26(22)$$
$$A_{\square EFGH} = 4 + 4 + 572$$
$$A_{\square EFGH} = 580cm^2$$

Figura 3.5. Modelo aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 1).

Modelo aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 2). Este modelo aritmético es producto de otra recomposición de la figura, que resulta de reubicar los cuatro triángulos rectángulos. El área se calcula con la suma de las áreas de cuadrados y rectángulos. Por ejemplo:



$$A_{\square EFGH} = 2^2 + (26 - 2)^2$$
$$A_{\square EFGH} = 4 + (24)^2$$
$$A_{\square EFGH} = 4 + 576$$
$$A_{\square EFGH} = 580cm^2$$

Figura 3.6. Modelo aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 2).

Matematización Vertical

Dentro de este tipo de matematización se ubican los modelos matemáticos que tienen mayor connotación matemática. Durante este proceso el estudiante debe formalizar sus construcciones y producciones hacia generalidades de contenido y método matemático relativo a la función cuadrática. Se esperan modelos como tabular, gráfico, algebraico y su forma desarrollada de la función cuadrática. A continuación se presentan dichos modelos según el nivel de comprensión al que corresponden.

Nivel referencial

Los modelos ubicados en este nivel de comprensión, se consideran como *"modelos de"* la situación *cuadrados y áreas*, en tanto están referidos a la variación del área del cuadrado inscrito que se genera al modificar la distancia AE; como permiten dar descripciones sobre cómo y cuánto varían los valores de una variable con respecto a la otra. Los modelos esperados en este nivel son:

Modelo tabular. Este modelo permite organizar o estructurar matemáticamente, la relación de correspondencia entre los valores de la distancia AE y el área del cuadrado inscrito que se genera. Con él los estudiantes pueden reconocer características de la variación, como son: (1) el área tiene un valor mínimo; (2) los valores del área primero decrecen y luego crecen; (3) los valores del área se repiten y son simétricos con respecto al área mínima; (4) los valores que puede tomar la distancia AE están delimitados por la medida que tiene el lado del cuadrado circunscrito, que es de 26cm, por tanto $\overline{AE}$ varía en el intervalo continuo de 0 a $26cm$ y; (5) las áreas máximas del cuadrado inscrito se obtienen cuando la longitud de la distancia AE es $0cm$ o $26cm$, pues el cuadrado inscrito sería el mismo cuadrado que el circunscrito. Permite también, analizar cómo cambia la variación, se esperan conclusiones como que el cambio de segundo orden, es constante. En la tabla 3.2, se muestra el modelo de tabla que se espera, así como el cálculo de las diferencias, para la medición del cambio y del cambio de segundo orden.

Longitud de la distancia AE (cm)	Área del cuadrado EFGH (cm^2)		
2	580	500-580=-80	
4	500	436-500=-64	-64-(-80)=16
6	436	388-436=-48	-48-(-64)=16
8	388	356-388=-32	-32-(-48)=16
10	356	340-356=-16	-16-(-32)=16
12	340	340-340= 0	0-(-16)=16
14	340	356-340=16	16-0=16
16	356	388-356=32	32-16=16
18	388	436-388=48	48-32=16
20	436	500-436=64	64-48=16
22	500	580-500=80	80-64=16
24	580		

Tabla 3.2. Modelo tabular.

Modelo gráfico. Este modelo organiza el proceso de variación (ver figura 3.7), mediante expresar su relación de correspondencia unívoca entre sus variables, como un conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ en un sistema de coordenadas cartesianas. Permite además, analizar el comportamiento de los valores de la variación del área. Se pueden realizar conjeturas del tipo: (1) tiene un área mínima; (2) los valores del área primero decrecen y luego crecen; (3) los valores del área son simétricos con respecto al valor mínimo; (4) la variación de la distancias AE está delimitada por la medida que tiene el lado del cuadrado circunscrito, que es de 26cm, por tanto $\overline{AE}$ varia de 0 a $26cm$; (5) las áreas máximas del cuadrado inscrito se obtienen cuando la longitud de la distancia AE es $0cm$ o $26cm$, pues el cuadrado inscrito sería el mismo cuadrado que el circunscrito y; (6) el área del cuadrado inscrito puede tomar valores de 338 a $676cm^2$.

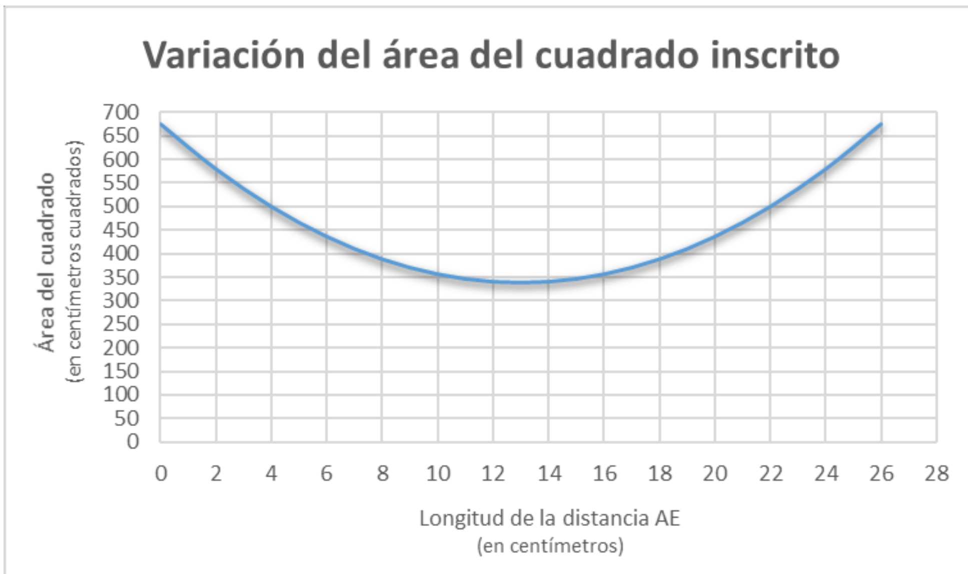


Figura 3.7. Modelo gráfico.

Nivel general

Los modelos en este nivel de comprensión, deben presentar una focalización matemática que supera al contexto. Se espera que los modelos obtenidos en el nivel situacional se generalicen mediante reflexiones y se concluya que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a *"modelos para"* la resolución de los mismos. Los modelos ubicados en este nivel son:

Modelo algebraico obtenido mediante diferencias de áreas. Este modelo generaliza el procedimiento aritmético obtenido por diferencias de áreas, mediante una expresión algebraica que da cuenta de la regla de correspondencia unívoca entre las variables de la variación del área de un cuadrado inscrito. Ésta se construye al determinar, que para cualquier valor de la distancia AE (denotado por la variable x), los cuatro triángulos que se forman dentro del cuadrado ABCD siempre son congruentes y que el área del cuadrado inscrito EFGH (que representa $f(x)$) se puede obtener restando el área de los cuatro triángulos al área del cuadrado mayor ABCD, por ejemplo:

$$f(x) = 26^2 - 4\left[\frac{x\,(26-x)}{2}\right]$$

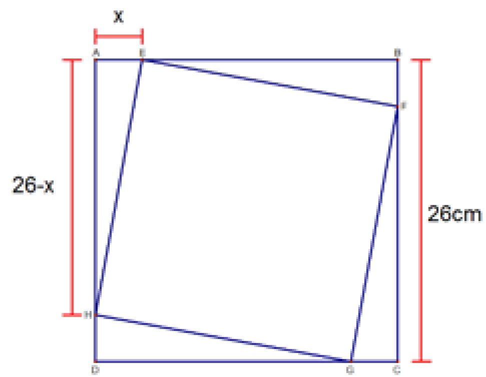
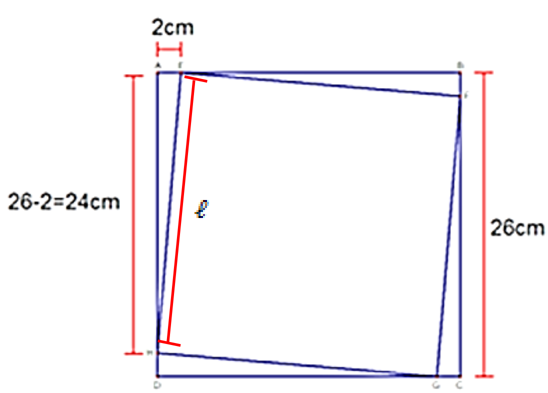


Figura 3.8. Modelo algebraico obtenido mediante diferencias de áreas.

Modelo algebraico obtenido mediante teorema de Pitágoras. Este modelo se establece a partir de generalizar y expresar el teorema de Pitágoras en los términos del contexto de la situación. Reconociendo que el área del cuadrado inscrito EFGH (que representa $f(x)$) se resume al cálculo del valor de la hipotenusa al cuadrado. La distancia AE (denotada por la variable x) es uno de los catetos del triángulo y el otro cateto se puede expresar en términos de los valores conocidos y de la distancia AE, así como sigue:



$$(T.P):\ \ell^2 = x^2 + (26-x)^2$$

$$A_{\square} = x^2 + (26-x)^2$$

Si $A\square$ se visualiza como una variable que

depende de "x", entonces:

$$A_{\square} = f(x) = x^2 + (26-x)^2$$

Figura 3.9. Modelo algebraico obtenido mediante teorema de Pitágoras.

Modelo algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 1). Este modelo algebraico se establece mediante generalizar el procedimiento aritmético obtenido de recomponer la figura (forma 1) que se esperó en el nivel situacional. El cual da cuenta de la regla de correspondencia unívoca entre las variables área del cuadrado inscrito y distancia AE. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + x^2 + 26(26 - 2x)$$

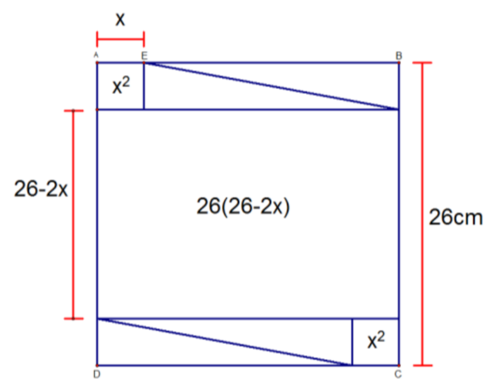
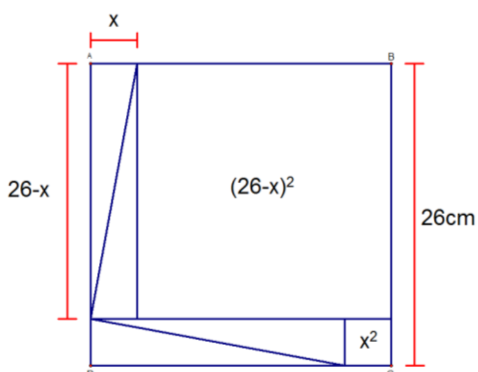


Figura 3.10. Modelo algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 1).

Modelo algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 2). Este modelo algebraico se construye al generalizar el procedimiento aritmético de la recomposición de la figura (forma 2). El cual da cuenta de la misma regla de correspondencia unívoca entre las variables del proceso de variación analizado, solo que con una expresión equivalente a las demás. Por ejemplo:



$$f(x) = x^2 + (26 - x)^2$$

Figura 3.11. Modelo algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 2).

Nivel formal

El modelo esperado en este nivel de comprensión se asocia con los conceptos, procedimientos y notacionales convencionales, de la función cuadrática. Su base es el uso de conocimiento matemático formal.

Modelo desarrollado de la función cuadrática. Este modelo (figura 3.12) se establece al desarrollar cualquiera de los modelos algebraicos expuestos en el nivel general. Se espera que si los estudiantes arriban a más de un modelo algebraico, desarrollen procesos algebraicos para comprobar que son expresiones equivalentes, luego de intentar transformar cada una de las expresiones del modelo obtenido a la forma desarrollada o polinómica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Con este análisis se espera concluyan que los modelos propuestos expresan una función cuadrática, además de mencionar de manera formal las características de este tipo de funciones y su caracterización.

$$f(x) = 26^2 - 4\frac{x\,(26-x)}{2}$$
$$f(x) = 26^2 - 4\frac{26x - x^2}{2}$$
$$f(x) = 26^2 - 52x + 2x^2$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 52x + 676}$$

$$f(x) = (\sqrt{x^2 + (26-x)^2})^2$$
$$f(x) = x^2 + (26-x)^2$$
$$f(x) = x^2 + 26^2 - 52x + x^2$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 52x + 676}$$

$$f(x) = x^2 + x^2 + 26(26 - 2x)$$
$$f(x) = x^2 + x^2 + 676 - 52x$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 52x + 676}$$

$$f(x) = x^2 + (26-x)^2$$
$$f(x) = x^2 + 26^2 - 52x + x^2$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 52x + 676}$$

Figura 3.12. Modelos desarrollados de la función cuadrática.

3.7.2. Situación 2. La promoción del Video Club

Esta situación parte de un contexto sobre la promoción de un Video Club, para arribar a modelos que organicen o estructuren matemáticamente la variación de la recaudación mensual, que obtiene el dueño por el incremento que le hace a la cuota mensual que les cobra a sus socios. Los modelos esperados se han dividido según su nivel de compresión, y a la vez en los procesos de matematización: horizontal y vertical.

Matematización Horizontal

En este tipo de matematización se ubica un modelo que estructura matemáticamente la situación sobre la *promoción del video club*, como es el aritmético procedimental. Este expresa las relaciones existentes entre los datos del contexto, como son las variables recaudación mensual e incremento a la cuota.

Nivel situacional

El modelo matemático y las reflexiones ubicadas en este nivel, se caracterizan por dar una interpretación del proceso de variación, mediante el uso de *conocimiento matemático informal* ligado al contexto de *promoción de un video club*. Con él, se expresan las relaciones y regularidades existentes entre los datos del contexto, que sirven para dar soluciones particulares del problema. El modelo esperado en este nivel es:

Modelo aritmético procedimental. Este modelo permanece en el contexto de la situación, y organiza el procedimiento aritmético a realizar para el cálculo del valor de la recaudación mensual cada que se considera hacer un incremento a la cuota. Para su establecimiento, se debe reconocer que el valor de la recaudación se obtiene mediante el producto del costo de la cuota con la cantidad de personas que se asocian en ese mes. Para ejemplificar este modelo se esquematizó el procedimiento esperado en los estudiantes. Con el cual se pueden reconocer las relaciones y regularidades de las variables identificadas, véase:

Incremento a la cuota ($)	Costo de la cuota mensual ($)	Número de socios	Recaudación mensual ($)
0	(79+0)= 79	(93-0)= 93	(79)(93)= 7,347
1	(79+1)= 80	(93-1)= 92	(80)(92)= 7,360
2	(79+2)= 81	(93-2)= 91	(81)(91)= 7,371
3	(79+3)= 82	(93-3)= 90	(82)(90)= 7,380
4	(79+4)= 83	(93-4)= 89	(83)(89)= 7,387
5	(79+5)= 84	(93-5)= 88	(84)(88)= 7,392
6	(79+6)= 85	(93-6)= 87	(85)(87)= 7,395
7	(79+7)= 86	(93-7)= 86	(86)(86)= 7,396
8	(79+8)= 87	(93-8)= 85	(87)(85)= 7,395
9	(79+9)= 88	(93-9)= 84	(88)(84)= 7,392
10	(79+10)= 89	(93-10)= 83	(89)(83)= 7,387
11	(79+11)= 90	(93-11)= 82	(90)(82)= 7,380
12	(79+12)= 91	(93-12)= 81	(91)(81)= 7,371
13	(79+13)= 92	(93-13)= 80	(92)(80)= 7,360
14	(79+14)= 93	(93-14)= 79	(93)(79)= 7,347

Tabla 3.3. Modelo aritmético procedimental.

Matematización vertical

Los modelos que se esperan en los estudiantes y que se ubican dentro de este tipo de matematización son el tabular, geométrico, algebraico y su forma desarrollada de la función cuadrática. Éstos comparten la cualidad de tender hacia formalizaciones de carácter matemático, a partir de las construcciones y producciones que los estudiantes desarrollan respecto a la variación de la recaudación mensual, que se obtiene por el incremento a la cuota mensual de los socios. A continuación se presentan dichos modelos según el nivel de comprensión al que corresponden.

Nivel referencial

Los modelos ubicados en este nivel de comprensión, se consideran como *"modelos de"* la situación *promoción de un video club*, en tanto están referidos a la variación de la recaudación mensual que se obtiene por el incremento que se le hace a la cuota de los socios, como permiten dar descripciones sobre cómo se comportan sus valores de las variables. Los modelos esperados en este nivel son:

Modelo tabular. Este modelo organiza la relación de correspondencia entre los valores del incremento a la cuota y la recaudación mensual. Permite reconocer características de la variación, como: (1) los valores de la recaudación mensual para ciertos incrementos de la cuota crece y para otros decrece; (2) tiene una recaudación mensual máxima que se obtiene cuando se le incrementa $\$7$ al costo de la cuota mensual; (3) los valores de la recaudación mensual son simétricos con respecto a la recaudación máxima; (4) la recaudación mensual se hace cero cuando se le incrementa a la cuota $\$93$ y; (5) los valores que puede tomar el incremento que se le hace a la cuota y que tienen sentido para la situación, son valores de 0 a 93 pesos, considerando solo los números enteros de ese conjunto de valores. Admite también, analizar cómo cambia la variación, se esperan conjeturas como que las segundas diferencias (medición del cambio de los cambios) son constantes. En la tabla 3.4, se muestra el modelo esperado, así como se ha resaltado el cálculo de las diferencias que permiten la medición del cambio y del cambio de segundo orden.

Incremento a la cuota ($)	Costo de la cuota mensual ($)	Cantidad de socios	Recaudación mensual ($)		
0	79	93	7347	7360-7347=13	11-13=-2
1	80	92	7360	7371-7360=11	9-11=-2
2	81	91	7371	7380-7371=9	7-9=-2
3	82	90	7380	7387-7380=7	5-7=-2
4	83	89	7387	7392-7387=5	3-5=-2
5	84	88	7392	7395-7392=3	1-3=-2
6	85	87	7395	7396-7395=1	-1-1=-2
7	86	86	7396	7395-7396=-1	-3-(-1)=-2
8	87	85	7395	7392-7395=-3	-5-(-3)=-2
9	88	84	7392	7387-7392=-5	-7-(-5)=-2
10	89	83	7387	7380-7387=-7	-9-(-7)=-2
11	90	82	7380	7371-7380=-9	-11-(-9)=-2
12	91	81	7371	7360-7371=-11	-13-(-11)=-2
13	92	80	7360	7347-7360=-13	
14	93	79	7347		

Tabla 3.4. Modelo tabular.

Modelo gráfico. Este modelo organiza la variación de la recaudación mensual cada que se incrementa la cuota mensual, y da cuenta de la relación de correspondencia unívoca de dicho proceso de variación, como un conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ en un sistema de coordenadas cartesianas. Este modelo permite establecer las siguientes conjeturas sobre el comportamiento de los valores de la variación: (1) los valores de la recaudación mensual para ciertos incrementos de la cuota crece y para otros decrece; (2) la recaudación mensual tiene un valor máximo que se obtiene cuando se le incrementa $\$7$ al costo de la cuota mensual; (3) los valores de la recaudación mensual son simétricos con respecto a la recaudación máxima; (4) la recaudación mensual se hace cero cuando se le incrementa a la cuota $\$93$; (5) los valores que puede tomar el incremento a la cuota y que tienen sentido para la situación, son valores de 0 a 93 pesos, considerando solo los números enteros de ese conjunto de valores y; (6) la recaudación mensual toma valores discretos de 0 a 7396 pesos. La figura 3.13 ejemplifica este modelo con dos gráficas. La Gráfica A representa el comportamiento de los valores de recaudación mensual para el intervalo de valores de incremento de 0 a 14 pesos. La Gráfica B representa el comportamiento de los valores de recaudación, en el intervalo donde tiene sentido práctico.

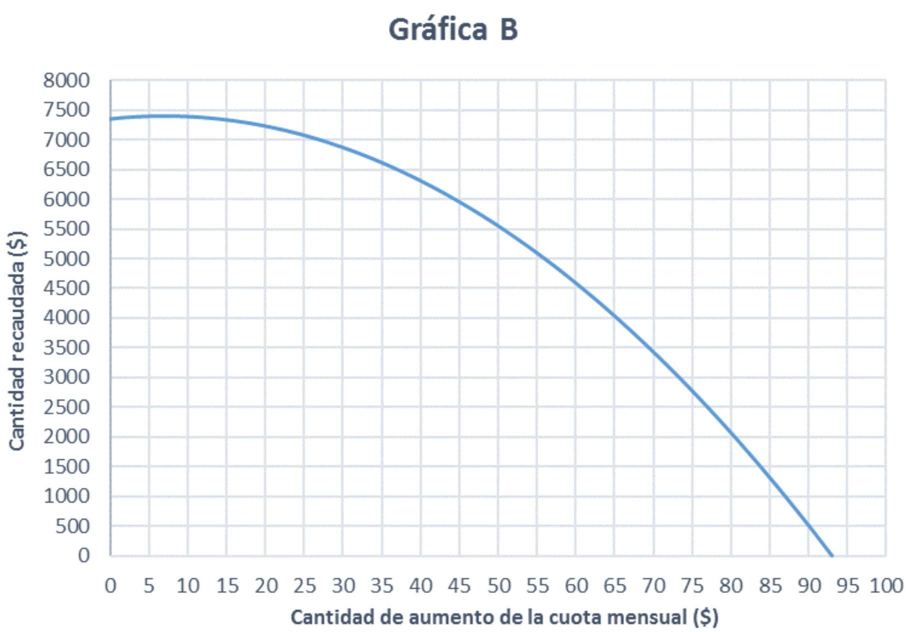


Figura 3.13. Modelos gráficos.

Nivel general

Los modelos en este nivel de comprensión, deben presentar una focalización matemática que supera al contexto. Se espera que los modelos obtenidos en los niveles anteriores se generalicen mediante reflexiones y se concluya que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a *"modelos para"* la resolución de los mismos. El modelo ubicado en este nivel es:

Modelo algebraico. Este modelo se caracteriza por dar cuenta de la regla de correspondencia de la variación analizada en términos de una expresión algebraica. Esta expresión resulta de generalizar el procedimiento aritmético realizado en el nivel situacional, donde el valor del incremento a la cuota es denotado por la variable x y el valor de la recaudación mensual se representa por $f(x)$, véase el ejemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = (79 + x)(93 - x)}$$

Figura 3.14. Modelo algebraico.

Este modelo algebraico, debido a su generalidad, permite que los estudiantes identifiquen que puede ser usado para un conjunto de problemas que tenga las mismas características entre sus valores; o que representa un tipo de modelo (Villa-Ochoa, 2008) para cuadráticas encontradas a partir del producto de dos lineales.

Nivel formal

El modelo esperado en este nivel de comprensión se asocia a la expresión polinómica o desarrollada de la función cuadrática. Para obtenerla el estudiante debe hacer uso de procedimiento algebraico y notación convencional.

Modelo desarrollado de la función cuadrática. Para arribar al modelo (figura 3.15), se tienen que desarrollar procesos algebraicos sobre el modelo del nivel anterior. Con base en el procedimiento realizado (obtención a la forma general de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$), se espera que los estudiantes reconozcan que dicho modelo expresa una función cuadrática, así como que resalten sus características.

$$f(x) = (79 + x)(93 - x)$$

$$f(x) = 7347 - 79x + 93x - x^2$$

$$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 14x + 7347}$$

Figura 3.15. Modelo desarrollado de la función cuadrática.

3.8. Puesta en escena

Las situaciones (S1, S2) se implementaron con la población de estudio, en un total de seis sesiones de aproximadamente 40 minutos cada una. La tabla 3.5 muestra la distribución de las mismas de acuerdo a cada situación.

Situación	Numero de sesiones
S1	4
S2	2

Tabla 3.5. Distribución de las sesiones por situación.

S1 demandó más sesiones, debido a que los estudiantes no estaban acostumbrados a este tipo de dinámica en el aula escolar. Además, que exigió más para su comprensión y su desarrollo, pues presentaba varias vías de solución, no tan inmediatas como las de S2.

La actividad matemática de los estudiantes, fue guiada por el investigador, fungiendo el papel del profesor (P). La puesta en escena de las situaciones se desarrolló tal como se había diseñado (ver apartado 3.6 de este documento). Se constituyeron cinco equipos de tres integrantes. La tabla 3.6 muestra cómo se conformaron y se subrayó además al integrante (A) que asumió el rol de líder en cada equipo (E).

Equipos	Integrantes
E1	A1, A2 y A3
E2	A4, A5 y A6
E3	A7, A8 y A9
E4	A10, A11 y A12
E5	A13, A14 y A15

Tabla 3.6. Conformación de los equipos participantes en el estudio.

Una cualidad a resaltar de la actividad matemática desarrollada, es que se dió en dos momentos de interacción, uno en equipo y otro grupal. Se distingue que a nivel de equipo la solución de la situación, la construcción de modelos y la comprensión de la función cuadrática, no fue uniforme. Sin embargo, los momentos de interacción grupal demandaron que todos los equipos compartieran sus estrategias y reflexionaran sobre las mismas, dando paso a una cierta uniformidad en el quehacer de los estudiantes y un impulso a alcanzar niveles más altos de comprensión (o de formalización) de los modelos. Dichos momentos de interacción, se desarrollaron como un ciclo, los cuales organizó y guió el profesor.

3.8.1. Limitaciones

Las limitaciones presentes en la puesta en escena, son el *tipo de dinámica de trabajo en el aula* y el *tiempo* que se dispuso en las sesiones de aplicación.

El *tipo de dinámica de trabajo en el aula*, constituyó al inicio de la aplicación una limitante, debido a que los estudiantes mostraron cierta resistencia: a) en interpretar y resolver S1, pues mencionaban que no les decía cómo hacerlo, y; b) en pasar a compartir sus ideas y estrategias con el grupo, ello porque pensaban que el profesor les cuestionaría lo bien o mal de su procedimiento o estrategia. Sin embargo, cuando observaron que de manera conjunta con los demás equipos, se discutía y se reflexionaba hacia el mejoramiento de sus procedimientos, estrategias y soluciones, los cinco equipos trabajaron y participaron de manera constante en las demás sesiones de la aplicación.

El *tiempo* que se dispuso para el desarrollo de las situaciones, representó una limitante para el proceso de trabajo en equipo y en la discusión grupal, pues muchas veces el tiempo dió justo para dar conclusiones muy breves. Entre los aspectos que faltaron discutir con los estudiantes por cada situación fueron:

> **S1.** En el cierre de la situación, toda vez retomadas las características y los modelos que representaban una función cuadrática, faltó el consenso y la escritura en el pizarrón de la caracterización de dicha función. Es decir:
>
> > ***Función cuadrática.*** *Relación unívoca entre dos magnitudes variables cuyo cambio de segundo orden (o cuya segunda tasa de variación), es una constante.*
>
> **S2.** En la sección de interacción con el grupo, cuando se discutió sobre los valores que puede tomar la variable incremento a la cuota, faltó discutir si los valores que los estudiantes consideraron de 0 a 93 (dominio de la función), eran continuos o discretos. Faltó cuestionarlos sobre si la variable incremento a la cuota es continua o discreta.

3.8.2. Datos obtenidos

Las producciones escritas, los episodios de interacción (video grabaciones) y los diarios de clase son los datos obtenidos en la investigación; y permitieron dar evidencia de los desempeños de los estudiantes alcanzados en S1 y S2.

En el análisis de los datos interesó identificar los *modelos matemáticos* y las *reflexiones* que los estudiantes construyeron y consensuaron a nivel grupal –ello sin abandonar al equipo que lo puso en discusión ante el grupo– durante su proceso de matematización desarrollado al modelar las situaciones de variación con contexto realista en el marco de la función cuadrática. La decisión se tomó por la manera en cómo se llevó a cabo la actividad matemática en el aula y por los desempeños logrados por los estudiantes en S1 y S2.

Los *modelos matemáticos* se reconocieron por ser representaciones de las situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema (Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 13). Las *reflexiones* se manifestaron por medio de descripciones, explicaciones o conclusiones (o síntesis), tanto verbales como escritas, en los momentos de interacción desarrollados tanto a nivel de equipo, como grupal (en plenarias).

¿Cómo se analizaron los datos obtenidos?

Se analizaron en contraste con los principios fundamentales de la EMR y con los modelos matemáticos y reflexiones anticipadas y descritas en el análisis preliminar.

Para su presentación, los resultados del análisis de los datos se organizaron en los niveles de compresión: situacional, referencial, general y formal. Dado que estos niveles posibilitan evidenciar los procesos globales de los estudiantes respecto al aprendizaje de la función cuadrática. Además que, dan cuenta de las formas horizontal y vertical del proceso de matematización, las cuales se retoman en la discusión de los resultados.

En el análisis y organización de los resultados, se reconoció que los niveles son dinámicos y no jerárquicos, por lo que en el desarrollo de la actividad matemática, los estudiantes se ubicaron en más de uno a la vez. De ahí que la evidencia no se considera, ni se presenta de manera lineal a lo largo de los niveles.

Capítulo 4

Caracterización de los Niveles de Comprensión

4.1. Niveles de compresión en Situación 1

El contexto de S1 es el área de cuadrados. En ella se ubicó a los estudiantes a analizar (de manera geométrica) la variación del área del cuadrado inscrito EFGH en el circunscrito ABCD, mientras se modifica la longitud de la distancia AE, y con base en ello determinar el modelo matemático que describe esa variación. La Figura 4.1 muestra la construcción geométrica presentada a los estudiantes en S1, los cuestionamientos en ese contexto, pueden verse en el Capítulo 3 de este documento.

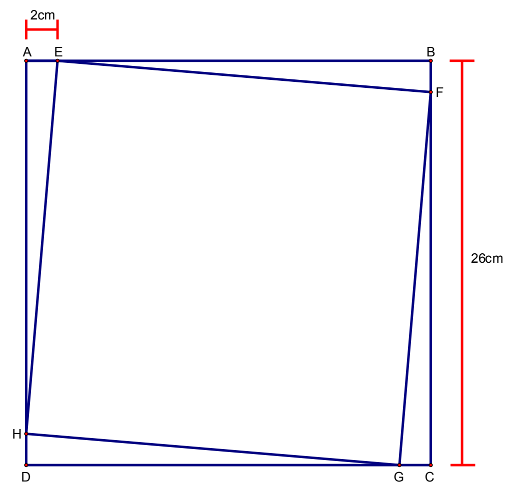


Figura 4.1. Construcción presentada a los estudiantes en S1

A continuación se presenta la caracterización de los niveles de comprensión de modelo que alcanzaron los estudiantes de bachillerato al modelar S1.

4.1.1. Nivel situacional

Con base en la forma de proceder de los estudiantes, en este nivel se distinguen dos **saberes matemáticos informales**, el **Teorema de Pitágoras** (**TP**) y la **Diferencia de Áreas** (**DA**). El primero, se asoció a la forma en que procedieron E1, E3, E4 y E5. El segundo, tipo de saber a la de E2.

En seguida se describe por tipo de conocimiento el nivel.

a) **Nivel situacional en el marco del TP**

El TP fue usado como un conocimiento informal a partir de que los estudiantes reconocieron geométricamente (figura 4.2), que para determinar el área del cuadrado inscrito se requiere saber cuánto miden sus lados. Asimismo, que no es posible determinar esa medida de manera directa con los datos iniciales. Por ello, se ubicaron a trabajar sobre uno de los triángulos rectángulos adyacentes que se forman con los lados de ambos cuadrados, pues identifican que son congruentes, ello, porque saben que la medida de uno de los catetos es igual al valor de la distancia AE, y el otro, se determina como la diferencia entre la medida del lado del cuadrado circunscrito con la medida de la distancia AE.

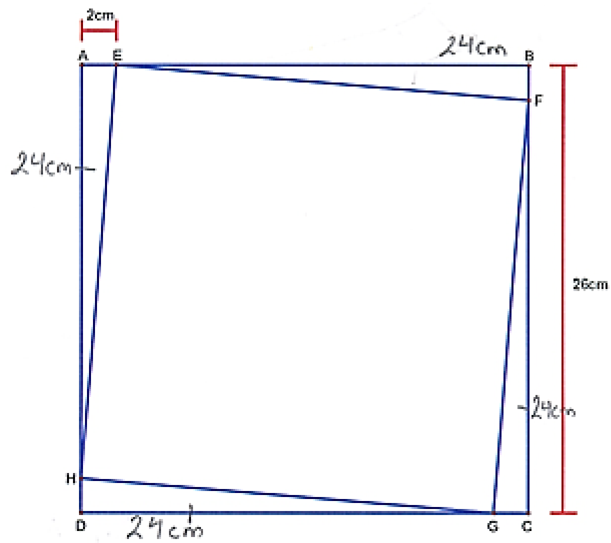


Figura 4.2. E4 determina las medidas de los catetos de los triángulos rectángulos adyacentes.

¿Por qué se ubicaron a trabajar en primera instancia sobre uno de los triángulos rectángulos?

Porque se dieron cuenta que los lados del cuadrado inscrito son a la vez la hipotenusa de los cuatro triángulos rectángulos. De modo que el problema de la medida de los lados de EFGH, lo reducen a determinar la hipotenusa, mediante el TP $(c^2 = a^2 + b^2)$. La figura 4.3 evidencia esta forma de proceder, la cual repiten cada vez que determinan el área de los cuadrados inscritos que van generando al variar la medida de la distancia AE. En ella se observa que E3 por ejemplo, determina la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo AEH cuando $\overline{AE}$ mide $2cm$ y $6cm$, y a partir de ello la medida del área de los cuadrados. El establecimiento de estas medidas de $\overline{AE}$ (figura 4.3) fue producto de los cuestionamientos de S1.

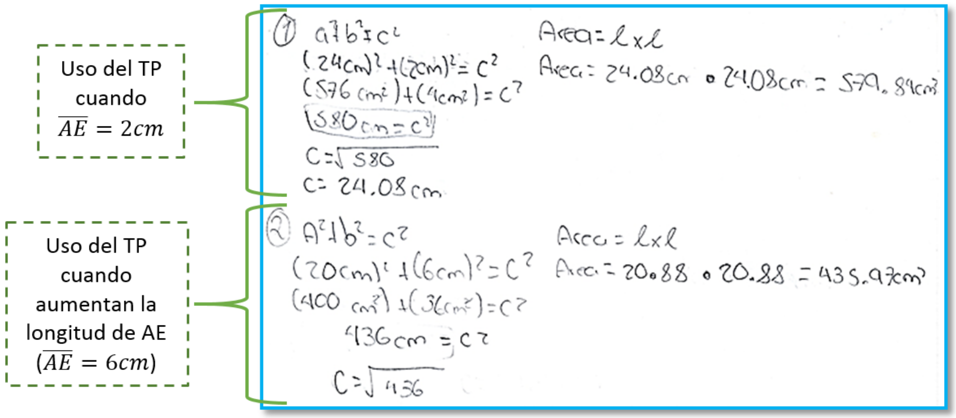


Figura 4.3. Formas de proceder por E3 mediante TP.

A partir de las reflexiones que los estudiantes hacen ante esta forma de proceder en diferentes momentos de su actividad matemática, identifican que el cálculo del área de los cuadrados inscritos que van generando como producto del incremento o la disminución de la longitud de la distancia AE, se reduce a elevar al cuadrado la medida de la hipotenusa, obtenida mediante TP. Algunos identifican esta relación durante la actividad en equipo, como es el caso de E4, otros, durante la actividad grupal. La figura 4.4 muestra la explicación escrita del procedimiento realizado por E4, que da cuenta de que identificó esta relación.

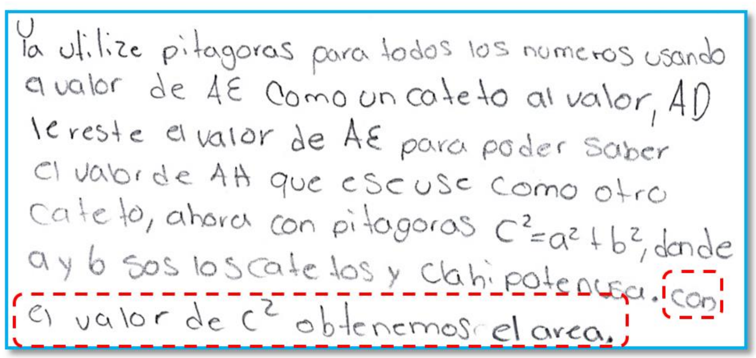


Figura 4.4. E4 relaciona hipotenusa al cuadrado con la fórmula del área.

En el caso de la reflexión grupal en la que se reconoció la relación arriba señalada, surgió mientras el profesor, A5 (E2) y A2 (E1) discutían sobre la forma en que procedieron para determinar el área del cuadrado inscrito, que se generó cuando $AE = 13cm$. Discusión que se dio al momento en que A2 explicó en la pizarra, como en equipo determinaron la medida del área del cuadrado EFGH (figura 4.5). Parte de esta discusión se muestra en los renglones 68 a 79, transcripción de la video grabación correspondiente.

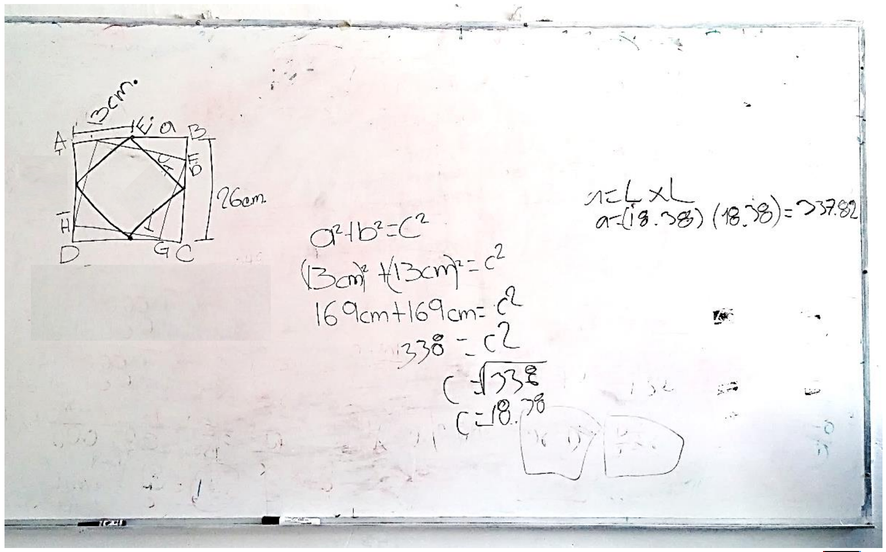


Figura 4.5. Proceder E1 para determinar la medida del área de EFGH cuando $\overline{AE} = 13cm$.

[…]

[68] A2 (E1): (…) para saber cuánto vale la hipotenusa… tenemos que sacar raíz cuadrada… que raíz cuadrada de 338… ¿Cuánto es? (le pregunta a su equipo)

[69] A3 (E1): 18.78

[70] A2 (E1): 18.78 (lo escribe en la pizarra)… y pues este resultado se multiplica… no más aplicando la fórmula.

[71] P: ¿Ahora vas a calcular el área del cuadrado inscrito?

[72] A2 (E1): Sí… área (a) *es igual a lado* (l) *por lado* (l)*… que viene siendo…* 18.38 *por* 18.38*… ¿cuánto es? (pregunta a sus compañeros)*

[73] A3 (E1): 337.82

[74] A2 (E1): Que es igual a $337.82cm^2$

[75] P: Qué es muy cercano a $338cm^2$*… de hecho ahí están platicando algo de los decimales (señala a E2)*

[76] A2 (E1): ¡Sí!...de los decimales

[77] P: Ustedes dicen… que el valor de la hipotenusa al cuadrado es la medida del área del cuadrado inscrito… ¿Por qué?

[78] A2 (E1): Porque según ahí… es la hipotenusa al cuadrado (resalta el valor de la hipotenusa al cuadrado cuando es $338cm^2$ *y lo señala en la pizarra)… y según la hipotenusa viene siendo un lado del cuadrado inscrito… y el área es lado por lado.*

[79] P: Eso es correcto (…)

[…]

En el episodio de la discusión grupal (renglón 78), A2 destaca la relación entre la hipotenusa con el lado del cuadrado, y que ésta, elevada al cuadrado es la medida del área.

A continuación se presentan formas de proceder y reflexiones registradas durante la actividad matemática en diferentes momentos (equipo y grupal), ubicados en este mismo nivel, pero ahora en el marco de DA.

b) Nivel situacional en el marco de DA

La DA fue usada como un conocimiento informal en E2 al momento en que reconocieron geométricamente, que el área del cuadrado inscrito puede determinarse mediante la diferencia entre la medida del área del cuadrado circunscrito y de los cuatros triángulos rectángulos adyacentes, de los que además identifican que son congruentes. Calculan el área del cuadrado ABCD, mediante la fórmula $l \ x \ l$, ya que conocen la medida de sus lados. En el caso de los triángulos rectángulos también, con la formula $\frac{bxh}{2}$, pues reconocen a la distancia AE como la medida de uno de sus lados, y que la medida del otro, pueden obtenerla mediante la diferencia entre la medida del lado del cuadrado circunscrito con la de $\overline{AE}$.

La sección 1 indicada sobre las producciones escritas de este equipo (figura 4.6), muestra la explicación del procedimiento que llevaron a cabo para determinar el área del cuadrado inscrito (mediante diferencia de áreas). La sección 2 por su parte, evidencia que pusieron en uso el conocimiento informal explicado en 1, apoyándose en todo momento de la figura dada. Este proceder fue producto del cuestionamiento planteado en S1, que demanda determinar el área del cuadrado inscrito cuando $\overline{AE} = 2$.

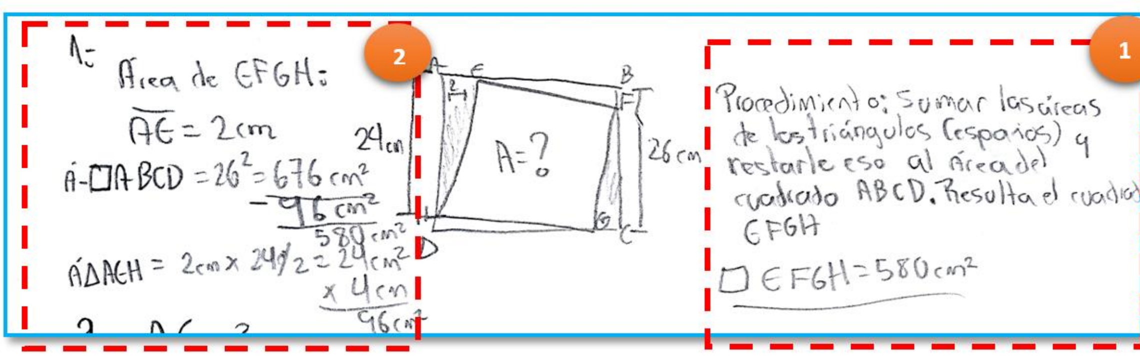


Figura 4.6. Proceder del E2 en la S1.

Esta forma de proceder usando DA la repitieron cada vez que determinaban el área de los cuadrados inscritos, generados de incrementar o bien disminuir la medida de la distancia AE.

¿Qué varía en el contexto de la situación?

Independientemente de la forma por la que determinan el área del cuadrado inscrito (TP o DA) que generan bajo cierta medida de la distancia AE, en ese proceso, los estudiantes reconocen a ambos como magnitudes variables. Asimismo, su relación de dependencia, esto es, de que varía el área del cuadrado inscrito EFGH mientras se modifica la distancia AE. Y también, el intervalo de variación de la distancia AE.

En la discusión grupal, surgieron explicaciones y argumentos acerca del qué varía y del intervalo de variación. Discusión generada en el marco de uno de los cuestionamientos de S1, que situó a los estudiantes a determinar distancias AE con las que es posible generar cuadrados inscritos al cuadrado ABCD, cuya área sea menor que $580cm^2$. Con base en su análisis en equipo, concluyen que los valores que puede tomar la distancia AE deben ser mayores que 2 pero menores que 24 centímetros (Véase renglón 104). Parte de esta discusión se dió entre el profesor e integrantes de E1, E2 Y E4 (renglones 95 a 107).

[…]		
[95]	*P:*	*En la cuestión 2… se solicita que determinen otros cuadrados cuya área sea menor que $580cm^2$… el cual se genera cuando la longitud de AE es 2… ¿Quién nos comenta lo que hizo su equipo ante dicho cuestionamiento?*
[96]	*A12 (E4):*	*Yo… bueno nosotros usamos AE igual a 4…entonces se genera un cuadrado inscrito con un área de 500… el área es menor que 580…*
[97]	*P:*	*¿Será que el único cuadrado menor que se pueda generar es cuando la longitud de AE mide 4cm, tal como ejemplificó el equipo cuatro?*
[98]	*A2 (E1):*	*No… porque también se cumple cuando AE es 6*
[…]		
[104]	*A4 (E2):*	*(…) <u>tiene que ser para medidas de AE mayor a 2</u>… <u>pero menor que 24</u>*
[105]	*P:*	*¡Ah!... de 2 a 24… ¿Por qué?... ¿Qué sucede con 25?*
[106]	*A3 (E1):*	*Excede la medida del área del cuadrado… los 580*
[107]	*A4 (E2):*	*Queda un área mayor que 580*
[…]		

De manera similar, se discutió grupalmente para qué valores de $\overline{AE}$ era posible generar cuadrados inscritos de área mayor a $580cm^2$. Con base en la reflexión generada en equipo argumentan que para valores desde 0 hasta antes de 2 centímetros, o bien mayores que 24 pero menores que 26 centímetros.

Estas explicaciones y argumentos dieron cuenta de la claridad que hay en los estudiantes sobre la existencia de un intervalo de valores (de 0 a 26 centímetros) que puede tomar la distancia AE, con el cual es posible generar cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD. Este último aspecto, se discutió de manera explícita por el Profesor e integrantes de E1 y E2 en los renglones 126 a 137, donde se concluyó que el intervalo para los valores de $\overline{AE}$ es de 0 a 26 centímetros.

[…]		
[126]	*P:*	*(…) ¿Cuál sería un <u>intervalo de valores que puede tomar AE</u> para que genere cuadrados inscritos a ABCD?… ¿De cuánto a cuanto puede valer AE?*
[127]	*A2 (E1):*	*<u>De 1 a 26.</u>*
[128]	*A5 (E2):*	*<u>Porque no de 0 a 26</u>.*
[129]	*P:*	*Vamos a ver… si AE es 0… ¿Cuál sería el área del cuadrado que genere?*
[130]	*A2 (E1):*	*676*
[131]	*P:*	*¿Por qué?*
[132]	*A2 (E1):*	*Porque está generando el mismo cuadrado que ABCD*
[133]	*P:*	*Y si AE mide 26.*
[134]	*A4 (E2):*	*Igual… sería el mismo cuadrado (refiriéndose al cuadrado ABCD)*
[135]	*P:*	*Igual… entonces 0 y 26 como que serían las medidas que limitan a AE.*
[136]	*A2 (E1):*	*<u>Entonces AE sería de 0 a 26.</u>*
[137]	*P:*	*Exacto… ya de ahí AE puede ir variando dentro de esos valores de 0 a 26 (…)*
[…]		

Estas fueron maneras de organizar la situación y se asocian al nivel situacional, pues están referidas al contexto de áreas del cuadrado.

Modelos en el nivel situacional

Las producciones y reflexiones dan cuenta que los estudiantes reconocen el **qué varía** en la situación, pues identifican:

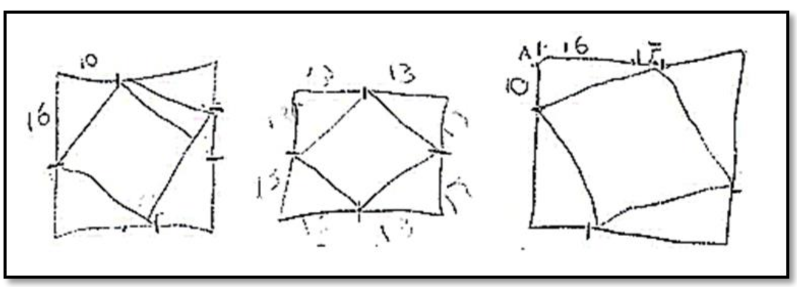
a) Las **magnitudes variables** de interés: La medida de la distancia AE y la medida del área del cuadrado inscrito.
b) La **relación de dependencia** entre dichas magnitudes: Que la medida del área del cuadrado varía mientras se modifica la medida de la longitud AE.

c) El **intervalo de variación** de la variable longitud de AE: Que la longitud AE puede tomar valores con sentido para la situación de 0 a 26cm, pues genera cuadrados inscritos EFGH al cuadrado ABCD.

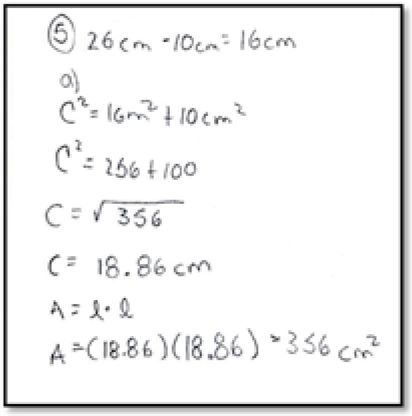
Estos elementos, representan en los estudiantes, la base para el aprendizaje de la función cuadrática a partir del estudio (Dolores, 2013) de proceso de variación.

En este nivel de compresión, los estudiantes reconocen el proceso de variación implicado en S1 mientras analizan la medida de las áreas de los cuadrados inscritos que generan al variar (de manera geométrica) la medida de la distancia AE. Para determinar la medida de esas áreas, los estudiantes pusieron en juego **conocimiento matemático informal**, sustentado en **TP** y **DA**, pues son los conocimientos que les permitieron establecer relaciones con los datos (conocidos y desconocidos) de la situación mediante analizar las regularidades del contexto, es por ello que rigieron su hacer matemático.

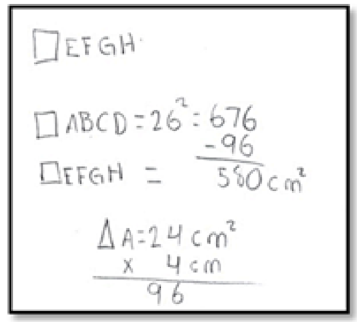
De manera general, entre las producciones de los estudiantes asociadas ya sea a TP o DA, se identifican tres **modelos**, uno **geométrico** (modelo 1.1) y dos **aritméticos** (modelo 1.2 y 1.3). El geométrico se caracteriza por permanecer dentro del contexto geométrico (tal como fue expuesta la situación) y seguir expresando la variación del área del cuadrado inscrito cada que se modifica la distancia AE. Los aritméticos se caracterizan por el uso de notación matemática y procedimiento aritmético para expresar los cálculos realizados para determinar la medida del área del cuadrado EFGH para ciertas medidas de la distancia AE, ya sea por TP o DA.



Modelo 1.1. Geométrico.



Modelo 1.2. Aritmético obtenido mediante TP.



Modelo 1.3. Aritmético obtenido mediante DA.

Es de resaltar que es la naturaleza del contexto de S1, la que motivó al estudiante a construir en primera instancia modelos geométricos que organizaron la variación y que permitieron establecer relaciones y regularidades entre los datos (conocidos y desconocidos) de manera visual, y a partir de ello se vieron en la necesidad de cuantificar y hacer uso de lo aritmético. Por lo que se miró en la actividad matemática de los estudiantes que los modelos geométrico y aritmético son complementarios.

4.1.2. Nivel referencial

En este nivel los estudiantes centran su atención en el comportamiento del proceso de variación de S1. El comportamiento que estudian se concentró, en el **cómo** y **cuánto varía** la medida del área del cuadrado inscrito que se genera cada que se modifica la longitud de la distancia AE.

¿Cómo varía eso que varía en el contexto de la situación?

El análisis del **cómo varía**, está asociado a la simetría de los valores que toma el área del cuadrado inscrito EFGH, a que hay un área mínima, a su disminución y aumento de los valores que toma el área, a que los valores de la variación es representada gráficamente por una parábola y a la continuidad de los valores que toma la distancia AE.

a) Los valores que toma el área del cuadrado inscrito EFGH son simétricos

Los estudiantes identificaron la existencia de parejas de valores de medidas de la distancia AE para los cuales se cumple que la medida del área de los cuadrados inscritos que se generan, es igual. Esta característica se identificó durante la actividad en equipo y fue producto de dos cuestionamientos planteados en S1.

El primer cuestionamiento demandó determinar cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuya área sea igual a $580cm^2$ (área del cuadrado que se genera cuando $\overline{AE} = 2cm$). Los estudiantes expresaron de manera escrita que para obtener un cuadrado con área igual al que se genera con $\overline{AE} = 2cm$, bastaba con "invertirlo en sentido opuesto" en ABCD, tomando $\overline{AE}$ la medida de $24cm$. La figura 4.7 permite analizar esta forma de proceder, mediante la descripción y el procedimiento que E2 hizo ante dicho cuestionamiento. Se infiere por parte del investigador que la expresión "invertirlo en sentido opuesto" hace alusión a la propiedad matemática de *reflexión*[5] de un objeto con respecto a otro, en este caso particular al cuadrado que se genera cuando el vértice E se encuentra a 2cm del vértice A y éste se refleja con respecto a la recta que une los puntos medios de AB Y CD.

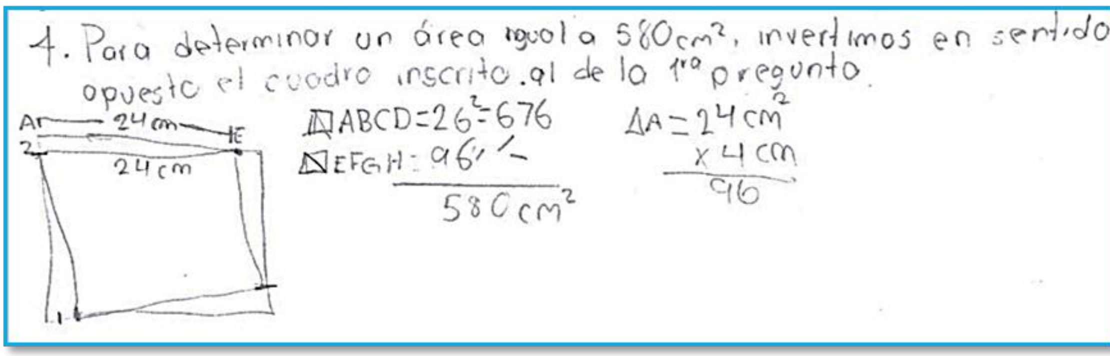


Figura 4.7. Documento en el que E2 determina un cuadrado con igual área que el generado cuando $\overline{AE} = 2cm$.

El segundo cuestionamiento se planteó en un sentido más general que el anterior, pues solicitaba determinar cuadrados inscritos al cuadrado ABCD cuyas áreas sean iguales. Los estudiantes retomaron la idea de "invertir los cuadrados en ABCD". También se dieron cuenta que las parejas de medidas de $\overline{AE}$ que resultan generar cuadrados inscritos con igual área, suman $26cm$. En la figura 4.8 se muestra que uno de los equipos (E4) identificó esta característica para tres parejas de medidas de la distancia AE (indicadas con 1, 2, 3 en la figura 4.8). Mientras, que en la figura 4.9 se evidencia cómo otros equipos (E2) dieron explicaciones escritas en lenguaje común del procedimiento realizado por ellos.

[5] Reflexión: es la imagen espejo de una figura que se "gira" sobre un eje (Rosario, 2011).

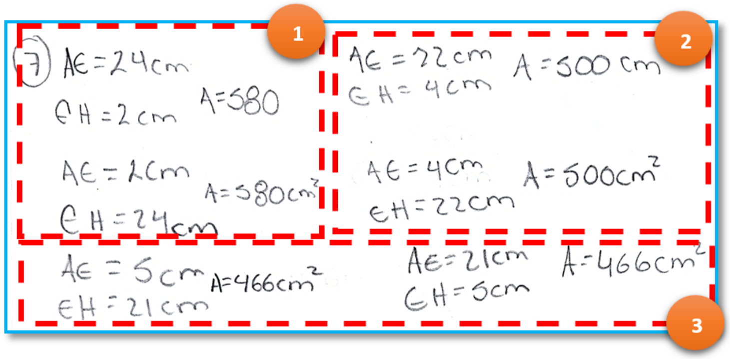


Figura 4.8. Proceder de E4 sobre las parejas de medidas de $\overline{AE}$ que cumplen con Tener la misma medida de área de los cuadrados inscritos que generan.

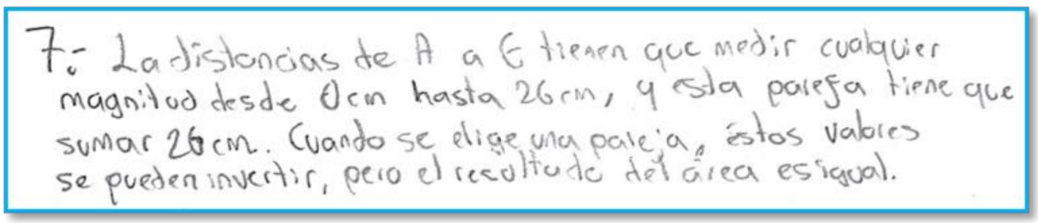


Figura 4.9. Explicación de E2 sobre las parejas de medidas de $\overline{AE}$ que cumplen con tener la misma medida de área de sus cuadrados inscritos.

b) Área mínima del cuadrado inscrito en ABCD

En esta misma fase de análisis, los estudiantes identificaron que cuando $\overline{AE} = 13cm$ (punto medio del segmento AB) se genera un único cuadrado inscrito con área igual a $338cm^2$, y es el que tiene área mínima de entre todos los que se pueden generar de ese tipo. La figura 4.10 muestra como uno de los equipos (E4) explicó que en $\overline{AE} = 13cm$ se genera un cuadrado inscrito con área mínima, como respuesta a la cuestión planteada en S1 relacionada con la determinación de cuánto debe medir la distancia AE para generar la mínima área de un cuadrado inscrito en ABCD.

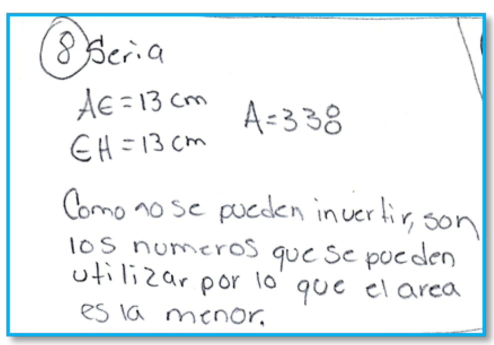


Figura 4.10. Explicación de E4 sobre el área mínima del cuadrado inscrito.

Otro de los equipos (E5) usó como herramienta una tabla (figura 4.11) para evidenciar que el área del cuadrado inscrito tiene un valor mínimo. A15 (E5) justificó de manera verbal el uso de dicha herramienta, explicó que había identificado que las medidas de las áreas de los cuadrados se repiten luego de que $\overline{AE}$ es igual a $13cm$, entonces bastaba mostrar las medidas de las áreas de los cuadrados que corresponden a los valores de $\overline{AE}$ de $1cm$ hasta $13cm$, para comparar y evidenciar el valor mínimo del área.

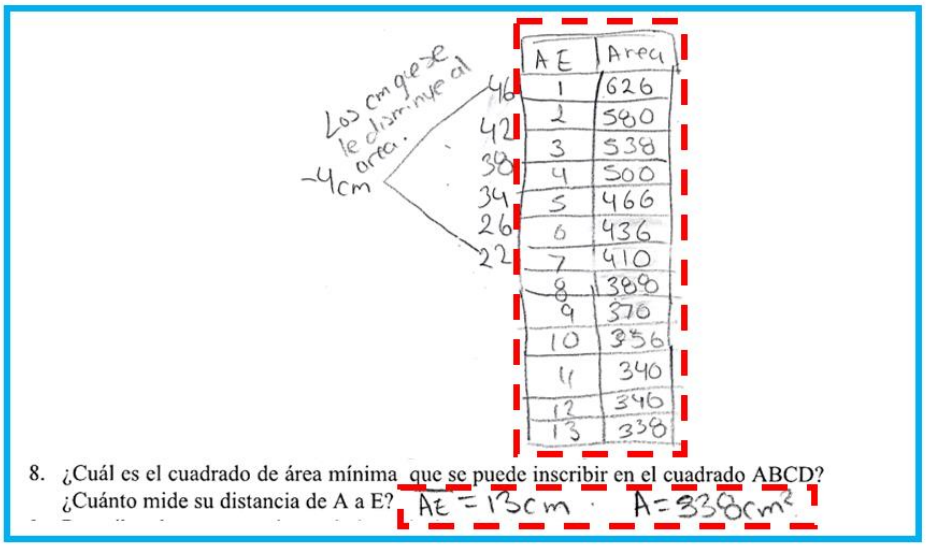


Figura 4.11. Tabla y descripciones del E5 sobre la mínima área.

La tabla evidenció la relación de correspondencia unívoca entre los valores de la distancia de $\overline{AE}$ y del área del cuadrado inscrito que se generaba en ABCD.

c) Disminución y aumento de los valores que toma el área del cuadrado inscrito en ABCD

En razón de que únicamente E5 se apoyó de una tabla para explicar cuándo la medida del área del cuadrado inscrito es mínima, es que se le pidió que compartiera su explicación con el grupo y la presentará en la pizarra. El profesor provocó que los estudiantes analizaran qué sucedía con la medida del área cuando AE toma valores de 14 en adelante. A5 (E2) en conjunto con el grupo, completó la tabla de E5 para medidas del área del cuadrado inscrito cuando la distancia AE toma valores de $14cm$ a $26cm$. En ese proceso distinguen que para los valores de la distancia AE de $0cm$ a $12cm$, la medida del área del cuadrado objeto de estudio que generan disminuyen, y para los valores de $14cm$ a $26cm$ de la distancia AE, la medida del área de ese cuadrado aumenta (figura 4.12). Parte de esta discusión, se evidencia en los renglones 225 a 237, en donde A2, A5, A3 y el profesor describen y argumentan sobre el comportamiento de los valores que toma el área del cuadrado inscrito mientras la distancia AE se modifica.

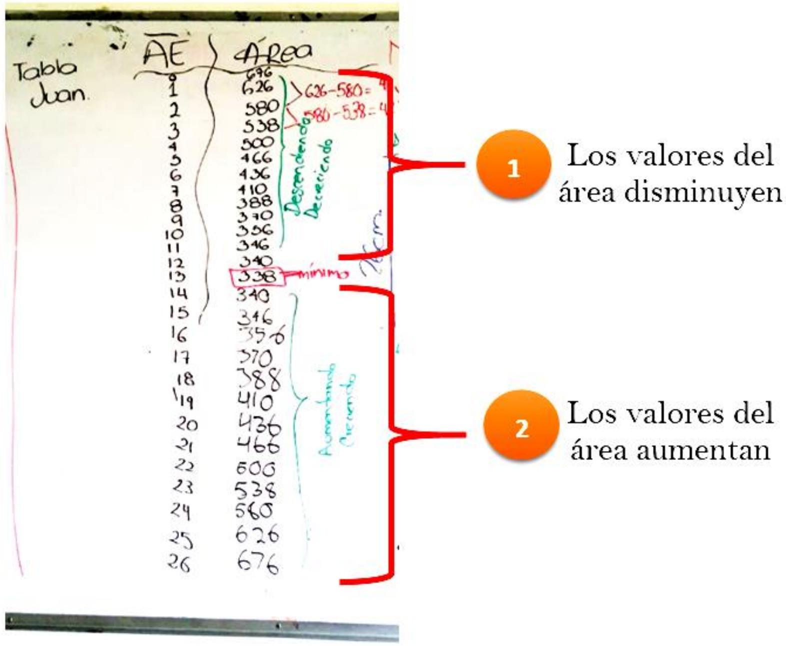


Figura 4.12. Tabla de valores de la distancia AE y del área del cuadrado inscrito EFGH.

[…]

[227] P: "… Ahora si nosotros miramos los valores de aquí en adelante (señala en la pizarra los valores de área que corresponden de AE igual 0cm a 12cm, de arriba hacia abajo)… ¿qué está pasando con los valores de 676 a 340?…"

[228] A2 (E1): Están descendiendo

[229] P: ¿Están descendiendo?

[230] A5 (E2): Sí…están decreciendo

[231] A2 (E1): Decayendo …

[232] A5 (E2): Bajando… disminuyendo

(el profesor escribe en la pizarra que los valores decrecen o disminuyen, figura 4.12 indicado con 1)

[233] P: ¿Ahora qué pasa con los valores de 340 a 376?

[234] A5 (E1): Suben

[235] A3 (E1): Aumentan

[236] A5 (E2): Van creciendo

(el profesor escribe en la pizarra que los valores aumentan o crecen, figura 4.12, indicado con 2)

[237] P: Entonces, si vemos los valores del área de primero decrecen, llegan a l valor mínimo y luego aumentan (…)

[…]

En este episodio de discusión grupal, el profesor (P) cuestiona a los estudiantes sobre el comportamiento de los valores del área del cuadrado inscrito, cuando $\overline{AE}$ toma valores de $0cm$ a $12cm$ (renglón 227), A2 y A5 atribuyen calificativos a dicho comportamiento (renglones 228 a 232) como que están descendiendo, decreciendo, decayendo, etc. Luego el profesor (P) cuestiona sobre el comportamiento de los valores del área, pero ahora para los valores de $\overline{AE}$ de 14cm a 26cm, A2, A5 y A3 califican que dicho comportamiento de los valores del área sube, aumenta, crece.

d) La variación puede ser representada por una Parábola

Con base en la discusión que se dio a nivel grupal sobre la disminución o aumento de la medida del área del cuadrado inscrito a partir de la medida de la distancia AE, los estudiantes asociaron ese comportamiento de la variación, con una parábola, en forma de "U". En los renglones 237 a 244 se muestra el episodio de la discusión grupal, sobre como los estudiantes describen la forma de la parábola que representa la variación analizada, así como el tipo de variación matemática que asocian a dicha representación.

[…]		
[237]	*P:*	*Entonces si vemos <u>los valores del área de primero decrecen, llegan al valor mínimo y luego aumentan…pero dicen que se repiten… ¿cómo se le llama a eso?…</u>*
[238]	*A2 (E1):*	*Reflexión*
[239]	*P:*	*¿Algún otro nombre?…*
[240]	*A5 (E2):*	*¡Una <u>parábola!</u>*
[241]	*P:*	*¿Una parábola?... ¿Cómo sería la parábola?*
[242]	*A2 (E1):*	*<u>Así (Con una de sus manos, traza en el aire una U para representar a una parábola que abre hacia arriba)</u>*
[243]	*A5(E2):*	*<u>Es una "U"</u>*
[244]	*A2 (E1):*	*¡Por eso!*
[…]		

En el episodio, es A5 (renglón 240) quien en primera instancia, asocia la variación analizada con una parábola, producto del conocimiento que posee, puesto que en sus cursos de geometría analítica la estudió como lugar geométrico. Tanto él como su compañero A2 se refieren a la parábola en términos de una "U", este último la trazó en el aire con su mano (renglones 242 a 243). A solicitud del profesor (renglón 245), ambos realizaron la gráfica de la parábola en la pizarra (figura 4.13), para ello se apoyaron de los datos de la tabla (figura 4.12).

[245] P: "¡A ver!... pasen a mostrarnos de qué forma sería… (Pasaron en el pizarrón A2 y A5 e hicieron la gráfica apoyándose de los valores de la tabla, mientras tanto se continuó con la discusión)…"

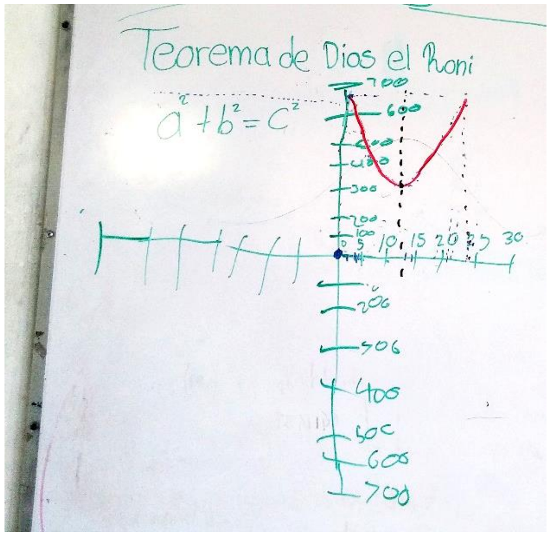


Figura 4.13. Gráfica de la variación analizada, construido por A2 (E1) y A5 (E2).

El profesor en tanto, enfocó un análisis sobre la representación gráfica de la pizarra (renglón 247). Todos se refirieron a qué es una gráfica, pero el profesor la relacionó con la variación del área que se analizó previamente. Es A5 quien ante la cuestión, qué tipo de variación matemática representa una parábola, respondió que de grado dos (renglón 254).

[…]
[247] P: "… ¿Qué <u>tipo de representación</u> están usando sus compañeros?…"
[248] Todos: <u>Gráfica</u>
[249] P: ¿También la gráfica puede representar la variación que analizamos?
[250] Todos: Si
[251] P: ¿Cómo se le denomina a esa representación gráfica?
[252] Todos: Parábola
[253] P: <u>Y una parábola ¿Qué tipo de variación representa?</u>
[254] A5 (E2): <u>De grado dos</u>
[255] P: Ahora como sería la gráfica
[256] A6 (E2): En forma de "U"
[…]

e) Los valores de la distancia AE se encuentran en el intervalo [0, 26]

Durante la discusión grupal, reconocieron que los valores que puede tomar la distancia AE se encuentran en un intervalo continuo que va de 0cm a 26cm. Y aunque no lo justificaron, afirmaron que también pueden ser tanto números enteros como decimales, a pregunta expresa del profesor (renglones 267 a 272). En la figura 4.14 se muestra el intervalo de valores de $\overline{AE}$ escrito en el pizarrón por el profesor. También identificaron, que $\overline{AE}$ no podía tomar valores negativos, pues no eran parte del contexto de la situación (renglones 273 a 278).

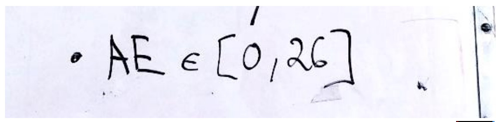


Figura 4.14. Intervalo de valores de $\overline{AE}$.

[…]		
[265]	*P:*	*(…) A ver ¿qué otra características se puede resaltar?*
[266]	*A1 (E1):*	*La distancia de AE*
[267]	*P:*	*La distancia de AE… ¿Qué valores puede tomar?*
[268]	*A7 (E3):*	*de 0 a 26cm*
[269]	*P:*	*Lo voy a escribir en el pizarrón … lo voy a poner así (señala en la pizarra el intervalo, figura 4.14), es el intervalo de 0 a 26… ahora… ¿estos valores de AE también pueden ser decimales?... por ejemplo 1.75*
[270]	*A4 (E2):*	*Si…*
[271]	*P:*	*¿Por qué?*
[272]	*A4 (E2):*	*Está dentro de los valores que puede tomar AE.*
[273]	*P:*	*Ok… ¿y puede ser -1?*
[274]	*A4 (E2):*	*No…*
[275]	*P:*	*No… ¿Por qué?*
[276]	*A4 (E2):*	*¿Por qué?*
[277]	*A7 (E3):*	*(Interrumpe)… Porque no se puede salir del cuadrado… además solo se tiene números positivos dentro del cuadrado que van de 0 a 26… porque su medida de su lado es 26*
[278]	*P:*	*Exacto… como ven todos los valores son positivos y se encuentran dentro del intervalo de 0 a 26 centímetros (señala la tabla)*
[…]		

¿Cuánto varía eso que varía en el contexto de la situación?

El **cuánto varía** está asociado tanto a la *medición del cambio,* como a la *medición* y *comportamiento del cambio de segundo orden* del área de los cuadrados inscritos que se generan cuando la medida de la distancia AE cambia en determinada magnitud (se toman intervalos con la misma amplitud).

Dolores (2013) señala que el cambio se da cuando se pasa de un estado a otro de los valores de una variable, de un *estado inicial* a un *estado final.* Por tanto, para medir el cambio del área de los cuadrados inscritos que se generan cuando la medida de la distancia AE cambia en determinada magnitud, basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial del área. El cambio de segundo orden se da cuando se pasa de un estado a otro de los valores obtenidos al medir el cambio de una variable, de un *estado inicial* a un *estado final.* Para medir el cambio de segundo orden del área, basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial de los cambios obtenidos del área. Este procedimiento está presente en el análisis que los estudiantes de E5 hicieron sobre el comportamiento de la variación analizada en S1.

f) Medición del cambio y medición y comportamiento del cambio de segundo orden

E5 analizó cuánto varía, eso que varía, ante la necesidad de observar alguna regularidad entre las medidas de las áreas de los cuadrados inscritos que conoce (figura 4.15, indicado con 1), y así determinó los valores desconocidos del área que le corresponden a los valores de la distancia AE de 8cm a 13cm. Se sustentó en ese proceso, de restar de su valor adquirido en el estado inicial, su valor adquirido en el estado final de las medidas conocidas del área de cuadrados inscritos (medición del cambio); y posteriormente restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial de las medidas obtenidas del cambio del área (medición del cambio de segundo orden). Con base en ello observó que si la medida de la distancia AE cambia a una magnitud constante de una unidad, el comportamiento del cambio de segundo orden de la medida del área del cuadrado inscrito, siempre era -4, esto es, un valor constante (figura 4.15, indicado con 2). Al identificar dicho comportamiento, E5 completó los valores de la tabla usando esa regularidad (figura 4.15, indicado con 3).

A15 (E5) participó en la discusión grupal, donde compartió el modelo que utilizó su equipo para organizar los datos de la variación, una tabla (figura 4.15). Esta la acompañó con la explicación del procedimiento que habían realizado (renglones 169 a 171).

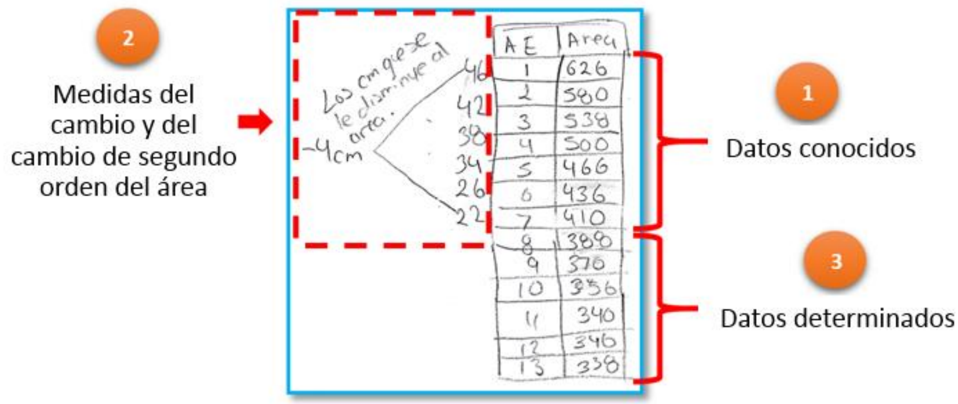


Figura 4.15. Tabla construida por E5.

[…]

[169] *A15 (E5):* *Bueno primero puse los valores de AE del 1 al 13 porque sé que del 14 en adelante los valores se van a repetir de nuevo… y bueno... para sacar más rápida la tabla … me di cuenta de que… saque de primero a ver si había una cierta resta para sacarlas más rápido… me di cuenta que 626 menos 580 me iba a dar 46… ya después me di cuenta que 580 menos 538 me iba a dar 42…ahí vi que cada vez que iba…estén…*

[170] *A2 (E1):* *Una constante*

[171] *A15 (E5):* *"… Que había una constante en AE… que se iban restando 4cm a cada valor que te iba dando de la resta anterior… y así fui sacando todos los valores del área que correspondían de 8 hasta 13… porque de 14 en adelante pues se repiten"*

[…]

En la explicación que E5 da al grupo, resalta que de primero realiza las restas entre un valor adquirido en el estado inicial y uno adquirido en el estado final de las medidas que conoce del área del cuadrado inscrito (renglón 169), luego que de esos valores obtenidos de las restas, observó que hay una diferencia de 4cm entre dichos valores. Lo cual obtuvo mediante restar el valor adquirido en el estado final, el valor adquirido en el estado inicial de los valores de las primeras restas. Determinó que los resultados, son constantes, con constante -4 (renglón 171). Esta regularidad, la aplicó para determinar los valores de área que le faltaban.

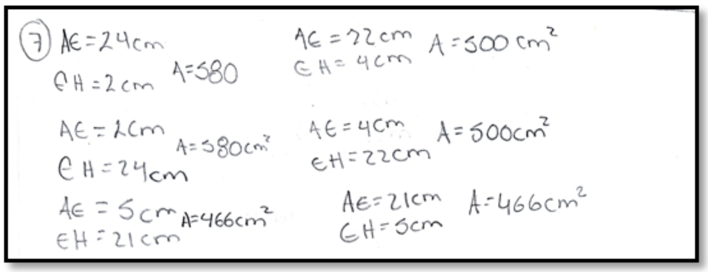
En dicho proceso se observa que hay una tendencia de que al valor mayor le restan el valor menor. Lo cual únicamente permite que se analice la cantidad del cambio y del comportamiento de los cambios. E5 hizo mención que el comportamiento de los cambios del área, es constante, con valor de -4, lo cual indicó que disminuye 4. Este dato lo usaron para continuar con el cálculo de restas y con ello determinar los valores que hacen falta para completar los correspondientes al área de los cuadrados inscritos que le corresponden a los valores de $8cm$ a $13cm$ de la distancia AE. Hasta aquí no hay evidencias de que los estudiantes hayan asociado la forma en cómo varía el cambio, con las concavidades de la gráfica que representa la variación del valor del área del cuadrado inscrito que se genera cada que se modifica el valor de la distancia AE. Más bien se infiere que los estudiantes lo asocian con el proceso (TP) que siguen para determinar los valores del área para ciertas distancias de AE, pues notan que este mismo proceso lo aplicaran para determinar todos los valores, por lo que la regularidad determinada (de manera inductiva) se cumple o generaliza para todos los valores de la variación donde la situación tiene sentido.

Modelos en el nivel referencial

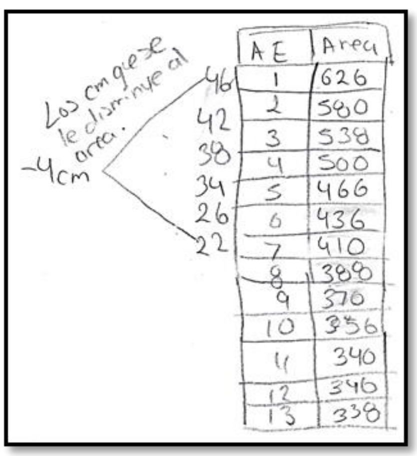
En este nivel los estudiantes reconocieron algunas **características del comportamiento** de los valores del área del cuadro inscrito que se genera al modificar la medida de la distancia AE. Estas características se centran en la descripción del **cómo** y **cuánto varía,** eso que varía. Y resultan sumarse a los otros aspectos que promueven la comprensión del concepto función cuadrática desde una mirada variacional en S1. Veamos enseguida:

(1) La **relación de correspondencia unívoca** entre los valores de las variables: establecen que a cada valor de la distancia AE, le corresponde un único valor de área del cuadrado inscrito EFGH.
(2) La **simetría de los valores** del área: reconocen parejas de medidas de la distancia AE (las cuales suman $26\ cm$) cuya medida del área de los cuadrados inscritos que generan es igual.
(3) El **valor mínimo**: identifican que el área mínima del cuadrado inscrito que se puede generar en ABCD es de 338cm^2 y se da cuando $\overline{AE}\ = 13cm$.
(4) Los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de la variación: distinguen que para los valores de la distancia AE de $0cm$ a $12cm$, los valores del área del cuadrado inscrito disminuyen, y para los valores de AE de $14cm$ a $26cm$, los valores del área aumentan.
(5) El **tipo de curva**: reconocen que la gráfica de la variación analizada, es una parábola.
(6) **Continuidad de los valores** de la variable independiente: establecen que los valores de la distancia AE se encuentran en el intervalo [0, 26].
(7) **Medición del cambio y del cambio de segundo orden**: calculan las restas correspondientes para medir el cambio y el cambio de segundo orden de los valores del área del cuadrado inscrito EFGH.
(8) El **comportamiento de los cambios**: identifican que el comportamiento del cambio de segundo orden del área es constante, con valor -4.

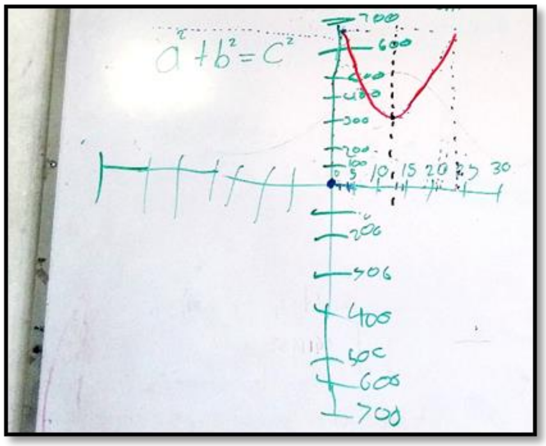
Estas características resultan de analizar la variación mediante herramientas y procedimientos referidos al contexto de áreas de cuadrados, donde se identificaron tres **modelos matemáticos**: el **listado de valores** (modelo 1.4), el **tabular** (modelo 1.5) y el **gráfico** (modelo 1.6). El primer modelo se caracteriza por expresar mediante un listado los valores de las magnitudes variables, como la medida del área del cuadrado inscrito para cierta medida de longitud AE. El segundo se caracteriza por organizar los datos, en el que se evidencia la relación de correspondencia unívoca entre los valores de las variables: distancia AE y el área del cuadrado inscrito EFGH. El tercero se caracteriza por expresar dicha relación de correspondencia, como un conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x representa la distancia AE y $f(x)$ el área del cuadrado inscrito EFGH. Estos puntos los representaron en un sistema de coordenadas cartesianas.



Modelo 1.4. Listado de valores.



Modelo 1.5. Tabular.



Modelo 1.6. Gráfico.

Estos modelos matemáticos son **“modelos de”** la situación de áreas de cuadrados, en tanto están referidos a esta situación en particular que les dio origen, como que abonan al aprendizaje de la función cuadrática, pues expresan la relación de correspondencia unívoca y algunas de sus características, mediante tres de sus representaciones matemáticas: el listado de valores, el tabular y el gráfico.

4.1.3. Nivel general

En este nivel, los estudiantes arriban a una expresión algebraica que expresa la regla de correspondencia unívoca entre las variables: distancia de AE y área del cuadrado inscrito EFGH. De los cinco equipos, dos (E2 y E4) llegan a que las expresiones a las que arriban enuncian una relación especial entre variables, las cuales expresan en términos de una función ($A(x)$). Un equipo (E1) reconoce que usa TP para el cálculo de las áreas, pero no llega a su generalización; y los otros dos equipos (E3 y E5) no responden la cuestión de S1, sobre cómo se puede determinar el área del cuadrado EFGH, si se conoce la medida de la distancia AE.

Es de resaltar que E2 expresa algebraicamente tanto la función que devino de generalizar TP, como DA. En seguida se presentan las expresiones algebraicas que los equipos desarrollaron en el marco de TP y de DA.

a) Nivel general en el marco de TP

E1 reconoció que una manera de determinar el área del cuadrado inscrito para cualquier valor que tome la distancia AE, era mediante TP. En la figura 4.16 se muestra la respuesta que E1 dio ante la cuestión de S1 sobre cómo se puede determinar el área del cuadrado EFGH si se conoce la medida de $\overline{AE}$.

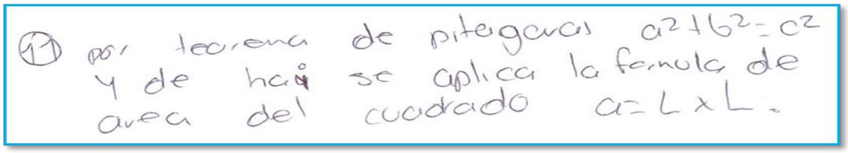


Figura 4.16. Descripción de E1 sobre el uso de TP.

En cambio E4, además de que reconoció que mediante TP se obtiene el área del cuadrado EFGH, lo generalizó en una expresión algebraica que matematizó la variación, pues se dio cuenta que la variable, distancia de AE, podía ser expresada con una variable matemática (x). En la figura 4.17 se evidencia la explicación de E4 sobre como generalizó TP hacia una expresión algebraica que modeló la variación del área del cuadrado inscrito para cualquier valor de x que se le asignará.

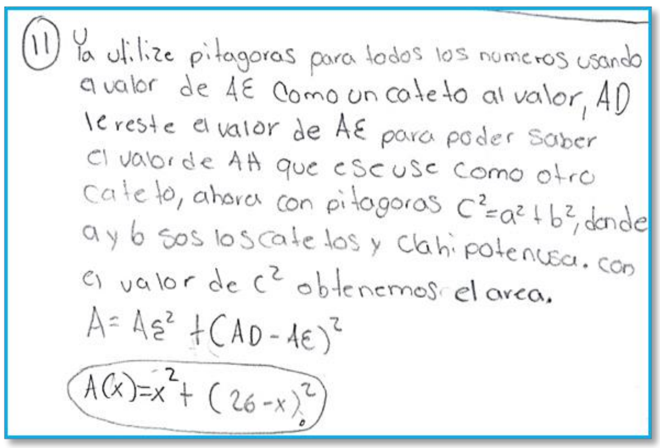


Figura 4.17. Explicación de E4 sobre la generalización que hace de TP.

En la discusión a nivel grupal, es A4 quien pasó a compartir en la pizarra la expresión a la que arribó (en equipo) en el marco de TP (figura 4.18). Explicó al resto de sus compañeros (renglón 176) que la expresión se basó de TP y les hizo saber el significado de cada término.

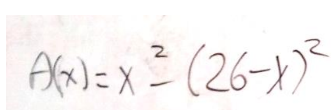


Figura 4.18. Expresión algebraica compartida por A4 de E2.

[…]

[176] *A4 (E2):* *Bueno… más que nada esto…<u>podríamos decirlo como el Teorema de Pitágoras</u>… porque <u>x es cualquier valor de la distancia AE</u>… <u>menos la resta de 26 menos cualquier valor de AE</u>... el valor que elegimos y denotamos como x… al*

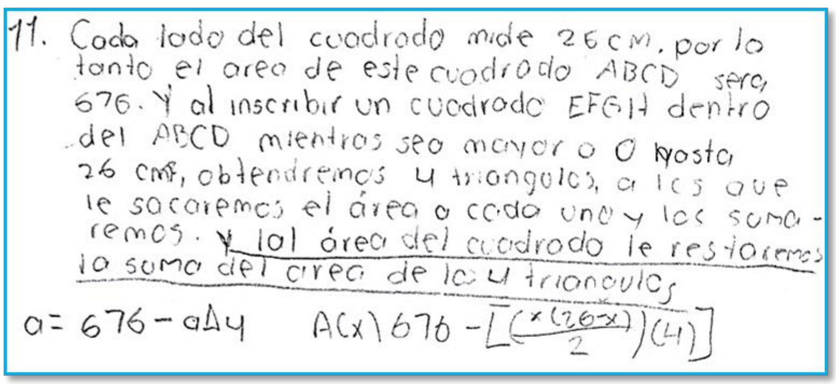
cuadrado...<u>ambos los elevamos al cuadrado</u>… <u>luego los restamos y sale lo que es la hipotenusa al cuadrado</u>…<u>y pues ya sale lo que es el área</u>…

[…]

A4 en su explicación (renglón 176) resalta la relación entre la hipotenusa con el lado del cuadrado, y que ésta, elevada al cuadrado conlleva a la medida del área del cuadrado inscrito EFGH. Por ello, la generalización se basa de TP.

b) Nivel general en el marco de DA.

E2 reconoció que mediante DA obtiene el área del cuadrado inscrito para cualquier valor de la distancia AE. Por lo que su procedimiento lo generaliza para cualquier valor (del intervalo de 0 a 26cm) de la distancia AE, el cual denota con la variable matemática x. Este proceso le permite establecer la expresión algebraica que organiza la variación analizada. La figura 4.19 evidencia la expresión algebraica a la que arribó, como también la breve explicación escrita sobre la misma.


11. Cada lado del cuadrado mide 26cm, por lo
tanto el area de este cuadrado ABCD será
676. Y al inscribir un cuadrado EFGH dentro
del ABCD mientras sea mayor a 0 hasta
26 cm, obtendremos 4 triangulos, a los que
le sacaremos el área a cada uno y los suma-
remos. Y lal área del cuadrado le restaremos
la suma del area de lo 4 triangulos

$a = 676 - a\triangle 4 \qquad A(x)\, 676 - \left[\left(\frac{x(26-x)}{2}\right)(4)\right]$

Figura 4.19. Explicación de E2 sobre la generalización que hace de DA.

En la figura 4.19 se reconoce en la explicación que dio E2, lo que representa cada término de la expresión $A(x)$. Hace saber que 676 es el área del cuadrado circunscrito ABCD, y que ha esto le restó el área de los cuatro cuadrados $\left[\left(\frac{x(26-x)}{2}\right)(4)\right]$, siendo x la base y $(26-x)$ la altura de uno de los triángulos. Esto se hizo más explícito en la discusión grupal cuando A4 (E2) compartió la expresión (figura 4.20) y la describió (renglón 178).

[…]

[178] A4 (E2): "… Aquí <u>x está expresando la medida de la distancia AE</u>… éste (señala <u>el término $26-x$</u>) es esta parte (señala <u>el cateto HA</u>)… <u>así que multiplique x por $(26-x)$</u>… que sería cateto por cateto… <u>y para sacar el área del triángulo lo divide entre dos</u>… porque así es la fórmula del área del triángulo… <u>ahora eso lo</u>

<u>multipliqué por el número de triángulos que hay</u>… <u>que son cuatro</u>… así que por eso <u>estoy expresando que al área total del cuadrado ABCD le resto el</u> <u>área total de la suma de las áreas de los cuatro triángulos pequeños</u>"

[…]

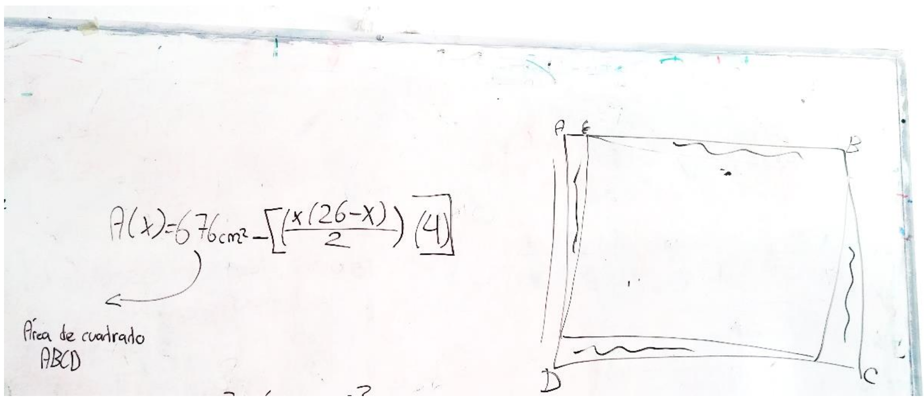


Figura 4.20. Expresión algebraica de la variación analizada, compartida por A4 (E2).

Modelos en el nivel general

En este nivel, el conocimiento matemático informal TP y DA, fue pieza fundamental para el proceso de generalización y obtención de la expresión algebraica que matematiza la variación analizada.

En este nivel los estudiantes reconocen que:

a) La **distancia** $\boldsymbol{AE}$ podía ser expresada en términos de la variable $\boldsymbol{x}$.
b) Mediante **generalizar TP** o **DA** con los términos de la situación se obtienen las expresiones algebraicas que expresan la **regla de correspondencia** de las variables del proceso de variación de S1.
c) El **área del cuadrado inscrito EFGH** para cierto valor de la distancia AE (x) se puede determinar mediante la expresión $\boldsymbol{A(x) = x^2 + (26 - x)^2}$ o bien $\boldsymbol{A(x) = 676 - \left[\left(\frac{x(26-x)}{2}\right)(4)\right]}$.
d) Las **expresiones (o fórmulas)** anteriores expresan **una relación especial entre variables**, sin embargo no asocian a que se trata de una función.

Son **dos** los **modelos algebraicos** que expresan la **regla de correspondencia unívoca** entre las variables: distancia AE (x) y área del cuadrado inscrito EFGH ($A(x)$). Uno fue el **modelo algebraico obtenido mediante TP** (modelo 1.7) que se caracteriza por ser una expresión algebraica obtenida de generalizar TP. El otro fue el **modelo algebraico obtenido mediante DA** (modelo 1.8) se caracteriza por ser una expresión algebraica obtenida de generalizar DA.

$$A(x) = x^2 + (26-x)^2$$

Modelo 1.7. Modelo Algebraico obtenido mediante TP.

$$A(x)\,676 - \left[\left(\frac{x(26-x)}{2}\right)(4)\right]$$

Modelo 1.8. Modelo Algebraica obtenido mediante DA.

Estos modelos dan indicios de **"modelos para"** resolver otras situaciones que presenten una variación cuadrática con las mismas características que la de la variación del área de cuadrados inscritos. Con respecto al aprendizaje de la función cuadrática, en este nivel los estudiantes expresan su representación algebraica (o fórmula) mediante dos expresiones equivalentes, debido a que ambas expresaban la misma regla de correspondencia unívoca entre variables. Sin embargo, en sus explicaciones, aún no dan cuenta de que se trata de una función cuadrática, ni de que las expresiones son equivalentes.

4.1.4. Nivel formal

Durante la reflexión de cierre, se compartieron los modelos que organizaron y dieron solución a la situación de variación *Cuadrados y áreas (S1)*. El profesor mediante la discusión de los modelos, guío a los estudiantes a establecer una caracterización del concepto función cuadrática, a partir del estudio realizado del proceso de variación, enfocando al cómo y cuánto varía, *eso que varía*. En la figura 4.21 se muestran los modelos compartidos en la pizarra por los estudiantes, cada uno fue expuesto por un equipo diferente. En la figura se evidencia que los estudiantes se apropiaron de los modelos construidos, al dotarlos de ciertas etiquetas.

Los modelos expuestos en el pizarrón dieron paso a la discusión y reflexión grupal sobre las características que presentan los datos de la variación de S1. Ello motivó a consensar que estas características pertenecen a una variación cuadrática, que posteriormente se caracterizó como función cuadrática. En la figura 4.22 se muestran las características de la variación que el profesor recopiló durante la discusión con el grupo.

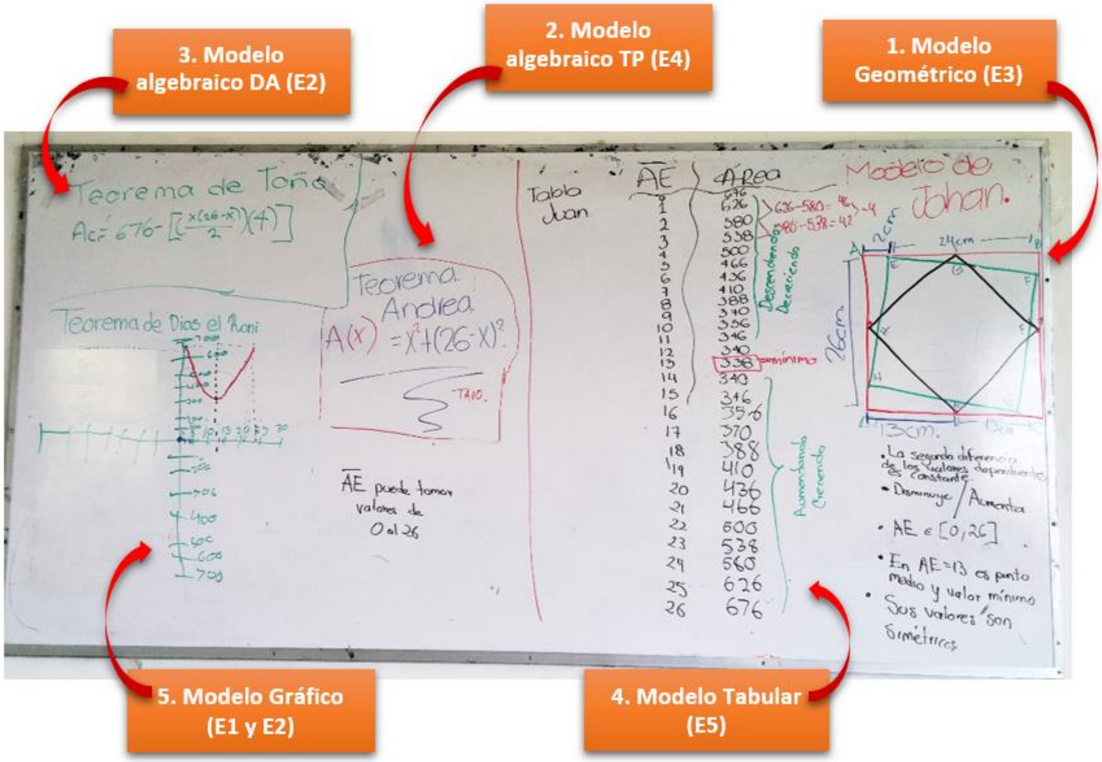


Figura 4.21. Modelos matemáticos que ayudaron a matematizar la variación de S1.

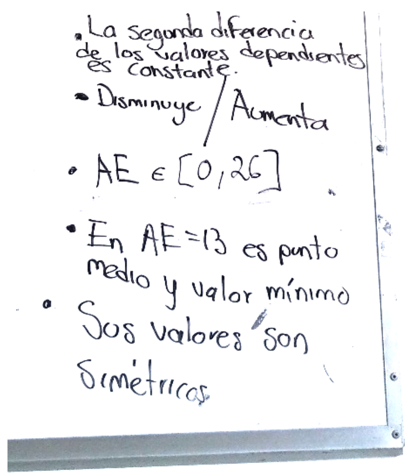


Figura 4.22. Características consensadas por el grupo de la variación cuadrática analizada.

En los renglones 179 a 183 se evidencia el episodio de la discusión donde el profesor en conjunto con el grupo caracterizaron el concepto que hay detrás las características analizadas y modelos construidos del proceso de variación de S1, la función cuadrática. Se resaltó que las características que presenta el concepto es que sus valores se repiten (son simétricos), presenta un valor mínimo y que el comportamiento de sus segundas diferencias entre los valores de la variable dependientes (el cambio de segundo orden), es constante.

[…]

[179]	*P:*	*(…) fijémonos en las expresiones algebraicas… ¿Cómo es la expresión?... es lineal, cuadrática, cúbica.*
[180]	*Todos:*	*Es cuadrática.*
[181]	*P:*	*Es cuadrática… entonces* ***lo que estuvimos viendo durante esta situación es una función cuadrática****… la cual presenta características… ¿cuáles eran?... la primera es la que comentó el compañero que tiene un área mínima… hay un valor que es el mínimo… también que determinaron… que estos valores…que pasa del 1 al 12 con respecto a los que siguen después del 13…*
[182]	*A3 (E1):*	*Se repiten*
[183]	*P:*	*Se repiten los valores, es decir son simétricos… también otro de sus compañeros… determinó que la segunda diferencia entre los valores del área… es decir de la variables dependiente… es constante, con constante -4… es decir… el cambio de segundo orden para una función de este tipo es constante… también se llegó a su expresión algebraica, la cual es de grado dos (…)*

[…]

Hay que destacar que en el cierre de la situación se resaltaron algunas de las características de la variación, sin embargo se logró observar a lo largo de la caracterización de los demás niveles de comprensión (situacional, referencial y general) la presencia de otras más determinadas por los estudiantes; esto fue producto del dinamismo de los niveles de compresión, por ello se pudo ubicar a los estudiantes en más de uno a la vez.

Modelos en el nivel formal

Este nivel se caracteriza porque se actuó con la caracterización de la función cuadrática desde una mirada variacional, así como con el establecimiento de sus características.

Las características que los estudiantes reconocieron de la función cuadrática son:

(1) **Simetría de los valores**: sus valores son simétricos, se repiten.
(2) **Valor mínimo**: tiene un valor mínimo.
(3) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:** los valores de la variación en un primer intervalo disminuyen y en el otro aumentan.
(4) **Tipo de curva**: una parábola.
(5) **Continuidad de los valores** de la variable independiente: los valores para la variable x se encuentran en un cierto intervalo.
(6) **Comportamiento del cambio de segundo orden**: el comportamiento del cambio de segundo orden de la variable dependiente (las segundas diferencias), es constantes.

(7) **Sus diferentes representaciones**: geométrico, tabular, gráfico y algebraico.

Estas características, promovieron la caracterización (de manera verbal) del concepto función cuadrática. Debido al tiempo limitado de la sesión donde se hizo el cierre de S1, no se logró su escritura en el pizarrón, tal como se había anticipado (ver apartado 3.6 de este documento), de ahí que no se considere ningún modelo en este nivel.

4.2. Niveles de comprensión en Situación 2

El contexto de S2 es la promoción de un Video Club. En la situación se situó a los estudiantes a analizar la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club por el incremento que le hace a la cuota mensual que les cobra a sus socios, y a partir de ello deben obtener el modelo matemático que organice esa variación e identificar la recaudación máxima obtenida. Como información inicial aparece la cuota mensual ($\$79$) y el número de socios (93 personas). Los cuestionamientos de ese contexto, pueden verse en el Capítulo 3.

En lo que sigue se analizan los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes al modelar S2.

4.2.1. Nivel situacional

Mediante la forma de proceder de los estudiantes y sus explicaciones (escritas o verbales) en este nivel, se distingue como **conocimiento matemático informal** al **producto entre dos factores** (**PF**). Lo usan como un medio para obtener la recaudación mensual cada que incrementan el costo de la cuota.

Nivel situacional en el marco de PF

PF surgió como conocimiento informal al momento en que los estudiantes reconocen que la recaudación mensual puede determinarse mediante el *producto entre el costo de la cuota y el número de socios*. Saben que tanto el costo de la cuota como el número de socios son valores a determinar. El primero, resulta de sumarle al costo inicial el valor de un incremento. El segundo, se obtiene de restarle al número de socios inicial el valor del incremento que se le suma al costo de la cuota. La figura 4.23 evidencia esta forma de proceder en los estudiantes mediante las explicaciones de E1.

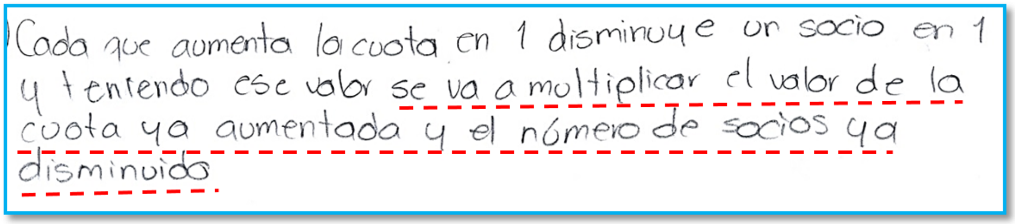


Figura 4.23. Explicación sobre PF en E1.

Repitieron esta forma de proceder cada vez que determinaban la recaudación mensual para un cierto incremento. En el caso de E4, el procedimiento se observó (figura 4.24) cuando el incremento fue $0, $4 y $7. La recaudación mensual asociada a estos tres incrementos fue parte de los cuestionamientos plateados en S2.

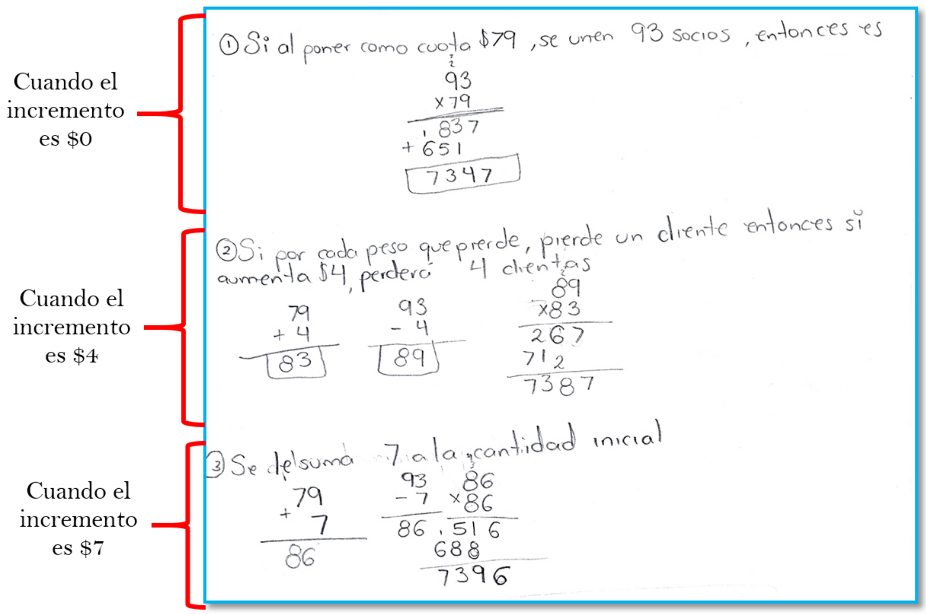


Figura 4.24. Forma de proceder de E4 mediante TP.

Otro de los cuestionamientos en S2, era determinar cuál es el valor del incremento a la cuota, cuando la recaudación mensual llega a ser cero. Como resultado de sus reflexiones en equipo sobre la variación que interviene en la situación, los estudiantes supieron que *para que la recaudación sea cero, basta con que el costo de la cuota o el número de clientes sea cero*. Por lo que enfocaron su atención en analizar el cómo varían dichos valores. Identificaron que al dar un cierto incremento, el costo de la cuota siempre va incrementando, contrario al número de clientes que va decreciendo. Por tanto, *reconocieron que el número de clientes era él que podía llegar a ser cero y determinaron bajo qué incremento de la cuota esto sucedía*. Ejemplo de ello, es la forma en que procedió E4 (figura 4.25). El resto de los equipos procedieron de la misma forma, la cual se discutió a nivel grupal. Aspectos relevantes de la discusión grupal se resaltan en los renglones 353 a 355 donde se discutió sobre el procedimiento que realizaron paso a paso para obtener una recaudación cero.

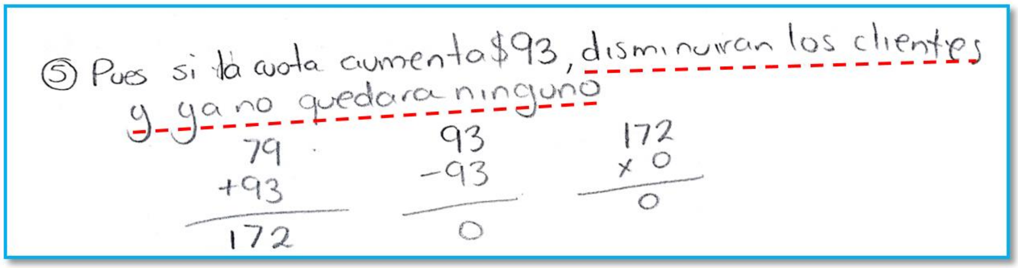


Figura 4.25. Argumento y proceder de E4 para determinar cuándo la recaudación es cero.

[…]

[353] *A5 (E2):* *Entonces para que no tengas clientes…tienes que incrementar 93 pesos a la cuota… y si le aumentas 93 pesos me quedaría 73+93, sería 172…*

[354] *A3 (E1):* *(Interrumpe)… pero ese sería el valor de la cuota… y para obtener el valor de la recaudación falta multiplicarlo por el número de socios que es cero.*

[355] *A2 (E1):* *Si…entonces la recaudación es cero… cuando se da un incremento de 93*

[…]

Durante el análisis realizado para determinar la recaudación, dado cierto incremento a la cuota, una mayoría de estudiantes reconoció que el *incremento de dicha cuota, sólo puede tomar valores de* 0 *a* 93 (figura 4.26), pues es en ese intervalo donde reconocen que se generan valores de recaudación mensual con significado, para el contexto de S2. Identificaron también, que *varía la recaudación mensual cada que incrementa el costo de la cuota,* el **qué varía** (renglón 306).

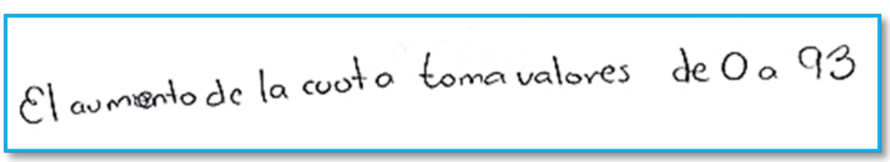


Figura 4.26. Argumento de E4 sobre los valores de incremento.

[…]

[303] *P:* *(…) entonces ahí… lo que están ustedes analizando… es una variación de qué con respecto a qué… ¿Qué es lo que va variando?*

[304] A2 (E1):
Varía todo
[305] P: ¡Varía todo!... pero hay un valor que hace que todo cambie
[306] A2 (E1): ¡Ah!…es el aumento de la cuota… es el que hace que varíe el costo de la cuota, los socios y la recaudación mensual.
[…]

Modelos en el nivel situacional

En este nivel los estudiantes reconocen el **qué varía**, pues a partir del cálculo de valores puntuales de la variación, identifican:

a) Las **magnitudes variables:** el incremento a la cuota y la recaudación mensual.
b) La **relación de dependencia** entre dichas variables: Que la recaudación mensual depende del incremento que se le haga a la cuota mensual.
c) El punto donde **la recaudación es cero (o se anula)**: Que la recaudación se hace cero cuando se le incrementa $\$93$ a la cuota mensual que se les cobra a los socios.
d) El **intervalo de variación** de la variable incremento a la cuota**:** Que el incremento a la cuota cambiaba de 0 a 93, pues en dicho intervalo genera valores de recaudación mensual con significado, para el contexto de la situación.

Nótese que igual que en S1, se hizo presente el reconocimiento de los elementos básicos para el estudio de procesos de variación, los cuales son un escalón para la comprensión de la función cuadrática desde una mirada variacional. Es de resaltar que fue en S2, que los estudiantes centraron su atención en reconocer cuando la recaudación se hace cero, lo cual es producto de la naturaleza de la situación, pues hay sentido de hablar de una recaudación mensual igual a cero.

Para realizar los cálculos de dichos valores de la recaudación, el **conocimiento informal** que ponen en juego los estudiantes es **PF**, el cual rigió su hacer para la resolución de la situación.

Entre las reflexiones y producciones de los estudiantes que se caracterizan en este nivel, se distinguen un **modelo**, que se denominó **Aritmético obtenido por PF** (modelo 2.1). Se caracteriza por usar operaciones aritméticas (como la suma, resta y multiplicación) y su jerarquía, para con ello realizar cálculos y determinar el valor de la recaudación mensual dado un cierto incremento a la cuota, mediante PF.

a) $93-10=83$ $79+10=83$ $83\times83=6884$

b) $93-14=79$ $79+14=93$ $79\times93=7343$

c) $93-60=33$ $79+6=139$ $33\times139=4587$

Modelo 2.1. Aritmético obtenido por PF.

El modelo aritmético obtenido por PF, estuvo ligado al contexto de la situación, pues mediante éste los estudiantes establecieron las relaciones entre los valores de la cuota y el número de socios que se obtienen cada que se daba un cierto incremento. Se infiere que este modelo les permitió descubrir las regularidades existentes de las relaciones establecidas, es decir, que al valor de la cuota se le aumenta el incremento, mientras que al número de socios se le disminuye el valor del incremento; y con ello proporcionaron un razonamiento de tal magnitud, como el dado en la respuesta a la cuestión sobre cuál es el valor del incremento a la cuota, cuando la recaudación mensual llega a ser cero.

4.2.2. Nivel referencial

En este nivel las reflexiones de los estudiantes y las producciones escritas derivadas de ello, se enmarcaron en torno a algunos aspectos de la variación de la recaudación mensual (de lo que varía) que se obtenía cada vez que se le daba un cierto incremento a la cuota. Estos aspectos que observaron, se centraron en el **cómo** y **cuánto varía** eso que varía.

El análisis de estos aspectos por los estudiantes se apoyó de tablas (figura 4.27 y 4.28), en las que organizaron algunos de los valores del incremento a la cuota y de la recaudación mensual, en términos de su relación de dependencia. Con estas tablas se infiere que los estudiantes establecen la relación de correspondencia unívoca entre los valores de dichas variables, puesto que a cada valor de incremento le atribuyen un único valor de recaudación, lo cual evidenció que presentan noción de *función*.

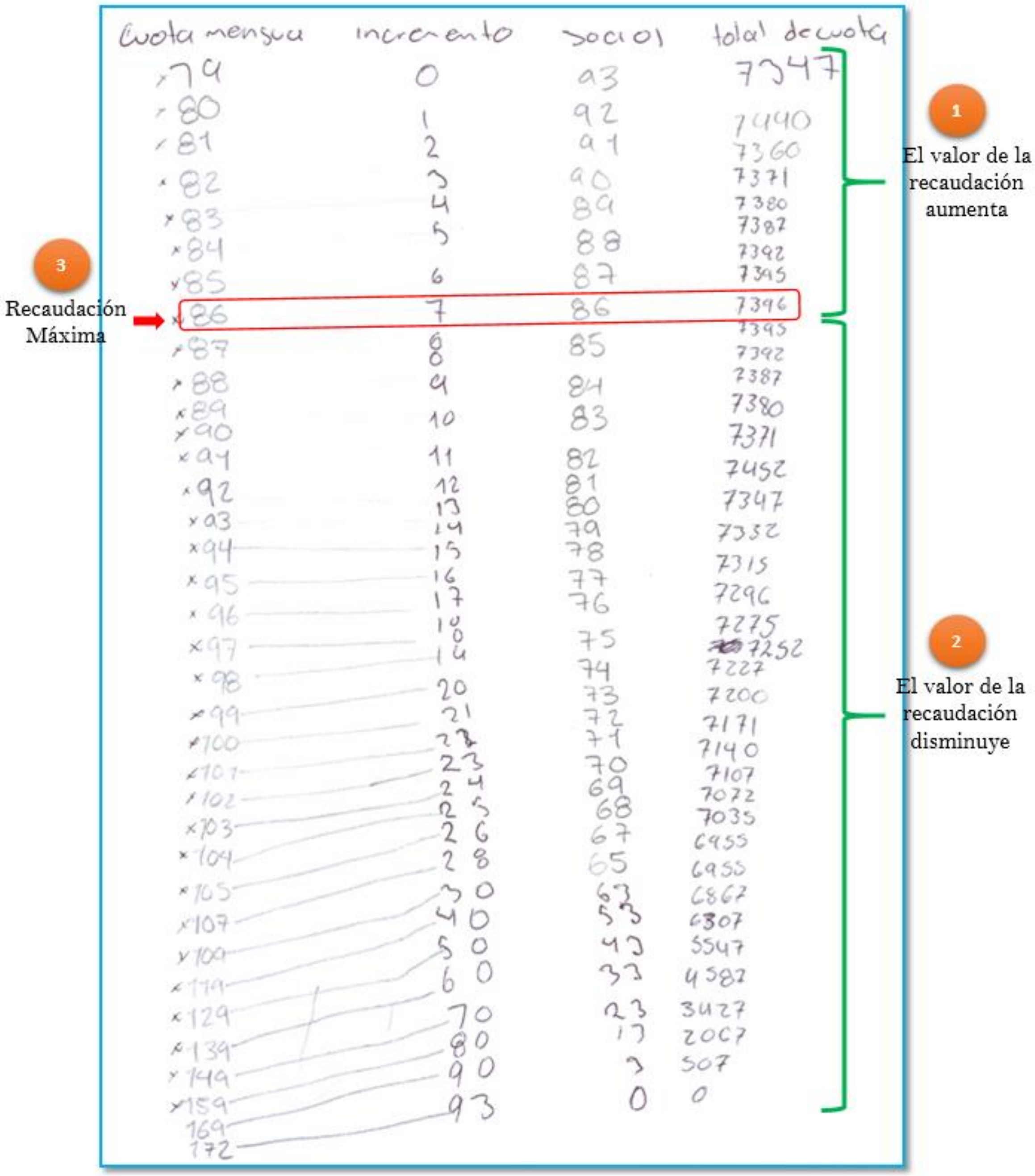


Figura 4.27. Determinación por E1 de los valores del incremento a la cuota y de la recaudación mensual.

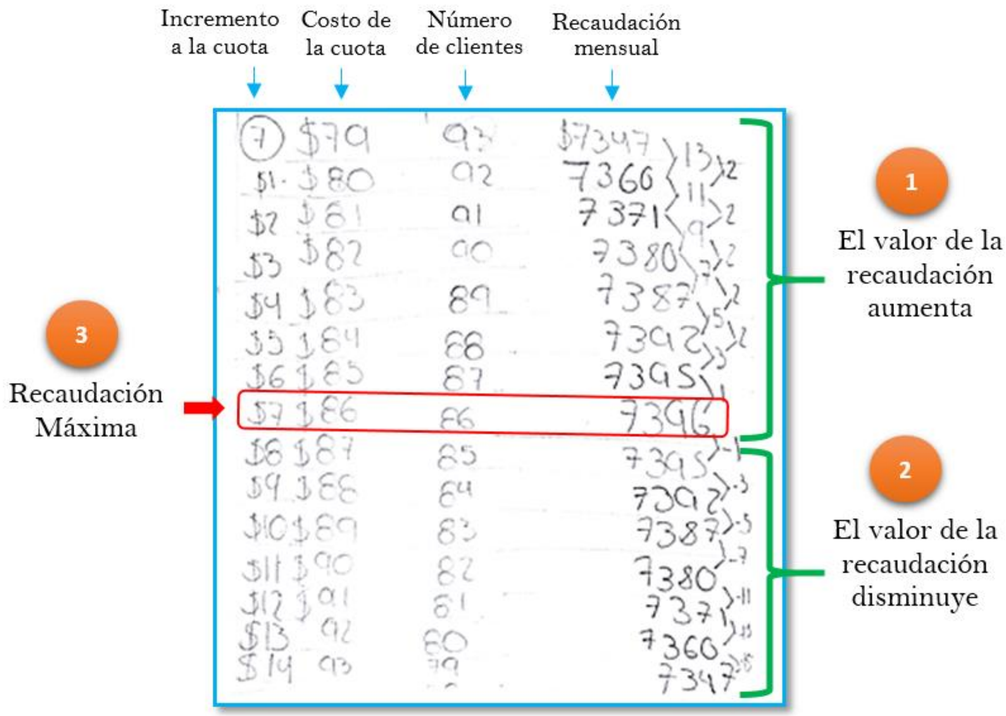


Figura 4.28. Determinación por E3 de los valores del incremento a la cuota y de la recaudación mensual.

El uso de tablas para organizar los datos en S2, se observó en los cinco equipos. Se infiere que el formalizar en S1, que éste es un modelo que ayuda a analizar la variación, promovió que los estudiantes lo hagan parte de su gama de herramientas y lo usen en esta situación para lo mismo.

El **cómo varía** en esta situación, estuvo asociado al *aumento o disminución de los valores* que toma la recaudación mensual, así como también a *la simetría de esos valores* y a que hay *un máximo*.

a) Los valores de la recaudación mensual aumentan y disminuyen

Del análisis realizado por los estudiantes en torno a los valores que toma la recaudación mensual bajo ciertos incrementos que se le hace a la cuota, identifican que *esa* **recaudación aumenta** *para valores de* 0 *a* 7 *del incremento y para el resto,* **disminuye**. En las figuras 4.27 y 4.28 se ha indicado con 1, los valores en donde la recaudación aumenta y con 2, los valores en donde disminuye. Parte de esta reflexión se muestra en los argumentos escritos de los estudiantes cuando se les pidió describir en S2 el comportamiento de los valores de la recaudación mensual por el incremento que se le hace a la cuota (figura 4.29).

(8) Pues en las primeros cantidades aumenta, pero de ahí comienza a disminuir, aumenta de 0 a 7 y de ahí comienza a disminuir

Figura 4.29. Argumentos de E4 sobre el cómo varían los valores de recaudación.

Esta reflexión también se evidenció en la discusión grupal, en dos momentos. Uno cuando se discute sobre los valores que puede tomar la variable de incremento a la cuota (renglones 347 a 348). Otro cuando se argumenta sobre el valor máximo de la recaudación (renglones 326 a 333, discusión ubicada en el inciso siguiente, b).

[…]

[347] *P:* *Aquí el compañero menciona que esos incrementos a la cuota van de qué valor a que valor.*

[348] *A5 (E2):* *De 0 a 93… pero <u>de 0 a 7 aumenta la recaudación</u> y… <u>a partir de que se le incremente 8 pesos hasta 93 va disminuyendo</u>… <u>disminuye la recaudación hasta 0.</u>*

[…]

b) Hay un valor máximo de recaudación

Los estudiantes reconocieron además, que la recaudación mensual a lo sumo puede valer $7396 y que se daba cuando el incremento a la cuota es de $7. Siendo este el valor máximo que puede tomar la variable analizada. En la figura 4.27 y 4.28 se indica con 3 al valor máximo de recaudación. Parte de este análisis se muestra mediante la explicación que E4 da como respuesta a la cuestión planteada en S2 relacionada con la determinación de cuánto debe incrementar la cuota para obtener la máxima recaudación. La misma pregunta demanda el valor máximo. En la figura 4.30 se muestra la respuesta de E4 a ese cuestionamiento, donde mencionó que cuando son iguales los valores de costo y el número de clientes, se obtiene la **máxima recaudación**, lo cual se da cuando el incremento a la cuota es de $7.

(9) Cuado son iguales, el costo es 86 y hay 86 clientes, la recaudación es de 7396, tendría que incrementa $7

Figura 4.30. Argumentos de E4 sobre la máxima recaudación.

En la discusión a nivel grupal, se desató una conversación entre A5 (E2), A2 (E1) y el profesor (P) sobre la máxima recaudación que se puede llegar a tener, al momento en que A3 (E1) escribió en el pizarrón (figura 4.31) el proceder realizado por su equipo para cuando se da un incremento de $7 a la cuota y se desea determinar la recaudación mensual que le corresponde, ver renglones 322 a 325.

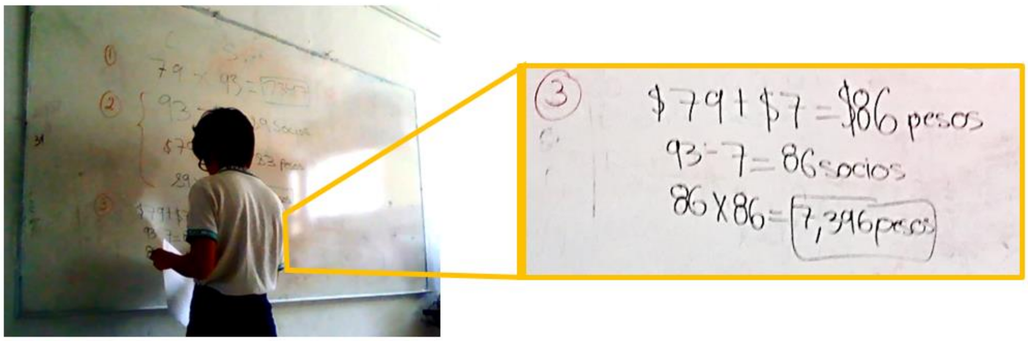


Figura 4.31. Proceder de E1 mediante TP cuando el incremento es $7.

[…]

[322] *P:* *Veamos la pregunta 3, que dice… ¿Cuánto será el costo de la cuota, si le incrementa a la cuota mensual $7?... ¿Cuánto recaudará en ese caso?... ¿Quién pasa a realizarlo?*

(pasa A3 (E1) a compartir su proceder en la pizarra, ver figura 4.25)

[323] *P:* *En el inciso 3, ¿eso les dio?*

[324] *A5 (E2):* *Sí… de hecho… ese es el resultado de la recaudación… de la recaudación que… puede llegar a tener… la mayor… la máxima…*

[325] *A2 (E1):* *Sí, la máxima*

[326] *P:* *Porque después de esa recaudación… ¿qué sucede con los demás valores de la recaudación?*

[327] *A5 (E2):* *Disminuyen*

[328] *P:* *Empieza a disminuir… y de primero ¿qué pasa con los valores?*

[329] *A2 (E1):* *De 1 a 7 (refiriéndose a los valores de incremento a la cuota), aumentan*

[330] *A5 (E2):* *No, aumentan de 0 a 7*

[331] *A2 (E1):* *¡Ah!… sí… de 0 a 7, aumenta…*

[332] *A5 (E2):* *Y disminuye de 8 en adelante…*

[333] *A2 (E1):* *Pero de hecho… sería de 8 a 93 (valores del incremento) que disminuye…*

[…]

En un episodio de la discusión grupal (renglones 322 a 333), A5 (E2) destacó que la máxima recaudación que se puede llegar a obtener (renglón 324), sucede cuando se da un incremento a la cuota de $\$7$. Posteriormente, A2 (E1) mostró estar de acuerdo con dicha afirmación y entre los dos dan una explicación del cómo varía la recaudación mensual (renglones 325 a 333), lo cual usan para justificar dicha afirmación.

c) Los valores de recaudación son simétricos

En esta misma fase de análisis los estudiantes también reconocen que **los valores de recaudación son simétricos** *con respecto a la recaudación máxima* (cuando el incremento es 7). Identificaron que dicha simetría se da en el intervalo de los valores de incremento de 0 a 14. Llegan a explicaciones tales como "que los valores de recaudación aumentan hasta el punto máximo que es cuando el incremento es $\$7$ y luego disminuyen de manera simétrica hasta cuando el incremento es $\$14$". E3 acompañó este tipo de explicaciones con una gráfica (figura 4.32), la cual generó mediante la tabla de valores presentada en la figura 4.28. Este equipo reconoció que la curva que describió el cómo varían los valores de la recaudación mensual, es una parábola. Se infiere que su uso, es influenciado por las reflexiones hechas en S1. Además se observó que lo usan en S2 como herramienta para describir el cómo varía la recaudación mensual y para evidenciar de que se trata de una función cuadrática (ver sección 4.2.4). Nótese que la necesidad de modelar gráficamente en S1 es diferente de S2, en la primera se usó como una herramienta para organizar la variación y en la segunda además de usarla como herramienta para organizar la variación, también se usó para evidenciar y analizar el cómo varía la recaudación mensual.

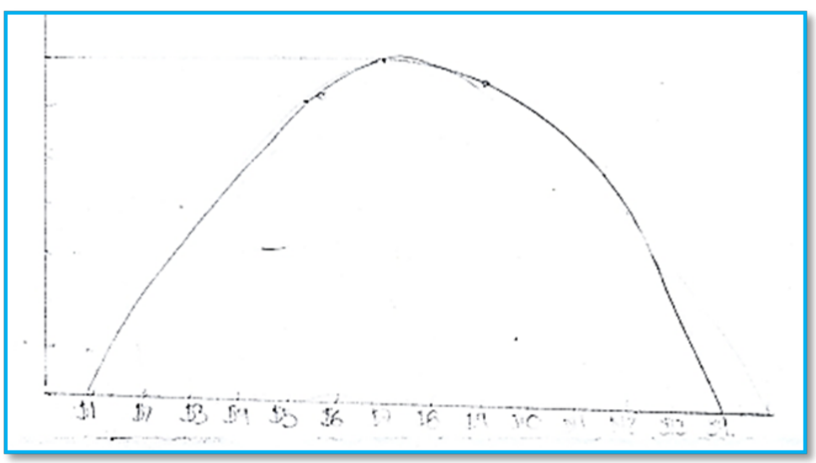


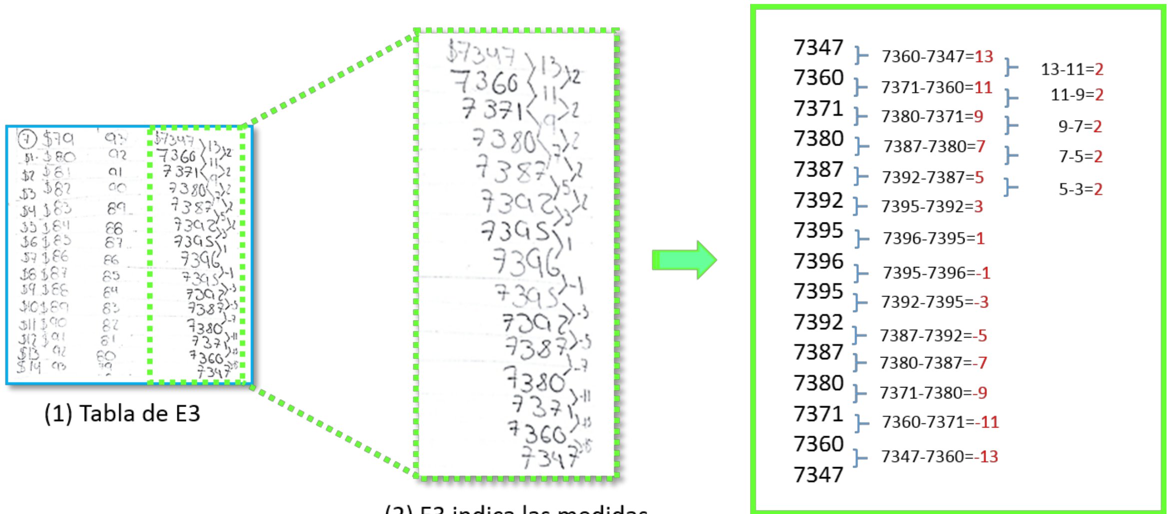
Figura 4.32. Gráfica de la variación analizada, construida por E3.

El **cuánto varía** en esta situación está asociado a la *medición del cambio,* como a la *medición y comportamiento del cambio de segundo orden* de la variable recaudación mensual. Dolores (2013) señala que el cambio se da cuando se pasa de un estado a otro de los valores de una variable, de un *estado inicial* a un *estado final.* Por tanto, para medir el cambio de la recaudación mensual obtenida cuando, el incremento a la cuota de los socios cambia en determinada magnitud, basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial de la recaudación. El cambio de segundo orden se da cuando se pasa de un estado a otro de los valores obtenidos al medir el cambio de una variable, de un *estado inicial* a un *estado final* (Dolores, 2013). Para medir el cambio de segundo orden de la recaudación, basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial de los cambios obtenidos de la recaudación. Este procedimiento estuvo presente en el análisis que los estudiantes (E3 y E5) hacen sobre el comportamiento de la variación analizada en S2.

d) Medición del cambio, como medición y comportamiento del cambio de segundo orden

Es de resaltar que E3 y E5 llevaron su análisis más allá de identificar el cómo varía la recaudación mensual, pues además, analizaron cuánto varía. Se sustentaron en ese proceso, de restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial de los valores de la recaudación mensual (medición del cambio, al cual llamaron primeras diferencias); y posteriormente restaron su valor adquirido en el estado inicial, su valor adquirido en el estado final de las medidas obtenidas del cambio de la recaudación (medición del cambio de segundo orden, al cual llamaron segundas diferencias). Con base en ello, observaron que si el valor del incremento a la cuota cambia a una magnitud constante de una unidad, el **comportamiento del cambio de segundo orden** del valor de la recaudación mensual, siempre es 2, esto es, un valor constante, tal como sucedió en S1.

En la tabla en la que los estudiantes registraron los valores de las variables en juego en S2, indicaron también, los valores que resultaron de las mediciones antes mencionadas. La figura 4.33 presenta la tabla construida por E3, indicada con (1). A partir de ella, se resalta por parte de la investigadora, los valores obtenidos de dichas restas (señalado con (2)). A fin de evidenciar de dónde provienen los valores determinados por los estudiantes para medir el cambio y el cambio de segundo orden respecto de la variable recaudación, en (3) se explícita el cálculo de las restas. Este mismo procedimiento lo realizó E5.



(1) Tabla de E3

(2) E3 indica las medidas del cambio y del cambio de segundo orden

(3) Se desarrollan las diferencias

Figura 4.33. ¿Cómo mide E3 cuánto cambia la recaudación y el comportamiento de los cambios?

Estos procederes, dieron cuenta de que E3 Y E5 reconocen cuánto varía la recaudación mensual cada que incrementaba el costo de la cuota. Se volvió a observar (tal como sucedió en S1) la tendencia de que al valor mayor le restan el valor menor. De nuevo, no hubo evidencia de que los estudiantes asocien la forma en cómo varía el cambio, con las concavidades de la gráfica que representa la variación de la recaudación mensual. Se infiere que el análisis que hicieron del cuánto varía, fue con la intensión de percatarse si pasaba lo mismo que en S1, es decir, que el comportamiento del cambio de segundo orden es constante, lo cual corresponde a una función cuadrática.

Modelos en el nivel referencial

En este nivel los estudiantes reconocen algunos aspectos de la variación de la recaudación mensual que se obtiene por el incremento que se le hace a la cuota, dando cuenta del **cómo** y el **cuanto varía**. Las **características** que identifican de la variación son:

(1) La **relación de correspondencia unívoca** entre los valores de las variables: establecen que a cada valor de incremento le corresponde un único valor de recaudación mensual.

(2) Los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de la variación: para los valores de 0 a 7 de incremento, la recaudación aumenta y para los demás, disminuye.

(3) El **valor máximo**: la ganancia máxima, de entre todas las que se pueden obtener luego de variar el incremento, se alcanza cuando se incrementa $\$7$ a la cuota y se adquiere una recaudación de $\$7396$.

(4) La **simetría de los valores**: en el intervalo de los valores de incremento 0 a 14, los valores de recaudación son simétricos con respecto al valor de la recaudación máxima (cuando el incremento es 7).

(5) El **tipo de curva:** la gráfica de la variación analizada, es una parábola.

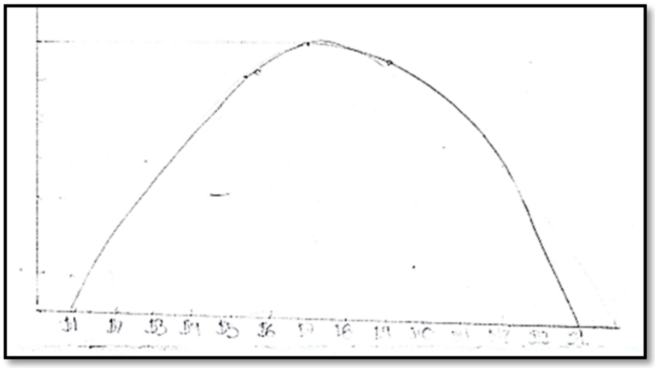
(6) **Medición del cambio y del cambio de segundo orden**: calculan las restas (primeras y segundas diferencias) correspondientes para medir el cambio y el cambio de segundo orden de los valores de la recaudación mensual.

(7) El **comportamiento del cambio de segundo orden:** identifican que el comportamiento del cambio de segundo orden de la variable recaudación mensual es constante, con valor 2.

Estas características del proceso de variación, las identificaron con la ayuda de dos **modelos** que ponen en juego en este nivel, **tabular** (modelo 2.2) y **gráfico** (modelo 2.3). El modelo tabular se caracteriza por organizar los datos, en la que evidencia la relación de correspondencia unívoca entre los valores de las variables de la situación, como son el incremento a la cuota y la recaudación mensual. El modelo gráfico se caracteriza por expresar dicha relación de correspondencia, como un conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x representa el incremento a la cuota y $f(x)$ la recaudación mensual. Estos puntos los representaron en un sistema de coordenadas cartesianas. Estos modelos se expresan en términos del contexto de la situación y además permiten dar descripciones de la variación cuadrática (cómo y cuánto varía), así como de los conceptos implicados (la curva que la describe es una parábola), por lo que dichas producciones son "**modelos de"** la situación que les dio origen.

	Costo	Personas	Precios
1	79	93	7347
2	80	92	7360
3	81	91	7371
4	82	90	7380
5	83	89	7387
6	84	88	7392
7	85	87	7395
8	86	86	7396
9	87	85	7395
10	88	84	7392
11	89	83	7387
12	90	82	7380
13	91	81	7371
14	92	80	7360
15	93	79	7347

Modelo 2.2. Tabular.



Modelo 2.3. Gráfico.

Las características reconocidas en este nivel, son aspectos que contribuyen a la comprensión de una función cuadrática, desde una perspectiva variacional. Se observó que tanto los modelos, como las reflexiones dadas por los estudiantes en S2 para este nivel, se dotaron de más agudeza matemática, en comparación con las de S1. Esto evidencia que el aprendizaje se está dando de forma gradual, tal como lo establece la EMR.

4.2.3. Nivel general

En este nivel en equipo, los estudiantes arribaron a una **expresión algebraica** que expresa la *regla de correspondencia unívoca* entre las variables: incremento a la cuota y recaudación mensual. Destaca en este nivel y en esta situación, que identifican a la expresión como una *fórmula*. Además, que dicha fórmula expresa una *relación especial entre esas variables*, y concluyen que es la fórmula de una *función*. Algunos simbolizan a la función en términos de y como E1 (figura 4.34a), otros, en términos de $f(x)$ como E2 (Figura 4.34b). Arriban a esta expresión algebraica a partir de que se les preguntó en S2, cómo se puede determinar la cantidad de recaudación, si se conoce la cantidad de incremento a la cuota. Bajo esta cuestión, los estudiantes *generalizan* PF, pues reconocen que el valor de incremento, puede ser representado con una variable matemática (x). Y que PF pueden expresarlo en términos de x mediante una relación (o fórmula), como lo hicieron E1 y E2. Los cinco equipos dieron muestra de la generalización de PF.

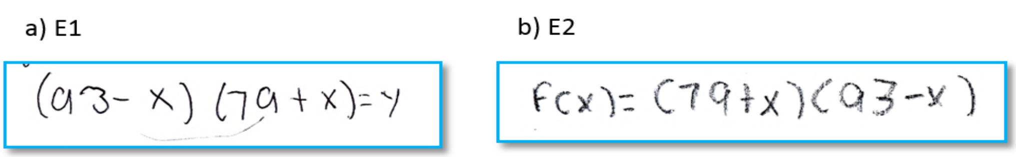


Figura 4.34. Expresiones obtenidas en equipo.

En la discusión grupal A5 es quien compartió la expresión algebraica a la que arribó su equipo, la cual expresa la relación entre las variables (figura 4.35). Explicó al resto de sus compañeros (renglones del 362 a 364) el significado de cada término. Así, les hizo saber que $f(x)$ es la función, y que $79 + x$ representa el costo mensual de la cuota, que $93 - x$ es el total de socios (o número de socios).

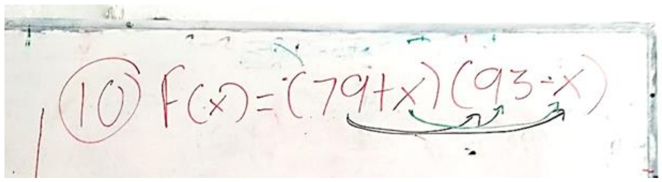


Figura 4.35. Expresión algebraica compartida por E2.

[…]

[362] *A5 (E2):* *Con mi equipo llegamos a una conclusión y sacamos una solución…sería…para determinar… más fácilmente… y eficazmente… el resultado…*

[…]

[364] *A5 (E2):* *en su lenguaje… esta fórmula se expresaría de la siguiente manera... <u>$f(x)$ es la función</u>…<u>79 viene representando el principio o inicio del costo mensual de la renta de películas más x</u>… <u>que esta x representa el aumento mensual</u>… que sería de $\$1, \$2, \$3$ de lo que sea por mes… y <u>a 79 si le sumamos x</u>… <u>nos quedaría el costo mensual de la cuota que depende de los pesos que le sumemos al mes</u>… y este resultado nos daría… el costo de la cuota… <u>lo multiplicaríamos por el resultado de 93 menos x</u>… <u>que 93 viene representado el total</u>… <u>o el principio total de los socios que están rentando esas películas</u>… <u>y menos x</u>… <u>que x sería los socios</u>… que quitaron su membresía para ya no rentar… ¡y ya!.*

[…]

En el renglón 364, se observa que como parte de su aprendizaje gradual, los estudiantes *ya hacen uso del término función* (renglón 364), para hacer referencia a la expresión algebraica o fórmula que establece una regla de correspondencia unívoca entre variables, en esta situación entre las variables de incremento (x) y recaudación ($f(x)$ o y).

Modelos en el Nivel General

En este nivel el **conocimiento informal PF** forma parte fundamental para el proceso de generalización, pues a partir de éste, los estudiantes obtuvieron una **expresión (o fórmula) algebraica** que organiza la variación analizada, la cual reconocieron como una **función**.

En este nivel los estudiantes identifican:

e) Que el **incremento a la cuota** puede ser expresado en términos de $\boldsymbol{x}$.
f) Que el término $(79+x)$ de PF expresa el **costo de la cuota** y $(93-x)$ el **total de socios**.
g) Que **la recaudación** para cierto incremento se puede determinar mediante la expresión $f(x)=(79+x)(93-x)$ o bien $y=(79+x)(93-x)$
h) A la **expresión (o fórmula**) anterior como **una relación especial entre las variables**, y como una **función**.

La expresión (o fórmula) matemática a la que arribaron los estudiantes, es un **modelo algebraico obtenido por PF** (modelo 2.4) que se ubica en este nivel y que se caracteriza por ser una fórmula que expresa la regla de correspondencia unívoca entre dos variables. Este modelo constituye ser un **"modelo para"** resolver otras situaciones de variación que presenten las mismas características, debido al carácter general con que es denotado.

$$\boxed{F(x) = (79+x)(93-x)}$$

Modelo 2.4. Modelo algebraico obtenido por PF.

4.2.4. Nivel formal

En la discusión grupal de los modelos a los cuales arribaron los estudiantes en S2, como son la tabla, el gráfico y el algebraico, se obtuvo mayor comprensión del concepto matemático en cuestión, la *función cuadrática,* que el alcanzado en S1. En la figura 4.36 se muestra los modelos compartidos por los estudiantes en el pizarrón.

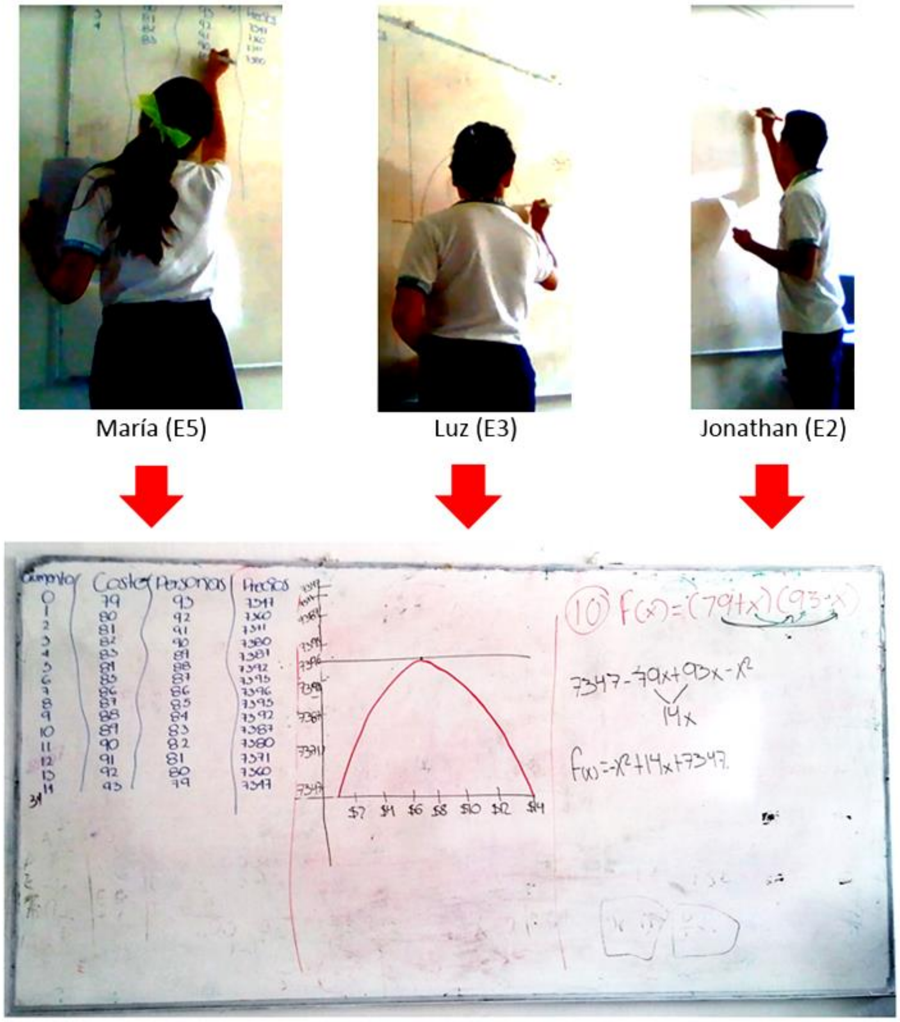


Figura 4.36. Modelos compartidas por los equipos E5, E3 y E2.

Entre las discusiones que se desprenden de dichos modelos, a nivel grupal, es que la gráfica es una **parábola**, y además, que representa una **función cuadrática**. A partir de esta conclusión, A7, integrante de E3, intervino para decir que en su equipo, se dieron cuenta de que la expresión algebraica no mostraba o evidenciaba el **término cuadrático**. Por ello, desarrollaron dicha expresión, y es así como identificaron ese término. La figura 4.37 muestra el procedimiento que A7 (E3) compartió en la pizarra para dar cuenta del término cuadrático en la expresión y en el renglón 395 la explicación que dio.

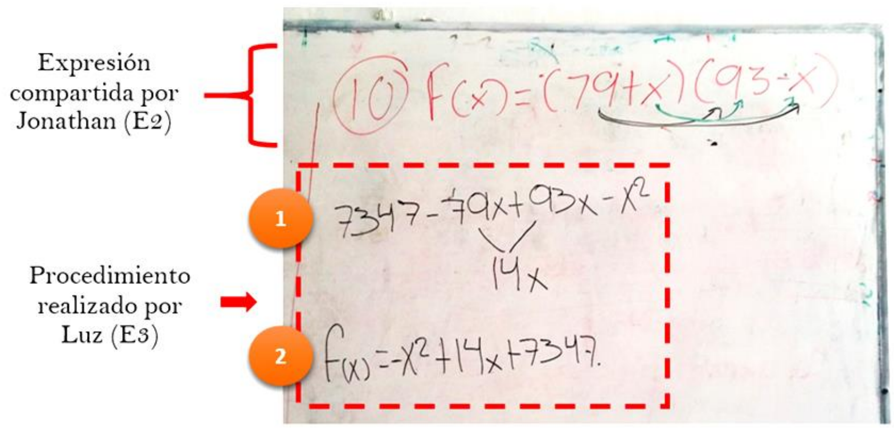


Figura 4.37. Procedimiento realizado por A7 (E3) para determinar el término cuadrático.

[…]

[395] *A7 (E3):* *Profesor está bien, es que yo la deshice (señala la expresión indicada con 1)… luego sumé estos (señala los términos lineales de la expresión indicada con 1) y me quedó esta expresión (señala la expresión indicada con 2)…<u>aquí está el término cuadrático (señala el término cuadrático en 2)… que era el que buscaba… porque como hice la gráfica y me dio una parábola entonces la expresión que me debe quedar… debe ser cuadrática</u>.*

[…]

La función cuadrática a la que arribó A7 (E3) luego de desarrollar la expresión algebraica expuesta en el pizarrón por A5 (E2), resulta expresar la misma función pero en su forma desarrollada o polinómica. En la cual se deja en evidencia el término cuadrático. Este procedimiento, permite que los estudiantes identifiquen a la función cuadrática como el producto de dos cantidades que varían linealmente (Villa-Ochoa, 2008), aspecto que contribuyo al entendimiento de dicho concepto desde una mirada variacional.

El profesor, en conjunto con los estudiantes, hizo una conclusión de S2 (como de S1) donde se resaltaron tanto las características como las representaciones que se le atribuyeron a la función cuadrática. En el episodio de la discusión (renglón 405 a 410) se evidencia la conclusión que el profesor, A5 (E2) y A2 (E1) exponen al grupo. Las características (renglón 405 a 406) que resaltaron de la función cuadrática son: la presencia de un máximo o mínimo, el aumento/disminución o disminución/aumento de los valores, la simetría de los valores y que su segunda diferencia entre los valores dependientes fue constante. Y las representaciones (renglón 408 a 410) como tabla, gráfica y algebraico.

[…]

[405]	*P:*	*Entre las características se observan las mismas que habíamos visto en la primera situación… sólo que aquí se complementan… para una función cuadrática… en primer lugar tienen un máximo o un mínimo… segundo es que sus valores aumentan y disminuyen… o disminuyen y aumentan… tienen sus valores simétricos… ¿qué otra cuestión?*
[406]	*A5 (E2):*	*Sus segundas diferencias son constantes.*
[407]	*P:*	*¿Qué otra cosa?*
[408]	*A2 (E1):*	*Su gráfica es una parábola…*
[409]	*A5 (E2):*	*… ya que es una función cuadrática.*
[410]	*P:*	*Sí... es una función cuadrática la que representa la variación que analizamos… vimos sus diferentes representaciones, como tabla, gráfica y algebraico.*

[…]

Modelos en el nivel formal

En este nivel son los estudiantes quienes hacen mención de conceptos y procedimientos matemáticos, tales como que la gráfica que describe la variación analizada es una **parábola** y que representa una **función cuadrática**.

Entre las características que reconocieron de la función cuadrática, son:

(1) **Valor máximo o mínimo**: tiene un valor máximo o mínimo.
(2) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento**: los valores en cierto intervalo crecen/decrecen o decrecen/crecen.
(3) **Simetría de los valores**: sus valores son simétricos.
(4) **Tipo de curva:** una parábola.
(5) **Comportamiento del cambio de segundo orden**: las segundas diferencias (cambio de segundo orden) son constantes.
(6) **Sus diferentes representaciones**: tabular, gráfico y algebraico (forma factorizada y desarrollada).

Un **modelo matemático** que se ubica en este nivel, subyace al desarrollo de la expresión algebraica obtenida en el nivel general, el cual se caracteriza por expresar a la función cuadrática en su forma desarrollada o polinómica, de ahí que se le denomina, **Forma Desarrollada de la Función Cuadrática (modelo 2.4).**

$$F(x) = x^2 + 14x + 7347.$$

Modelo 2.4. Forma Desarrollada de la Función Cuadrática.

Este procedimiento no se observó en S1, se infiere que quizá fue porque al momento de su desarrollo, no se había caracterizado a la función cuadrática, por tanto no se les hizo necesario evidenciar el término cuadrático para afirmar si corresponde o no ha dicho tipo de función.

Se evidencia con S2 que el aprendizaje de la función cuadrática llegó a niveles más altos de comprensión en los estudiantes que en S1, pues se observa en sus reflexiones el uso del término función cuadrática para referirse al cómo varían los valores de la variación analizada, así como de sus características y de sus representaciones.

Se concluye que en conjunto con S1 y S2 se promovió en los estudiantes un aprendizaje gradual de dicho concepto desde una perspectiva variacional, en donde en cada situación se observaron diferentes niveles de comprensión del mismo.

4.3. Aspectos matemáticos –transversales– presentes en la actividad de los estudiantes al matematizar las situaciones

En la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, se tuvo la presencia de aspectos matemáticos –transversales– que contribuyeron en la misma. Se distinguieron aspectos como: *tipos de razonamiento, procedimientos, aspectos conceptuales, herramientas* y expresiones *matemáticos*.

El *razonamiento matemático* que prevaleció en los estudiantes fue el inductivo. Este fue inducido por los cuestionamientos de las situaciones, que dieron lugar a que en primer término, reconocieran un comportamiento en los valores de las variables, mientras analizaban casos particulares. Al observar que se verificaba en varios casos, lo generalizaron para todos los demás que cumplían con las mismas características. Expresaron ese comportamiento algebraicamente. Muestra de ello, son los modelos aritméticos usados por los estudiantes para expresar las relaciones matemáticas (TP, DA y PF) entre los datos conocidos y desconocidos de las situaciones, los cuales fueron la base para expresar los modelos algebraicos que generalizaban las variaciones analizadas.

Los *procedimientos matemáticos* que los estudiantes realizaron se articularon al teorema de Pitágoras, diferencia de áreas (de cuadrados y triángulos), producto de factores y del cálculo de diferencias (medición del cambio y del cambio de segundo orden). Estos procedimientos permitieron a los estudiantes arribar a la expresión algebraicamente que explica el comportamiento de la variación de una variable con respecto a otra. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, apareció como un medio para determinar los lados de un cuadrado inscrito en otro. Ya que los lados de dicho cuadrado son a la vez la hipotenusa de cuatro triángulos rectángulos congruentes, formados entre los lados de esos dos cuadrados. Ello favoreció a la vez, la explicación del comportamiento de la variación del área de cuadrados inscritos en el circunscrito.

En la actividad matemática, ya sea explícita o implícitamente, los estudiantes se refirieron a *conceptos* como: catetos e hipotenusa de triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, diferencia de áreas, área de cuadrados y triángulos, reconocimiento de patrones, factores de un producto, parábola, función cuadrática y la factorización.

Las *herramientas matemáticas* usadas por los estudiantes para organizar y resolver las situaciones, se identifican como modelos matemáticos que explican el comportamiento de la variación entre dos variables relacionadas. Los modelos construidos fueron el geométrico, aritmético, tabular, gráfico y algebraico. Por ejemplo, el gráfico (figura 4.38) se usó en la situación *cuadrados y áreas* para explicar el comportamiento de la variación de le medida del área de un cuadrado inscrito en otro, que se genera al modificar la medida de la distancia AE. Ello mediante un sistema de coordenadas cartesianas.

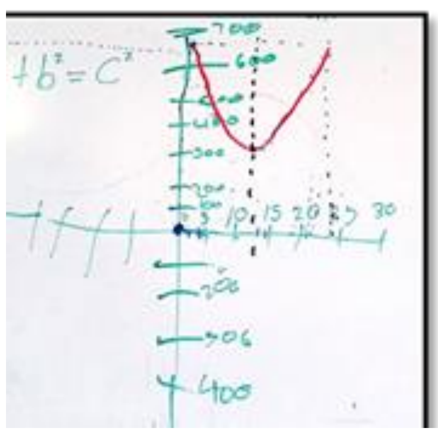


Figura 4.38. Modelo gráfico usado en la situación *cuadrados y áreas.*

Algunas *expresiones matemáticas* que evidenciaron los estudiantes durante su actividad matemática, son:

1) $a^2 = b^2 + c^2$
2) $\frac{b\ x\ h}{2}$
3) lxl
4) $f(x) = x^2 + (a - x)^2$
5) $f(x) = a - \left[\frac{bx(c-x)}{2}\right]$
6) $f(x) = (x + a)(x - b)$
7) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Las expresiones enumeradas del 4 al 7 representan funciones cuadráticas, que la investigadora presentó en su forma general para hacer alusión a las diferentes maneras de expresión algebraica que los estudiantes establecieron sobre ese tipo de funciones.

Los aspectos matemáticos resaltados, dieron cuenta de que los estudiantes ante la necesidad de interpretar, organizar y explicar las situaciones de variación con contexto realista, de manera transversal pusieron en juego conocimiento matemático previo relativo a la Aritmética, al Álgebra, a la Geometría Plana y la Analítica. He aquí la presencia de un principio fundamental de la EMR, el *de interconexión*, que establece que los ejes de contenidos de aprendizaje, no pueden ser tratados como entidades separadas, dado que el estudiante al resolver un problema mediante sus propias estrategias puede hacer uso de otros ejes de contenido (Santamaria, 2006). Este principio se diferencia del conocimiento matemático informal, porque se refiere a todos los aspectos matemáticos que contribuyen en la actividad de los estudiantes, mientras que la matemática informal se asocia únicamente al conocimiento usado en un primer momento para estructurar matemáticamente el contexto de la situación, tal como fueron TP, DA y PF.

Capítulo 5

Discusión de los Resultados

5.1. Introducción

Esta investigación se interesó por caracterizar el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contexto realista, en el marco de la función cuadrática. Para el logro del objetivo, se llevaron las acciones siguientes: a) se diseñaron dos situaciones de variación en el marco de la función cuadrática y la forma de organizar el aula, b) se anticiparon (análisis preliminar) los modelos matemáticos, así como las reflexiones que los estudiantes llevarían a cabo en torno al proceso de solución, y; c) se analizó y caracterizó el proceso de matematización desarrollado por los estudiantes en el contexto de las situaciones. Todo ello, tal como se establece en la EMR, perspectiva teórica que sustenta este trabajo. Esta perspectiva, se fundamenta de seis principios, referidos a la forma en cómo las matemáticas son vistas, cómo las aprenden los estudiantes y cómo se les debe enseñar.

5.2. Consideraciones para el diseño de las situaciones y de la forma de organizar el aula

El diseño de las dos situaciones de variación en el marco de la función cuadrática y de la forma de organizar el aula, tomó como base los requerimientos establecidos por la EMR, como son: a) un análisis fenomenológico didáctico de la función cuadrática, y; b) los seis principios fundamentales: de realidad, de actividad, de reinvención guiada, de interacción, de interconexión y de niveles de comprensión.

5.2.1. Análisis fenomenológico didáctico de la función cuadrática

El análisis fenomenológico didáctico, se basa en el estudio de los fenómenos que en la historia y actualidad se han mostrado con la necesidad de ser organizados matemáticamente en el marco de función cuadrática. Los trabajos de Mesa y Villa-Ochoa (2008) y Huapaya (2012) fueron base para distinguir que tanto en la historia, como en la actualidad ha existido interés por el estudio de fenómenos asociados al movimiento de un cuerpo u objetos, área máxima-mínima, oferta y demanda, costo-ingreso, utilidad, entre otras, a través de procesos de variación. Los que pueden ser interpretados y explicados mediante la función cuadrática, en la cual la segunda tasa de variación de las dos variables inmersas, es una constante; o de otra manera, en aquella función en la cual el cambio de segundo orden, es constante.

El diseño consideró dos situaciones. Una, en el contexto de un fenómeno asociado a la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la longitud de la distancia entre los vértices del primero respecto del segundo. Ello, con el propósito de reconocer el cuadrado inscrito de área mínima y como fin último, determinar el modelo matemático que explica los procesos de variación asociados. La segunda situación involucró el estudio de un fenómeno relativo a la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club por el incremento que le hace a la cuota mensual que cobra a sus socios. A partir de ello, se reconoce el monto de la recaudación máxima, y se obtiene el modelo matemático que organiza esa variación. Los contextos contemplados en las situaciones, se reconocen como realistas (ver apartado 5.2.2).

La función cuadrática como modelo que explica procesos de variación de los fenómenos objeto de estudio en las situaciones, dio paso a la revisión de la didáctica de dicha función desde una mirada variacional. En el diseño de estas situaciones esta revisión se reflejó en las cuestiones planteadas (también preguntas guía), pues ubicaron a los estudiantes a dar respuesta (tal como propone Dolores, 2013), al qué, cómo y cuánto varía *eso que varía,* en las variaciones establecidas. Además, se admitió una interpretación de la función cuadrática desde esa mirada, ajustada a partir de la propuesta por Villa-Ochoa (2008). La caracterización hecha es:

> ***Función cuadrática.*** *Relación unívoca entre dos magnitudes variables cuyo cambio de segundo orden (o cuya segunda tasa de variación), es una constante.*

5.2.2. Los seis principios fundamentales

a) Principio de realidad

El principio de realidad se articuló a los contextos de las situaciones, pensados como aquellos cercanos a la realidad de los estudiantes, en el sentido de la EMR. Ello, a fin de que pudiesen imaginarlas y realizarlas, haciendo uso de modelos matemáticos, acompañados de explicaciones con sentido y significado en el contexto analizado.

Su importancia, se evidenció en que los contextos realistas favorecen que los estudiantes pusieran en juego conocimiento informal, así como conocimiento de lo variacional; y de forma paulatina construyeran conocimiento matemático formal de lo cuadrático, en particular, la función cuadrática.

b) Principio de actividad

El principio de actividad se relacionó con la actividad de analizar el comportamiento de los procesos de variación de S1 y S2. Lo cual provoca a analizar el qué, el cómo y el cuánto varía, *eso que varía* en cada situación.

Este análisis suscitó en los estudiantes una mayor comprensión del concepto función cuadrática, pues las características y representaciones matemáticas que se le asocian, tienen explicación en los contextos de S1 y S2.

c) Principio de reinvención guiada

Este principio se manifestó a través de los roles del estudiante y del profesor, así como de las interacciones promovidas en el aula. El rol del estudiante consistió en ser los actores de su propia actividad matemática, siendo ellos los que deciden (a nivel de equipo) qué herramientas, procedimientos y construcciones matemáticas usan para organizar o estructurar las situaciones de variación, y así dar soluciones a las cuestiones planteadas.

El rol del profesor se basó en estar atento a sus reflexiones y al uso de sus herramientas matemáticas, con el propósito de generar y guiar espacios de discusión y diálogo a nivel grupal. Con las intervenciones grupales, se hace más social y constructivo el aprendizaje en el aula, pues los estudiantes son convocados a interactuar entre equipos, explicar y justificar sus procedimientos, acordar o disentir sobre sus ideas y modelos matemáticos construidos, cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas para dar lugar a cambios de niveles de comprensión de los modelos.

d) Principio de niveles de comprensión

Los niveles de comprensión –situacional, referencial, general y formal– más que describir en forma exacta qué pueden hacer los estudiantes en cada uno, posibilitan seguir sus procesos globales de aprendizaje de la función cuadrática (Bressan y Gallego, 2011). Este principio se evidenció en la conjunción de las situaciones y de la forma de organizar el aula. En las situaciones se miró al permitir que los estudiantes comiencen matematizando un contexto de la realidad, luego analicen el comportamiento del proceso de variación implicado; y con ello reconozcan la matemática involucrada, la función cuadrática. En la forma de organizar el aula, se observó durante los momentos de interacción en equipo y grupal, que favoreció la discusión de los modelos construidos y las reflexiones generadas en la solución de las situaciones, admitiendo cambios de niveles de comprensión de los modelos en los estudiantes, transitando de modelos asociados al contexto de las situaciones de variación, hasta alcanzar los más formales de la matemática, asociados con la función cuadrática.

e) Principio de interacción

El principio de interacción se manifestó de dos maneras en el aula, *en equipo* y *la grupal*. La de en equipo, se desarrolló en grupos de tres estudiantes, donde interactuaban y decidían que estrategias iban a usar en la resolución de la situación. La grupal, se desenvolvió mediante plenarias, en las que se favoreció la discusión de toda la clase y el trabajo en grupo. Esta interacción ofreció a los estudiantes la oportunidad de compartir y discutir sus ideas y estrategias con los demás.

Se reconoce que las *interacciones grupales* favorecieron discusiones y reflexiones entre los estudiantes, a su vez, que convergieran en procedimientos y herramientas. Puesto que su actividad en equipo evidenció tanto el uso de modelos matemáticos diferentes como de ritmos de trabajo.

f) Principio de interconexión

El principio de interconexión se asoció en la actividad de los estudiantes, pues ante la necesidad de organizar o estructurar matemáticamente las situaciones, pudieron intervenir de manera transversal –además del concepto función cuadrática– tipos de razonamiento, procedimientos, aspectos conceptuales, herramientas y términos matemáticos (ver apartado 4.4 de este documento), que fueron temas de Aritmética, Álgebra, Geometría Plana y Geometría Analítica.

5.3. Análisis preliminar

El análisis preliminar, anticipo qué modelos matemáticos emergerían en las explicaciones de los estudiantes en el proceso de solución de las situaciones de variación, así como de reflexiones que llevarían a cabo en torno a ello. Se organizó por formas de matematización y por niveles de comprensión. En la tabla 5.1 se muestran los modelos que se anticiparon por situación. Esta misma organización se siguió para la presentación de la caracterización del proceso de matematización desarrollado por los estudiantes. Este análisis, permitió inferir que S1 y S2 podían solucionarse por varias vías y modelos matemáticos.

Las reflexiones que se previeron se centraron al qué, cómo y cuánto varía *eso que varía,* en cada proceso de variación analizado (S1, S2).

	Análisis Preliminar. Modelos anticipados	
Formal	• Desarrollado de la función cuadrática	• Desarrollado de la función cuadrática
General	• Algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 2) • Algebraico obtenido por recomposición de la figura (forma 1) • Algebraico obtenido mediante teorema de Pitágoras • Algebraico obtenido mediante diferencias de áreas	• Algebraico
Referencial	• Gráfico • Tabular	• Gráfico • Tabular
Situacional	• Aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 2) • Aritmético obtenido por recomposición de la figura (forma 1) • Aritmético obtenido mediante el teorema de Pitágoras • Aritmético obtenido mediante diferencias de áreas • Geométrico	• Aritmético procedimental
	S1. Cuadrados y áreas	**S2. Promoción de un video club**

Matematización Vertical

Matematización Horizontal

Tabla 5.1. Modelos anticipados del análisis preliminar.

5.4. Proceso de matematización desarrollado por los estudiantes

El proceso de matematización desarrollado por los estudiantes, se analizó y caracterizó considerando los modelos anticipados (descritos en el análisis preliminar) y los principios fundamentales de la EMR. En ese proceso, se reconocieron aspectos clave como: a) conocimientos matemáticos informales, b) modelos matemáticos, c) Reflexiones estudiantiles, sobre el comportamiento de una variable en dependencia de otra, y; d) las formas de matematización.

5.4.1. Conocimiento matemático informal

El conocimiento matemático informal puesto en juego por los estudiantes se articuló a tópicos de Aritmética, el Álgebra, Geometría Plana y Geometría Analítica. Lo usaron como herramienta para interpretar, esquematizar y dar soluciones particulares a las situaciones.

Entre los conocimientos informales identificados como base de toda su actividad para cada situación, fueron:

S1. Teorema de Pitágoras (TP) y Diferencias de Áreas (DA).

S2. Producto de Factores (PF).

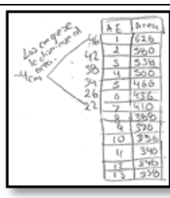
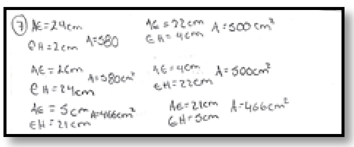
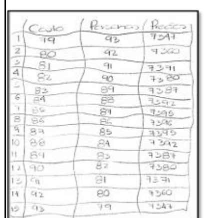
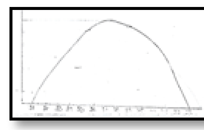
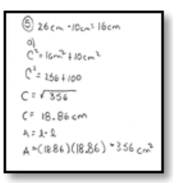
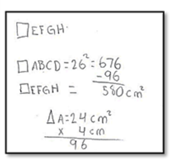
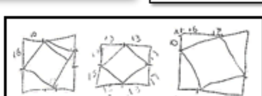
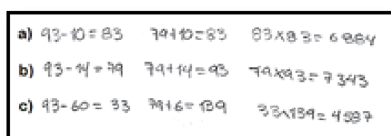
La naturaleza de este tipo de conocimientos, estuvo vinculada con el contexto y con la manera en cómo se planteó cada situación. Evidencia de ello, fueron los usados en el proceso de solución de la situación *Cuadrados y áreas* (S1, expresada en un contexto geométrico), pues TP y DA, fueron el medio por el cual lograron establecer relaciones matemáticas desde un contexto geométrico, entre los datos conocidos y desconocidos de la situación, como fueron las medidas de los lados y de las áreas de figuras geométricas. Dichas relaciones las expresaron aritméticamente para dar soluciones cuantitativas de casos particulares; y finalizaron con sus expresiones algebraicas que generalizaban su procedimiento.

Las relaciones matemáticas que establecieron los estudiantes con TP, DA Y PF, según la situación donde se usó, fueron:

a) TP, para el caso de S1, fue usado al reconocer geométricamente que los lados del cuadrado inscrito eran a la vez la hipotenusa de los cuatro triángulos rectángulos congruentes, formados con los lados de ambos cuadrados. Entonces, el problema del cálculo del área del cuadrado inscrito lo redujeron a determinar el valor de la hipotenusa elevada al cuadrado.
b) DA, en S1, lo usaron al reconocer geométricamente, que el área del cuadrado inscrito podía determinarse mediante la diferencia entre la medida del área del cuadrado circunscrito y de los cuatros triángulos rectángulos adyacentes, los cuales identificaron que son congruentes.
c) PF, para el caso de S2, lo usaron al momento en que reconocieron que la recaudación mensual podía determinarse mediante el *producto entre el costo de la cuota y el número de socios,* cada que se daba un cierto incremento. El primero, resultaba de sumarle al costo inicial el valor de un incremento; y el segundo, lo obtuvieron de restarle al número de socios inicial, el valor del incremento.

5.4.2. Modelos matemáticos

Matematización Vertical

	Función cuadrática		
Formal		$F(x) = x^2 + 14x + 7347$. Construyen el *modelo en su forma desarrollada o polinómica de la Función Cuadrática*, al identificarla como la función que permitió modelar el proceso de variación implicado. Este modelo se generó con base en el modelo del nivel anterior.	**Modelos asociados al conocimiento matemático formal**
General	$A(x) = x^2 + (26-x)^2$; $A(x)\ 676 - \left[\left(\frac{x(26-x)}{2}\right)(4)\right]$ Construyen *modelos algebraicos* para explicar el comportamiento de la variación de una variable con respecto a otra, ello al generalizar los modelos anteriores.	$F(x) = (79+x)(93-x)$ Construyen el *modelo algebraico* para explicar el comportamiento de la variación de una variable con respecto a otra, ello al generalizar los modelos anteriores.	**Modelos para resolver otras situaciones**
Referencial	   Construyen los *modelos listado de valores, tabular* y *geométrico* tanto para organizar las parejas de valores de las variables del contexto de la situación, como para dar explicaciones de su comportamiento.	  Construyen los *modelos tabular* y *geométrico* tanto para organizar las parejas de valores de las variables del contexto de la situación, como para dar explicaciones y argumentaciones de su comportamiento en comparación con S1.	**Modelos de la situación**
Situacional	   Construyen el *modelo geométrico* y el *aritmético* tanto para esquematizar y establecer las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del contexto de S1, como para obtener casos particulares de los valores de las magnitudes variables.	 Construyen un *modelo aritmético* tanto para esquematizar y establecer las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del contexto de S2, como para obtener casos particulares de los valores de las magnitudes variables.	**Modelos que esquematizan y son cercanos al contexto de la situación**
	S1. Cuadrados y áreas	**S2. Promoción de un video club**	

Matematización Horizontal

Tabla 5.2. Modelos matemáticos construidos por los estudiantes
En su proceso de matematización de las situaciones.

Los modelos matemáticos construidos a lo largo de su actividad matemática, para reflejar los aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para las situaciones de variación, fueron: *el geométrico, aritmético, tabular, gráfico* y *algebraico (forma factorizada y desarrollada),* algunos de los modelos que construyeron se muestran en la tabla 5.2.

Al comparar los modelos construidos en S1 y S2 por nivel de comprensión, se observan diferencias en su uso (ver tabla 5.2). En el nivel referencial por ejemplo, el modelo gráfico fue empleado en S1 para representar el comportamiento del proceso de variación del área del cuadrado inscrito en otro, al modificar la distancia entre los vértices A y E; en él observaron que se trataba de una variación cuadrática. En cambio en S2, fue usado tanto para representar el comportamiento del proceso de variación de la recaudación mensual al variar el incremento que se le hace a la cuota, como para evidenciar que se trataba de una variación cuadrática tal como sucedió en S1. Esto mismo sucede contrastando los demás modelos usados en S1 y S2.

5.4.3. Reflexiones estudiantiles, sobre el comportamiento de una variable en dependencia de otra

Las situaciones de variación provocaron en los estudiantes cuestionamiento en torno al qué, cómo y cuánto cambia, *eso que varía*. Con base en ello reconocieron para cada cuestión, los aspectos siguientes:

¿Qué varía?

(1) Las *magnitudes variables* del contexto
(2) La *relación de dependencia* entre las dos variables
(3) El *intervalo de variación* de la variable independiente
(4) El punto donde *el proceso de variación se hace cero (o se anula)*

¿Cómo varía?

(5) La relación y *regla de correspondencia unívoca* entre los valores de las variables
(6) El *valor máximo o mínimo* de la variación
(7) Los *intervalos de crecimiento y de decrecimiento* del proceso de variación

(8) La *simetría de los valores* del proceso de variación
(9) La *curva* de la variación, es una *parábola (que se abre hacia arriba o hacia abajo)*
(10) La *continuidad de los valores* de la variable independiente

¿Cuánto varía?

(11) *Medición del cambio y del cambio de segundo orden* (cálculo de las primeras y segundas diferencias, respectivamente)
(12) El *comportamiento del cambio de segundo orden*, es constante.

Estos aspectos formaron parte de las explicaciones y significados que sustentaron o acompañaron a los modelos matemáticos usados para analizar y resolver las situaciones.

5.4.4. Formas de matematización. Horizontal y Vertical

El proceso de *matematización progresiva* en la EMR, radica en que los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática. Este proceso se analizó (en el contexto de la EMR), bajo dos formas:

- ***Matematización horizontal***, consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.

- ***Matematización vertical***, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba y simbolización, con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En este proceso la EMR admite que los estudiantes pasan por cuatro *niveles de comprensión*: ***situacional, referencial, general y formal,*** unidos al uso de estrategias, modelos y leguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada (una explicación más amplia puede verse en capítulo 2).

Ubicándonos en el proceso de matematización desarrollado por los estudiantes al modelar situaciones de variación asociadas al concepto de función cuadrática, el trayecto que siguieron en su proceso constructivo de aprendizaje, se caracterizó como sigue:

a) **Matematización horizontal.** Partieron de contextos realistas de situaciones de variación, asociado a conocimiento matemático informal en el sentido de la EMR (TP, DA Y PF) y modelos matemáticos (como el geométrico y aritmético) para organizar los procesos de variación analizados. Con base en ellos, reconocieron el **qué varía** en ese proceso. Así también, determinaron algunos valores de las variables involucradas. Esta forma de matematización reconocida en los estudiantes, desde la EMR queda caracterizada en el nivel situacional (véase tabla 5.3).

b) **Matematización vertical.** El proceso de matematización progresiva bajo esta forma, permitió reconocer que los estudiantes se centraron a analizar el **cómo varía** y **cuánto varía** *eso que varía* en cada proceso de variación (S1 y S2), dando paso tanto al uso de modelos como al reconocimiento de las características de una variación cuadrática. Entre los modelo, destacan el tabular, gráfico y algebraico. Por cuanto a las características, reconocieron: un valor máximo o mínimo, valores simétricos, que la curva de la variación es una parábola, medición del cambio, entre otras. Todo ello, contribuyó a que se reconociera por los estudiantes, que las características y modelos obtenidos, se asociaban a la función cuadrática. Esta forma de matematización, desde la EMR queda caracterizada con los niveles referencial, general y formal (véase tabla 5.3).

La tabla 5.3 resume el proceso de matematización desarrollado por los estudiantes en cada situación (S1 y S2). Presenta *groso modo* procesos globales de aprendizaje bajo las dos formas de matematización y de los cuatros niveles de comprensión. Los niveles son usados como una guía para evidenciar dicho proceso, sin que ello signifique que éste haya sido lineal y/o jerárquico. Por el contrario, los resultados muestran que los procesos cognitivos de los estudiantes transitan por diferentes niveles, revelando que son dinámicos y no jerárquicos.

Matematización Vertical

	Función cuadrática		
Formal	Se identifica a la función cuadrática como una variación cuadrática, cuya gráfica que le corresponde es una parábola y reconocen las características de este tipo de funciones.	Se identifica a la función cuadrática como una variación cuadrática y reconocen sus características comparando con las determinadas en S1 y S2. Identifican que es la función cuadrática, la que permite modelar el proceso de variación implicado y obtienen el modelo de su forma desarrollada de la Función Cuadrática con base al modelo obtenido en el nivel anterior.	**Conocimiento matemático formal**
General	Se arriban a modelos algebraicos que generalizan los modelos anteriores y explican el comportamiento de la variación de una variable con respecto a otra. Los modelos los expresan como una relación especial entre variables.	Se identifica a la expresión como una fórmula que expresa una relación especial entre variables, que llaman función. Se arriban a modelos algebraicos que generalizan los modelos anteriores y explican el comportamiento de la variación de una variable con respecto a otra.	**Modelos para resolver otras situaciones**
Referencial	Se identifican las características y modelos de una variación cuadrática, interpretados en términos del contexto de la situación. Se reconoce *el cómo varía* (del 5 al 10) y *el cuánto varía* (11 y 12), eso que varía en la variación del área del cuadrado inscrito en otro, al modificar la distancia AE. Se construyen *modelos matemáticos* –listado de valores, tabular y geométrico– para organizar las parejas de valores de las variables de la situación y con base en ello dar explicaciones de su comportamiento.	Se identifican las características y modelos de una variación cuadrática, interpretados en términos del contexto de S2, en comparación de los reconocidos en S1. Se reconoce *el cómo varía* (del 5 al 9) y *el cuánto varía* (11 y 12), eso que varía en la variación de la recaudación mensual, cada que se le da un incremento a la cuota mensual. Se construyen *modelos matemáticos* –tabular y geométrico– para organizar las parejas de valores de las variables de la situación y con base en ello dar explicaciones y argumentaciones de su comportamiento en comparación con lo sucedido en S1.	**Modelos de la situación**
Situacional	Se reconoce *el que varía* (del 1 al 3)[6] de la variación del área del cuadrado inscrito en otro, al modificar la distancia AE. Se construyen *modelos matemáticos* –geométrico y aritmético– para esquematizar y establecer las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del contexto de la situación que ayuden a obtener casos particulares de los valores de las magnitudes variables de la situación. Se usa *conocimiento matemático informal* –TP y DF– como medio para establecer relaciones entre datos conocidos y desconocidos del contexto de la situación.	Se reconoce *el que varía* (1 al 4) de la variación de la recaudación mensual obtenida por el incremento que se le hace a la cuota mensual de los socios Se construye un *modelo matemático* –aritmético– para esquematizar y establecer las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del contexto de la situación para obtener casos particulares de los valores de las magnitudes variables de la situación. Se usa *conocimiento matemático informal* –PF– como medio para establecer relaciones entre datos conocidos y desconocidos del contexto de la situación.	**Conocimiento informal y modelos para esquematizar el contexto**
	S1. Cuadrados y áreas	**S2. Promoción de un video club**	

Matematización Horizontal

Tabla 5.3. Resumen del proceso de matematización desarrollado por los estudiantes al modelar las situaciones de variación.

[6] Se hace referencia a los números que corresponden a los aspectos de variación ubicados en el apartado 5.4.3, analizados en cada situación.

5.5. Proceso de matematización: estudio empírico vs teoría

Los resultados del estudio empírico permitieron describir el proceso de matematización (tabla 5.3) desarrollado por estudiantes al modelar las situaciones. En contraste con el esquema que en la teoría de la EMR reporta sobre el proceso de matematización (figura 5.1), se observa que los niveles de comprensión de la figura, se muestran como entidades separadas "cuyo pasaje está favorecido por la reflexión sobre los logros del nivel anterior" (Bressan y Gallego, 2011, p.7). Esto deja en un segundo plano el dinamismo entre los niveles, observado en la actividad de los estudiantes. De ahí que se propuso una re-organización del esquema con base en el estudio empírico.

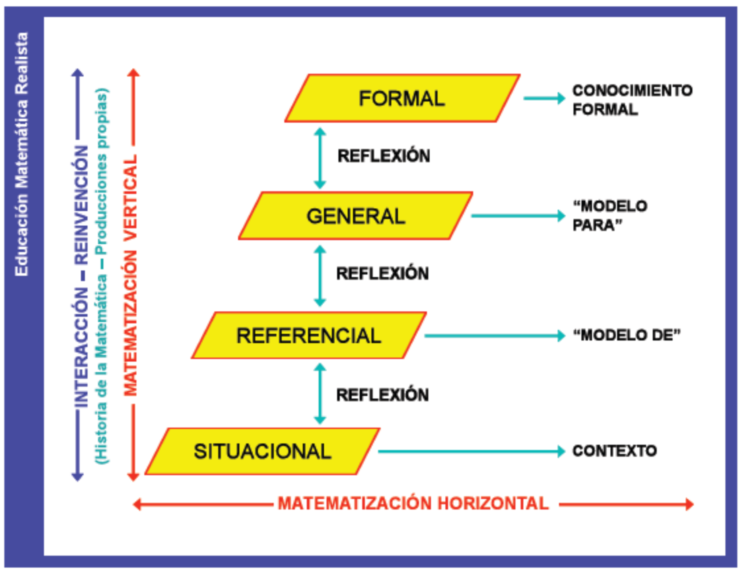


Figura 5.1. Esquema del proceso de matematización progresiva en la EMR tomado de Bressan y Gallego (2011).

El estudio empírico da evidencia de que son las *reflexiones, las interacciones, la guía del profesor, el tipo de contextos, el número de situaciones, los conocimientos previos y los modelos matemáticos,* los elementos que permiten alcanzar los niveles más altos de compresión de modelos. Los cuales estuvieron presentes en el proceso de matematización de los estudiantes, desde que comenzaron a interpretar y explicar las situaciones de variación con contexto realista, hasta que alcanzaron la formalización del conocimiento matemático en cuestión.

Se distingue que durante el desarrollo de las situaciones, los estudiantes se ubicaron en más de un nivel de comprensión a la vez. Por ejemplo, podían estar construyendo una expresión algebraica que generalice y exprese la regla de correspondencia unívoca entre las variables de la situación y explicarlo a la par con el conocimiento informal y con el contexto de la situación que le dió origen. Es por ello, que bajo el estudio empírico desarrollado, se propone un esquema (figura 5.2) del proceso de matematización en donde los niveles de comprensión se muestren uno dentro del otro, hasta alcanzar la formalización del conocimiento, y es cuando los estudiantes se desprenden del contexto de la situación.

En el esquema propuesto se resaltan además, estos dos mundos que coexisten cuando se habla de modelación matemática (Arrieta y Díaz, 2015), solo que a diferencia de lo planteado por estos autores, los *dos mundos* dentro del proceso de matematización tiene un instante donde *se separan o dejan de coexistir*, pues se tiene un interés particular de partir del mundo de situaciones con *contexto realista* hacia el mundo de la *matemática escolar*.

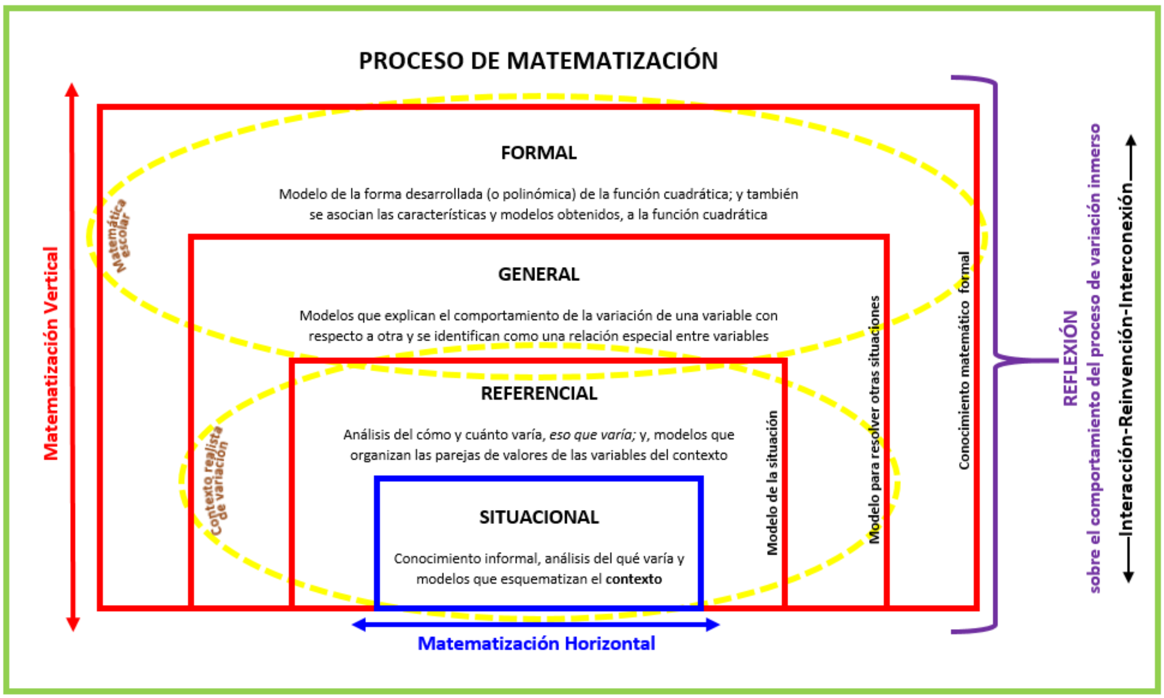


Figura 5.2. Esquema del proceso de matematización de situaciones de variación con contexto realista, propuesto bajo el estudio empírico.

5.6. Aporte del proceso de matematización de la función cuadrática en el ámbito escolar

La **modelación matemática** vista como un **proceso de matematización,** se considera que aporta como una vía para el desarrollo de competencias, así como para el aprendizaje de la función cuadrática en lo escolar, al ser compatible con algunos de los planteamientos del Programa de Estudios de Matemáticas IV del bachillerato en México:

a) **El tipo de situaciones de modelación propuestas**. Estas promovieron en los estudiantes el uso de *la matemática como una herramienta* para interpretar y explicar situaciones de variación con contexto realista, con el fin de dar resoluciones a los problemas o cuestiones planteadas. Estas situaciones, presentaron como trasfondo la construcción del concepto función cuadrática. La figura 5.3 indicado con 1 y 4 muestra la compatibilidad con el programa de estudios de Matemáticas IV de lo abordado sobre el concepto función cuadrática, de la realidad admitida y lo que promueven las situaciones propuestas en el estudio.

b) **Rol del profesor y del estudiante**. El rol del profesor fue de guía y mediador entre los estudiantes y las situaciones; entre los estudiantes entre sí y entre sus producciones matemáticas. El rol del estudiante fue como un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de situaciones reales, mediante la generación de *modelos matemáticos*. Estos roles se asemejan a los planteados con la nueva reforma educativa, parte de la evidencia se encuentra en la figura 5.3 indicado con el número 3.

c) **Transversalidad con las demás asignaturas de la matemática**. La modelación matemática promovida con las situaciones, favoreció que los estudiantes se valieran de sus conocimientos previos relativos a la Aritmética, el Álgebra, la Geometría Plana y la Analítica. En la figura 5.3 se indica con 2 y 4, las competencias a desarrollar que demanda el uso de algunos temas de sus cursos previos de matemáticas, así como el uso de situaciones reales hipotéticas con contextos de otras áreas disciplinarias.

d) **Promoción de competencias**. En conjunto con las situaciones de variación y la acción guiada del profesor, se promueve en los estudiantes al desarrollo de capacidades de interpretación y de explicación de la realidad usando como herramienta a la matemática, en un ambiente de interacción social. En la Figura 5.3 indicando con 2, 3 y 4, se señalan algunas competencias (genéricas y disciplinares) que en el curso de Matemáticas IV se deben abordar y que se desarrollaron en los estudiantes con el estudio empírico.

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
III	EMPLEAS FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADOS CERO, UNO Y DOS	10 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
Compara el modelo general de las funciones polinomiales con los de funciones particulares y/o determina si corresponden a dicha clase de funciones. Identifica la forma polinomial de las funciones de grados cero, uno y dos, así como sus gráficas respectivas. Determina si la situación corresponde a un modelo de grados cero, uno y dos, empleando criterios de comportamiento de datos en tablas, descripción de enunciados, tipos de gráficas y regularidades particulares observadas. Emplea los modelos lineales y cuadráticos para describir situaciones teóricas o prácticas que implican o no, razones de crecimiento o decrecimiento constante que se asocien con el modelo.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Modelo general de las funciones polinomiales.	Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta las habilidades previas para comprender el modelo general de las funciones polinomiales. 2
Forma polinomial de funciones de grados: cero uno y dos.	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de argumentos sustentados en una base bibliográfica.
Representación gráfica de funciones de grados: cero, uno y dos.	Propone soluciones a problemas a partir de modelos establecidos para las funciones de grados: cero, uno y dos. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos para resolver ejercicios de funciones de diferentes grados (cero, uno y dos). 3
Características de las funciones polinomiales de grados: cero, uno y dos. 1	Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad, valores, ideas y prácticas sociales, dentro y fuera del aula. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, y gráficos, para la comprensión y análisis de situaciones reales hipotéticas en donde se integren las distintas áreas (ciencias experimentales, sociales, económico-administrativo). 4
Parámetros de las funciones de grados: cero, uno y dos.	

Figura 5.3. Esquema del contenido del Bloque III de Matemáticas IV, retomado del programa de estudios de bachillerato (SEP, 2013, p. 23).

5.7. Futuras investigaciones

En este estudio abre camino para futuras investigaciones que se centren en:

a) Los tipos de razonamientos que los estudiantes usan en el proceso de matematización de la realidad y su implicación en el mismo.

b) El impacto que tiene el uso de la tecnología en los proceso de matematización de los estudiantes al modelar situaciones de variación con contexto realista.

c) Poner aprueba (o refinar) la caracterización del proceso de matematización obtenido en este estudio, pero ahora considerando situaciones con contextos de la realidad auténtica.

5.7. Reflexiones finales

El objetivo de la investigación fue caracterizar el proceso de matematización desarrollado por estudiantes de bachillerato al modelar situaciones de variación con contextos realistas en el marco de la función cuadrática. Los resultados obtenidos muestran que dicho proceso, se desarrolló de forma gradual, partiendo de los contextos realistas de las situaciones de variación hasta reconocer algunas características y representaciones asociadas a la función cuadrática, ello desde una mirada variacional. En ese proceso se identificó que S1 contribuyó en la realización de S2, pues en esta última se observan más reflexiones en torno al comportamiento de los valores de la variación, así como de los modelos matemáticos construidos, bajo la necesidad de evidenciar que el concepto matemático que está detrás es la función cuadrática.

El conocimiento matemático informal en la actividad de los estudiantes, estuvo asociado a aquel conocimiento previo que les permitió establecer relaciones matemáticas con los datos conocidos y desconocidos del contexto de la situación. Y el conocimiento matemático formal, se asoció con las características y representaciones matemáticas que dieron muestra del concepto función cuadrática desde una mirada variacional.

Los resultados alcanzados, se reconocen que estuvieron en función del *tipo de contextos de las situaciones, los conocimientos previos de los estudiantes, la guía del profesor, la organización de la clase, las reflexiones* y *las interacciones promovidas en el aula de matemáticas*. Estos aspectos deben tener implicación en el aula de clase cuando se piense en situaciones o tareas de modelación donde se promueva un proceso constructivo de aprendizaje de algún conocimiento matemático.

Uno de los aspectos clave en el proceso de matematización son las *reflexiones*. Dentro de la EMR se establece que éstas permiten a los estudiantes transitar por diferentes niveles de comprensión, sin embargo no admite el cómo promoverlas. A partir del presente estudio y de los resultados obtenidos, se propone que al momento de trabajar el proceso de matematización asociado a la función, se debe trabajar con situaciones de variación y cambio; y centrar a los estudiantes a reflexionar el qué, cómo y cuánto varía, *eso que varía* en cada situación. Una guía de los posibles aspectos a analizar para cada cuestión se encuentra en el apartado 3.4.2 de este documento.

Las situaciones propuestas en el estudio, son de *modelación*, pero no desde cualquier perspectiva, sino desde una realista, más aún desde la concepción admitida en la EMR. Esta perspectiva teórica considera un análisis fenomenológico didáctico y presenta una serie de principios que ayudaron en el diseño tanto de las situaciones como de la forma de organizar el aula. Se identificó como una metodología para la elaboración de situaciones o tareas de modelación, las cuales lleven a los estudiantes a matematizar u organizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propias actividad matemática (Bressan, 2011).

Los contextos realistas usados en las situaciones fueron acordes con la “realidad” admitida en la EMR. Sin embargo, se consideró como una limitante del estudio, pues poco “evocó” la experiencia extraescolar de los estudiantes, lo cual se reflejó en el conocimiento matemático informal que los estudiantes usaron en la resolución de las situaciones, puesto que fue muy matemático. Quedando la cuestión abierta del qué pasaría con el proceso de matematización de la función cuadrática si se considera partir de contextos más realistas o auténticos en el aula de clase.

Finalmente, el aporte que se hace al currículo de matemáticas, es que esta mirada de **modelación matemática** admitida en el estudio**,** promovió en los estudiantes el desarrollo de competencias (genéricas y disciplinares), y resultó compatible con el papel del profesor y del estudiante, la transversalidad con otras tópicos de matemáticas y la mirada que se tiene de la matemática como herramienta para interpretar y explicar situaciones reales, planteados en el mismo.

Referencias Bibliográficas

Referencias Bibliográficas

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M. Gonzáles, M. Gonzáles y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119–127). Santander: SEIEM.

Andrés, M., Coronel, M., Di Rico, E., Fioriti, G., Guzmán, E., Kerlakian, C., Segal, S. y Sessa, C. (2010). Trabajo colaborativo para el estudio didáctico de lo cuadrático. Segunda parte. Una entrada a lo cuadrático vía la producción de fórmulas para contar. En Ascherri, M, Pizarro, R. y Ferreyra, N. (Eds.), *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 259–265). Santa Rosa, La Pampa: III REPEM.

Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en Matemáticas. *Números*, *63*, 3–23.

Ärlebäck, J., y Doerr, H. (2015). At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models. *Proceedings of the 9TH Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1–10). Prague, Czech Republic.

Ärlebäck, J., Doerr, H. M., y O'Neil, A. H. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314–336. doi: 10.1080/10986065.2013.834405

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *18*(1), 19–48. doi: 10.12802/relime.13.1811

Barbosa, J. (2009). Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática Em Revista*, *14*(26), 17–25.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, *16*(2), 105–125.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". En Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222– 231). Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95.

Bressan, A. (2011). L*os principios de la Educación Matemática Realista*. Recuperado de https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Bressan, A., y Gallego, M. (2011). *La Educación Matemática Realista. Bases teóricas*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Bressan, A., Zolkower, B., y Gallego, M. (2004). *La Educación Matemática Realista. Principios en que se sustenta*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

Cabrera, L., y Cantoral, R. (2010). El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 859–867. México: Comité Latinoamerica de Matemática Educativa.

Cetina-Vázquez, M., Cabañas-Sánchez, G., y Villa-Ochoa, J. (2015). *La función cuadrática y su proceso de matematización*. Manuscrito aceptado para su publicación.

Collado, M., Bressan, A., y Gallego, F. (2003). La Matemática Realista en el aula: EL COLECTIVO y las operaciones de suma y resta. *Novedades Educativas*. Año 15. Nº149/150 (May/June). Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/colectivo.pdf

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Tesis de maestría inédita). Instituto Politécnico Nacional, México.

Doerr, H. M., y Pratt, D. (2008). The Learning of Mathematics and Mathematical Modeling. En M. Kathleen Heid y G. Blum (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses* (pp. 259–285). USA: Information Age Publishing.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Diaz de Santos.

Doorman, L. M., y Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*(1-2), 199–211. doi: 10.1007/s11858-008-0130-z

Font, V. (2008). *Enseñanza de la matemática. Tendencias y perspectivas*. Trabajo presentado en el III Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas, Lima.

Freudenthal, H. (1968). ‘Why to teach mathematics so as to be useful?’ *Educational Studies in Mathematics 1*, 3–8.

Freudenthal, H. (1971). ‘Geometry between the devil and the deep sea’ *Educational Studies in Mathematics 3*, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. United States of America: Kluwer Academic Publishers.

García, F., Gascón, J., Ruiz, L., y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226–246. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a3.pdf

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_4

Henao, S., y Vanegas, J. (2012). *La Modelación Matemática en la Educación Matemática Realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos* (Tesis de licenciatura inédita). Universidad del Valle: Santiago de Cali.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Heuvel-Panhuizen, M. Van Den. (2003). The didactical use of models in Realistin Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9–35.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experientos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* (Tesis de maestría inédita). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Kaiser, G., y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 51–76. doi: 10.1007/s13138-010-0001-3

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a9.pdf

Larsen, S. P. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(4), 712–725. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.04.006

Llluzi, A., y Sessa, C. (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Mesa, Y., y Villa-Ochoa, J. (2008). Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto función cuadrática. Recuperado de http://core.ac.uk/download/pdf/12341494.pdf

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (Springer, pp. 3–32). New York: Springer.

Pierce, R., y Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 214–225. doi: 10.1007/BF02652806

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61–94). Barcelona: Horsori / ICE.

Rosario, A. (2011). *Transformaciones*. Puerto Rico: Universidad Metropolitana. Recuperado de http://www.suagm.edu/umet/pdf/educacion_continua/msp/transformaciones_participantes.pdf

Santamaria, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda* (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional del Comahue: Argentina.

SEMS. (2008). *Competencias genéricas y el perfil del egresado de la Educación Media Superior*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.ofmx.com.mx/documentos/pdf/Competencias_genericas_perfil_egresado.pdf

SEP. (2004). *Programa de Educación Preescolar 2004*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://www.reformapreescolar.sep.gob.mx/ACTUALIZACION/PROGRAMA/Programa2004PDF.PDF

SEP. (2006). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de https://efmexico.files.wordpress.com/2008/04/planestudios2006.pdf

SEP. (2009). *Plan de estudios 2009. Educación Básica. Primaria*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de https://coleccion.siaeducacion.org/sites/default/files/planestedubas09.pdf

SEP. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/PlanEdu2011.pdf

SEP. (2011b). *Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/inicio/matlinea/2011/EduFis_SEC.pdf

SEP. (2013). *Matemáticas IV. Programa de Estudios*. México: Subsecretaria de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfb_4sem/Matematicas-IV.pdf

Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? En S. J. Cho (Ed.), *Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 902–921). Korea: Springer.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75–87.

UAGro. (2010). *Matemáticas II: Iinterpretando la realidad.2a Parte. Plan de estudios por Competencias 2010*. *Educación Media Superior.* Chilpancingo: Comisión General de Reforma Universitaria.

UAGro. (2013). *Modelo Educativo. Hacia una educación con calidad con inclusión social*. Chilpancingo: Comisión General de Reforma Universitaria.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Vargas, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno* (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Villa-Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 245–254. México: Comité Latinoamerica de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme Y Didaxis, 31*, 9–25. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n31/n31a02.pdf

Villa-Ochoa, J. A. (2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. *Artículo presentado en la VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática* (pp. 1–8). Santa Maria, Brasil.

Villarraga, S. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación* (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Zulkardi. (2010). *How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach?* Recuperado de http://www.reocities.com/ratuilma/rme.html