UN MODELO DE ALGEBRIZACIÓN RELATIVO A LAS ECUACIONES LINEALES. EL CASO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

JOHNNY ALFREDO VANEGAS DIAZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
ÁREA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

CHILPANCINGO, GUERRERO
2017

UN MODELO DE ALGEBRIZACIÓN RELATIVO A LAS ECUACIONES LINEALES. EL CASO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Tesis presentada por:
JOHNNY ALFREDO VANEGAS DIAZ

Para obtener el grado de:
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directores de Tesis:
GUADALUPE CABAÑAS & ULISES XOLOCOTZIN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
ÁREA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

CHILPANCINGO, GUERRERO
2017

A la memoria de mi hermano: Cristian Vanegas Díaz

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por el apoyo brindado durante los dos años de estudio en tan prestigiosa institución.

Número de Becario: 628321

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

La presente investigación aborda intereses en el marco del *early algebra* y se ocupa de una problemática asociada con la naturaleza del pensamiento algebraico en la matemática escolar. De manera particular, se propone un *modelo de algebrización* para explorar la actividad algebraica y caracterizar formas de pensamiento algebraico que se configuran en estudiantes de sexto, séptimo y octavo año de Educación Básica, a partir del trabajo con tareas asociadas a la resolución de ecuaciones lineales.

Dicho modelo se construye en consonancia con algunas propuestas teóricas recientes, como son: los niveles de algebrización (Aké, 2013; Godino et al., 2015; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014) y las formas de pensamiento algebraico emergentes en el contexto de la generalización de patrones (Radford, 2012; Vergel, 2014, 2015). La estructura del modelo se basa en la articulación de tres componentes algebraicos, que lo constituyen, a saber: *relacional*, *analítico* y *notacional*, así como las conexiones entre ellos, enmarcadas en la perspectiva de *resolución de problemas y modelación matemática*.

En la búsqueda por alcanzar los objetivos propuestos, se seleccionan y (re)diseñan una serie de tareas relativas a los componentes algebraicos. De este modo se pone de manifiesto la funcionalidad del *modelo de algebrización* en la exploración de la actividad algebraica y la consecuente caracterización de formas de pensamiento algebraico, en el contexto matemático de interés. El diseño metodológico incluye un estudio de caso descriptivo e interpretativo, combinado con elementos metodológicos rastreados en otras investigaciones que describen intereses similares.

Entre los principales aportes de esta investigación se destaca el hecho de haber construido un *modelo de algebrización* con múltiples alcances para los intereses del *early algebra*. Si bien, las formas de pensamiento algebraico propuestas, remiten a un tipo particular de tareas, estas pueden ser extendidas a otros escenarios y tópicos de la matemática escolar y por lo tanto, generan nuevas rutas para seguir investigando y aprendiendo del panorama que ofrece la naturaleza del álgebra en el ámbito escolar. Además, la concreción de este trabajo con la caracterización de formas de pensamiento algebraico, clasificadas en: 1) *proto-algebraica*, 2) *transicional*, 3) *proto-simbólica* y 4) *simbólica-instrumental*, no sólo aportan elementos para comprender la actividad algébrica desplegada por los estudiantes, sino que eventualmente pueden ser útiles para direccionar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente el *álgebra* ha sido concebida como una *institución* encargada de impartir cursos estándares, libros de texto, realizar pruebas, soportar la infraestructura intelectual y social de cursos y prerrequisitos laborales, entre otros. Infortunadamente, esta visión actúa como motor de desigualdad para muchos estudiantes, especialmente, para los menos favorecidos en la sociedad. Otra alternativa, con una visión más humana promociona la consecución de un *álgebra para todos,* como una *red de conocimientos y habilidades* que los estudiantes pueden desarrollar a través de todo su ciclo escolar (Kaput, 2000). Se trata entonces de un cambio de perspectiva, basado en una reforma curricular, en la cual se trasforma el motor de desigualdad por uno de potencia matemática.

El cambio de perspectiva, hacia un *algebra para todos*, trae consigo la idea de *algebrización del currículo* o bien, la integración de formas de pensamiento algebraico a través de todos los grados y tópicos de la matemática escolar. Este enfoque, reconocido internacionalmente como *early algebra* considera el desarrollo del pensamiento algebraico en la edad temprana de los niños. No consiste en introducir tópicos del álgebra de la Educación Secundaria a la Educación Primaria; sino en trabajar, en gran medida, con los contextos y problemas estrechamente ligados a los temas del currículo de matemáticas elemental. La base de esta propuesta es que los niños pueden construir ideas algebraicas a través de las operaciones elementales, problemas verbales y en los sistemas de representación como esquemas, gráficas y tablas (Carraher & Schliemann, 2007). Como resultado de esta integración se aportan elementos para afrontar algunos problemas fundamentales de la matemática escolar. En primer lugar, se apertura un nuevo espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI. En segunda instancia, se incorpora un nivel de coherencia, profundidad y poder a la matemática escolar, tanto curricularmente como cognitivamente y finalmente, se marginan los cursos abruptos, aislados y superficiales del álgebra de la escuela secundaria (Kieran, 2004; Reeuwijk, 1995).

Si bien, la *algebrización del currículo* aliviana, en gran medida, la remarcada transición de la aritmética al álgebra, también es cierto que genera un nuevo campo de discusión en torno a 1) la naturaleza del pensamiento algebraico y 2) la manera en que dicho pensamiento puede ser desarrollado en el ámbito escolar (Aké, 2013; Socas, 2011). Aunque ambos aspectos se encuentran íntimamente relacionados, la presente investigación se ocupa del primero de ellos, por las siguientes razones:

a) Durante los últimos años, numerosas investigaciones (e.g., Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014; Kaput, 2000; Radford, 2012) han señalado la importancia de clarificar y profundizar en la comprensión de los procesos involucrados en el pensamiento algebraico.

b) Investigaciones recientes (e.g., Vergel, 2015) sostienen la necesidad de explorar sistemáticamente y comparativamente el pensamiento algebraico en diferentes contexto, tales como: la generalización de patrones y la resolución de problemas.

c) Desde un punto de vista educativo es importante que los profesores de matemáticas adquieran un panorama profundo sobre el pensamiento algebraico para que integren nuevas actividades de clase que movilicen formas algebraicas de pensar, incluso desde los primeros niveles, generando oportunidades para que más adelante los estudiantes aprendan a trabajar con conceptos algebraicos sofisticados (Radford, 2014).

En el marco de las consideraciones anteriores, esta investigación pone especial énfasis en la caracterización de formas de pensamiento algebraico emergentes en un grupo de estudiantes de Educación Básica, a partir del trabajo con tareas relativas a la resolución de ecuaciones lineales. En correspondencia con este objetivo, se proponen tres objetivos específicos, delimitados en los siguientes términos: 1) identificar diferentes propuestas teóricas que problematizan la caracterización del pensamiento algebraico en la Educación Básica, 2) Reconocer algunos componentes constitutivos del pensamiento algebraico, en el contexto de la resolución de ecuaciones lineales, 3) construir un *modelo de algebrización* que articule diferentes componentes algebraicos hacia la descripción y caracterización de formas de pensamiento algebraico, en el contexto matemático de interés.

Consecuente al desarrollo de los objetivos propuestos, se selecciona, (re)diseña e implementa, una serie de tareas asociadas con los tres componentes algebraicos: *relacional*, *analítico* y *notacional*. Los análisis considerados, uno *exploratorio* y otro *descriptivo*, posibilitan la exploración y caracterización de formas de pensamiento algebraico. Si bien, existen diferentes construcciones teóricas que caracterizan el álgebra y el pensamiento algebraico (e.g., Vergel, 2014), la presente investigación difiere y aporta elementos que no son objeto de discusión en estudios precedentes, tales como: la emergencia, desarrollo y conexión existente entre los significados asociados al signo igual, las diferentes notaciones y el trabajo analítico, como componentes fundamentales que dan lugar a formas algebraicas de pensar.

El diseño metodológico considera elementos de un *estudio de caso*, así como aspectos rastreados en diferentes investigaciones con fines e intereses similares. La implementación de las tareas se desarrolla en el contexto de un *Club de Matemáticas*, ubicado en una zona urbana del estado de Guerrero, en México, el cual atiende una población cercana a los 400 estudiantes distribuidos entre escuela primaria y secundaria. Los estudiantes que conforman el caso, son sugeridos por el director del club, pero la cantidad de estudiantes por cada grado, objeto de estudio, es propuesta por los investigadores, con el ánimo de obtener suficientes unidades de análisis.

En conjunto, la estructura de la presente investigación espera aportar elementos teóricos y metodológicos que permitan explorar, desde otra perspectiva, la actividad algebraica desplegada por los estudiantes. Del mismo modo, se considera que este tipo de trabajo, eventualmente, tiene un papel clave sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la matemática escolar, en tanto que pone de manifiesto formas de pensamiento algebraico que los profesores de matemáticas necesitan reconocer y desarrollar con sus estudiantes.

Para efectos de organización, la presente investigación se ha divido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se describe el proyecto de investigación, en términos de a) la contextualización y formulación del problema, b) los objetivos primarios y secundarios y c) la justificación del problema. Básicamente se problematiza la caracterización del pensamiento algebraico y se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué *formas de pensamiento algebraico* se configuran en estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado de Educación Básica (11-13 años), como resultado del trabajo con tareas enmarcadas en las ecuaciones lineales? En correspondencia con esta pregunta se plantea un objetivo general y tres objetivos específicos, para cerrar el capítulo con algunas ideas que rescatan la importancia de abordar esta problemática.

El segundo capítulo aborda diferentes antecedentes del estudio y la construcción de un *modelo de algebrización*. De manera particular, se describen y ejemplifican, tres caracterizaciones del pensamiento algebraico. En esa misma dirección, se presentan otras conceptualizaciones teóricas que están en correspondencia con el estudio del álgebra en la matemática escolar. A continuación se describen algunos resultados emergentes en el contexto de la resolución de ecuaciones lineales, tales como: la idea fundamental del signo igual en álgebra y sus significados asociados. En el apartado final del capítulo, se propone un *modelo de algebrización* constituido por tres componentes algebraicos, derivados de la revisión e interpretación de la literatura.

En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico de la investigación, el cual se desarrolla con elementos de un *estudio de caso descriptivo e interpretativo*, así como algunos aspectos proporcionados por Lins (1992) y Aké (2013), entre otros, quienes abordan objetivos similares a la presente investigación. En este apartado se especifica el contexto, en el cual se lleva a cabo la implementación de las tareas, los participantes que integran el estudio, los instrumentos utilizados y las unidades de análisis, el procedimiento y tiempos de implementación de las tareas, entre otros. El capítulo cierra con un análisis preliminar de las tareas, soportado en unas *categorías de solución* correspondientes con el *modelo de algebrización* propuesto.

El proceso de análisis posterior a la implementación de las tareas, hace parte del capítulo cinco. Este incluye un análisis exploratorio y dos análisis descriptivos: uno vertical y otro horizontal. Se discuten las formas de pensamiento algebraico derivadas de los análisis y finalmente, se exponen las conclusiones del estudio. Además, se indican algunos interrogantes para nuevas rutas de investigación.

CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

1.1. Contextualización y formulación del problema

El álgebra es un componente indispensable en cualquier programa curricular de matemáticas, esencialmente, porque es considerada la puerta de entrada hacia unas matemáticas más avanzadas, como el cálculo y el análisis (Lins, 1992; Cai & Knuth, 2011; Leung, Park, Holton, & Clarke, 2014). Tradicionalmente, el estudio del álgebra, sus símbolos y sus manipulaciones se ha instaurado curricularmente durante la escuela secundaria, una vez que los estudiantes han adquirido un conocimiento sustancial de la aritmética (Kieran, 2004). No obstante, en las últimas décadas, la visión del álgebra escolar se ha transformado hacía una perspectiva más amplia que posibilita tiempo y espacio para desarrollar ideas algebraicas desde los primeros grados (Carraher & Schliemann, 2007; Carraher et al., 2006; Socas, 2011).

En la actualidad, diversos investigadores estudian y defienden la integración de formas algebraicas de pensar a través de todo el currículo de matemáticas. De hecho, recientes investigaciones han revelado que los estudiantes de escuela primaria pueden construir conocimientos informales sobre patrones y relaciones, entre otras ideas algebraicas (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, & Kim, 2015; Radford, 2012). Además, es ampliamente aceptado que los estudiantes jóvenes pueden trabajar con ideas algebraicas antes de conocer el uso de los símbolos literales (Radford, 2015b). Esto implica que las notaciones algebraicas convencionales, no son el único vehículo para expresar ideas algebraicas y relaciones; también, las tablas, las sentencias numéricas, las gráficas y las estructuras lingüísticas especializadas dan cuenta de ello (Carraher & Schliemann, 2007). Incluso, los gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal son importantes indicadores de formas de pensamiento algebraico temprano (Vergel, 2015).

La consideración del álgebra desde los primeros grados de escolaridad es una propuesta aceptada a nivel internacional, reconocida con el nombre de *early algebra*. Esta propuesta va en contra de la opinión predominante que señala que el álgebra pertenece a una selecta minoría de estudiantes con habilidades específicas (Carraher & Schliemann, 2007).

En términos generales, el *early algebra* plantea a) la introducción de formas de pensamiento algebraico en la matemática escolar, pretendiendo la *algebrización del currículo*; y b) nuevos puntos de vista entre la aritmética y el álgebra que promueva continuidad entre estos dominios (Kaput, 2000). Sin embargo, se conoce poco acerca de las características de tales formas de pensamiento algebraico (Carraher et al., 2006). Incluso, cuando se describe alguno de ellos, usualmente se refieren a modos de pensamiento numérico (Godino et al., 2014). Al respecto, Aké (2013) menciona que es necesario clarificar la naturaleza del álgebra escolar y responder a cuestiones, tales como: ¿Qué formas de razonamiento son algebraicas? y ¿Cuáles son las características de esas formas de razonamiento? En esta misma dirección, Vergel (2014) pone de manifiesto la necesidad de identificar y caracterizar las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes jóvenes a partir del trabajo con generalización de patrones. Además, la comprensión acerca de estas formas de pensamiento posibilita un análisis más profundo sobre las filiaciones, rupturas y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2014).

Según Radford (2010a) construir una definición precisa y concisa del pensamiento algebraico es un asunto problemático, debido a la amplia gama de objetos y procesos que este pensamiento involucra. Incluso, señala que tal complejidad es producto de la diversidad de formas de concebir el pensamiento, en general. En consecuencia, es posible aceptar diferentes maneras de entender y conceptualizar el pensamiento algebraico, dependiendo del objeto matemático de estudio y de la perspectiva que se adopte para tal caracterización. Al margen de estas delimitaciones, es importante situar la presente investigación en una de las tres perspectivas de trabajo que mayor auge han tenido durante las últimas décadas, en relación con el álgebra en la matemática escolar, a saber: 1) *aritmética generalizada,* 2) *patrones y funciones*, y 3) *resolución de problemas y modelación matemática* (Demosthenous & Stylianides, 2014) y definir el campo matemático de interés.

De esta manera, la presente investigación toma en consideración la *resolución de problemas y modelación matemática,* como perspectiva de base para estudiar la actividad algebraica de los estudiantes. En primer lugar, porque un recorrido rápido de la literatura científica, revela pocos trabajos desarrollados desde esta perspectiva en contraste con las demás, lo cual provee un espacio más grande para explorar y aprender entorno al pensamiento algebraico. En segunda instancia, porque dentro de los intereses de esta investigación, es fundamental darle un lugar protagónico a los procesos de significación, como por ejemplo, proporcionar un uso significativo de la notación simbólica y ello puede alcanzarse desde esta perspectiva (Windsor, 2008). Finalmente, porque los contextos y tareas trabajados desde aquí promueven una mirada sobre lo matemático que va más allá de la adquisición rutinaria de técnicas algorítmicas de resolución, generando oportunidades para que los estudiantes amplíen y desarrollen el pensamiento matemático en todas sus facetas (Van Amerom, 2003).

En conjunto, la *resolución de problemas y modelación matemática* ofrece un escenario propicio para implementar y gestionar tareas que pueden ser utilizadas como unidades de análisis para explorar, describir y caracterizar formas de pensamiento algebraico. Si bien, desde la perspectiva de la *generalización de patrones* hay numerosas investigaciones (e.g., Becker & Rivera, 2006; Warren & Cooper, 2008; Radford, 2010b; Rivera, 2015) que presentan resultados asociados con el pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes; se conoce poco acerca de las formas de pensamiento algebraico de estos estudiantes, frente a tareas concernientes a las ecuaciones lineales. De hecho, pese a que existe un claro consenso de que las actividades relativas a la formación y manipulación de expresiones simbólicas tienen relación directa con formas de pensamiento algebraico, siguen siendo discutibles los contornos de la actividad algebraica en actividades que incluyen la resolución de problemas y la equivalencia de expresiones aritméticas (Aké, 2013).

Como resultado de estos hallazgos de investigación, parece necesario incursionar en el contexto matemático de las ecuaciones y re-descubrir por qué este contexto sigue ofreciendo elementos de estudio que son importantes para comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes. De manera particular, la presente investigación se limita a tareas asociadas a la resolución de ecuaciones lineales, porque es un tópico transicional entre la escuela primaria y secundaria. Además, porque brinda un espacio para valorar el aspecto dinámico de las variables y el trabajo con diferentes notaciones no convencionales (Reeuwijk, 1995; Van Amerom, 2003). De hecho, la investigación en álgebra necesita explorar y aprender de las experiencias algebraicas de los estudiantes alrededor de conceptos y habilidades que involucran múltiples variables y parámetros (Martinez, 2014) y éste contenido matemático lo posibilita.

En síntesis, la presente investigación se enmarca en la perspectiva: *resolución de problemas y modelación matemática*, desde la cual se estudia la actividad algebraica de un grupo de estudiantes de Educación Básica, cuando resuelven tareas relativas a las ecuaciones lineales. De este modo, se busca una caracterización de diversas formas de pensamiento algebraico, a partir de la construcción de un modelo de algebrización que ayude a interpretar las producciones elaboradas por los estudiantes. Así, se concreta la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué *formas de pensamiento algebraico* se configuran en estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado de Educación Básica (11-13 años), como resultado del trabajo con tareas enmarcadas en las ecuaciones lineales?

1.2. Objetivos

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se considera un objetivo general desarrollado a través de tres objetivos específicos

Objetivo general

Caracterizar el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado de Educación Básica, como resultado del trabajo con tareas enmarcadas en las ecuaciones lineales

Objetivos específicos

1) Identificar diversas propuestas teóricas sobre la caracterización del pensamiento algebraico en el ámbito escolar, especialmente aquellas centradas en la Educación Básica.

2) Reconocer en la literatura de investigación, diferentes componentes del pensamiento algebraico, relativos al trabajo con ecuaciones lineales, que permitan construir un *modelo de algebrización* para explorar y describir *formas de pensamiento algebraico*.

3) Construir un *modelo de algebrización* que articule los componentes del pensamiento algebraico para describir diferentes formas de pensamiento algebraico, en el marco de la resolución de tareas relativas a las ecuaciones lineales.

1.3. Justificación

Desde hace algunas décadas, diversos investigadores en el campo de Matemática Educativa vienen trabajando sobre la base de diversas perspectivas de introducción para el álgebra escolar (e.g., la generalización de patrones). Inicialmente, el objetivo estaba puesto sobre los errores de los estudiantes y las dificultades presentes en el proceso de transición de la aritmética al álgebra (ver, Filloy & Rojano, 1989). En la actualidad, los intereses se han focalizado en el desarrollo del pensamiento algebraico desde los niveles iniciales. Pese a ello, en la escuela, aún predominan enfoques fuertemente asociados con el aprendizaje de contenidos y técnicas del álgebra que ignoran que el contenido algebraico puede ser producido por medios no algebraicos (Lins, 1992; Radford, 2015a).

Frente a esta última aserción, es importante desarrollar estudios que enriquezcan el dominio de investigación entorno a qué es el pensamiento algebraico y cómo puede ser integrado en los diseños curriculares, entre otros. Recientemente, diversos investigadores (e.g., Vergel, 2015) han señalado que la posibilidad de analizar sistemática y comparativamente el pensamiento algebraico, debe interpretarse como una oportunidad para hacer avanzar la investigación en nuestro campo disciplinar.

La *resolución de problemas y modelación matemática* puede representar un escenario propicio para explorar y aprender de las experiencias algebraicas desplegadas por los estudiantes. En primer lugar, porque desde esta perspectiva se generan oportunidades para que los estudiantes descubran las posibilidades del álgebra por sí mismos, con tal suerte que ellos aprenden primeramente acerca de la finalidad y uso del álgebra, antes de enfrentarse al uso de la sintaxis algebraica (Kieran, 1992). En gran parte, porque los contextos empleados para indagar sobre formas algebraicas de pensar, no se restringen al dominio matemático de lo simbólico. En segundo lugar, porque dicha perspectiva desborda el estudio de los modelos construidos y utilizados por los estudiantes, para dar lugar a las posibilidades e imposibilidades de esos modelos, en relación con la tarea propuesta, promoviendo así nuevas preguntas y conocimientos sobre el pensamiento algebraico (Lins, 1992).

La resolución de ecuaciones no es sólo una ruta histórica de introducción al álgebra, también se ha convertido en una actividad fundamental en todos los planes de estudio del álgebra. De manera que, la resolución de ecuaciones ofrece una mirada alternativa al estudio de la naturaleza de la aritmética y el álgebra, como un espacio para discutir características del pensamiento algebraico (Kieran, 1992). Más aun, dado que es un tópico que se encuentra en la frontera entre las matemáticas concretas e inductivas y las matemáticas abstractas y deductivas (Andrews & Sayers, 2012) posibilita la visualización de formas de pensamiento algebraico que no remiten, necesariamente, al uso de notaciones simbólicas convencionales. Ejemplo de ello, es la antigua cultura china que movilizaba ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales por fuera del uso de las letras (Radford, 2010a, 2015a).

Abordar el estudio del pensamiento algebraico desde un contexto simple, como es: la resolución de ecuaciones lineales, contribuye a la generación de espacios para indagar sobre las formas en que los estudiantes hacen explicito su pensamiento algebraico, pues tal como lo indican, Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) hay mucho que aprender de las generalizaciones que hacen los estudiantes acerca de las propiedades de los números y las operaciones y de cómo ellos exploran y trabajan con relaciones entre cantidades. Para seguir avanzando en la comprensión y desarrollo del pensamiento algebraico, es importante involucrar a los estudiantes con situaciones que demanden la identificación de relaciones entre cantidades, representaciones en un simple lenguaje cotidiano y eventualmente, la representación con literales del álgebra (Warren, 2003).

Para cerrar, es importante añadir que la presente investigación, reconoce la necesidad de elaborar estudios que ayuden a conceptualizar la *zona de emergencia del pensamiento algebraico* (ver, Radford, 2012), donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo a los literales del álgebra. Si bien, se ha justificado la indagación entorno a la resolución de ecuaciones, de ninguna manera se sugiere que el estudio desde este contexto es el único ni el mejor punto de partida para el álgebra escolar.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

2.1. Algunas caracterizaciones del pensamiento algebraico

En este apartado, se discuten tres caracterizaciones del pensamiento algebraico que pretenden, desde posturas teóricas diferentes, enriquecer el panorama de investigación en torno a la actividad algebraica de los estudiantes. En primer lugar, desde el marco de la *teoría de la objetivación*, se ejemplifica el modelo propuesto por Radford y sus colaborados (e.g., Radford, 2014; Vergel, 2015). En segunda instancia, se ilustran los recientes desarrollos teóricos de Godino et al. (2014) desde el *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Finalmente, se aborda la caracterización del pensamiento algebraico desarrollada por Lins (1992) en el marco de la *resolución de problemas y la modelación matemática*.

2.1.1. Aportes desde la teoría de la objetivación.

Desde esta visión teórica, se define "el pensamiento algebraico como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente" (Vergel, 2015). El pensamiento algebraico se manifiesta a través de diferentes recursos semióticos de objetivación, tales como: los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual. Además, sostienen que el álgebra y el pensamiento algebraico no pueden reducirse, exclusivamente, al uso de notaciones simbólicas convencionales.

De acuerdo con Radford (2010) la forma y generalidad del pensamiento algebraico puede caracterizarse por medio del problema matemático en cuestión y los recursos semióticos que se movilizan para resolverlo de manera analítica. De esta manera, propone una caracterización del pensamiento algebraico, sobre la base de tres componentes estrechamente relacionados:

1) el sentido de indeterminancia que es propio de los objetos algebraicos básicos, tales como: incógnitas, variables y parámetros. Esta indeterminancia (lo opuesto a la determinancia numérica) es lo que hace posible, bajo ciertas condiciones, la sustitución, por ejemplo, de una variable por un número (Radford, 2010b)
2) la analiticidad como forma de trabajar con los objetos indeterminados, es decir, realizar cálculos con ellos como si se tratase de números conocidos. No hay diferenciación, desde lo operativo, entre números conocidos y desconocidos, lo cual implica necesariamente el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos algebraicos básicos. Según Radford (2012, 2014) el hecho de trabajar con cantidades indeterminadas de forma analítica es, precisamente, lo que diferencia el pensamiento algebraico del aritmético.

3) la expresión semiótica que se refiere al modo simbólico peculiar de designar los objetos algebraicos básicos. Estos símbolos no son necesariamente letras. La historia de las matemáticas muestra claramente que algunas civilizaciones antiguas como la china y la babilónica movilizaban ideas algebraicas acudiendo a otros sistemas semióticos, fuera del ámbito de las notaciones simbólicas convencionales (Radford, 2010b; 2015a).

Las relaciones dadas por estos tres componentes dan lugar a una tipología de formas algebraicas de pensar (ver e.g., Radford, 2010b) ampliamente discutidas en el trabajo de Vergel (2015), quien analiza como emergen y evolucionan en el contexto de tareas sobre generalización de patrones. Sus resultados sugieren que recursos semióticos tales como: los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. A continuación se ejemplifican tales formas de pensamiento a través de una situación problema.

Considere la siguiente secuencia de figuras:

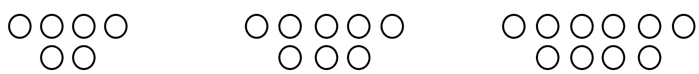


fig.1 fig.2 fig.3

Suponga que se pide a los estudiantes hallar la cantidad de bolitas de la fig.10 y la fig.100. Para responder esta pregunta, usualmente, los estudiantes empiezan contando el número de bolitas que conforman las figuras dadas. Sin embargo, rápidamente, ellos se dan cuenta que esta relación recursiva entre las cifras consecutivas no es una forma práctica para conocer la cantidad de bolitas de la fig.100. Suponga entonces que con actividades perceptuales, tales como, imaginar las figuras dadas como si estuviesen formadas por dos renglones, los estudiantes objetivan una regularidad: una relación entre el número de la figura y el número de bolitas en esos renglones. En este caso, se habla de *pensamiento algebraico factual*. Los medios semióticos de objetivación son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este extracto de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación, simplemente está presente a través de la aparición de alguna de sus instancias (1, 2, 3, 10, 100). Aunque el pensamiento algebraico factual opera en el nivel de números particulares o hechos, esta forma de pensamiento se basa en mecanismos altamente evolucionados de la percepción y coordinación rítmica de gestos, palabras y símbolos (Radford, 2010a).

El *pensamiento algebraico contextual* emerge una vez que los estudiantes se centran en generalizar la regularidad encontrada previamente. Para ello, es necesario transitar de las figuras particulares a una figura general. En consecuencia, aparecen sentencias que pueden ser vistas como *fórmulas*, puesto que se refieren a una descripción del término general.

Siguiendo con el ejemplo propuesto, suponga que se pide a los estudiantes escribir un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, donde se consigne la forma de proceder para calcular rápidamente el número de bolitas totales de cualquier figura. De este modo, la regularidad encontrada por los estudiantes podría ser expresada en los siguientes términos: "tienes que añadir una bolita más, al <u>número de la figura</u> del renglón de *abajo* y añadir dos bolitas más, al renglón de *arriba*". En este extracto de pensamiento, la indeterminancia (lo que aparece subrayado) empieza a ser parte del discurso explícito. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación, tales como: *abajo* y *arriba*.

El *pensamiento algebraico simbólico*, se caracteriza por la representación de las frases "clave" a través de símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones, tales como: $2n + 4$ Es importante tener en cuenta que la fórmula no es un artefacto de cálculo simbólico, sino más bien, una historia que narra, de manera muy condensada, la experiencia matemática de los estudiantes (Radford, 2010a). En consecuencia, que los estudiantes arriben a fórmulas que contienen letras, no implica, necesariamente, una forma algebraica de pensar.

La situación problema, enunciada previamente, permite ejemplificar este extracto de pensamiento con mayor detalle. Suponga que algunos estudiantes arriban a la formula, mediante ensayo y error, probando inicialmente con: $2n + 1$, $2n + 2$,…, hasta obtener $2n + 4$ que parecía funcionar en los pocos casos que probaron. Pues bien, a pesar de su apariencia, la formula producida no es algebraica; el procedimiento seguido por estos estudiantes no se basa en una forma analítica de pensar en las cantidades indeterminadas. En otras palabras, pese a que la fórmula encontrada incluye cantidades desconocidas, la ausencia del componente analítico, la sitúa, en una forma ingenua de generalización aritmética.

En síntesis, esta caracterización del pensamiento algebraico revela una concepción del álgebra que trata con objetos indeterminados (incógnitas, variables y parámetros) y de los recursos semióticos que se movilizan para operar con dichos objetos de forma analítica. Además, deja entrever que la forma sofisticada de lo simbólico, la que remite a expresiones en términos de signos alfanuméricos, no es una condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente. Así, la propuesta de Radford y colaboradores representa un avance significativo en el marco de la comprensión del pensamiento algebraico, generando respuestas a cuestiones interrelacionadas del conocimiento y la actividad matemática que ponen en juego los estudiantes, las cuales recibían poca atención, pese a su importancia.

2.1.2. Aportes desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Desde este enfoque teórico se viene desarrollando un modelo de algebrización que integra los tres campos del razonamiento algebraico propuesto por Kaput (2008). De esta manera, se contempla el álgebra como: a) el estudio de las estructuras y los sistemas abstractos de cálculos y relaciones, b) el estudio de las funciones, relaciones y cantidades que varían, y c) la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelación tanto dentro como fuera de las matemáticas. La construcción de este modelo, así como su desarrollo se ha basado en el análisis y articulación de diversas propuestas de caracterización del álgebra escolar reflejadas en las investigaciones. A partir de este proceso de documentación, destacan la generalización y el uso de un lenguaje específico para expresar dicha generalidad como elementos claves de la actividad algebraica (Aké, 2013).

En este modelo de algebrización una *práctica matemática* se considera algebraica, siempre y cuando presente cierto tipo de *objetos* (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras) y *procesos* (generalización, unitarización, materialización, reificación) considerados en la literatura como algebraicos (Godino et al., 2014). En una práctica algebraica son fundamentales los *procesos* de a) generalización, b) unitarización, c) materialización y d) reificación. Mediante la generalización se obtiene un tipo de *objeto* que expresa la regla que genera la clase. Así, emerge una nueva entidad unitaria, la cual debe hacerse ostensible mediante un nombre, icono, gesto, etc. Finalmente, en el proceso de reificación, la representación del objeto se desprende de los referentes a los cuales sustituye para convertirse en un objeto sobre el que pueden aplicarse nuevas acciones (Aké, 2013; Godino et al., 2015).

La conceptualización propuesta para el razonamiento algebraico distingue tres niveles de algebrización, definidos en función de tres componentes: a) la presencia de objetos algebraicos intensivos, esto es, entidades que tiene un carácter de generalidad o indeterminancia, b) la articulación de diversas representaciones, es decir, los tipos de lenguajes usados, y c) el cálculo analítico, esto es, el cálculo sujeto a la aplicación de unas reglas sintácticas. Estos niveles están enmarcados entre el nivel cero (ausencia de razonamiento algebraico) y el nivel tres, en el que la actividad matemática es propiamente algebraica. A continuación, se ilustran con mayor detalle estos niveles, tomando como referencia el trabajo doctoral de Aké (2013)

Nivel cero: intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares.

Nivel uno: intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos.

Nivel dos: intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico–literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma:
$Ax \pm B = C$.

Nivel tres: Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica–literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
Desde los intereses particulares de la presente investigación, es pertinente ilustrar la manera en la cual, la actividad matemática, se asigna a algún nivel de algebrización. Bajo esta consigna, se toma como referente una tarea matemática, enmarcada en el contexto de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones lineales, la cual fue implementada con maestros en formación (Aké, 2013; Godino et al., 2014).

> **El gasto diario**: *Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?*

Suponga la solución de la tarea, mediante el trabajo con números y operaciones concretas. Por ejemplo:

$40 \times 4 = 160€$ *Dinero que consiguió ahorrar en los 40 días*

$160 \div 20 = 8€$ *Dinero que gastó cada día*

$60 \times 8 = 480\,€$ *Dinero del presupuesto inicial*

El procedimiento de solución puede explicitarse de esta forma: a) encuentra la cantidad de dinero ahorrada en los 40 días, b) halla la razón del gasto diario para los 20 días adicionales, y c) encuentra la cantidad de euros del presupuesto inicial, multiplicando la razón encontrada por los 60 días. Este tipo de *configuración* transita entre situaciones aditivas y multiplicativas, que aluden a un proceso de modelización aritmética muy eficaz y sintético. Sin embargo, no hay algún rasgo propio del razonamiento algebraico, puesto que, "todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas" (Godino et al., 2014, p.14). Por lo tanto, esta actividad se le asigna el *nivel cero de algebrización*.

Por otro lado, suponga una solución, en la cual se calcula la razón del gasto diario (8€ por día) con el procedimiento de la regla de tres. Por ejemplo:

Ahorra 4 € *por día, entonces en 40 días serán* 160 €. *Como le duran 60 días, con esos* 160 € *come 20 días*. *60 – 40 = 20*. *Hacemos una regla de tres*:
$40\,días \times 8\,€ = 320\,€ + 160\,€ = 480\,€$

$$\left.\begin{array}{lcl} 20\ días & \Longrightarrow & 160\,€ \\ 1\ día & \Longrightarrow & x \end{array}\right\} x = 8€$$

La consideración del símbolo literal (x) para representar la incógnita es el único rasgo algebraico. Dado que no alcanza a plantear y resolver de manera explícita la regla de tres y que persiste la aplicación de conceptos y operaciones aritméticas; la actividad matemática efectuada se asigna al *nivel uno de algebrización* (Godino et al., 2014).

El *nivel tres de algebrización* enmarca aquellas soluciones que modelan la situación, mediante el planteamiento de una ecuación, en términos simbólicos literales, que se resuelve aplicando un procedimiento algorítmico (cálculo analítico sintáctico) para despejar la incógnita y hallar su valor:

$40x = 60(x - 4)$
$40x = 60x - 240$
$240 = 60x - 40x$
$240 = 20x$
$x = 240/20$
$x = 12$ € *En total recibe* $12 \times 40 = 480$ €

La actividad asignada a este nivel demanda que la persona utilice, por ejemplo, la letra x para representar el gasto diario previsto para los 40 días, y la expresión $(x - 4)$ para el gasto diario efectivamente realizado. De este modo, se puede plantear la ecuación que relaciona los valores numéricos, resolverse y encontrar que $x = 12$ €. Concluyendo entonces, que el presupuesto inicial era de 480 €.

La discusión sobre la tarea: "el gasto diario" permite visualizar la correspondencia existente entre el modelo teórico propuesto y aquello que pueden hacer los maestros en formación y también los estudiantes, es decir, los niveles de algebrización ofrecen información, a priori, sobre la actividad matemática desplegada. La asignación a un nivel u otro, está claramente delimitada por los *objetos* que moviliza el estudiante y por su razonamiento con formas simbólicas. Por su parte, el cálculo analítico se entiende en el dominio sintáctico y en consecuencia, en el nivel consolidado de algebrización donde los estudiantes trabajan con símbolos alfanuméricos.

En síntesis, esta propuesta teórica, plantea el estudio de la actividad algebraica, en el marco de los tres campos del razonamiento algebraico, citados por Kaput (2008): estructuras/operaciones, funciones/patrones y modelización. Este modelo de algebrización destaca como ejes directores al menos tres consignas: 1) la presencia de objetos algebraicos intensivos, b) el tratamiento que se aplica a dichos objetos y c) el tipo de lenguajes usados (Godino et al., 2014).

Los indicadores de la actividad matemática se organizan en niveles progresivos de algebrización, los cuales abarcan tanto la ausencia de razonamiento algebraico, como su presencia. Pese a la ausencia de un estudio de caso, integrado por estudiantes de Educación Básica, el cual hubiese permitido hacer un seguimiento detallado tanto de las formas de abordar los problemas, así como del proceso de evolución de las competencias sobre identificación de objetos algebraicos y niveles de algebrización; la implementación y evaluación de las situaciones desarrolladas con maestros en formación, indiscutiblemente proporciona pautas para ellos aprendan a identificar rasgos algebraicos en la actividad matemática escolar (Aké, 2013).

2.1.3. Aportes desde la resolución de problemas y la modelación matemática

Lins (1992) desarrolla una caracterización del *pensamiento algebraico* que incluye: *pensar aritméticamente*, *pensar internalistamente* y *pensar analíticamente*. Fundamenta tal caracterización en una revisión de literatura sobre investigaciones previas concernientes a dos tópicos: a) desarrollo histórico del álgebra y conocimientos matemáticos en culturas matemáticas culturalmente situadas (e.g., aspectos de la cultura matemática griega, china, etc.) y b) aprendizaje y enseñanza del álgebra (e.g., dificultades causadas por el uso de la notación literal). Para este autor, el *pensamiento algebraico* es una forma de modelación y de manipulación de modelos; como una vía de organización del mundo que involucra diversas manifestaciones. En concreto, el pensamiento algebraico puede entenderse como una "intención", es decir, una manera en la cual una persona quiere hacer las cosas. Incluso si los conceptos o métodos necesarios para llevar a cabo esa intención no están disponibles o desarrollados.

La *aritmetización* del pensamiento algebraico, puede parecer paradójico, particularmente, porque las soluciones aritméticas y las algebraicas tienen matices diferentes. Sin embargo, tanto en aritmética como en álgebra, la base material es la misma, esto es, números y operaciones aritméticas (Lins, 1992). Así, pensar aritméticamente es modelar con números y usar las operaciones aritméticas, con el fin de producir relaciones que posibiliten la construcción de un modelo.

Por otro lado, pensar internalistamente es lo que permite distinguir el conjunto de significados generados por una determina forma de conocer. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones, diferenciar las soluciones en las cuales, las operaciones aritméticas son usadas como *objetos,* que tienen propiedades y sirven para actuar sobre los elementos de diversas formas no explicitas, o como *herramientas,* que indican cómo operar con los elementos. No obstante, la *aritmetización* y el *internalismo* del pensamiento algebraico guardan una estrecha relación, puesto que las operaciones aritméticas se convierten en objetos, pero simultáneamente son usadas como herramientas.

La *analiticidad* del pensamiento algebraico es un aspecto reconocible en diferentes culturas matemáticas (e.g, la griega). En el *análisis* lo "desconocido" se asume y utiliza como si fuese "conocido", es decir, lo desconocido toma lugar como parte de las relaciones que han de ser manipuladas, hasta llegar a algo conocido. En este sentido, pensar analíticamente es lo que permite manipular los elementos desconocidos (incógnitas, variables) en función de las propiedades generales de la clase de objetos a la que pertenecen (Lins, 1992).

La constatación y validación de esta propuesta teórica se hace a través de un estudio experimental con estudiantes de Educación Secundaria (segundo y tercer año), cuando resuelven problemas algebraicos verbales. Estos problemas fueron seleccionados, principalmente, porque no sugieren o imponen la elección de un modelo particular y porque abren posibilidades de análisis extra, por ejemplo, en el proceso de solución, que si se utilizan problemas en un contexto eminentemente numérico (Lins, 1992). En lugar de plantear un problema para cada tipo de ecuación, diseñaron un grupo de problemas correspondientes a la misma estructura examinada y así, compararon el efecto de diferentes valores numéricos y contextos situacionales para el mismo tipo de problema en la elección y eficiencia de los modelos utilizados.

Lins (1992) concluye que su caracterización del pensamiento algebraico provee un adecuado marco teórico para distinguir diferentes formas de modelar los problemas y manipular aquellos modelos. Además, arriba a que la distinción de esos modos de pensar permite identificar a) las tensiones que subyacen a la producción de un conocimiento algebraico, así como b) las fuentes de dificultades que presentan los estudiantes.

2.2 Otros aportes de investigación al estudio del pensamiento algebraico

Este apartado presenta otros aportes y estados de conocimiento sobre el pensamiento algebraico, sin que ello implique una ilustración detallada, como en el caso del apartado anterior. La idea es dar a conocer, de manera rápida, otros antecedentes que juegan un papel importante en la construcción del *modelo teórico* propuesto en la sección 2.5.

Un modelo dimensional para caracterizar el pensamiento algebraico: Carraher y Schliemann (2007) indican que hay relativamente pocos trabajos en la tarea de caracterizar exhaustivamente el pensamiento algebraico y el álgebra escolar. Incluso, exhiben algunas inconsistencias y superposiciones en las estructuras categóricas que desglosan el álgebra (e.g., Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). Por ejemplo, el hecho de combinar procesos no disjuntos de razonamiento (la generalización y resolución de problemas) con un tema de la matemática (funciones) y otro (modelación) que se pueden entender como un tópico matemático o un conjunto de procesos de razonamiento.

Apoyados en diferentes investigaciones (e.g., Kaput, 2000; Balacheff, 2001) estos autores, proponen un conjunto de dimensiones para la caracterización de variedades de razonamiento algebraico. Para su construcción emplean un gráfica cartesiana, con dos ejes y cuatro cuadrantes (ver figura 1). El eje horizontal se refiere a la *dimensión de control* y se basa directamente en los aportes de Balacheff (2001) con el manejo de inferencias semánticas en un extremo y el manejo de inferencias sintácticas en el otro extremo. El eje vertical o *foco de la dimensión*, hace referencia al domino en el cual el fenómeno es explicado, es decir, si pertenece al mundo extra-matemático o intra-matemático.

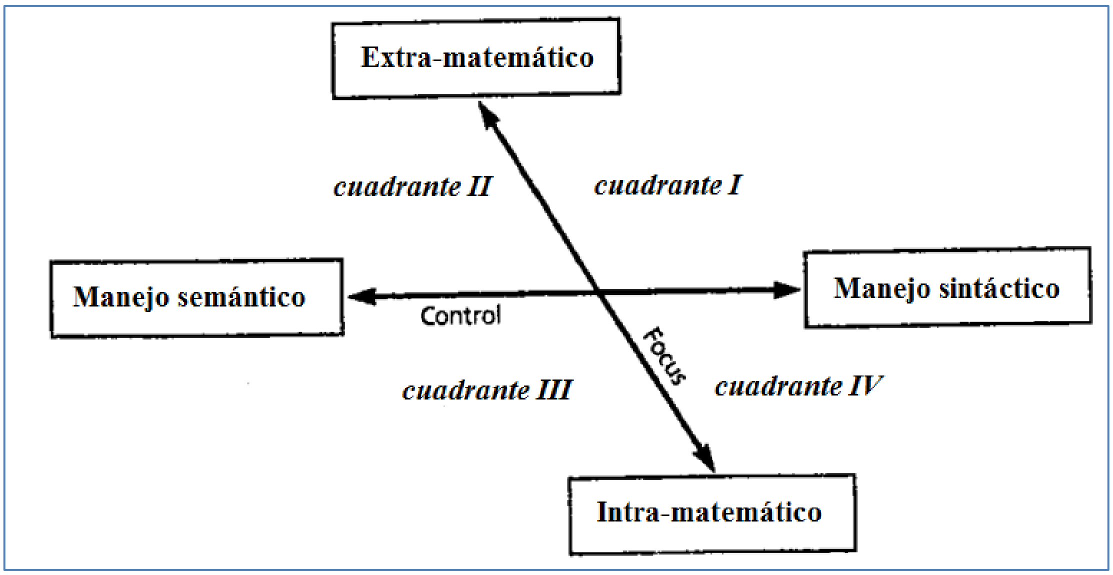


Figura 1. Dos dimensiones que subyacen los enfoques para el álgebra (versión traducida del original Carraher & Schliemann, 2007. p. 677)

El cuadrante I comprende los casos en los cuales, las representaciones matemáticas pueden influir en la inferencia de conclusiones acerca de los fenómenos extra-matemáticos. Por ejemplo, al saber que la densidad de la materia se puede describir como una razón de masa sobre volumen, un estudiante puede usar la fórmula $d = m/v$ para concluir; si se triplica el volumen se reduce la densidad en una tercera parte del valor inicial. Por otra parte, el cuadrante II remite a las inferencias acerca de los fenómenos del mundo real, con base en información de naturaleza no matemática. Por ejemplo, al describir cómo cambia la aglomeración de las moléculas de un gas, cuando el gas se mueve a un recipiente tres veces el volumen del anterior.

El cuadrante III se refiere a la manera en la cual, el uso de conocimientos propios o intuiciones acerca de los fenómenos del mundo real, ayudan a generar las representaciones matemáticas. A modo de ejemplo, suponga que se puede tomar la medición de la masa y el volumen de un conjunto de objetos elaborados con la misma sustancia, multiplicar la masa y el volumen y concluir que existe una relación invariante entre la masa y el volumen de los elementos de la misma sustancia.

La forma más extrema, remite al cuadrante IV, pues comprende formas de razonamiento algebraico que no tienen vínculos con experiencias o datos del mundo real. Es en este cuadrante, donde hay manipulación de símbolos independientemente de sus significados (Boero, 2001).

En esta propuesta, la modelación no está asociada con alguna región de la figura, sino con la totalidad del modelo. De manera que la modelación se concibe como un proceso central e inevitable en el aprendizaje de las matemáticas, aunque se reconoce que las actividades de modelación enmarcadas en el cuadrante IV son las más difíciles de trabajar para los estudiantes, puesto que ellos deben superar los obstáculos que trae consigo la instrucción de consideraciones semánticas cuando las cuestiones de sintaxis matemática merecen protagonismo. En cualquier caso, desde esta propuesta se acepta que los modelos construidos por los estudiantes, gradualmente, se convierten en objetos de estudio y teorización. Finalmente, Carraher y Schliemann (2007) mencionan que cualquier intento de dar cuenta del álgebra temprana necesita reconocer una asociación sustancial entre las complementariedades, a pesar de que cada dimensión puede considerarse de manera independiente.

Un modelo de actividad algebraica: Kieran (1996, 2004) elabora una propuesta que enmarca las actividades del álgebra escolar en tres tipologías: *generacional*, *transformacional*, y *meta-nivel global*. Las dos primeras distinguen el álgebra como un conjunto de conocimientos y técnicas, mientras que la tercera concibe el álgebra como una forma matemática de pensar.

Las *actividades generacionales* involucran la formación de expresiones y ecuaciones que son objetos del álgebra. Por ejemplo, a) ecuaciones que representan una situación problema, b) fórmulas que expresan generalidad a partir del trabajo con patrones geométricos o numéricos, c) expresiones sobre propiedades y relaciones matemáticas, y d) actividades que incluyen objetos que subyacen a las ecuaciones, tales como el significado del signo igual y la noción de solución de una ecuación (Kieran, 2004). Por otra parte, el foco de las *actividades transformacionales* es la factorización, expansión, sustitución, adición y multiplicación de expresiones polinómicas, la resolución de ecuaciones, simplificación de expresiones, trabajo con expresiones equivalentes, etc.

Finalmente, las actividades *meta-nivel global* son aquellas donde el álgebra es usada como una herramienta. Por ejemplo, se incluye en esta tipología, procesos matemáticos, tales como: resolución de problemas, modelación, generalizaciones, relaciones analíticas, pruebas y predicciones. Actividades que según Kieran (2004), particularmente, son esenciales para la construcción de significados en las *actividades generacionales*. Además, que se pueden realizar sin usar expresiones simbólico literales del álgebra (Aké, 2013).

En concordancia con su visión de las *actividades meta-nivel global*, Kieran (1996) reconoce que el pensamiento algebraico desborda el uso de los símbolos literales del álgebra, y años más tarde (Kieran, 2004) indica que el hecho de que estos procesos matemáticos puedan acoplarse sin hacer uso de los símbolos literales, los convierte en vehículos ideales para conceptualizar un enfoque orientado hacia el pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad. En concreto, para este autor, el pensamiento algebraico en los primeros grados tiene presencia por fuera del uso de los símbolos literales del álgebra e implica el desarrollo de formas de pensamiento que emergen al interior de los procesos matemáticos, para los que el álgebra es únicamente una herramienta.

Aritmética generalizada y pensamiento relacional: Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey (2007) caracterizan el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la aritmética generalizada y el estudio de las relaciones. Ellos argumentan que aprender a pensar algebraicamente en la escuela primaria, no sólo puede proporcionar un fundamento para suavizar la transición al álgebra en los grados posteriores, también es una vía para profundizar en la comprensión de la aritmética básica. Bajo esa premisa han encontrado que el *pensamiento relacional* es una poderosa idea unificadora que da sentido tanto a la aritmética como al álgebra, convirtiéndose en un elemento fundamental para el trabajo con profesores y estudiantes de educación básica. Por un lado, en el ámbito de los profesores, proporciona oportunidades para que ellos refuercen sus aprendizajes del álgebra y alcancen plenamente los objetivos propuestos en el plan de estudios. En el caso de los estudiantes, el pensamiento relacional es un aliado en la *comprensión* y uso de las relaciones numéricas.

La caracterización del *pensamiento relacional* incluye, la observación de expresiones y ecuaciones en su totalidad, en lugar de los procedimientos que se llevan a cabo paso a paso. Implica cierto nivel de conocimiento de las operaciones y de las propiedades de los números, pero no necesariamente una comprensión completa de ellas y de sus definiciones formales. La idea es que al poner la atención sobre las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse en los procedimientos de cálculos de respuestas, se puede hacer más coherente la enseñanza y el aprendizaje con los tipos de conocimientos que apoyan el aprendizaje del álgebra, y al mismo tiempo, apoyar y mejorar el aprendizaje de la aritmética (Carpenter et al., 2005).

Dado que el *pensamiento relacional* tiene entre sus objetivos integrarse en el plan de estudios para facilitar la transición de los estudiantes al estudio formal del álgebra en los grados posteriores, también puede interpretarse como una forma del pensamiento algebraico. Además, esta vinculación es consistente con los diálogos de investigación actual en álgebra (Jacobs et al., 2007). Entre los diferentes intereses y aplicaciones del *pensamiento relacional* se destacan a) la visión del signo igual como un indicador de una relación, b) el uso de las relaciones numéricas para simplificar cálculos, y c) la explicitación de relaciones generales, particularmente aquellas que se basan en las propiedades fundamentales de las operaciones.

2.3. Una mirada al contexto de resolución de ecuaciones lineales y su relación con el pensamiento algebraico

El contexto de resolución de ecuaciones ofrece una primera aproximación para que los estudiantes vinculen sus conocimientos de la aritmética y el trabajo con símbolos de la matemática. En efecto, es uno de los primeros modelos matemáticos que pueden construir los estudiantes al aplicar las matemáticas (Dickinson & Eade, 2004). La literatura de investigación reporta diversos trabajos centrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales (e.g., Andrews & Sayers, 2012, Dickinson & Eade, 2004, Van Amerom, 2003). En cada uno de estos trabajos se pueden distingir: dificultades de los estudiantes, estrategias de resolución de problemas, metodologias de trabajo y demás elementos que paralelamente aportan a la discusión general sobre la naturaleza del pensamiento algebraico.

Es ampliamente aceptado que los estudiantes suelen tener dificultades para formular ecuaciones algebraicas, representar la información establecida en los problemas contexualizados (de palabras) y aprender la formas en que los simbolos deben ser manipulados para obtener soluciones (Stacey & MacGregor, 1999; Warren, 2003). De manera particular, Andrews y Sayers (2012) identifican cuatro aspectos problemáticos que merecen atención al interior del contexto de la resolución de ecuaciones lineales: 1) los significados asociados al signo igual, 2) la resolución de ecuaciones con incógnitas a ambos lados de la igualdad, 3) la traducción simbólica de los problemas en contexto, y 4) la comprobación de la solución.

En relación con los significados atribuidos al signo igual, hay cierta conciliación en que el signo igual, aritméticamente, es usado como una indicación para ejecutar una acción y algebraicamente, involucra un significado relacional. Sfard y Linchevski, (1994) enmarcan esta separación en lo *operacional* (como proceso) y en lo *estructural* (como objeto), para la aritmetico y lo algebraico, respectivamente. La interpretación del signo igual como una señal para hacer algo, en contraste con su significado algebraico, es la base del *corte didáctico* (Filloy & Rojano, 1989) que emerge al transitar de la resolución de ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$ a ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, donde A, B, C y D son números determinados (Dickinson & Eade, 2004). Según, Filloy, Puig y Rojano (2012), en el primer caso, hay una noción aritmética de la igualdad: el miembro izquierdo de la ecuación es visto como una serie de operaciones que involucran números (un proceso) y en consecuencia, el lado derecho muestra el resultado (aritmética) de haber llevado a cabo dichas operaciones. Sin embargo, afirman que esta misma noción de la igualdad, no puede ser aplicada al segundo caso, ya que su solución operativa implica operaciones fuera del alcance de la artimética, tales como operar con lo desconocido.

Estas ideas concernientes al *corte didactico* (e.g., Filloy & Rojano, 1989) o *brecha cognitiva* (e.g., Herscovics & Linchevski, 1994) se han discutido desde hace algunas décadas. En concreto, la hipotesis es que los estudiantes partipan del álgebra, únicamente, si son capaces de comprender y utilizar su sintaxis (Brizuela & Schliemann, 2004). En términos de Filloy y Rojano (1989) los enfoques aritméticos pueden dar respuesta a casos tan complejos como ecuaciones con una incógnita en un solo miembro, pero se produce un *corte didáctico* cuando se trata de ecuaciones con incognitas en ambos miembros, porque son necesarios ciertos elementos de sintaxis algebraica que se construyen sobre la base de un conocimiento aritmético bien consolidado. Por su parte, Herscovics y Linchevski, (1994) se refieren a la *brecha cognitiva* como una falta de reconocimiento, por parte de los estudiantes, para operar de forma espontánea con lo desconocido. No obstante, algunos investigadores (e.g., Carraher & Schliemann, 2007) consideran que hay una postura extrema al argumentar que la dinámica de trabajo con este tipo de ecuaciones define un *corte cognitivo* entre la aritmetica y el álgebra. Si bien, reconocen el hecho de que existe un aspecto cambiante en el tránsito de una ecuación a otra, sostienen la posibilidad de una serie de casos intermediarios para cerrar dicho corte. Además, señalan que la acción de *deshacer* las operaciones indicadas, cuando se realiza en cada miembro de la ecuación, es una aplicación legitima de operaciones inversas donde lo aritmético sigue estando presente.

Un estudio desarrollado por Huntley, Marcus, Kahan y Miller (2007) entorno a la resolución de ecuaciones lineales, constata que los estudiantes emplean, inicialmente diferentes métodos informales como adivinar y verificar, y luego aprenden métodos más formales como realizar la misma operación a ambos lados de la igualdad. Al igual que Kieran (1992) indican que gran parte de las dificultades de los estudiantes es producto de la forma rutiniaria de manipulación de las ecuaciones y de la falta de conciencia sobre la estructura que subyace a las manipulaciones que realizan. Apoyados en ideas de Sfard y Linchevski (1994) argumentan que la a) *versatilidad*, entendida como la colección de herramientas que tiene el estudiante para resolver un problema y la capacidad de usar esas herramientas, y la b) *adaptabilidad* referente a la capacidad de seleccionar y utilizar las herramientas adecuadas, necesitan ser examinadas para evaluar la competencia algebraica de un estudiante.

En cuanto a la traducción simbólica de los problemas en contexto, Andrews y Sayers (2012) citando a Pawley, Ayres, Cooper y Sweller (2005) indican que la traslación de las palabras a las ecuaciones, es un asunto dificil para los estudiantes, que incluye aprender a a) identificar la información relevante, b) hacer coincidir las palabras clave con sus correspondientes símbolos algebraicos y c) construir relaciones entre las cantidades. Sin embargo, otras investigaciones (e.g., Reeuwijk, 1995; Van Amerom, 2003) ilustran que pese al obstáculo de la simbolización formal, los estudiantes pueden resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, tanto en un nivel formal como informal, empleando estrategias que, usualmente, se apoyan en representaciones no convencionales. Sus resultados muestran que un enfoque *abajo-arriba* basado en los métodos informales que los estudiantes ya utilizan, hacia los métodos formales del álgebra, puede ayudar a minimizar la discrepancia entre la aritmética y el álgebra. Al parecer a) un enfoque en las relaciones y no simplemente en el cálculo, b) un enfoque en las operaciones, así como sus inversas, y en la idea relacionada de hacer/deshacer, c) un enfoque en lo que representa la solución de un problema y no solamente en su resolución, y d) la reorientación del significado del signo igual como relación de equivalencia, aunque siguen estando inscritos en el dominio de la aritmética, también representan un movimiento hacia el desarrollo de las ideas fundamentales en el estudio del álgebra (Cai & Knuth, 2011).

Por su parte, Stacey y MacGregor (1999) indican que, pese a la diversidad de estudios entorno a los procesos de comprensión de los problemas de palabras, no es fácil para los estudiantes transitar de la comprensión de un problema a la formulación de una ecuación o un conjunto de ecuaciones. Si bien, ellos comprenden los problemas, la gran mayoria no formulan ecuaciones, aunque consiguen llegar a la solución correcta, empleando diferentes métodos y estrategias *no-algebraicas*, tales como: el ensayo y error. Al igual que estos autores, Van Amerom (2003) argumenta que esos métodos basados en razonamientos aritméticos y notaciones informales representan, en el marco de la enseñanza, una vía apropiada para que los estudiantes transiten de un modo aritmético de resolver problemas a uno algebraico.

De manera especial, Andrews y Sayers (2012) mencionan las dificultades extras que experimentan los estudiantes debido a los factores sintácticos y semánticos inherentes al lenguaje de las matemáticas. El ejemplo de reversión de la variable es el más conocido, en el que los estudiantes producen la ecuación $6s = p$ para representar la frase: hay seis estudiantes más que profesores (Rojano, 1994). Al parecer la búsqueda por una clara estructura sintáctica de izquierda a derecha que conserve el orden de las palabras, es lo que trae consigo el fracaso en la formulación de la ecuación, pero la enseñanza previa y los libros de textos escolares están ampliamente implicados, porque enseñan a los estudiantes a construir oraciones numéricas y ecuaciones algebraicas, haciendo coincidir las señales verbales a los símbolos matemáticos de izquierda a derecha. En general, cuando los estudiantes formulan ecuaciones para representar situaciones cuantitativas, suelen utilizar estrategias, tales como: la coincidencia en el orden de las palabras y las comparaciones de cantidades desiguales, las cuales han demostrado tener fuertes implicaciones sobre el famoso error de reversión (Hackenberg & Lee, 2015).

En términos generales, los enfoques de enseñanza en torno a las ecuaciones lineales privilegian una de dos posturas. La primera se centra en la sintaxis de la matemática, de manera que las ecuaciones son presentadas como modelos totalmente localizados en el mundo de las matemáticas, mientras que la segunda postura hace énfasis en la explotación de los contextos del mundo real, como una forma de proporcionar significados (Andrews & Sayers, 2012). En la segunda postura los modelos sirven para visualizar la solución de la situación de forma esquematica, a través de modelos concretos, tales como: el modelo de balanza, el modelo geométrico, el modelo aritmético, el modelo de agenda (Van Amerom, 2003) y el modelo lineal. Estos modelos dotan de significado los objetos y operaciones en situaciones abstractas, pero es importante que los estudiantes puedan identificar las operaciones y los objetos tanto en el nivel concreto, como en el nivel abstracto (Kieran, 1992).

2.4. Consideraciones iniciales en la construcción de un modelo de algebrización

En este apartado se discuten los elementos preliminares que dan lugar a los tres componentes algebraicos constituyentes de un modelo de algebrización, limitado al contexto de resolución de ecuaciones lineales. Desde esta observación, la idea de pensamiento algebraico remite a la descripción de una actividad matemática que abarca a) el trabajo con ecuaciones lineales, b) significados del signo igual, c) formas analíticas de proceder, y d) diferentes notaciones para representar los objetos matemáticos. Así, la conceptualización del pensamiento algebraico que aquí se esboza, sienta las bases para construir un modelo de algebrización que incluye tres componentes: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

El *componente relacional* destaca hallazgos de diversas investigaciones, enmarcadas en la resolución de ecuaciones. Dichas investigaciones y otras más, interesadas en la naturaleza del pensamiento algebraico (e.g., Asquith, Stephens, Knuth, & Alibali, 2007; Kieran, 1992), convergen en que el significado relacional del signo igual es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Al parecer una comprensión más rica del signo igual, que la proporcionada por la aritmética tradicional, genera mayores oportunidades de éxito con el álgebra de las ecuaciones (Blanton et al., 2015).

Por otra parte, el *componente notacional* para ser indispensable en la comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes (Radford, 2015a; Godino et al., 2014; Vergel, 2014; Van Amerom, 2003). Si bien, es necesario orientar una buena parte de la enseñanza del álgebra hacia el aprendizaje y comprensión de las reglas sintácticas, también hay que reconocer que el álgebra implica trabajo con otras formas notacionales que incluyen representaciones visuales y materiales, tales como: dibujos, tablas y diagramas (Brizuela & Schliemann, 2004).

Por último, el *componente analítico* es considerado por la presencia de la analiticidad como un aspecto distintivo del pensamiento algebraico (Lins, 1992; Radford, 2010a) que tiene sus orígenes históricos en la formalización del "método analítico" definido por Vieta y Descartes, alrededor del siglo XVI. La lógica de este método es diferente a la utilizada para resolver problemas aritméticos. En el método analítico, las relaciones entre las cantidades se describen empleando los datos conocidos y los desconocidos de manera similar, construyendo relaciones equivalentes a partir de ellos, hasta que se obtiene una respuesta al problema (Stacey & MacGregor, 1999).

La decisiva introducción del método analítico al campo de la resolución de problemas matemáticos, en particular con el álgebra, posiciona el cálculo analítico como una característica clave para distinguir a) niveles de algebrización en el razonamiento algebraico elemental (Aké, 2013; Godino et al., 2014) o bien, b) formas de pensamiento algebraico sofisticadas (Radford, 2010a; Vergel, 2014).

2.5. Propuesta para la construcción de un modelo de algebrización

Diversos investigadores (e.g., Carpenter et al., 2005; Carraher et al., 2006; Radford, 2014) han señalado la importancia que tiene, desde los primeros niveles, la promoción del pensamiento algebraico en el ámbito escolar. Incluso, en un estudio reciente Vergel (2015) indica que la *zona de pensamiento algebraico* necesita ser conceptualizada, a través de uno o varios modelos analíticos que proporcionen herramientas para comprender la actividad algebraica de los estudiantes. Este trabajo contribuye a este esfuerzo de investigación y desarrollo del pensamiento algebraico, al proponer un modelo de algebrización que apunta hacia la caracterización de formas de pensamiento algebraico, enmarcadas en el contexto de resolución de ecuaciones lineales.

Antes de discutir en profundidad estos componentes, sus relaciones y, la manera en que se pueden caracterizar para analizar la actividad algebraica de los estudiantes, es importante señalar algunos aspectos del modelo. En primer lugar, se trata de un modelo "local" que no pretende constituirse en un marco explicativo global, pues no aborda cuestiones asociadas, por ejemplo, a la resolución de problemas funcionales. En segundo lugar, no se sugiere que la actividad con ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, pueda estudiarse, únicamente, mediante los componentes señalados y sus relaciones. La indeterminancia, en el sentido de Radford (2010), es propio de lo algebraico, pero agrega una variable que por sí misma resulta compleja de aislar. Finalmente, el modelo se basa en la resolución de problemas y modelación matemática, como perspectiva de introducción del álgebra escolar, lo cual no sugiere que está perspectiva sea independiente, o más importante que otras perspectivas que han sido consideradas en el estudio del pensamiento algebraico.

La revisión de literatura en torno al pensamiento algebraico (e.g., Aké, 2013; Godino et al., 2014; Lins, 1992; Vergel, 2014, 2015), así como la mirada a diversos trabajos de investigación enmarcados en el contexto de la resolución de ecuaciones (e.g., Andrews & Sayers, 2012; Hackenberg & Lee, 2015; Huntley, Marcus, Kahan, & Miller, 2007; Van Amerom, 2003) posibilitan la construcción de un modelo de algebrización que pretende ser útil en la caracterización de formas de pensamiento algebraico configuradas en estudiantes de Educación Básica (11-13 años) como resultado del trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales. La estructura de este modelo se basa en articulación de tres componentes algebraicos que lo constituyen: a) *componente relacional*, b) *componente analítico* y c) *componente notacional* (Fig. 2).

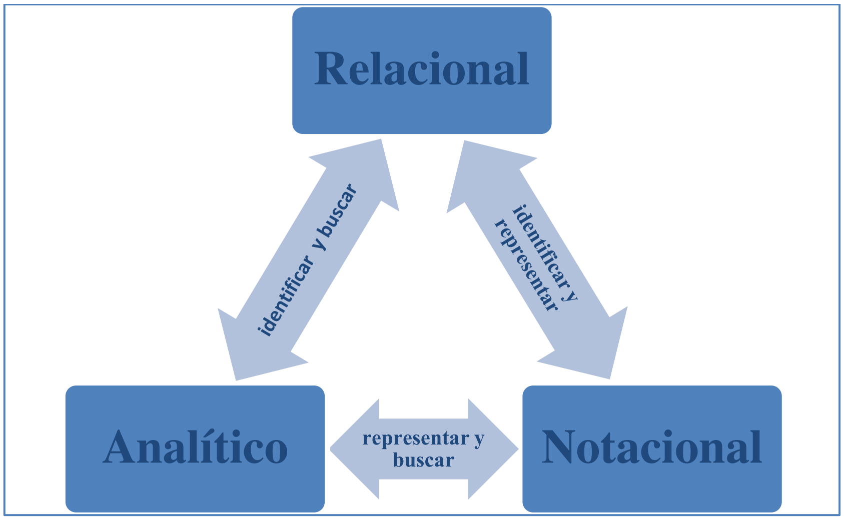


Figura 2. Modelo de algebrización

Individualmente cada componente aborda una dimensión ontológica de las nociones matemáticas, en términos de dos categorías: *operacional* y *estructural* (Sfard, 1995; Sfard & Linchevski, 1994). Aunque se reconoce el hecho de que esa diferenciación es evidente en algunos casos y objeto de debate en otros, metodológicamente resulta útil. En primer lugar, la delimitación aporta elementos para construir un puente entre la aritmética y el álgebra. Y en segunda instancia, se constituye en una herramienta para identificar formas de pensamiento algebraico, en diferentes niveles de concreción.

El *componente relacional* incluye dos significados asociados al signo igual. La literatura de investigación revela que gran parte de los estudiantes de Educación Básica carecen de un *significado relacional* del signo igual y en su lugar, presentan un *significado operacional* (Asquith et al., 2007). El *significado relacional* indica una equivalencia entre dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. En contraste, el *significado operacional*, sitúa el signo igual como un operador, es decir, una instrucción para realizar una operación. La consideración de dos significados para el signo igual, tiene consonancia con numerosos estudios. La tabla 1 ilustra algunas investigaciones, cronológicamente organizadas, que destacan este hecho.

El *componente notacional* está conformado por dos categorías que integran las cuatro formas de representación más resonantes en la literatura de investigación. Las *notaciones simbólicas*, involucran el uso de símbolos alfanuméricos (literales) para representar los objetos desconocidos y las relaciones matemáticas entre las cantidades. En contraste, las *notaciones singulares*, implican representaciones concretas, gráficas y verbales; y las letras aparecen, únicamente, como etiquetas o abreviaciones para designar un objeto.

Investigaciones	**Significados del signo igual**	
	Operacional	*Relacional*
(Kieran, 1992)	El signo igual anuncia un resultado	El signo igual representa una equivalencia
(Jacobs et al., 2007)	Una señal para realizar el cálculo que le precede.	Indicador de una relación entre dos expresiones
(Ramírez García & Rodríguez Marcos, 2011)	Indicador de llevar a cabo la operación aritmética que le precede	Relación de equivalencia numérica entre las dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual

Tabla 1. Investigaciones que reportan dos significados relativos al signo igual

Esta caracterización del *componente notacional* guarda una estrecha relación con las ideas desarrolladas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000), quienes expresan que las notaciones deben incluir representaciones concretas, numéricas, verbales y simbólicas; inventadas y convencionales. Estas cuatro formas de representación pueden concebirse como una colección de herramientas que están a disposición de los estudiantes al momento de resolver un problema (Van Amerom, 2003) y son consideradas en diversos estudios para explorar perspectivas del pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Huntley et al., 2007). Además, se pueden poner en correspondencia con las fases del desarrollo histórico del álgebra, enmarcando las *notaciones singulares* tanto, en la fase retórica como en la sincopada, y las *notacionales simbólicas* en la fase simbólica del álgebra (Van Amerom, 2003)

Desde la visión adoptada para el *componente notacional* se rescata la importancia que posee la notación simbólica como un sistema de representación básico de las matemáticas y un indicador de pensamiento algebraico (Brizuela & Schliemann, 2004); como una forma de expresar los *objetos* y *procesos* algebraicos en niveles superiores de algebrización (Aké, 2013). Además, al igual que otras investigaciones (e.g., Van Amerom, 2003; Kieran, 2004; Radford, 2014) se reconoce que el pensamiento algebraico está asociado con diferentes formas de representación que desbordan el marco de la *notación simbólica*. Al respecto, Kieran (2004) señala que el álgebra simbólica-literal puede ser usada como herramienta o apoyo cognitivo de creación y para sostener un discurso en la escuela, pero insiste en que se puede estar involucrado en actividades algebraicas sin utilizar, en absoluto, algún símbolo literal, por ejemplo; al analizar las relaciones entre cantidades.

Finalmente, el *componente analítico* enmarca dos categorías: *contextual* y *sintáctica*. Según, Cai y Knuth (2011) un análisis detallado de las formas en las cuales los problemas se resuelven usando aritmética y álgebra puede ayudar a reconocer aspectos claves del pensamiento algebraico. En palabras de Radford (2010, 2014) dicho análisis es decisivo en la identificación de la *analiticidad* como componente fundamental del pensamiento algebraico. Además, tal como indica, Lins (1992) la forma analítica de abordar un problema, parece ser una constante dentro del pensamiento algebraico.

En términos generales, la conceptualización del *componente analítico* se basa en ideas de Radford (2010, 2013) y Vergel (2015) sobre la *analiticidad*; como forma de trabajar los objetos indeterminados o el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos. Desde esta postura, la analiticidad no emerge, exclusivamente, de manera *sintáctica*, sino que además, tiene presencia en escenarios donde lo indeterminado empieza a ser objeto de discurso (Vergel, 2015). Por lo tanto, el *componente analítico*, está asociado al carácter operatorio de lo desconocido, pero también se refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas.

En el marco de la presente investigación, se entiende la *analiticidad sintáctica* como la forma de operar con los objetos indeterminados a través de las reglas sintácticas del álgebra. Así, lo desconocido es el punto de partida del proceso de solución, en el que el símbolo, en sí mismo, es el objeto de manipulación. En cambio, la *analiticidad contextual* implica una forma de trabajo que no opera con la sintaxis algebraica. Si bien, pueden usarse literales para representar lo desconocido, los cálculos se realizan utilizando, esencialmente, las operaciones y sus inversas sobre cantidades conocidas, de tal manera que lo desconocido no está involucrado, directamente, en los cálculos. El énfasis esta puesto sobre las cantidades y sus relaciones.

Por un lado, la *analiticidad contextual*, en correspondencia con las ideas de Vergel (2015) está implicada en argumentos escritos por los estudiantes, que no necesariamente remiten a una forma simbólica. Por otra parte, la *analiticidad sintáctica* le asigna un lugar protagónico a la *notación simbólica*. De este modo, la *analiticidad sintáctica* guarda cierta relación con los planteamientos de Puig y Rojano (2004) quienes argumentan que el carácter analítico del uso de los sistemas de signos, para reducir el enunciado del problema a una forma canónica, es una característica de lo algebraico. De hecho, Godino et al., (2014) consideran que en un nivel propiamente algebraico se opera de manera analítica/sintáctica sobre un lenguaje simbólico-literal.

Las conexiones entre los componentes algebraicos se delimitan sobre la base de la perspectiva de la *resolución de problemas* y *la modelación matemática*. Los términos *identificar*, *buscar* y *representar* se entienden como actividades fundamentales que emergen y se desarrollan al interior de los procesos de modelación. Desde esta visión, el trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales, implica *identificar* las relaciones entre las cantidades, que son relevantes en el contexto de la tarea; *buscar* nuevas relaciones matemáticas a través de las formas analíticas de proceder; y *representar* las relaciones matemáticas mediante las formas notacionales.

Las actividades descritas son consistentes con aquellas que sustentan el proceso de *matematización* (Freudenthal, 1973) desde sus dos fases. Por un lado, se corresponden con la *matematización horizontal* en aspectos, tales como: a) la <u>identificación</u> de la matemática que es relevante respecto al problema, b) la <u>búsqueda</u> y hallazgo de regularidades, relaciones y patrones, y c) la <u>esquematización</u>, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista. De otra parte, guardan alguna relación con actividades propias de la *matematización vertical*, tal como: el uso de diferentes <u>representaciones</u> sujetas a estrategias de reflexión, generalización, prueba y simbolización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Marco metodológico general de la investigación

La presente investigación tiene como objetivo caracterizar el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado de Educación Básica, como resultado del trabajo con tareas enmarcadas en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. En concordancia con este objetivo se considera la búsqueda de un método que permita un buen acercamiento al escenario de investigación y a los estudiantes. Emerge así, el interés por un enfoque metodológico de tipo cualitativo.

El enfoque cualitativo permite estudiar la naturaleza profunda de los fenómenos, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren al interior de dichos fenómenos (Martínez, 2006). Entre otras bondades, diversos investigadores (e.g., Hernández, Fernández y Baptista (2006) insisten en que las etapas del proceso cualitativo en realidad son acciones para profundizar más en el problema, lo que hace el proceso iterativo o recurrente, alejado de la linealidad del proceso cuantitativo.

La revisión de literatura en torno a las metodologías empleadas para estudiar el pensamiento algebraico, privilegia ampliamente los métodos cualitativos. A modo de ejemplo, Vergel (2014) indica que este enfoque involucra una mejor descripción del fenómeno o problema didáctico bajo estudio, en su caso, la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de escuela elemental (9-10 años). Por su parte, Lins (1992) emplea una aproximación metodológica de corte cualitativo para analizar los datos de su estudio principal, concerniente a la determinación de la naturaleza de los modelos no algebraicos construidos por un grupo de estudiantes (12-13 años). Aunque esta última investigación presenta rasgos cuantitativos, el autor resalta que ningún tratamiento estadístico se aplicó sobre los datos y que los resultados obtenidos en términos de porcentajes, únicamente, sugieren tendencias subyacentes de modelado, dado que cualquier inferencia es apoyada por instancias eminentemente descriptivas.

3.2. Diseño del estudio de caso

La investigación se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa. En particular, un estudio de caso *descriptivo* e *interpretativo* (Hernández et al., 2006), sin que ello implique una delimitación exclusiva, puesto que también se consideran las fases metodológicas propuestas en diferentes investigaciones interesadas en la caracterización del pensamiento algebraico (e.g., Aké 2013).

La integración y articulación de ambos aspectos posibilita un marco metodológico coherente para caracterizar el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de Educación Básica, cuando abordan tareas concernientes a la resolución de ecuaciones lineales.

En la primera etapa, se recogen diversas propuestas de investigación relativas a la caracterización del pensamiento algebraico desde diferentes escenarios teóricos, incluyendo de manera especial, los desarrollos asociados al trabajo con ecuaciones lineales. A través de la articulación de estas dos dimensiones se propone en el capítulo 2 un modelo de algebrización que posibilita la exploración y descripción de formas algebraicas de pensar en el contexto matemático de interés.

Posteriormente, en una segunda etapa, se elabora un estudio de tipo preliminar en torno a la secuencia de tareas consideradas para estudiar las formas de pensamiento algebraico. El objetivo de esta etapa, como se detalla en apartados posteriores es lograr interpretar las producciones de los estudiantes, en términos de unas categorías de solución consistentes con las caracterizaciones atribuidas al modelo de algebrización.

Finalmente, en la tercera etapa, se desarrollan dos análisis: uno exploratorio y otro descriptivo, a través de los cuales se analizan la emergencia, evolución y conexión existente entre los componentes asociados al pensamiento algebraico en el contexto de las ecuaciones lineales. Los mismos son ampliados y justificados en el apartado de 3.3.

El contexto

La investigación se desarrolla en el contexto de un "club de matemáticas", ubicado en una zona urbana del estado de Guerrero, México. A diferencia de una escuela local, este club ofrece asesorías y programas de mejoramiento focalizados en el área de matemáticas. Además, sus clases están orientadas a una población matemática particular que involucra únicamente estudiantes de escuela primaria y secundaria.

El club atiende alrededor de 400 estudiantes distribuidos en toda la Educación Básica. Dispone de una única jornada escolar en el horario de 2:00 pm a 8:00 pm. Las clases para los estudiantes se distribuyen de acuerdo a su nivel de escolaridad, con una frecuencia de tres veces por semana en una sesión de clase regular de tres horas.

Los participantes

Los estudiantes que integran la muestra, están distribuidos equitativamente en los tres grados escolares de interés. Así, se consideran las producciones elaboradas por cinco estudiantes de sexto, cinco de séptimo y cinco de octavo. La muestra no se escoge de manera aleatoria. Los estudiantes que la conforman son sugeridos por el coordinador del club de matemáticas, quien considera, en correspondencia con los objetivos de la investigación, trabajar con estudiantes que muestran mejores logros académicos, tanto en sus escuelas, como en el club.

Los instrumentos

Las producciones escritas de los estudiantes constituyen la fuente de información principal para elaborar los análisis y responder a la pregunta de investigación, básicamente porque a partir de estas se estudian cómo emergen, evolucionan y se relacionan los componentes algebraicos asociados al modelo de algebrización inicial. De esta manera, las producciones escritas son el insumo fundamental para caracterizar formas algebraicas de pensar.

Adicionalmente, se consideran las grabaciones de video de cada una las sesiones de trabajo con los estudiantes, con el objeto de evidenciar acciones que se articulan con las producciones escritas y que por tanto, hacen más ostensivo el análisis. La figura 3 ilustra la disposición espacial de la cámara de video empleada durante la puesta en escena de la secuencia de tareas.

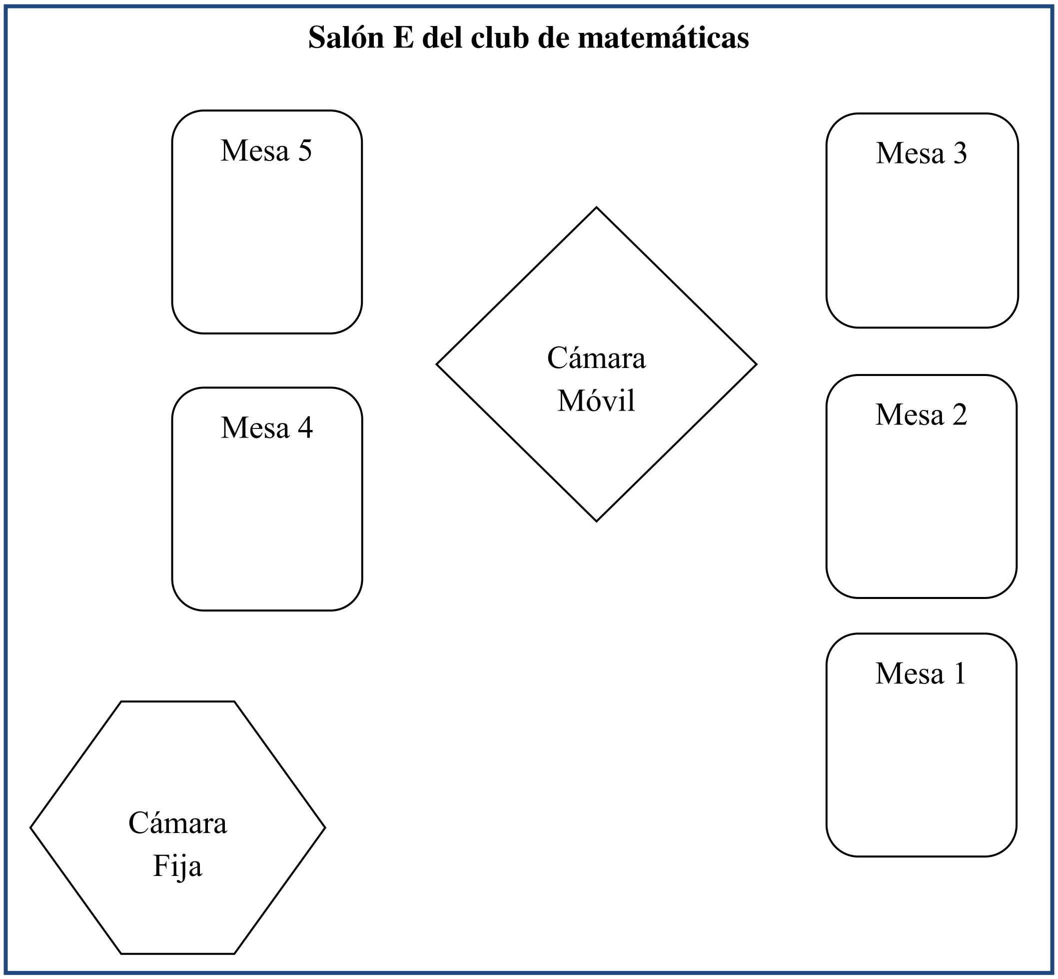


Figura 3. Distribución de los recursos tecnológicos

El procedimiento

La implementación de la secuencia considera dos momentos de intervención con los estudiantes. Inicialmente, se solicita a los estudiantes que desarrollen las tareas 1, 2, 3, 4 y 5. Un segundo momento, involucra la resolución de las tareas 6, 7 y 8. Los momentos de intervención determinan las sesiones de trabajo. La tabla 2, especifica el desarrollo cronológico de las dos sesiones de trabajo, con sus respectivos tiempos y fechas. Algunos estudiantes no asistieron a la segunda sesión de trabajo, razón por lo cual, fue necesario programar una sesión extra para poder construir el caso.

Momentos de intervención	Grados		
	Sexto	**Séptimo**	**Octavo**
Primera sesión	18/11/2015 14:00-15:30	18/11/2015 18:00-19:30	19/11/2015 14:00-15:30
Segunda sesión	20/11/2015 14:00-15:00	20/11/2015 18:00-19:00	21/11/2015 14:00-15:30
Sesión extra		25/11/2015 18:00-19:00	25/11/2015 18:00-19:00

Tabla 2. Momentos de intervención con los estudiantes del caso

3.3. Alcances de la investigación

Uno de los objetivos de esta investigación es construir un modelo de algebrización que describa las condiciones en las cuales se manifiestan formas algebraicas de pensar en un grupo de estudiantes de Educación Básica, cuando se enfrentan a la resolución de tareas enmarcadas en el contexto de las ecuaciones lineales. Desde esta visión, la presente investigación es esencialmente *descriptiva*. Sin embargo, no se sitúa únicamente como tal, considera, inicialmente, elementos de un estudio exploratorio.

Las investigaciones relacionadas con la caracterización del pensamiento algebraico, generalmente, incluyen diferentes alcances en las distintas etapas de su desarrollo metodológico. Así, la presente investigación involucra la integración de un análisis exploratorio y un análisis descriptivo, este último constituido por dos fases: una de corte vertical y otra de corte horizontal. El análisis exploratorio es pertinente porque la problemática de interés ha sido objeto de pocos estudios y porque no hay respuestas claras sobre la naturaleza del álgebra y sus límites con la aritmética (Socas, 2011). Además, este tipo de análisis posibilita nuevas rutas de comprensión, dado que aborda la cuestión desde una perspectiva particular, y genera mayor familiarización con el problema. Entre otros aspectos, favorece la postulación de nuevos problemas, establece prioridades para la investigación y sugiere afirmaciones sobre los hechos observados (Hernández et al., 2006). En consecuencia, no constituye un fin en sí mismo, por el contrario, puede verse como un instrumento que identifica situaciones de estudio y promueve el hallazgo de relaciones potenciales entre las variables de interés.

Por otra parte, el análisis descriptivo busca especificar las características y los perfiles de las personas, grupos, procesos, objetos o cualquier fenómeno que se someta a un análisis (Hernández et al., 2006). En lo que concierne a la presente investigación, el análisis descriptivo es fundamental para reconocer cómo emerge, se desarrolla y evoluciona el pensamiento algebraico a través del largo tiempo que implica transitar de sexto a octavo grado. Además, permite precisar y responder las cuestiones sugeridas por el análisis exploratorio, para así describir lo que se investiga. En este estudio, el análisis descriptivo enriquece el análisis exploratorio y recoge información de manera independiente y conjunta sobre las relaciones existentes entre cada uno de los componentes algebraicos propuestos en la secuencia de tareas.

3.4. Construcción de la secuencia de tareas

En este apartado se discute el proceso de justificación, selección y adaptación de las tareas propuestas. En primer lugar, cada una de las tareas que conforman la secuencia se pone en correspondencia con al menos, uno de los componentes algebraicos que caracterizan el modelo de algebrización. De hecho, algunas tareas incluyen dos componentes y la secuencia finaliza con una tarea que los integra todos.

En segunda instancia, para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico en el contexto matemático de interés, se considera fundamental en el diseño de la secuencia, trabajar con tareas progresivamente más complejas. La hipótesis del diseño se basa en que, la complejidad misma, depende de la cantidad de componentes algebraicos que involucre la tarea. Así, una tarea centrada en un componente (e.g., analítico) debe presentar menos inconvenientes para los estudiantes, que una tarea con dos o más componentes (e.g., notacional-analítico).

Las tareas que conforman la secuencia son producto de un proceso de selección y en algunos casos, de adaptación de situaciones previamente implementadas en otras investigaciones, focalizadas en el estudio del álgebra escolar y el pensamiento algebraico. Las tareas #1 y #2 hacen parte de una investigación reciente desarrollada por Blanton et al., (2015). En dicha investigación, ambas tareas se enmarcan en una sola situación, constituida por dos ítems; y es implementada para identificar la manera en la cual, la igualdad es tratada por los estudiantes. Aunque la propuesta de Blanton et al., (2015) se gestiona en el tercer año de educación primaria, ello no resulta inconsistente para el presente estudio, puesto que este tipo de tareas han sido implementadas con estudiantes, tanto de escuela primaria, como de secundaria (see, e.g., Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007; Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005). Dado que estas tareas se inscriben dentro del componente relacional, en esta investigación se denotan como tareas tipo R.

La tarea #3 definida como tipo A, se inscribe en el componente analítico y hace parte de un problema de aplicación práctica, propuesto en el libro de texto: Álgebra, del grupo editorial McGraw-Hill (décima edición, p.138). La selección de esta tarea tiene concordancia con el objetivo perseguido, el cual pretende movilizar en el estudiante el trabajo con las operaciones básicas y sus inversas, para encontrar un valor desconocido. Además, la manera en la cual se presenta la tarea posibilita la emergencia de ambas formas analíticas de proceder.

Con el objetivo de explorar formas notacionales en las representaciones usadas por los estudiantes, se plantea la tarea #4. Dicha tarea se cataloga como tipo N y hace parte de un problema propuesto por Carraher y Schliemann (2008, p. 238), el cual fue implementado para ilustrar, cómo los estudiantes jóvenes (8-10 años) utilizan diferentes notaciones que, luego de un largo proceso de instrucción (18 meses) con actividades algebraicas tempranas que incluyen, variables, funciones, números enteros, gráficas y ecuaciones, se consolidan en la notación simbólica. Si bien, este problema fue diseñado para trabajar con estudiantes cuyas edades no corresponden a las consideradas en la presente investigación, la selección es pertinente porque el trabajo con este tipo de problemas, ha demostrado que los estudiantes movilizan sus representaciones a través de las formas notacionales caracterizadas en el modelo de algebrización propuesto.

El foco de atención de la tarea #5 está orientado a la búsqueda de interrelaciones entre el componente *notacional* y el componente *analítico*, razón por la cual se denota como tipo NA. La estructura de las preguntas, pretende instaurar una dirección de trabajo que deje entrever cómo los estudiantes se apoyan en sus notaciones para actuar analíticamente. Dicha tarea es producto de la adaptación de un problema propuesto por Brizuela y Schliemann (2004, p. 35). El contexto asociado al dinero, no se cambió, pero se agregó una relación cuantitativa entre las dos cantidades desconocidas. De manera que se añadieron las preguntas c) y d). La pregunta c) pretende darle continuidad a la tarea #4 en lo referente al componente notacional, mientras que la pregunta d) busca la emergencia de formas analíticas de proceder con las notaciones empleadas en los ítems anteriores.

La sexta tarea, pertenece a la tipología RN, atendiendo lo *relacional* y lo *notacional*. Básicamente, remite a la reconocida situación de inversión de la variable, referida por Usiskin (1988), Andrews y Sayers (2012) entre otros. Se trata de un enunciado que no puede ser representado apelando, únicamente, a la estructura sintáctica del mismo, dado que una de las relaciones a inferir no se puede construir por medio de la traducción sintáctica.

La tarea #7 se inscribe en el tipo RA. La idea de esta tarea es examinar, cómo los estudiantes identifican y construyen relaciones entre las cantidades. Para ello, se selecciona una situación propuesta en el módulo "comparando cantidades" (Kindt et al., 2010), cuyo contexto remite al problema típico de "las balanzas", caracterizado por ciertas relaciones dadas entre el peso de varias frutas. Por su parte, la tarea RA adapta dicho contexto de tal manera que las relaciones dadas, no dependen del peso, sino del precio con otras frutas.

Finalmente, se selecciona y adapta la tarea #8, la cual integra los tres componentes algebraicos, definida como tipo RAN. Lins (1992) utiliza este tipo de tareas para estudiar la actividad algebraica modelada por un grupo de estudiantes de Educación Básica. Se trata de tareas que implican la determinación de un número, donde los modelos que subyacen a los problemas propuestos no presentan, en muchos casos, la generalidad como un método distintivo del álgebra. En la versión de Lins (1992) se hace una única pregunta: ¿Cuál es el número secreto?, solicitando al estudiante una explicación de su procedimiento. La adaptación elaborada, integra dos preguntas más. La pregunta a) pretende explorar la manera en la cual los estudiantes interpretan en el enunciado la palabra igual, mientras que la pregunta c) buscar darle lugar al uso de formas notacionales.

3.5. Análisis preliminar de las tareas

En este apartado se discute, a la luz del modelo de algebrización propuesto, un análisis preliminar de cada una de las tareas que integran la secuencia. Para ello, se consideran unas *categorías de solución*, a través de las cuales, las producciones de los estudiantes son interpretadas en términos de las características del modelo (ver tablas 3 y 4). Las categorías de solución se entienden como posibles respuestas de los estudiantes, no necesariamente acordes con sus niveles de escolaridad. Además, no pretenden dar un juicio acerca de formas algebraicas de pensar, es decir, únicamente están designadas para describir el modo de presentación de las soluciones y no, el modelo de pensamiento algebraico subyacente. Así, por ejemplo, una solución simbólica no implica, necesariamente, la presencia de pensamiento algebraico. Sin embargo, un análisis preliminar sobre la base de estas categorías, es fundamental, porque posibilita un análisis exploratorio que sugiere ciertas cuestiones y respuestas relacionadas con la emergencia, evolución y conexión de los componentes del pensamiento algebraico. Además, estas categorías son adecuadas por dos razones: a) son comprensibles y pueden ser aplicadas en estudios con fines similares y b) se basan en la interpretación de resultados obtenidos previamente por otras investigaciones.

Tareas	Categorías de solución	
1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta $7 + 3 = \underline{\quad} + 4$ ¿Por qué? **2.** Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección. 57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso	**Solución α (operacional)** **1.** Añadir los números de la izquierda del signo igual (llenando el espacio con 10) o bien, sumando todos los números dados (llenando el espacio con 14). **2.** Escoger Falso, argumentando que 57 + 22 no es igual a 58. Sumar todos los números y escribir 158 como resultado final.	**Solución β (relacional)** **1.** Razonar sobre las cantidades en ambos lados del signo igual, llenando el espacio con 6 **2.** Escoger Verdadero, argumentando que la suma de los números al lado izquierdo de la igualdad es 79 y que dicho valor coincide con la suma del lado derecho del signo igual.
3. Valeria pagó \$53 por tres galletas, dos refrescos y una paleta. Si la paleta tiene un costo de \$8 y el precio de un refresco es \$12. ¿Cuál es el precio de cada galleta? Explique cómo obtuvo su respuesta	**Solución α (contextual)** **3.** Encontrar el precio de una galleta, razonando de esta manera: el precio de un refresco es \$12, luego dos refrescos cuestan \$24 a eso le sumamos el precio de la paleta y obtenemos \$32; como en total se pagó \$53, las tres galletas costaron \$21 y por lo tanto, cada galleta tiene un precio de \$7.	**Solución β (sintáctica)** **3.** Interviene la notación simbólica y es objeto de manipulación. Por ejemplo, iniciar con un planteamiento similar a: $53 = 3G + 2R + P$ Terminar con una relación simple: $3G = 21$ $G = 7$
4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja con caramelos. Sabemos que en cada caja hay la misma cantidad de caramelos. Adicionalmente, Andrés tiene 4 caramelos en su mano. a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información	**Solución α (singular)** **4.** Emplear casos particulares para la variable. Por ejemplo, indicar las siguientes respuestas: a) Javier tiene 4 caramelos. b) Andrés tiene 8 caramelos. c) Si juntan sus caramelos se obtienen 12 caramelos, dado que: $4 + 8 = 12$	**Solución β (simbólica)** **4.** Implica el uso de los literales como variables. Por ejemplo, a través de las soluciones: a) Javier tiene P caramelos. b) Andrés tiene $P + 4$ caramelos. c) Entre los dos juntan $2P + 4$ caramelos.

Tabla 3. Categorías de solución de tareas que abordan un componente algebraico

En el caso del *componente relacional* (tareas #1 y #2), las categorías de solución se derivan de los dos significados asociados al signo igual (e.g., Jacobs et al., 2007; Kieran, 1992; Ramírez García & Rodríguez Marcos, 2011). Por un lado, la *solución α*, hace referencia al signo igual como una indicación para realizar el cálculo, en la oración numérica. Por otra parte, la *solución β*, señala que las expresiones, en cada lado del signo igual, representan el mismo número. Si bien, las tareas propuestas, al interior de la secuencia, están inscritas en lo *relacional*, se destaca el hecho de que la actividad matemática de los estudiantes puede no estarlo (Aké, 2013), así que es posible encontrar ambas soluciones en las producciones de los estudiantes.

En concordancia con la caracterización propuesta para el *componente analítico*, las categorías de solución para la tarea #3 se basan en las dos formas analíticas de proceder (Radford, 2010a, 2014; Vergel, 2015). La *solución α* implica que los cálculos se realizan utilizando, esencialmente, las operaciones básicas y sus inversas sobre cantidades conocidas. En contraste, la *solución β* involucra trabajo con los objetos indeterminados a través de las reglas sintácticas del álgebra.

Las categorías de solución para la tarea #4, correspondientes al *componente notacional*, se basan en las dos formas notacionales caracterizadas por el modelo de algebrización propuesto. Así, la *solución α* involucra representaciones concretas, gráficas y verbales; y las letras aparecen únicamente como etiquetas o abreviaciones para designar un objeto indeterminado. En cambio, la *solución β* implica el uso de símbolos alfanuméricos para representar los objetos indeterminados.

En el caso de las tareas #5, #6 y #7, las categorías de solución se construyeron teniendo en cuenta las *actividades fundamentales* en el proceso de modelación, esto es: *identificar*, *buscar* y *representar*, así como las características atribuidas al componente analítico y notacional. Al igual que las otras tareas, también se sostuvo la dicotomía en las categorías de solución. Así, para la tarea #5, la *solución β*, se refiere al uso de la notación simbólica como una herramienta propicia para trabajar analíticamente con lo indeterminado. En contraste, la *solución α* implica una forma analítica contextual que se materializa a través de notaciones singulares. Por otro lado, para la tarea #6, la *solución β* implica identificar las relaciones establecidas en el contexto de la tarea y representarlas a través de notaciones simbólicas; en cambio, la *solución α* implica identificar dichas relaciones y usar notaciones singulares para representarlas. En relación con la tarea #7, la *solución β*, remite a la identificación de las relaciones establecidas entre las variables, como elemento, para encontrar nuevas relaciones sobre lo indeterminado de forma analítica sintáctica. En contraste, la *solución α* incluye la identificación de dichas relaciones acompañado de una forma de trabajo analítica contextual.

Finalmente, para la tarea #8, la *solución β*, pone de relieve la igualdad como una relación de equivalencia, la identificación y búsqueda de nuevas relaciones, empleando analiticidad sintáctica y notaciones simbólicas. La *solución α*, en cambio, deja entrever un significado relacional del signo igual, acompañado de una analiticidad contextual y una forma notacional singular.

Tareas	Solución α	Solución β
5. Mario y Teresa compraron boletos para un concierto. El boleto de Teresa costo tres veces más que el boleto de Mario, porque ella escogió un mejor asiento. Entre los dos pagaron por sus boletos $1680. a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? b) ¿Cómo representas el costo del boleto de teresa c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación. d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario	**5.** Se prioriza la analiticidad contextual acompañada de notaciones singulares. Por ejemplo, abordando, inicialmente, el ítem d) para después responder los otros. a) Representar el precio con su valor exacto b) Representar el precio del boleto con su valor exacto c) $420 + 1260 = 1680$ d) El precio del boleto es $420.	**5.** La notación simbólica es utilizada para representar los precios de los boletos y se prioriza la analiticidad sintáctica. Por ejemplo: a) Representar el precio del boleto con la letra x b) El precio del boleto como $3x$ c) $x + 3x = 1680$ $4x = 1680$ d) Despejar x de la ecuación planteada en el punto c).
6. En un salón de clases hay 40 estudiantes. Se sabe que en total, al comparar mujeres con hombres, hay seis mujeres más que hombres. Utiliza una expresión matemática para representar este enunciado. Explica por qué escogiste esa representación	**6.** Representar las relaciones establecidas en el contexto de la situación empleando notaciones singulares. Por ejemplo, utilizando dibujos o gráficas que hagan alusión a un salón de clases conformando por 40 estudiantes, donde se aprecie la relación dada entre hombres y mujeres.	**6.** Representar las relaciones establecidas en el contexto de la situación empleando notaciones simbólicas. Por ejemplo, planteando un sistema de ecuaciones lineales, similar a este: $H + M = 40$ $M = H + 6$
7. En el mercadito de San francisco los precios de una fruta no dependen de su peso, sino de su relación con otras frutas. Por ejemplo: El precio de tres piñas es igual al precio de nueve manzanas. El precio de dos peras y tres naranjas es igual al precio de una piña y dos peras. Utiliza esa información para completar el espacio en blanco: a) El precio de una piña es igual al precio de ___ manzana(s) b) El precio de una piña es igual al precio de ___ naranja(s) c) ¿Qué relación existe entre el precio de las manzanas y las naranjas?	**7.** Identificar las relaciones establecidas en el contexto de la situación y trabajar con dichas relaciones de forma analítica contextual. Por ejemplo: a) Reconocer que si el precio de tres piñas es igual al de nueve manzanas, entonces el precio de una piña es igual al precio de tres manzanas, al ser la tercera parte. b) Reconocer que el precio de las peras se puede omitir porque aparecen a ambos lados de la igualdad y por lo tanto, concluir que el precio de una piña es igual al precio de tres naranjas. c) Recoger las relaciones encontradas en los ítems a) y b)	**7.** Identificar las relaciones establecidas en el contexto de la situación y trabajar con dichas relaciones de forma analítica sintáctica. Por ejemplo, si P representa el precio de una piña, M el de una manzana, R el de una pera y N el de una naranja, entonces: a) Si $3P = 9M$, dividiendo por tres $\mathbf{1P = 3M}$ b) $Si\ 2R + 3N = 1P + 2R$, restando $2R$ a ambos lados de la igualdad $\mathbf{3N = 1P}$ c) $3M = 3N$ o bien $\boldsymbol{M = N}$

8. Existe un número secreto. Utiliza la siguiente información para encontrarlo: "*El número secreto multiplicado por doce, menos veinte es igual al número secreto multiplicado por siete, más cinco*" a) Alex afirma que mi número secreto es el cuatro. ¿Sera cierta la afirmación de Alex? b) Si Alex está equivocado, ¿Cuál es mi número secreto? Explica cómo encontraste el número secreto y por qué escogiste esa forma c) Escribe una expresión matemática que represente la información dada	**8.** Se destaca el significado relacional del signo igual, acompañado de la analiticidad contextual y notaciones singulares. Por ejemplo, pueden aparecer respuestas de este tipo: a) La afirmación de Alex no es cierta, porque al efectuar las operaciones los resultados son diferentes. b) Se recurre a métodos de ensayo y error c) $12(5) - 20 = 7(5) + 5$	**8.** Se aprecia el significado relacional del signo igual, analiticidad sintáctica y notaciones simbólicas. Por ejemplo, pueden aparecer expresiones matemáticas, tales como: $12x - 20 = 7x + 5$ De modo que x represente el valor del número secreto. Resolver y encontrar que $x = 5$

Tabla 4. Categorías de solución de tareas que abordan dos o tres componentes algebraicos

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1. Introducción

En este capítulo se registran dos tipologías de análisis que hacen parte de los alcances de la presente investigación. Dichos análisis son diferenciables debido a los objetivos particulares que persiguen pero, al mismo tiempo, son complementarios, puesto que ponen de relieve la dimensión general de la actividad algebraica protagonizada por los estudiantes.

La construcción del *modelo de algebrización* y las respectivas *categorías de solución*, que se materializan en el análisis preliminar, posibilitan una ruta de análisis apropiada para explorar y describir el pensamiento algebraico de los estudiantes. Inicialmente se plantea un análisis exploratorio y seguidamente, se elabora un análisis descriptivo, este último, desarrollado en dos fases: una vertical y otra horizontal, las cuales se explican más adelante.

Finalmente, se abordan las conclusiones de la investigación. En primer lugar, se destacan las implicaciones teóricas del modelo de algebrización construido. En segunda instancia, se discuten formas algebraicas de pensar, producto de los resultados derivados del arduo proceso de análisis y en último lugar, se indican algunas dificultades presentes en el desarrollo de la investigación, así como nuevas rutas de trabajo en el marco de la naturaleza y desarrollo del pensamiento algebraico en el ámbito escolar.

4.2. Análisis exploratorio

Este análisis incluye la clasificación y sistematización, en términos de las *categorías de solución*, de cada una de las producciones elaboradas por los estudiantes que conforman el caso. Tal como se mencionó en el apartado 3.3 éste análisis puede entenderse como un "filtro" que ayuda a identificar y establecer aquellas situaciones prioritarias en el estudio. Igualmente, es útil para sugerir afirmaciones sobre los hechos observados, entorno a la emergencia, desarrollo y relación de los componentes algebraicos, en el contexto matemático de interés.

Inicialmente, las producciones de los estudiantes se clasifican según las *categorías de solución* (ver tabla 5). Para facilitar este proceso, se cambiaron los nombres de los estudiantes, de tal forma que sus iniciales se corresponden con la letra A, B o C dependiendo del año escolar al cual pertenezcan. Así, por ejemplo, un estudiante de sexto año se reconoce inmediatamente porque su nombre inicia con la letra A. La sistematización de este análisis consiste en una cuantificación de los datos, en términos de las soluciones alfa (α) y beta (β). Sin embargo, también se considera un tipo de solución designada por la letra ε, para referirse a soluciones erróneas o mal interpretadas, las cuales son sometidas al análisis descriptivo, únicamente, en casos extraordinarios, puesto que no hacen parte de los intereses de esta investigación.

	Tipos de tareas							
Grado	I. D.	R(1, 2)	A (3)	N (4)	NA (5)	RN (6)	RA (7)	RAN (8)
6	Andrea Martínez	α	α	α	α	ε	α	ε
6	Andrés Vásquez	β	α	α	α	ε	α	ε
6	Amelia Gálvez	β	ε	ε	α	ε	α	ε
6	Alicia Falcón	β	α	ε	ε	ε	α	α
6	Ana Cien Fuegos	β	α	ε	α	ε	α	ε
7	Beto Alegre	β	ε	α	α	ε	α	α
7	Berta Serna	β	α	β	ε	ε	α	α
7	Bruno Wong	β	α	α	α	ε	α	α
7	Beatriz Espinosa	β	α	ε	α	α	ε	ε
7	Blanca Leyua	α	α	ε	ε	ε	α	α
8	Camila Valenzuela	α	ε	α	ε	ε	ε	ε
8	Carlos Falcón	β	β	β	β	β	β	α
8	Carolina Nájera	ε	α	α	ε	ε	ε	ε
8	Cesar Sánchez	α, β	ε	β	α	ε	α	ε
8	Celia Pineda	β	α	β	β	ε	β	β

Tabla 5. Clasificación y sistematización de las soluciones

La interpretación de la tabla 5, sugiere aspectos globales, comparativos y locales que son importantes para construir y describir formas de pensamiento algebraico en el contexto de la resolución de ecuaciones lineales. Dentro de los aspectos globales se puede visualizar la presencia de las soluciones esperadas (α y β) en diferentes producciones de los participantes, lo cual demuestra que las categorías, delimitadas por el modelo de algebrización, son consistentes para alcanzar el objetivo propuesto.

Las soluciones designadas por la letra ε, también tienen lugar en las producciones de los estudiantes, lo cual es razonable, dado que los participantes no han sido sometidos a un proceso de instrucción en el marco del álgebra temprana y por lo tanto, presentan dificultades para abordar este tipo de tareas. Sin embargo, llama la atención que este tipo de solución sea recurrente en la tarea 6, lo cual sugiere a) una dificultad enorme, por parte de los estudiantes, para abordar esta tarea y b) una reformulación de la misma, de manera que pueda ofrecer mayores aportes en la caracterización del pensamiento algebraico. Si bien, las soluciones designadas por ε no son objeto directo de estudio, son consideradas en algunos casos, para evaluar el impacto que tienen en la resolución de la tarea 8. De esta manera, se han resaltado (color rojo) siete casos que son examinados en el análisis descriptivo horizontal.

En cuanto a la hipótesis del diseño de las tareas, este análisis sugiere que las tareas que incluyen un componente algebraico, pueden resultar tan complejas para los estudiantes como aquellas que integran dos o más componentes. Ejemplo de ello, es el caso de la tarea 4, particularmente difícil de solucionar para los estudiantes de grado sexto. En la tabla 2., también se observa que, comparativamente, a medida que los estudiantes avanzan en sus niveles de escolaridad, la notación simbólica adquiere mayor presencia. En contraste, no se visualiza mayor diferencia en lo *relacional* y lo *analítico* a medida que los estudiantes transitan de un grado a otro.

Finalmente, dentro de los aspectos locales, se aprecia que pese a una mayor familiarización con la notación simbólica, los estudiantes de octavo grado, generalmente no proceden de manera *analítica sintáctica*, lo cual sugiere un lugar protagónico para la *analiticidad contextual* en la configuración de formas algebraicas de pensar.

4.3. Análisis descriptivo

El análisis descriptivo retoma las cuestiones y sugerencias determinadas por el análisis exploratorio, con el objeto de precisar, especificar y caracterizar aquello que los estudiantes pueden hacer, en el marco de la actividad algebraica, con cada una de las tareas propuestas. Para organizar este proceso se proponen dos fases, a saber: vertical y horizontal.

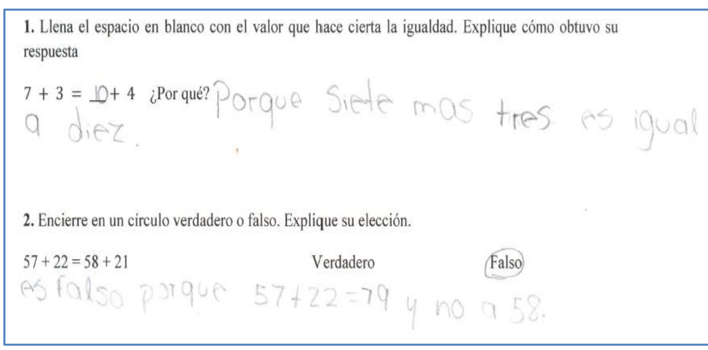
La fase vertical tiene como objetivo describir las producciones de los estudiantes, en cada una de las tareas, independientemente del grado de escolaridad. Por su parte, la fase horizontal, se centra en las trayectorias seguidas por los siete estudiantes identificados en el análisis exploratorio, con el objetivo de evaluar las implicaciones de la resolución de las tareas sobre formas algebraicas de pensar, destacando el trabajo efectuado sobre la tarea RAN. En este sentido, la primera fase sirve para recoger información específica, tarea a tarea, sobre las soluciones de los estudiantes. Así, es posible constatar la funcionalidad del modelo de algebrización, al delimitar las producciones de los estudiantes, en términos de los componentes algebraicos asociados. Por otro lado, la segunda fase permite precisar la manera en la cual, se configuran relaciones entre los componentes algebraicos.

4.3.1. Análisis descriptivo vertical

Soluciones identificadas en las tareas tipo R (tareas #1 y #2)

El significado operacional del signo igual está presente en, al menos, uno de cada cinco estudiantes. Por ejemplo, uno de los cinco estudiantes que integran la muestra de sexto grado, considera el signo igual como una indicación para realizar el cálculo de una operación aritmética. Así, para responder al ítem 1, dicho estudiante añadió los números a la izquierda del signo igual, llenando el espacio con 10 y sostuvo el significado operacional para escoger falso en el ítem 2., afirmando que $57 + 22 = 79$ y no 58 (ver imagen 1).

El significado operacional del signo igual, se aleja de la idea fundamental del signo igual en álgebra, que lo expresa como una relación de equivalencia (Carpenter et al., 2005). Aunque se trata de un estudiante de sexto año, dicho significado, no es propio de los primeros años de escolaridad. Diversas investigaciones han revelado (e.g., Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006) que esto también ocurre con estudiantes de educación secundaria sin ofrecer mejores resultados. La presente investigación constata este hecho, pues las producciones de diferentes estudiantes de secundaria se corresponden con este significado (ver imagen 2).


1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta

7 + 3 = 10 + 4 ¿Por qué? Porque siete mas tres es igual a diez.

2. Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección.

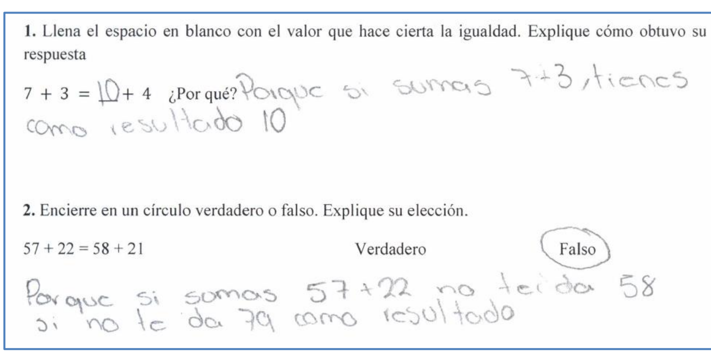
57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

es falso porque 57+22=79 y no a 58.

Transcripción:

1. 10 porque siete más tres es igual a diez
2. Falso porque 57+22=79 y no a 58

Imagen 1. Significado operacional del signo igual en un estudiante de sexto grado (Andrea Martínez)


1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta

7 + 3 = 10 + 4 ¿Por qué? Porque si sumas 7+3, tienes como resultado 10

2. Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección.

57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

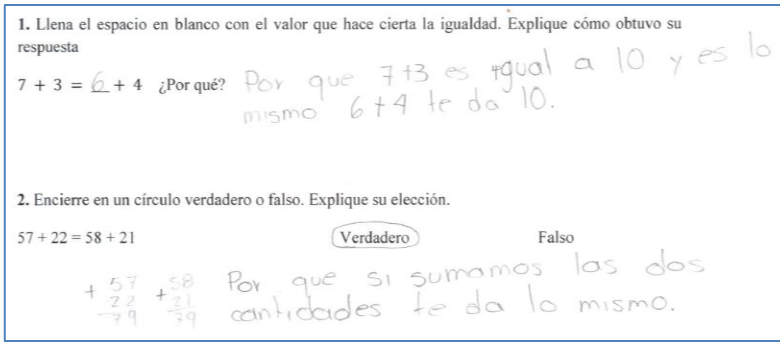
Porque si somas 57+22 no te da 58 si no te da 79 como resultado

Transcripción:

1. 10 porque si sumas 7+3, tienes como resultado 10
2. Falso porque si sumas 57+22 no te da 58 si no te da 79 como resultado

Imagen 2. Significado operacional del signo igual en un estudiante de séptimo grado (Blanca Leyua)

Por otra parte, también se aprecia el significado *relacional* del signo igual, caracterizado por el trabajo en ambos lados de la igualdad. Dicho significado, como forma de expresar una relación de equivalencia, es central para que los estudiantes aprendan a pensar acerca de las relaciones matemáticas (Carpenter et al., 2005). Múltiples producciones de los estudiantes, las cuales se inscriben en la solución β, permiten visualizar este significado del signo igual (e.g., ver imagen 3).


1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta

7 + 3 = 6 + 4 ¿Por qué? Por que 7+3 es igual a 10 y es lo mismo 6+4 te da 10.

2. Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección.

57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

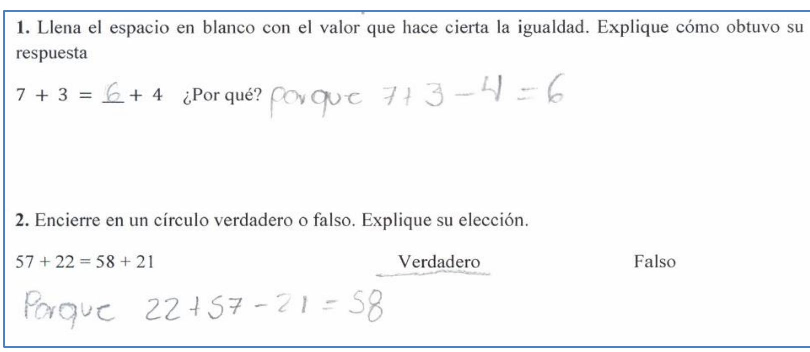
Por que si sumamos las dos cantidades te da lo mismo.

Transcripción:

1. 6 porque 7+3, es igual a 10 y es lo mismo 6+4 te da 10
2. Verdadero porque si sumas las dos cantidades te da lo mismo.

Imagen 3. Significado relacional del signo igual en un estudiante de sexto grado (Amelia Gálvez)

Además, dentro de las producciones de los estudiantes, una de ellas catalogada como solución β, revela una forma interesante de proceder. La imagen 4 ilustra la manera en la cual, un estudiante de séptimo grado considera el espacio en blanco, como si se tratase de una incógnita, dando lugar al uso de propiedades y sus inversas.


1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta

7 + 3 = 6 + 4 ¿Por qué? porque 7+3−4=6

2. Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección.

57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

Porque 22+57−21=58

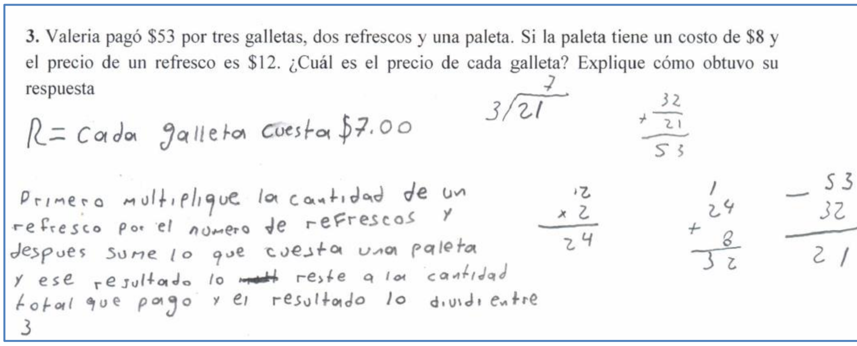
Transcripción:

1. 6 porque $7 + 3 - 4 = 6$
2. Verdadero porque $22 + 57 - 2 = 58$

Imagen 4. Significado relacional del signo igual en un estudiante de séptimo grado (Beatriz Espinosa)

Soluciones identificadas en la tarea tipo A (tarea #3)

Los resultados obtenidos y sistematizados en el análisis exploratorio sugieren mayor consolidación del trabajo analítico contextual en los estudiantes que conforman el caso. De hecho, la solución propuesta por la gran mayoría de los estudiantes es similar a la que se ejemplifica para la categoría de solución α. Por ejemplo, la imagen 5 ilustra el procedimiento llevado a cabo por un estudiante de séptimo grado.


3. Valeria pagó $53 por tres galletas, dos refrescos y una paleta. Si la paleta tiene un costo de $8 y el precio de un refresco es $12. ¿Cuál es el precio de cada galleta? Explique cómo obtuvo su respuesta

R= Cada galleta cuesta $7.00

$3\overline{)21}$ = 7

32 + 21 = 53

Primero multiplique la cantidad de un refresco por el numero de refrescos y despues sume lo que cuesta una paleta y ese resultado lo ~~...~~ reste a la cantidad total que pago y el resultado lo dividi entre 3

12 × 2 = 24

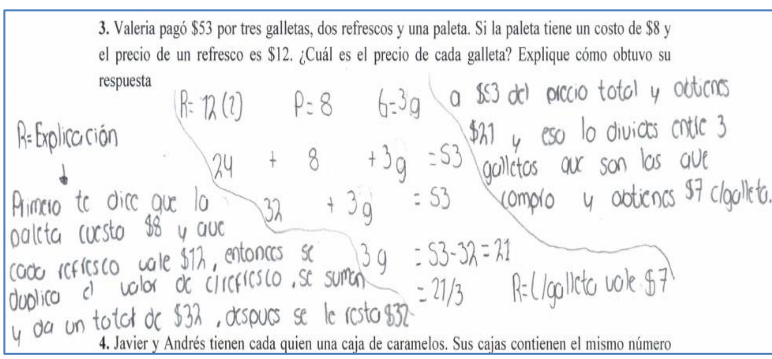
24 + 8 = 32

53 − 32 = 21

Transcripción:
R=cada galleta cuesta $7.00
Primero multiplique la cantidad de un refresco por el número de refrescos y después sume lo que cuesta una paleta y ese resultado lo reste a la cantidad total que pago y el resultado lo divide entre 3

Imagen 5. Analiticidad contextual en un estudiante de séptimo grado (Bruno Wong)

Dentro de las producciones elaboradas por los estudiantes, un estudiante de octavo grado, presenta una solución que está inscrita dentro de una forma analítica sintáctica de proceder. En la imagen 6 se puede apreciar esta inferencia. Carlos utiliza las letras R, P y G para referirse a los precios totales, es decir; supone que R es el precio de dos refrescos, P el precio de la paleta y G el precio de las tres galletas. Si bien, utiliza tres literales diferentes para designar las cantidades, termina considerando un único literal que él nombra por la letra "g" para referirse al precio de una galleta. De esta manera, su ecuación inicial: $R + P + G = 53$ adopta la forma: $24 + 8 + 3g = 53$ Realiza las operaciones al lado izquierdo de la igualdad y trabaja con las operaciones inversas hasta obtener: $3g = 21$ lo cual implica que $g = 7$.


3. Valeria pagó $53 por tres galletas, dos refrescos y una paleta. Si la paleta tiene un costo de $8 y el precio de un refresco es $12. ¿Cuál es el precio de cada galleta? Explique cómo obtuvo su respuesta

R= Explicación

Primero te dice que la paleta cuesta $8 y que cada refresco vale $12, entonces se duplica el valor del refresco, se suman y da un total de $32, despues se le resta $32

R= 12(2) P=8 G=3g

24 + 8 + 3g = 53

32 + 3g = 53

3g = 53−32 = 21

= 21/3

R= 1/galleta vale $7

a $53 del precio total y obtienes $21 y eso lo divides entre 3 galletas que son las que compro y obtienes $7 c/galleta.

4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número

Transcripción: primero te dice que la paleta cuesta $8 y que cada refresco vale $12, entonces se duplica el valor del refresco, se suman y da un total de $32, después se le resta $32 a $53 del precio total y obtienes $21 y eso lo divides entre 3 galletas que son las que compró y obtienes $7 c/galleta.

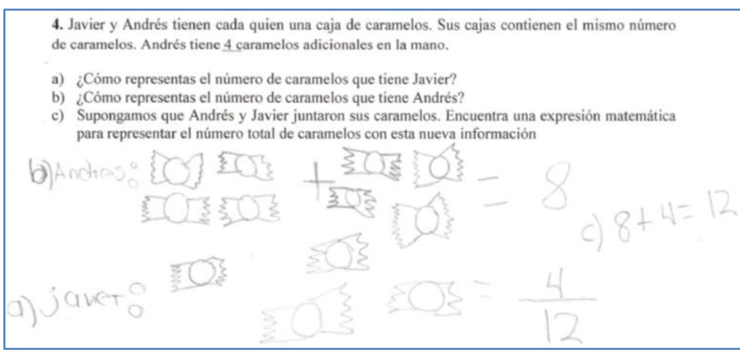
Imagen 6. Analiticidad sintáctica en un estudiante de octavo grado (Carlos Falcón)

La producción de Carlos también llama la atención por la explicación que él mismo suministra. Si bien, la analiticidad sintáctica está presente, todo su discurso está permeado por una forma analítica contextual. Esta dualidad emergente en el trabajo de Carlos parece sugerir que la analiticidad contextual aparece con anterioridad al dominio sintáctico y que además no se pierde, por el contario, se complementan entre sí.

Soluciones identificadas en la tarea tipo N (tarea #4)

El análisis exploratorio revela mayor presencia de las formas notacionales singulares en las producciones de los estudiantes. Únicamente, tres estudiantes de octavo grado y uno de séptimo grado dejan entrever formas notacionales simbólicas. Estos hechos indican que las soluciones tipo α, son recurrentes como formas de representación en los estudiantes que conforman el caso.

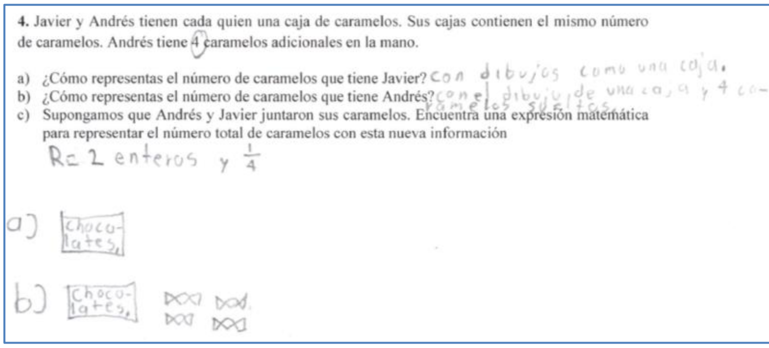
Al interior de las formas singulares, se pueden identificar, por un lado, a) soluciones que se centran en la asignación de un valor particular para representar el número de caramelos en la caja, ya sea a través de números específicos o dibujos que se refieren a ellos; por otra parte, b) soluciones que dejan abierto un abanico de posibilidades para el número de caramelos en la caja, a través de dibujos o gráficas. Cuatro estudiantes que hacen parte del estudio, se centraron en un caso particular. Ellos recurren a dibujos y/o números para designar la cantidad de caramelos. La imagen 7 ilustra la manera en la cual, un estudiante de sexto año representa las cantidades solicitadas.



Transcripción:
a) Javier: (dibuja 4 caramelos y escribe $\frac{4}{12}$)
b) Andres: (dibuja 4 caramelos + 4 caramelos = 8)
c) (escribe la expresión $8 + 4 = 12$)

Imagen 7. Notación singular con asignación de un valor particular (Andrea Martínez)

Pese a centrarse en una única instancia, la estudiante reconoce que Andrés tiene cuatro caramelos más que Javier. Incluso, subraya el número 4 en el enunciado, como señal de identificación de la relación existente entre las cantidades. Por otra parte, dos estudiantes, emplean una representación que mantiene indeterminado el número de caramelos en la caja, sin recurrir al uso de símbolos literales. Esta forma *notacional singular*, se aprecia en la imagen 8, con la producción de un estudiante de sexto año.



4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? con dibujos como una caja.
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? con el dibujo de una caja y 4 caramelos sueltos
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

R= 2 enteros y $\frac{1}{4}$

a) Chocolates,

b) Chocolates,

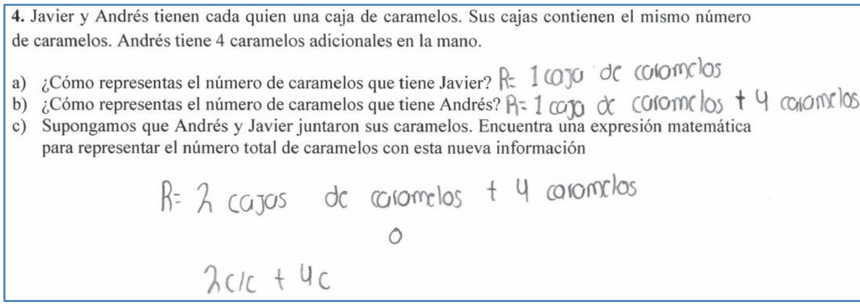
Transcripción:
a) con dibujos como una caja
b) con el dibujo de una caja y cuatro caramelos sueltos
c) R= 2 enteros y 1/4

Imagen 8. Notación singular con dibujos para representar lo desconocido (Andrés Vásquez)

Este estudiante no especula sobre la cantidad de caramelos en la caja, simplemente deja abierta las opciones haciendo un dibujo que representa la cantidad de caramelos (caja de “chocolates”). Los dibujos empleados en los ítems a) y b) no los retoma del mismo modo (en el mismo registro de representación), para dar respuesta al ítem c); puesto que utiliza una representación con números y razones. En otras palabras, éste estudiante muestra que al juntar los caramelos de Javier y Andrés, se tendrán dos cajas (dos enteros) y cuatro caramelos sueltos (cuatro de una caja). Esta forma de representar el número de caramelos en la caja, no es equivalente a conceptualizar las cantidades como variables cuantitativas, pero esta forma notacional de lo desconocido es una puerta importante para la decisiva introducción de la variable en su forma simbólica literal (Blanton et al., 2015).

En correspondencia con lo anterior, un caso de interés se aprecia al examinar las soluciones elaboradas por un estudiante de octavo grado (ver imagen 9). Inicialmente sus respuestas parecen inscribirse en notaciones singulares, puesto que responde los ítems a) y b) con enunciados que mantienen incierta la cantidad de caramelos por cada caja. Sin embargo, una de sus respuestas al ítem c) permite observar una forma notacional simbólica para representar, tanto los caramelos por cada caja, como los caramelos individuales. Dicho estudiante emplea la notación literal c/c para referirse a los caramelos en una caja y la notación literal c para denotar los caramelos unitarios, así responde el ítem c) con la expresión simbólica: $2c/c + 4c$

De manera similar, las soluciones proporcionadas por otro estudiante de octavo grado revelan una forma notacional simbólica (ver imagen 10). Los símbolos literales son utilizados para representar lo indeterminado. De modo que, la letra x es empleada para referirse a la cantidad de caramelos que tiene Javier, mientras que la expresión $x + 4$ es utilizada para denotar la cantidad de caramelos de Andrés. Además, la manera en la cual expresa sus respuestas, permite constatar que las letras no son utilizadas como simples etiquetas.

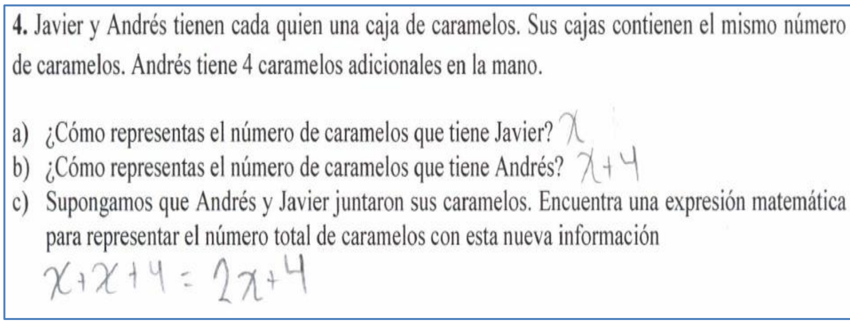

4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? R= 1 caja de caramelos
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? R= 1 caja de caramelos + 4 caramelos
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

R= 2 cajas de caramelos + 4 caramelos
o
2c/c + 4c

Transcripción:
a) R= 1 caja de caramelos
b) R= 1 caja de caramelos + 4 caramelos
c) R= 2 cajas de caramelos + 4 caramelos ó $2c/c\ + 4c$

Imagen 9. Notación simbólica identificada en el ítem c) (Carlos Falcón)


4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

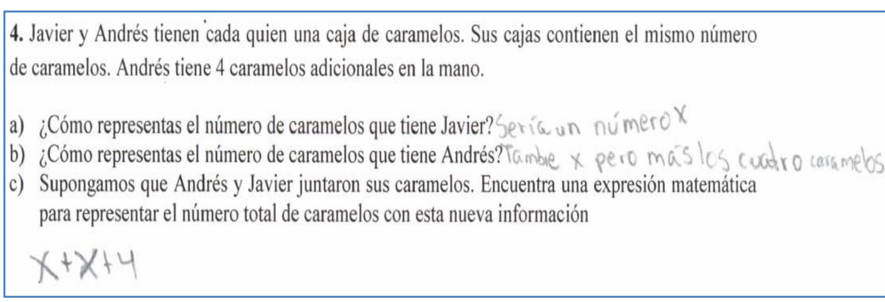
a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? x
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? x+4
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

x+x+4 = 2x+4

Transcripción:
a) x
b) $x + 4$
c) $x + x + 4 = 2x + 4$

Imagen 10. Notación simbólica para representar lo indeterminado (Celia pineda)

En la imagen 10 se observa un aspecto destacable relacionado con la analiticidad sintáctica. Este hecho es fundamental en la caracterización y diferenciación de formas algebraicas de pensar, puesto que puede darse el caso (ver imagen 11) en el cual, los símbolos literales se empleen para representar cantidades indeterminadas, sin que ello implique cierto nivel de operatividad, por ejemplo, en la respuesta dada al ítem c) a través de la expresión $x + x + 4$.


4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? Sería un número x
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? Tambie x pero más los cuadro caramelos
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

x+x+4

Transcripción:
a) sería un número x
b) Tambie x pero más los cuatro caramelos
c) $x + x + 4$

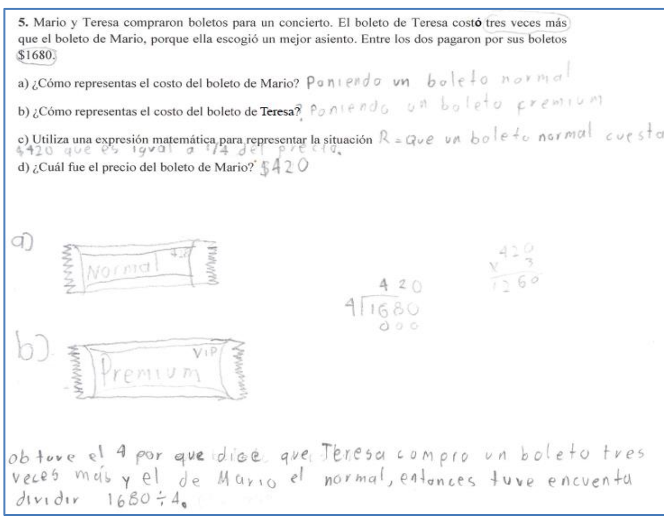
Imagen 11. Notación simbólica en un estudiante de séptimo grado (Berta Serna)

Este análisis sobre lo notacional demuestra la riqueza detrás del modelo de algebrización propuesto. Además de clasificar y estudiar las producciones de los estudiantes en términos de las dos formas notacionales, es posible identificar diversas manifestaciones del concepto de variable, lo cual es fundamental para caracterizar formas algebraicas de pensar. Inicialmente, la representación de cantidades indeterminadas se delimita a la construcción de casos particulares, mediados por números o dibujos; posteriormente, los dibujos y las representaciones concretas dan lugar a la consideración de casos generales y finalmente, los símbolos literales reemplazan los dibujos y otras representaciones concretas, formalizando el carácter general. De hecho, dentro del uso de los símbolos literales se aprecian dos momentos, a saber: uno en el cual, los literales escogidos están asociados al contexto de la tarea y otro, en el que los literales se desprenden de los referentes a los cuales representa, tal como se visualiza en las imágenes 9 y 10 respectivamente.

Soluciones identificadas en la tarea tipo NA (tarea #5)

Este análisis descriptivo constata que la analiticidad emerge, usualmente, fuera del simbolismo alfanumérico. La mayor parte de las producciones de los estudiantes, se inscribe en soluciones tipo α, en contraste con las soluciones tipo β que, únicamente, tienen presencia en los desarrollos dados por dos estudiantes de octavo grado.

Las soluciones tipo α están determinadas por el tratamiento analítico contextual sobre las relaciones previamente identificadas, las cuales son representadas por notaciones singulares; ya sea a través de números particulares o dibujos que mantienen abiertas las posibilidades para la variable. La imagen 12 ilustra la solución de un estudiante de sexto grado, quien emplea notaciones singulares para referirse al costo de los boletos de Mario y Teresa, pero se basa en las relaciones numéricas que él identifica para deducir el precio del boleto de Mario.



Transcripción:

a) Poniendo un boleto normal

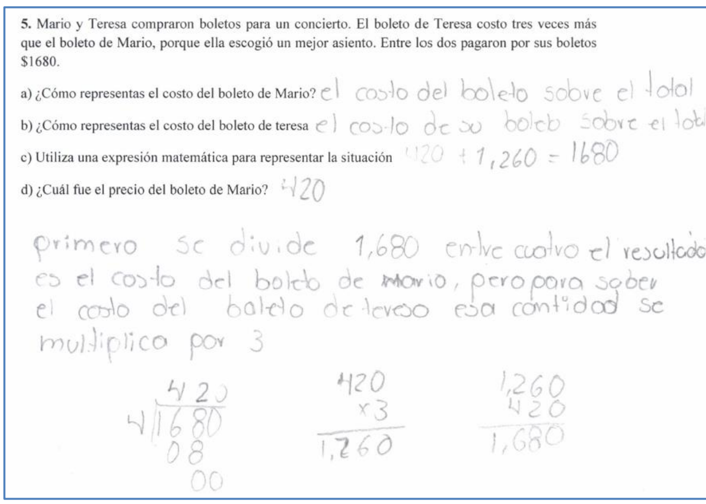
b) Poniendo un boleto premium

c) Que un boleto normal cuesta $420 que es igual a ¼ del precio

Obtuve el 4 porque dice que Teresa compro un boleto tres veces más y el de Mario el normal, entonces tuve en cuenta dividir 1680÷4.

Imagen 12. Solución tipo α presente en un estudiante de octavo grado (Andrés Vásquez)

Si bien, este estudiante no opera directamente sobre sus notaciones, las mismas son usadas para representar la diferencia de precio entre un boleto (normal) y otro que lo triplica en costo (premium). Ello sugiere, nuevamente, mayor atención sobre la forma notacional singular, como escenario fundamental que dota de significado los símbolos literales promoviendo la formalización progresiva de los estudiantes (Van Amerom, 2003). Al respecto, llama la atención la solución dada por un estudiante de séptimo grado (ver imagen 13). Al igual que en la producción anterior, esta estudiante emplea notaciones singulares con ciertos rasgos de generalidad. Utiliza la noción matemática de razón para referirse al costo de los boletos, pese a que encuentra los valores exactos de cada uno de ellos.



5. Mario y Teresa compraron boletos para un concierto. El boleto de Teresa costo tres veces más que el boleto de Mario, porque ella escogió un mejor asiento. Entre los dos pagaron por sus boletos $1680.

a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? el costo del boleto sobre el total

b) ¿Cómo representas el costo del boleto de teresa el costo de su boleto sobre el total

c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación 420 + 1,260 = 1680

d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario? 420

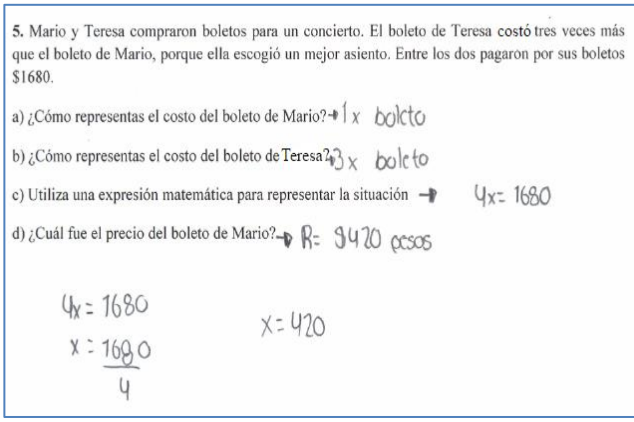
primero se divide 1,680 entre cuatro el resultado es el costo del boleto de Mario, pero para saber el costo del boleto de teresa esa cantidad se multiplica por 3

Transcripción:

a) el costo del boleto sobre el total
b) el costo de su boleto sobre el total
c) $420 + 1260 = 1680$
d) primero se divide 1680 entre cuatro el resultado es el costo del boleto de Mario, pero para saber el costo del boleto de Teresa esa cantidad se multiplica por 3

Imagen 13. Solución tipo α en un estudiante de séptimo grado (Beatriz espinosa)

Las imágenes 14 y 15 ilustran dos soluciones del tipo β. En estas imágenes se puede apreciar, la manera en la cual, los símbolos literales son usados, tanto para representar las relaciones desconocidas, como para operar sobre ellas. En el primer caso, la letra x es empleada para representar el precio del boleto de Mario y en consecuencia, la expresión $3x$ es utilizada para referirse al costo del boleto de Teresa. De hecho, para representar la situación global, este estudiante reconoce la otra relación dada: “entre los dos pagaron por sus boletos $1680” y opera $x + 3x$ llegando a la ecuación: $4x = 1680$ cuya solución representa el costo del boleto de Mario.



5. Mario y Teresa compraron boletos para un concierto. El boleto de Teresa costó tres veces más que el boleto de Mario, porque ella escogió un mejor asiento. Entre los dos pagaron por sus boletos $1680.

a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? 1x boleto

b) ¿Cómo representas el costo del boleto de Teresa? 3x boleto

c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación 4x= 1680

d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario? R= $420 pesos

4x = 1680
x = 1680/4
x = 420

Transcripción:

a) $1x$ boleto "lo represento así ya que en el texto menciona que el boleto de Teresa cuesta tres veces más que el de Mario= $1x$"

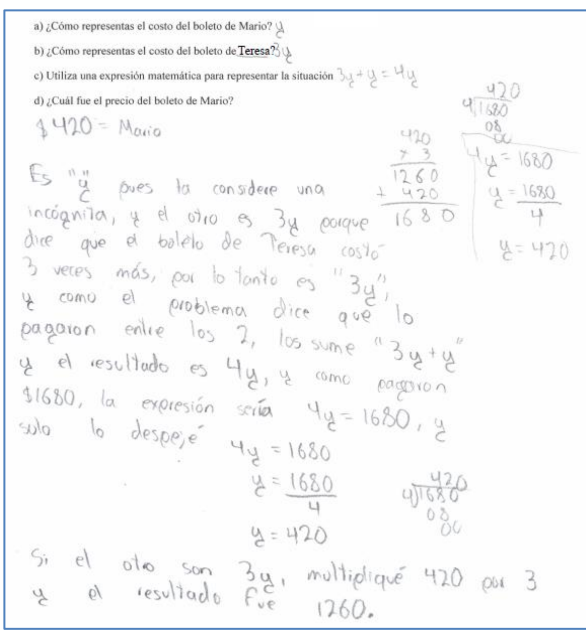
b) $3x$ boleto "lo represento así ya que se menciona que su boleto cuesta tres veces más que el de Mario= $3x$"

c) $4x = 1680$ "la expresión la pongo como una ecuación para determinar el precio de los boletos: Mario=$420 pesos, Teresa=$1260 pesos"

d) R= $420

Imagen 14. Solución tipo β en un estudiante de octavo grado (Carlos Falcón)

Las justificaciones dadas a cada una de las preguntas de la tarea, permiten inferir que la ecuación es usada con el propósito de encontrar el precio de ambos boletos, ya que él mismo explica que la solución de la ecuación es el valor del costo del boleto de Mario y que, a través de la sustitución en $3x$, puede encontrar el costo del boleto de Teresa. En el segundo caso (imagen 15) se aprecia un procedimiento similar; la única diferencia es el símbolo literal escogido para representar las relaciones y establecer la ecuación correspondiente. Esta estudiante utiliza la letra y para representar el costo del boleto de Mario y en consecuencia, la expresión $3y$ para el precio del boleto de Teresa. En su producción se puede ver claramente como las representaciones simbólicas son tratadas de manera sintáctica para generar las respuestas.



a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? y

b) ¿Cómo representas el costo del boleto de Teresa? 3y

c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación 3y + y = 4y

d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario?

$420 = Mario

Es "y" pues la considere una incógnita, y el otro es 3y porque dice que el boleto de Teresa costó 3 veces más, por lo tanto es "3y", y como el problema dice que lo pagaron entre los 2, los sume "3y + y" y el resultado es 4y, y como pagaron $1680, la expresión sería 4y = 1680, y solo lo despejé

4y = 1680
y = 1680/4
y = 420

420 × 3 = 1260
1260 + 420 = 1680

Si el otro son 3y, multipliqué 420 por 3 y el resultado fue 1260.

Transcripción:

Es "y" pues la considere una incógnita, y el otro es $3y$ porque dice que el boleto de Teresa costó 3 veces más, por lo tanto es "$3y$" y como el problema dice que lo pagaron entre los 2, los sume "$3y + y$" y el resultado es $4y$, y como pagaron $1680, la expresión sería $4y = 1680$, y solo lo despejé

$$4y = 1680$$

$$y = \frac{1680}{4}$$

$$y = 420$$

Si el otro son $3y$, multipliqué 420 por 3 y el resultado fue 1260.

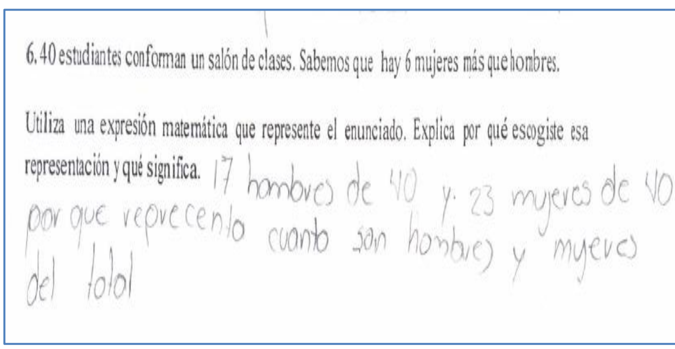
Imagen 15. Solución tipo β en un estudiante de octavo grado (Celia Pineda)

El análisis descriptivo permite constatar que son pocos los estudiantes que logran trabajar con notaciones simbólicas, quizás porque aún no han aprendido a operar con esas formas. En lugar de ello, es frecuente identificar notaciones singulares para referirse a cantidades indeterminadas y se observa la prominencia del tratamiento analítico contextual con una forma de pensamiento fundamental para darle sentido a las representaciones y solucionar el problema.

Soluciones identificadas en la tarea tipo RN (tarea#6)

El análisis exploratorio revela que únicamente dos estudiantes lograron identificar y representar adecuadamente las relaciones establecidas en el contexto de la tarea. Si bien, emergen las dos soluciones consideradas en los análisis preliminares, la recurrente presencia de soluciones tipo ε permite inferir que los estudiantes logran identificar las relaciones dadas, pero no pueden integrarlas mediante una expresión matemática, en cualquiera de sus formas notacionales. Esta inferencia se constata en el análisis descriptivo horizontal con algunas producciones de los participantes.

La imagen 16 ilustra la solución tipo α dada por una estudiante de séptimo grado. Ella identifica las dos relaciones dadas en el contexto de la tarea: 1) hay 40 estudiantes en total, y b) son seis mujeres más que hombres. Integra ambas relaciones empleando una *notación singular* que se inscribe dentro del lenguaje natural, pero que remite a razones matemáticas.

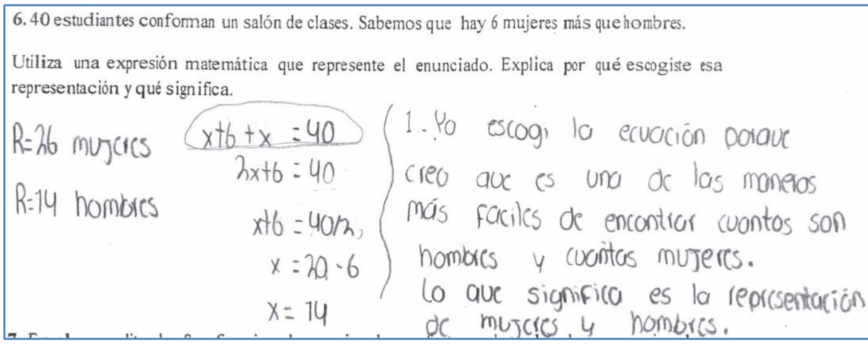

6. 40 estudiantes conforman un salón de clases. Sabemos que hay 6 mujeres más que hombres.

Utiliza una expresión matemática que represente el enunciado. Explica por qué escogiste esa representación y qué significa. 17 hombres de 40 y. 23 mujeres de 40 por que reprecento cuanto son hombres y mujeres del total

Transcripción:
17 hombres de 40 y 23 mujeres de 40 por que representa cuanto son hombres y mujeres del total

Imagen 16. Solución tipo α en un estudiante de séptimo grado (Beatriz Espinosa)

Por otra parte, en una solución tipo β las relaciones previamente identificadas, son representadas empleando alguna forma de la notación simbólica, tal como se aprecia en la imagen 17, con la producción de un estudiante de octavo grado. Este estudiante utiliza las expresiones x y $x + 6$ para representar, respectivamente, el número de hombres y el número de mujeres que hay en el salón de clases, llegando a la ecuación $x + x + 6 = 40$, la cual representa correctamente el enunciado. Sin embargo, el tratamiento sintáctico sobre la ecuación, contiene un descuido importante, por parte del estudiante, que conduce a una respuesta errónea.


6. 40 estudiantes conforman un salón de clases. Sabemos que hay 6 mujeres más que hombres.

Utiliza una expresión matemática que represente el enunciado. Explica por qué escogiste esa representación y qué significa.

R=26 mujeres

R=14 hombres

$x+6+x=40$

$2x+6=40$

$x+6=40/2$

$x=20-6$

$x=14$

1. Yo escogi la ecuación porque creo que es una de las maneras más faciles de encontrar cuantos son hombres y cuantos mujeres. Lo que significa es la representación de mujeres y hombres.

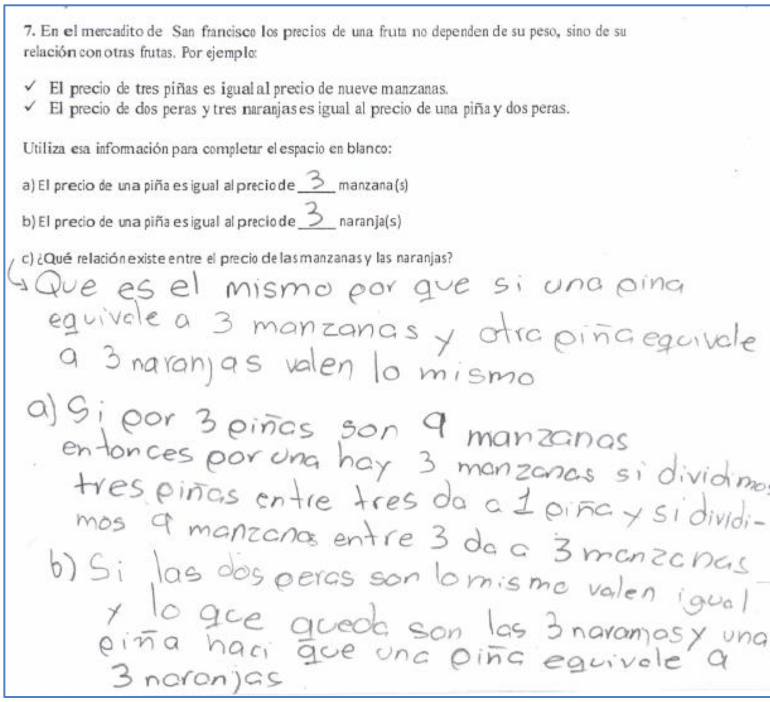
Transcripción:
Yo escogí la ecuación porque creo que es una de las maneras más fáciles de encontrar cuantos son hombres y cuantas mujeres. Lo que significa es la representación de mujeres y hombres.

Imagen 17. Solución tipo β en un estudiante de octavo grado (Carlos Falcón)

En última instancia, la recurrente producción de soluciones tipo ε sugiere una reestructuración de la tarea, que promueva mayores evidencias a) sobre la actividad algebraica de los estudiantes y b) la manera en la cual se entrelazan los componentes relacional y notacional en la configuración de formas algebraicas de pensar.

Soluciones identificadas en la tarea tipo RA (tarea #7)

Las producciones elaboradas por los estudiantes revela en su gran mayoría, una forma de trabajo analítica contextual, lo cual implica una amplia clasificación en soluciones tipo α. Inicialmente, se identifican las relaciones dadas en el contexto de la tarea y a partir de estas, se buscan y construyen nuevas relaciones que atienden a las preguntas. La imagen 18 muestra un ejemplo de este tipo de solución, desarrollado por un estudiante de sexto grado. Pese a no utilizar notaciones simbólicas, él reconoce que puede dividir entre tres para responder el ítem a) derivando así una nueva relación. Del mismo modo, reconoce que puede quitar la misma cantidad a ambos lados de la igualdad y así responde el ítem b). Finalmente, deja entrever que el precio de las manzanas y las naranjas es el mismo.



7. En el mercadito de San francisco los precios de una fruta no dependen de su peso, sino de su relación con otras frutas. Por ejemplo:

✓ El precio de tres piñas es igual al precio de nueve manzanas.
✓ El precio de dos peras y tres naranjas es igual al precio de una piña y dos peras.

Utiliza esa información para completar el espacio en blanco:

a) El precio de una piña es igual al precio de 3 manzana(s)

b) El precio de una piña es igual al precio de 3 naranja(s)

c) ¿Qué relación existe entre el precio de las manzanas y las naranjas?

Que es el mismo por que si una piña equivale a 3 manzanas y otra piña equivale a 3 naranjas valen lo mismo

a) Si por 3 piñas son 9 manzanas entonces por una hay 3 manzanas si dividimos tres piñas entre tres da a 1 piña y si dividimos 9 manzanas entre 3 da a 3 manzanas

b) Si las dos peras son lo mismo valen igual y lo qce queda son las 3 naranjas y una piña haci que una piña equivale a 3 naranjas

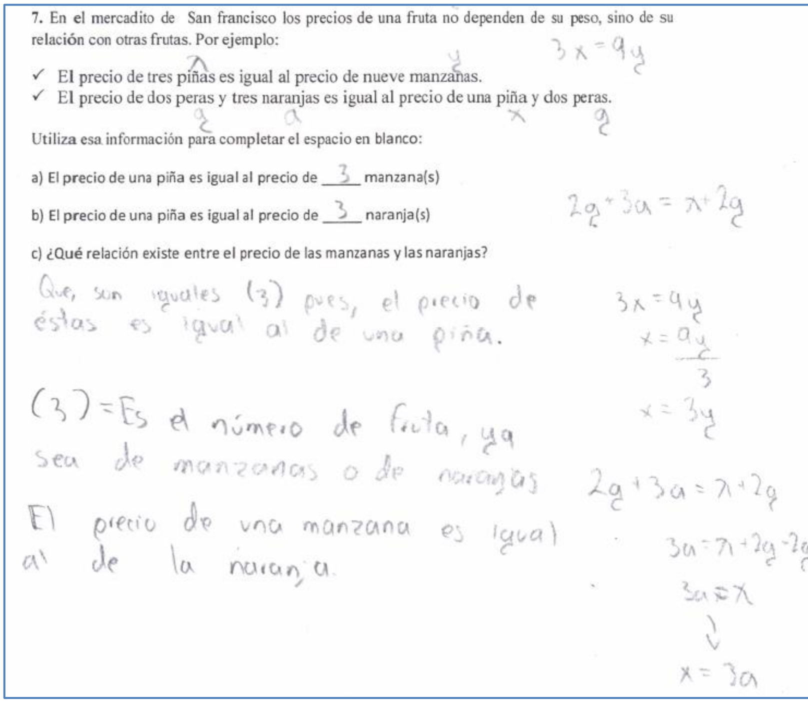
Transcripción:
a) 3. Si por tres piñas son 9 manzanas entonces por una hay tres manzanas si dividimos tres piña entre una tres da a 1 piña y si dividimos 9 manzanas entre 3 da a manzanas.
b) 3. Si las dos peras son lo mismo valen igual y lo que queda son las tres naranjas y una piña haci que una piña equivale a 3 naranjas
c) Que es el mismo por que si una piña equivale a tres manzanas y otra piña equivale a tres naranjas valen lo mismo

Imagen 18. Solución tipo α en un estudiante de sexto grado (Ana cien fuegos)

Únicamente, dos estudiantes que integran la muestra, trabajan con la analiticidad sintáctica. Un ejemplo de esto se visualiza con la producción de un estudiante de octavo grado (ver imagen 19). Ella identifica las relaciones dadas y emplea la notación simbólica como herramienta de apoyo para encontrar nuevas relaciones que responden a las preguntas de la tarea. De esta manera, plantea dos ecuaciones:

a) $3x = 9y$
b) $2g + 3a = x + 2g$

Donde x representa el precio de una piña, y el precio de una manzana, g el precio de una pera y finalmente, a el precio de una naranja. Despeja x en ambas ecuaciones y concluye que el precio de una manzana es igual al de una naranja. Esta forma analítica de proceder se corresponde con una solución tipo β, pero llama la atención la manera en la cual, los símbolos literales no remiten a alguna característica del contexto.



7. En el mercadito de San francisco los precios de una fruta no dependen de su peso, sino de su relación con otras frutas. Por ejemplo:

- ✓ El precio de tres piñas es igual al precio de nueve manzanas.
- ✓ El precio de dos peras y tres naranjas es igual al precio de una piña y dos peras.

Utiliza esa información para completar el espacio en blanco:

a) El precio de una piña es igual al precio de __3__ manzana(s)

b) El precio de una piña es igual al precio de __3__ naranja(s)

c) ¿Qué relación existe entre el precio de las manzanas y las naranjas?

Que, son iguales (3) pues, el precio de éstas es igual al de una piña.

(3) = Es el número de fruta, ya sea de manzanas o de naranjas

El precio de una manzana es igual al de la naranja.

$3x = 9y$ $\quad x = \frac{9y}{3}$ $\quad x = 3y$

$2g + 3a = x + 2g$ $\quad 3a = x + 2g - 2g$ $\quad 3a = x$ $\quad x = 3a$

Transcripción:

a) $3x = 9y \quad x = \frac{9y}{3} \quad x = 3y$

b) $2g + 3a = x + 2g$
$3a = x + 2g - 2g$
$3a = x \qquad x = 3a$

c) Que, son iguales (3) pues, el precio de éstas es igual al de una piña.

(3) = Es el número de fruta, ya sea de manzanas o de naranjas

El precio de una manzana es igual al de la naranja.

Imagen 19. Solución tipo β en una estudiante de octavo grado (Celia Pineda)

Este análisis constata que en las producciones de los estudiantes, se puede presentar cualquiera de las formas analíticas de proceder, ante la búsqueda de nuevas relaciones matemáticas. Si bien, en los primeros grados hubo mayor trabajo analítico contextual, en octavo grado, la analiticidad sintáctica sobresale, quizás por la familiaridad que han alcanzado estos estudiantes frente al trabajo simbólico; en la representación y manera de operar con los símbolos literales.

4.3.2. Análisis descriptivo horizontal

En este apartado se estudian las trayectorias seguidas por siete estudiantes, durante el desarrollo de cada una de las tareas propuestas. El análisis exploratorio revela que estos estudiantes tienen éxito en la resolución de la tarea RAN (tarea #8), razón por la cual, es importante reconocer, qué aspectos de *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional* ponen en juego dichos estudiantes para dar solución a esa tarea. Además, junto al análisis descriptivo vertical, el análisis que aquí se presenta genera respuestas sobre la articulación de los componentes algebraicos y sus implicaciones en la emergencia de formas de pensamiento algebraico.

Se estudian las trayectorias de solución desarrolladas por un estudiante de sexto, cuatro de séptimo y dos de octavo grado. Para visualizar un panorama general de esas trayectorias, se ha optado por la construcción de cuatro gráficas cartesianas, una para la estudiante de sexto grado, otras dos para los cuatro estudiantes de séptimo y una para los dos estudiantes de octavo grado. De esta manera se facilita la lectura y el estudio de las producciones. En el *eje y* se sitúan los valores correspondientes a los tipos de solución (ε, α y β) mientras que en el *eje x* se consideran los tipos de tareas.

La figura 4 ilustra la trayectoria configurada por el trabajo de Alicia Falcón. Un análisis rápido deja entrever que *lo relacional* y *lo analítico* actúan de manera suficiente para que ella de respuesta acertada a la tarea RAN. De manera que *lo notacional*, no parece tener un lugar protagónico. Incluso, se puede observar que las tareas que integran este componente estas catalogadas dentro del tipo de solución ε.

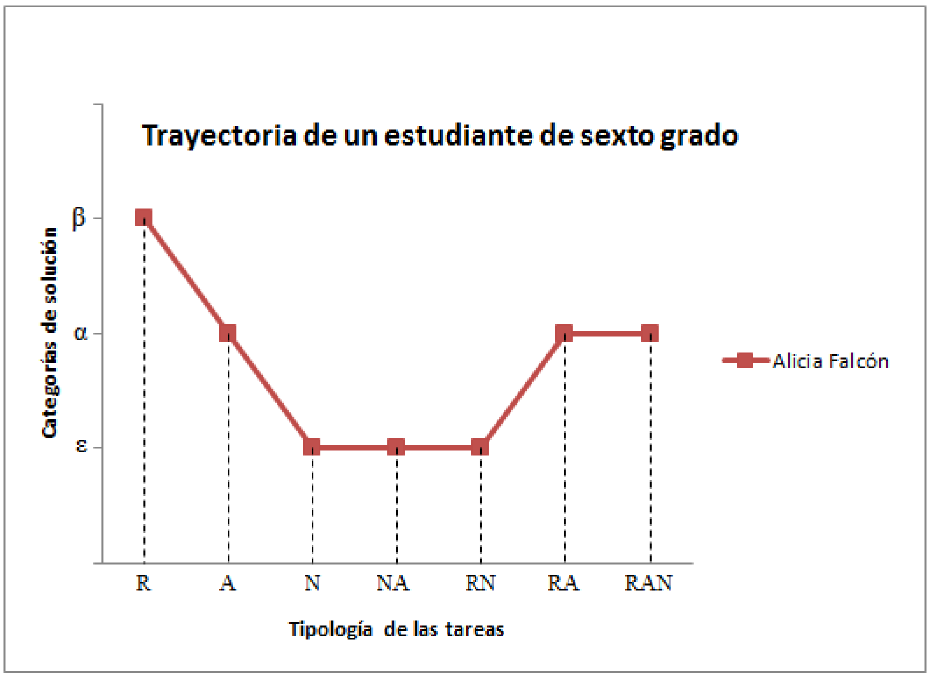


Figura 4. Trayectoria construida por Alicia Falcón

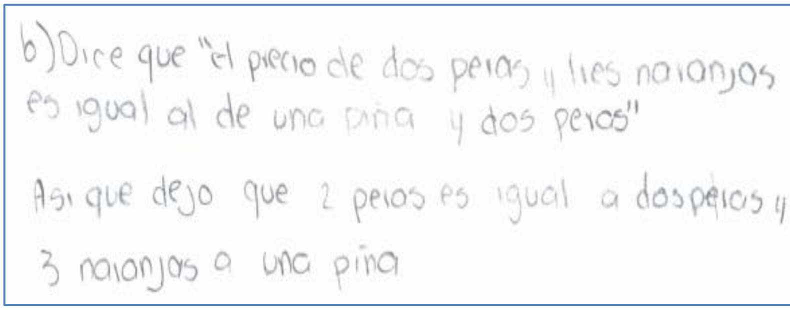
Inicialmente, se estudia la solución efectuada por Alicia Falcón para dar respuesta a la tarea RAN. Seguidamente, se estudia el impacto que tiene la resolución de las tareas asociadas a *lo relacional* y *lo analítico* sobre la tarea RAN, y finalmente, se analizan las implicaciones de *lo notacional*.

Las preguntas y respuestas proporcionadas por Alicia Falcón, en torno a la tarea RAN, son transcriptas en la tabla 6. La respuesta dada al ítem b) permite inferir la tipología asignada a la solución (tipo α). En efecto, para la estudiante la palabra "igual" está dotada de un significado *relacional* que le obliga a considerar el trabajo de computo en ambas miembros de la igualdad. Su manera de proceder es acorde con la *analiticidad contextual*, relativa a métodos de adivinar y validar, donde las notaciones empleadas para la variable son números particulares. De hecho, en su discurso se reconoce la necesidad de efectuar “dos procedimientos” que generen la misma cantidad numérica.

Tarea RAN	Preguntas	Transcripción de las respuestas
8. Existe un número secreto. Utiliza la siguiente información para encontrarlo: “*El número secreto multiplicado por doce, menos veinte es igual al número secreto multiplicado por siete, más cinco*”	a) Alex afirma que mi número secreto es el cuatro. ¿Sera cierta la afirmación de Alex?	No
	b) Si Alex está equivocado, ¿Cuál es mi número secreto? Explica cómo encontraste el número secreto y por qué escogiste esa forma	El número secreto es 5 encontre el numero, primero hice todo el procedimiento con el numero 4 el que se suponía Alex dijo que era “correcto” al multiplicarlo por 12 y restarle 20 tenia que darme el mismo número que al multiplicarlo por siete y sumarle 5, y con el procedimiento de Alex los números no eran iguales asi que lo intente con 5 y asi encontré el resultado pues lo intente con el numero 6 y no me dio lo mismo.
	c) Escribe una expresión matemática que represente la información dada	Tengo que buscar un numero que me de la misma cantidad al hacer los dos procedimientos.

Tabla 6. Solución tipo α reconocida en la producción de Alicia Falcón

Al examinar la trayectoria seguida por Alicia (ver figura 4) se puede apreciar su unanimidad al concebir la igualdad en la tarea R y la tarea RAN. Lo cual implica que el *significado relacional* del signo igual puesto en funcionamiento para resolver la tarea R, también toma un lugar protagónico en la tarea RAN, dado que posibilita a) la identificación de la relación existente entre dos expresiones matemáticas y b) la búsqueda de la solución. De hecho, este significado del signo igual también aparece en la solución proporcionada a la tarea RA. Alicia reconoce que el enunciado “el precio de dos peras y tres naranjas es igual al precio de una piña y dos peras” es equivalente a decir que: el precio de tres naranjas es igual al de una piña (ver imagen 20).

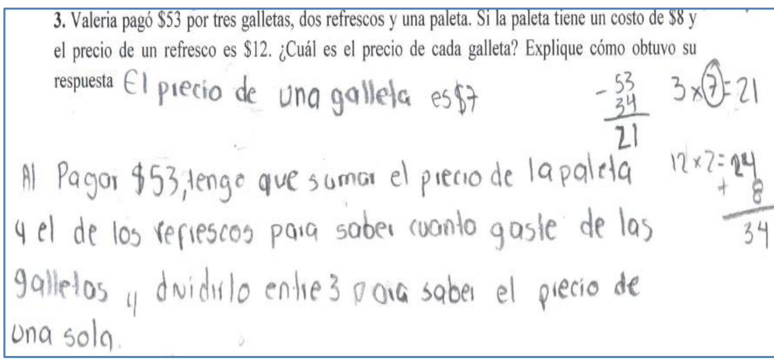


Transcripción:
b) Dice que “el precio de dos peras y tres naranjas es igual al de una piña y dos peras”

Asi que dejo que 2 peras es igual a dos peras y 3 naranjas a una piña

Imagen 20. Respuesta dada por Alicia Falcón al ítem b) de la tarea RA

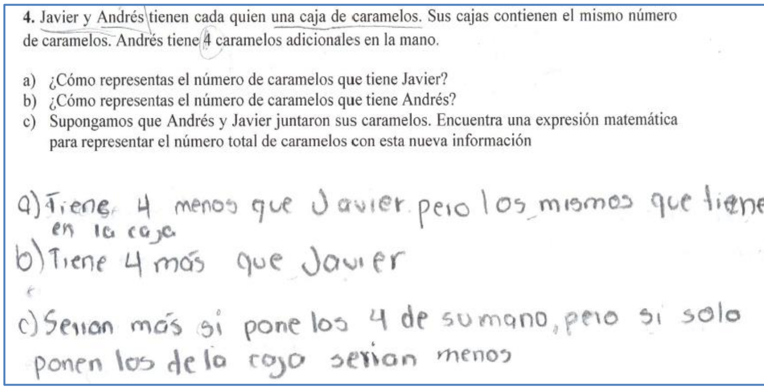
De igual manera, la *analiticidad contextual* identificada en la tarea RAN, parece ser producto de la forma en que ella procede al afrontar, por ejemplo, la tarea A (ver imagen 21). Si bien, en la tarea A encuentra el precio de una galleta, operando con lo conocido para hallar lo desconocido, en la tarea RAN esta manera de proceder vuelve a emerger, ya que la variable que representa el número secreto es sustituida por un número particular, con la idea de efectuar los cálculos con lo conocido.


3. Valeria pagó $53 por tres galletas, dos refrescos y una paleta. Si la paleta tiene un costo de $8 y el precio de un refresco es $12. ¿Cuál es el precio de cada galleta? Explique cómo obtuvo su respuesta

Transcripción:
El precio de una galleta es $7
Al pagar $53, tengo que sumar el precio de la paleta y el de los refrescos para saber cuanto gaste de las galletas y dividirlo entre 3 para saber el precio de una sola

Imagen 21. La solución de Alicia Falcón a la tarea A

Por otra parte, al examinar el ítem c) de la tarea RAN (ver tabla 6), llama la atención el hecho de que Alicia no considere una expresión matemática para representar la información dada, al parecer ella está más interesada en la relación que guardan “los dos procedimientos” y en el conjunto solución de la ecuación. Las notaciones empleadas en las tareas N, NA, y RN remiten a *notaciones singulares*, donde el manejo del lenguaje natural es predilecto. Por ejemplo, en la tarea N, Alicia intenta representar la cantidad de caramelos a través de una estrategia de comparación, pero fracasa cuando quiere replicarla para dar respuesta al ítem c) (ver imagen 22).


4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier?
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés?
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

a) Tiene 4 menos que Javier pero los mismos que tiene en la caja
b) Tiene 4 más que Javier
c) Serian más si pone los 4 de su mano, pero si solo ponen los de la caja serian menos

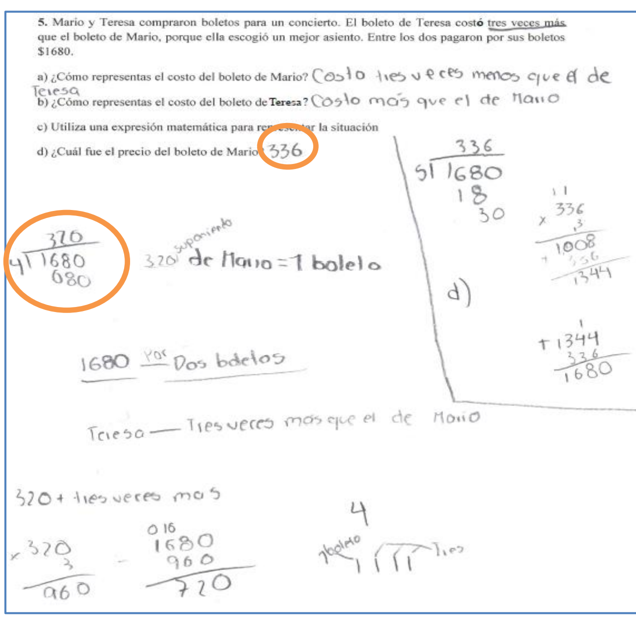
Transcripción:
a) Tiene 4 menos que Javier pero los mismos que tiene en la caja

b) Tiene 4 más que Javier

c) Serian más si pone los 4 de su mano, pero si solo ponen los de la caja serian menos

Imagen 22. La solución de Alicia Falcón a la tarea N

La presencia y recurrencia de la misma *notación singular*, es decir, de comparación, nuevamente emerge en el proceso de solución desplegado por Alicia en la tarea NA. Ella logra identificar las dos relaciones fundamentales establecidas en el enunciado, "1680 por dos boletos" y "Teresa-tres veces más que el de Mario". Incluso, infiere que debe efectuar la división de 1680 entre 4 para conocer el costo del boleto de Mario, lo cual demuestra su familiaridad con la forma analítica contextual de proceder. Sin embargo, comete un error de cálculo al efectuar la división, razón por la cual su solución se enmarca en la tipología ε (ver imagen 23). Si bien, hay *analiticidad contextual* en el pensamiento de Alicia, reconocible en otras tareas (N, RAN) es importante que esta forma analítica de proceder se consolide a través de un apropiado trabajo con las operaciones básicas y sus inversas (Lins, 1992).


5. Mario y Teresa compraron boletos para un concierto. El boleto de Teresa costó tres veces más que el boleto de Mario, porque ella escogió un mejor asiento. Entre los dos pagaron por sus boletos $1680.

a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? Costo tres veces menos que el de Teresa
b) ¿Cómo representas el costo del boleto de Teresa? Costo más que el de Mario
c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación
d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario? 336

320 suponiendo de Mario = 1 boleto

1680 por Dos boletos

Teresa — Tres veces más que el de Mario

320 + tres veces mas

Transcripción:

a) Costo tres veces menos que el de Teresa

b) Costo más que el de Mario

c) 1344 + 336 = 1680

d) 336

Imagen 23. Solución de Alicia Falcón a la tarea NA

Este análisis descriptivo sobre la trayectoria desplegada por Alicia permite constatar que se produce pensamiento algebraico cuando los estudiantes escudriñan relaciones y procesos numéricos en un intento por encontrar un valor desconocido (Caspi & Sfard, 2012). El significado relacional del signo igual es necesario para que pueda comprenderse el contexto de la tarea RAN. De hecho, es un elemento indicativo de pensamiento algebraico (Kieran, 1992).

En la figura 5 se ilustran las trayectorias de dos estudiantes de séptimo grado, Blanca y Berta. Por un lado, la trayectoria definida por Blanca es muy similar a la de Alicia, aunque hay una diferencia importante asociada a la manera en que ambas solucionan la tarea R. Por otra parte, en la trayectoria de Berta es objeto de discusión el hecho de que la notación simbólica presente en la tarea N, no parece tener presencia en la tarea RAN.

La imagen 23 muestra las respuestas proporcionadas por Blanca Leyua a las tareas tipo R. En la tarea #1 se aprecia el significado operacional del signo igual, que se constata en la solución y justificación dada en la tarea #2. De hecho, no hay indicios de otro significado asociado a la igualdad. Sin embargo, en la tarea RAN se observa que no es así, dado que también emerge el significado relacional del signo igual.

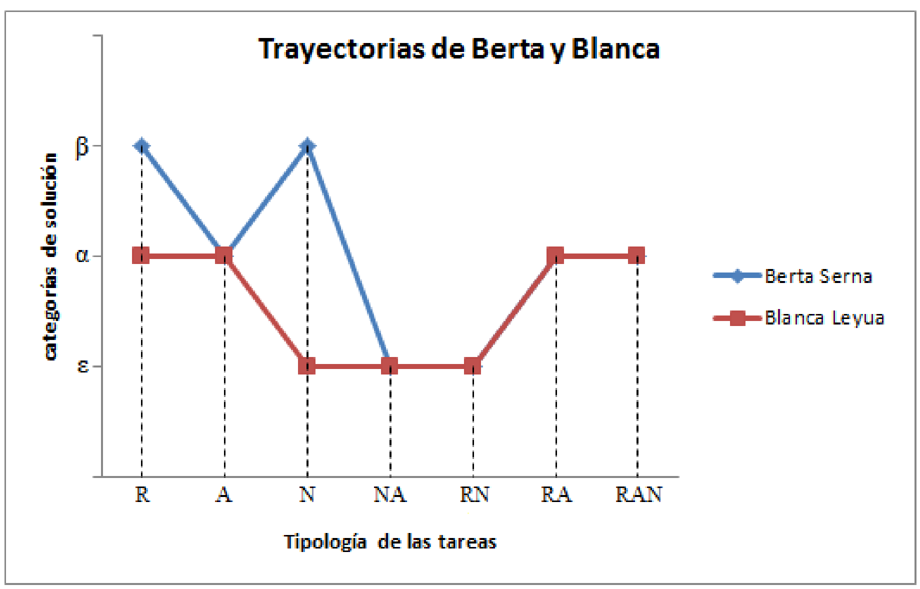
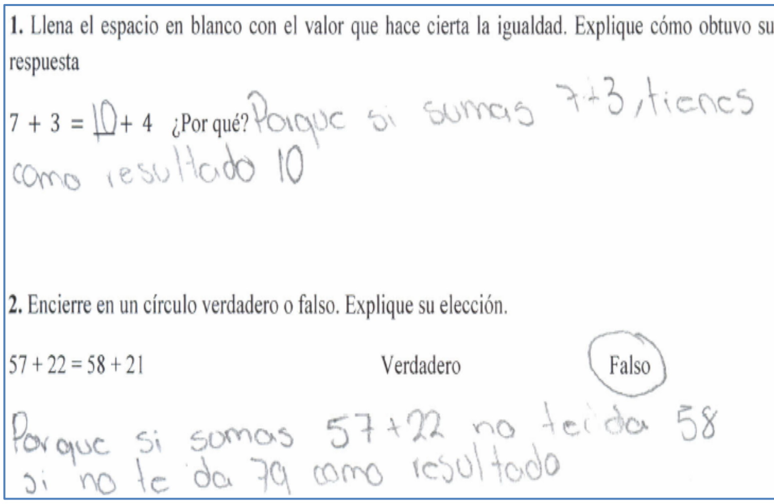


Figura 5. Trayectorias de solución configuradas por el trabajo de Berta Serna y Blanca Leyua

Esta dificultad de los estudiantes para reconocer cuando atribuir un significado u otro a los símbolos matemáticos es explicada por Sfard y Linchevski (1994) en términos del concepto de *adaptabilidad*. Si bien, Blanca muestra su *versatilidad* o capacidad de ver el signo igual en diferentes facetas (operacional y relacional), ello no significa, necesariamente, que ella siempre sea capaz de adaptar el punto de vista a la tarea en cuestión. En otras palabras, pese a que Blanca dispone de ambos significados del signo igual y de la capacidad de usarlos, al momento de resolver un problema, no reconoce con certeza, cuál es el significado adecuado que necesita seleccionar y utilizar para enfrentarlo.


1. Llena el espacio en blanco con el valor que hace cierta la igualdad. Explique cómo obtuvo su respuesta

7 + 3 = 10 + 4 ¿Por qué? Porque si sumas 7+3, tienes como resultado 10

2. Encierre en un círculo verdadero o falso. Explique su elección.

57 + 22 = 58 + 21 Verdadero Falso

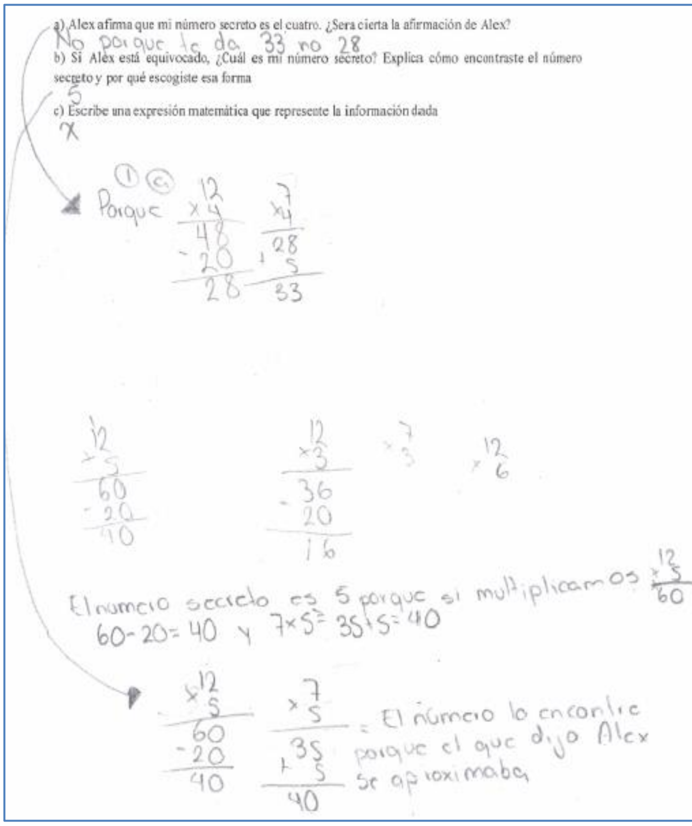
Porque si sumas 57+22 no te da 58 si no te da 79 como resultado

Transcripción:
1. 7 + 3 = 10 + 4 porque si sumas 7+3, tienes como resultado 10

2. Falso porque si sumas 57+22 no te da 58 si no te da 79 como resultado

Imagen 23. Significado operacional del signo igual en Blanca Leyua

Al contrastar las imágenes 23 y 24, asociadas al trabajo de Blanca, se pueden ver los dos significados atribuidos al signo igual. De hecho, la falta de *adaptabilidad* se hace ostensible en las justificaciones operacionales que hace Blanca en la tarea RAN. Si bien, entiende que está buscando la igualdad entre dos procedimientos, al efectuar las operaciones indicadas prevalece el *significado operacional* del signo igual, el cual se reconoce debido a la yuxtaposición de resultados por medio de diferentes igualdades. Ramírez García & Rodríguez Marcos (2011) reportan esta forma de trabajo con el signo igual, relacionada al hecho de que los estudiantes, usualmente de escuela primaria, leen el signo igual de izquierda a derecha, entendiendo con ello, que siempre operan sobre los números que están a la izquierda y que la respuesta la sitúan al lado derecho del igual.



Transcripción:

a) No porque te da 33 no 28.
Porque $12 \times 4 = 48 - 20 = 28$
$7 \times 4 = 28 + 5 = 33$

b) 5. El número secreto es 5 porque si multiplicamos $12 \times 5 = 60,\ 60 - 20 = 40$ y $7 \times 5 = 35 + 5 = 40$

El número secreto lo encontre porque el que dijo Alex se aproximaba

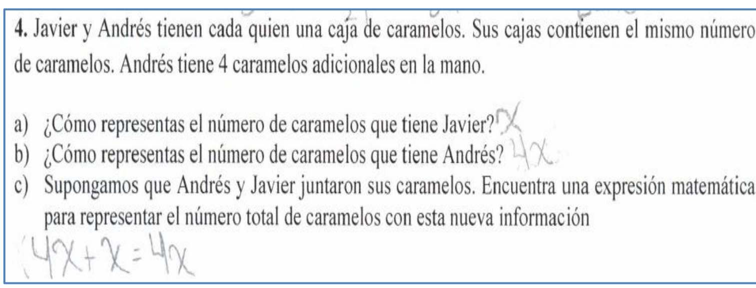
c) x

Imagen 24. La solución de Blanca Leyua a la tarea RAN

Como resultado de este análisis sobre *lo relacional* y sus implicaciones sobre la resolución de la tarea RAN, nuevamente, se pone de manifiesto que el significado relacional del signo igual es un aspecto fundamental del pensamiento algebraico (Molina & Castro, 2007). Pese a que Blanca muestra una fuerte tendencia por utilizar el *significado operacional* del signo igual, también deja entrever que el *significado relacional* hace parte de su colección de herramientas para resolver un problema. Por lo tanto, es indispensable que ella pueda consolidar dicho significado en el trabajo con ecuaciones, pues tal como mencionan Sfard y Linchevski (1994) la *versatilidad* no es suficiente para medir su *competencia algebraica*.

Por otra parte, la imagen 24 revela la forma en la cual, Blanca procede para encontrar el número secreto. Ella pone en funcionamiento el *significado relacional* del signo igual y comprueba con ello que el número cuatro no es la solución buscada. Sin embargo, reconoce que los resultados obtenidos con dicho número generan resultados cercanos entre sí, lo cual le indica la consideración de números próximos al cuatro, hasta comprobar que cinco es número secreto. Incluso, hay indicios de intentos con otros números, tales como tres y seis. Al igual que Alicia, Blanca revela una forma *analítica contextual* de proceder que remite a la estrategia sistemática de sustituir números en el lugar de la variable, hasta encontrar el valor que satisface la igualdad en ambos miembros de la ecuación. En términos de Reeuwijk (1995) esta forma de proceder puede verse como una estrategia sofisticada porque los candidatos a ser solución son escogidos de manera sistemáticamente, situando el método de "adivinar y checar" en un plano pre-formal del pensamiento matemático de los estudiantes.

Es importante mencionar que Blanca no visualiza, formalmente, una ecuación. Para ella, los factores sintácticos del contexto de la tarea, determinan "dos procesos" que deben ser equivalentes. Un aspecto diferenciable en la trayectoria de Blanca remite a *lo notacional*. En el ítem c) de la tarea RAN ella utiliza la letra x para representar la información dada, lo cual puede ser un indicador de su poca familiaridad con la notación simbólica convencional. Esto se constata al examinar su producción en la tarea N (ver imagen 25).


4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

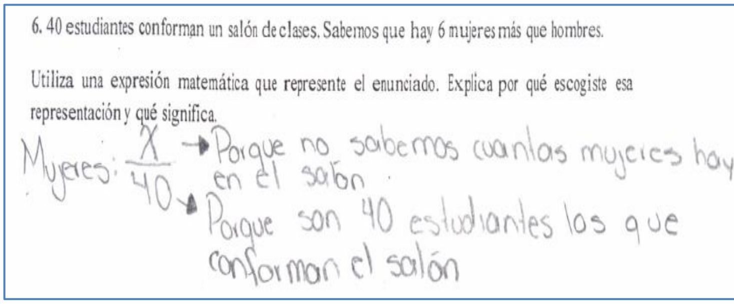
a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? x
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? $4x$
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

$4x+x=4x$

Transcripción:
a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? x
b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? $4x$
c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron… $4x + x = 4x$

Imagen 25. La solución de Blanca Leyua a la tarea N

En la imagen 25 se puede apreciar la manera en la cual Blanca utiliza la notación simbólica. En efecto, la respuesta dada al ítem b) permite inferir la dificultad que ella tiene para representar cuatro unidades adicionales a cierta cantidad dada. Además, en el ítem c) se visualiza un error de cálculo al operar de manera sintáctica con los símbolos literales. Blanca no comprende las operaciones subyacentes que dichos símbolos expresan, producto de su poca familiaridad con la notación simbólica y su sintaxis (Watson, 2007) o bien, porque considera las letras como simple etiquetas para los objetos (Christou & Vosniadou, 2012). La imagen 26 deja entrever que ella emplea la letra x para referirse a una cantidad desconocida. Incluso, hace énfasis en ello, al expresar que utiliza la "x" porque no sabe cuántas mujeres hay en el salón. En consecuencia, los errores identificados en la tarea N están más asociados a su falta de conocimiento sobre la notación simbólica y su escasa familiaridad para operar de forma sintáctica.



6. 40 estudiantes conforman un salón de clases. Sabemos que hay 6 mujeres más que hombres.

Utiliza una expresión matemática que represente el enunciado. Explica por qué escogiste esa representación y qué significa.

Mujeres: $\frac{X}{40}$ → Porque no sabemos cuantas mujeres hay en el salon. → Porque son 40 estudiantes los que conforman el salón

Transcripción:

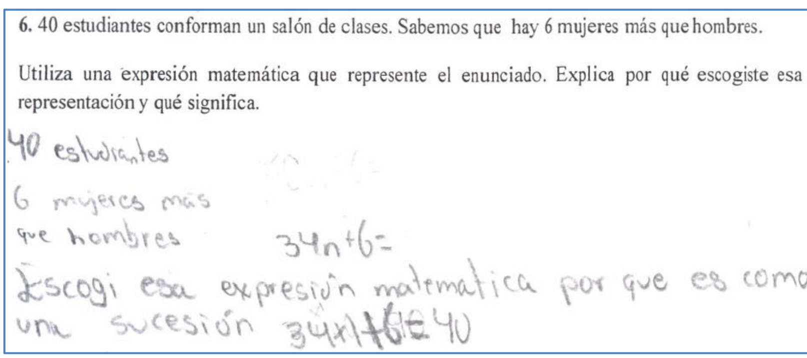
Mujeres: $\frac{x}{40}$

Porque no sabemos cuantas mujeres hay en el salón

Porque son 40 estudiantes los que conforman el salón

Imagen 26. La solución de Blanca Leyua a la tarea RN

Por otra parte, al examinar la trayectoria de Berta (ver figura 5) parece existir mayor consolidación de la notación simbólica, tal como se refleja en la solución que ella proporciona para la tarea N (ver imagen 11). Al igual que Blanca, Berta utiliza la letra x para referirse a una cantidad desconocida y pese a que utiliza un lenguaje retórico para responder el ítem b), expresa con *notación simbólica* el ítem c). Sin embargo, tal como indica el análisis descriptivo vertical, ella aún no reconoce la manera en la cual, puede operar con dichos símbolos. De hecho, la solución que proporciona para la tarea RN (ver imagen 27) permite constatar la dificultad presente al momento de representar, a través de la *notación simbólica*, la relación establecida en el contexto de la tarea.



6. 40 estudiantes conforman un salón de clases. Sabemos que hay 6 mujeres más que hombres.

Utiliza una expresión matemática que represente el enunciado. Explica por qué escogiste esa representación y qué significa.

40 estudiantes

6 mujeres mas que hombres 34n+6=

Escogi esa expresión matematica por que es como una sucesión 34x1+6=40

Transcripción:

40 estudiantes

6 mujeres mas que hombres

34n+6=

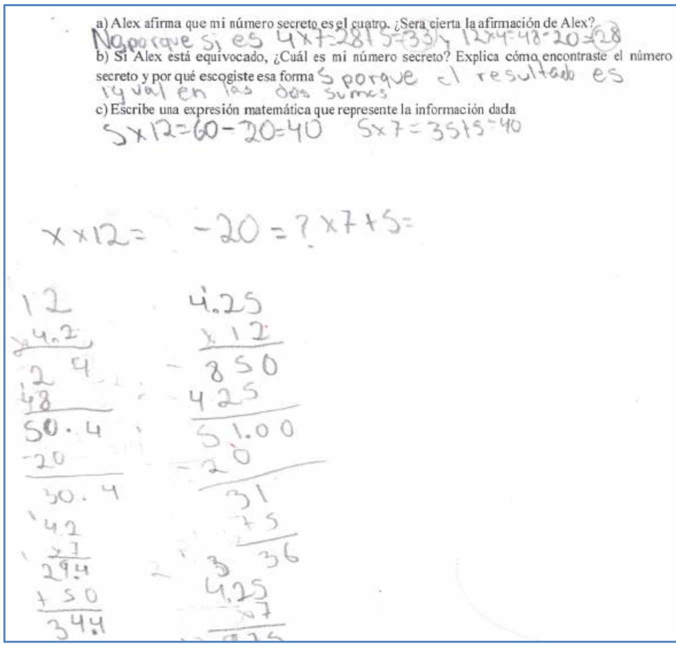
Escogi esa expresión matemática porque es como una sucesión

$34 \times 1 + 6 = 40$

Imagen 27. La solución de Berta Serna a la tarea RN

Si bien, Berta logra identificar la información relevante de la tarea, es decir, las dos relaciones matemáticas establecidas, tanto la representación de cada relación, como su articulación mediante una expresión matemática, resultan difíciles para ella. Aunque, la representación de la información suministrada en problemas de palabras es una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes al resolver problemas inscritos en el álgebra (Stacey & MacGregor, 1999), es destacable al contrastar la imagen 11 y la imagen 27 la poca consolidación de la notación simbólica y de su operatividad.

Este estudio sobre *lo notacional* en las producciones de Berta, provee respuestas para comprender su forma de trabajar con la tarea RAN. En la imagen 28 se expone este contenido. Berta utiliza *notaciones singulares* para expresar matemáticamente la información dada, quizás porque tiene poca experiencia con la formas *notacionales simbólicas* y su sintaxis, tal como se aprecia en las otras tareas que involucran el componente *notacional*. No obstante, su elección podría estar mediada por la idea de usar una expresión matemática que permita apreciar el número que satisface ambas igualdades, en este caso, el número cinco.



Transcripción:

a) No, porque si es $4 \times 7 = 28 + 5 = 33$ y $12 \times 4 = 48 - 20 = 28$

b) 5 porque el resultado es igual en las dos sumas

c) $5 \times 12 = 60 - 20 = 40$

$5 \times 7 = 35 + 5 = 40$

$x \times 12 = \quad -20 = ?\times 7 + 5 =$

(Utiliza una forma analítica contextual de proceder basada en la estrategia de sustituir y checar. Se aprecian intentos con los números 4.2 y 4.5)

Imagen 28. La solución de Berta Serna a la tarea RAN

En efecto, hay poca familiaridad con el uso de la *notación simbólica*, que se pone de manifiesto al emplear, por ejemplo, x y ? para referirse al mismo valor desconocido. Sin embargo, la *notación singular* con la cual representa la información dada, es a su vez, una comprobación de que el cinco es el número buscado. Por otra parte, al examinar la respuesta al ítem a) se puede observar la yuxtaposición de los dos significados del signo igual, con prioridad sobre el *significado relacional*, puesto que Berta comprende que está buscando un número que satisfaga “ambas sumas”. La forma en la cual ella procede para buscar dicho número, es similar a la empleada por Blanca y Alicia, aunque considera la posibilidad de un número decimal como respuesta. En concreto, el análisis sobre la trayectoria definida por Berta, constata el hecho de que las formas notacionales, pueden concebirse como una colección de herramientas que están a disposición de los estudiantes al momento de resolver un problema (Van Amerom, 2003). La capacidad de seleccionar y utilizar la forma notacional adecuada para enfrentar un problema, es algo que los estudiantes van aprendiendo, a medida que acumulan experiencias con diferentes situaciones y se percatan que ciertas notaciones son más potentes que otras (Reeuwijk, 1995).

En la figura 6 se muestran las trayectorias de solución de dos estudiantes de séptimo grado. Estas trayectorias son muy similares, diferenciables en la categoría asignada a la tarea A. De hecho, la forma en que ambos abordan las tareas y las dificultades que presentan, por ejemplo en el caso de la tarea RN son coincidentes. Un análisis rápido revela que ambos estudiantes priorizan el *significado relacional* del signo igual, las *notaciones singulares* y una forma *analítica contextual* de proceder, que a diferencia de las producciones anteriores parece estar mejor consolidada, si se considera la categoría de solución asignada a la tarea NA.

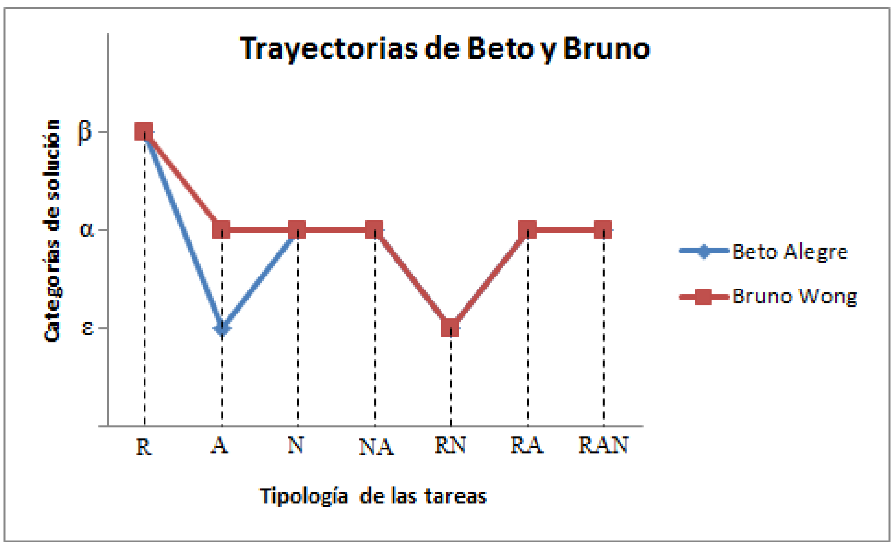
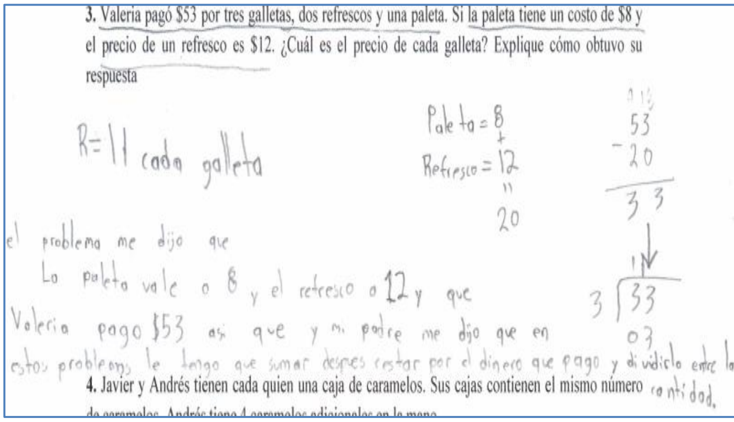


Figura 6. Trayectorias de solución configuradas por el trabajo de Beto y Bruno

Para efectos prácticos en el análisis, evitando la redundancia, y dada la proximidad existente entre las soluciones de ambos estudiantes, se estudia únicamente el caso de Beto. Este estudiante presenta una categoría de solución tipo ε asignada a la tarea A, puesto que su respuesta final no es correcta (ver imagen 29). Sin embargo, un análisis más detallado revela matices de la *analiticidad contextual* durante el desarrollo de la tarea. Beto identifica las cantidades y la mayoría de las relaciones que intervienen en el problema, pero no considera la relación establecida por la compra de dos refrescos, razón por la cual termina encontrando un resultado erróneo.


3. Valeria pagó $53 por tres galletas, dos refrescos y una paleta. Si la paleta tiene un costo de $8 y el precio de un refresco es $12. ¿Cuál es el precio de cada galleta? Explique cómo obtuvo su respuesta

R=11 cada galleta

Paleta = 8 + Refresco = 12 = 20

53 − 20 = 33

3 | 33

el problema me dijo que La paleta vale a 8 y el refresco a 12 y que Valeria pago $53 así que y mi padre me dijo que en estos problems le tengo que sumar despes restar por el dinero que pago y dividirlo entre la cantidad.

4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número

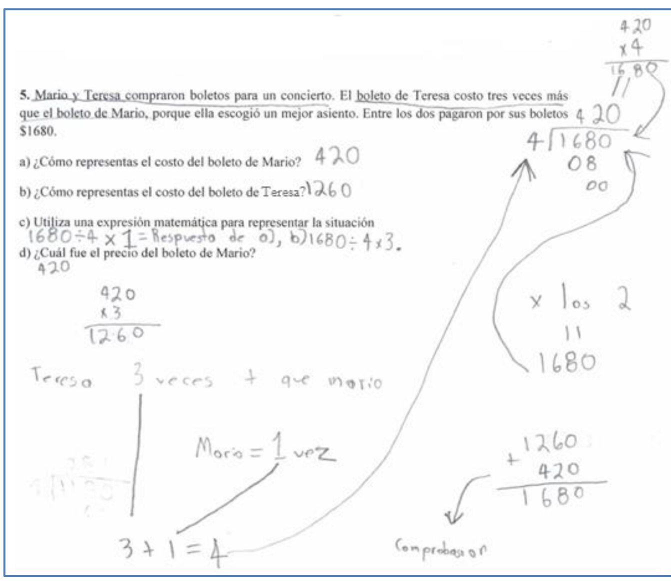
Transcripción:

R=11 cada galleta (efectúa las operaciones, considerando el precio de un refresco)

El problema me dijo que la paleta vale a 8 y el refresco a 12 y que Valeria pago $153 así que y mi padre me dijo que en estos problemas le tengo que sumar después restar por el dinero que pago y dividirlo entre la cantidad.

Imagen 29. La solución de Beto a la tarea A

A diferencia de los casos anteriores, este estudiante demuestra un trabajo apropiado con las operaciones básicas y sus inversas, que se hace evidente al examinar su forma de proceder para dar respuesta a la tarea NA (ver imagen 30). Beto comprende que los precios de los boletos son comparables por medio de la relación "tres veces más que", lo cual lo lleva a establecer una relación matemática que vincula el precio total de los boletos y el precio de cuatro boletos similares al que compró Mario. Este hecho, destaca la riqueza de la *analiticidad contextual* al centrarse en las cantidades y las relaciones entre ellas, en lugar de números y operaciones.


5. Mario y Teresa compraron boletos para un concierto. El boleto de Teresa costo tres veces más que el boleto de Mario, porque ella escogió un mejor asiento. Entre los dos pagaron por sus boletos $1680.

a) ¿Cómo representas el costo del boleto de Mario? 420

b) ¿Cómo representas el costo del boleto de Teresa? 1260

c) Utiliza una expresión matemática para representar la situación 1680÷4 x 1 = Respuesta de a), b) 1680÷4x3.

d) ¿Cuál fue el precio del boleto de Mario? 420

Teresa 3 veces + que mario

Mario = 1 vez

3 + 1 = 4

x los 2 = 1680

1260 + 420 = 1680

Comprobación

Transcripción:

a) 420

b) 1260

c) 1680÷4×1= respuesta de a), b) 1680÷4×3.

d) 420

Teresa 3 veces + que Mario

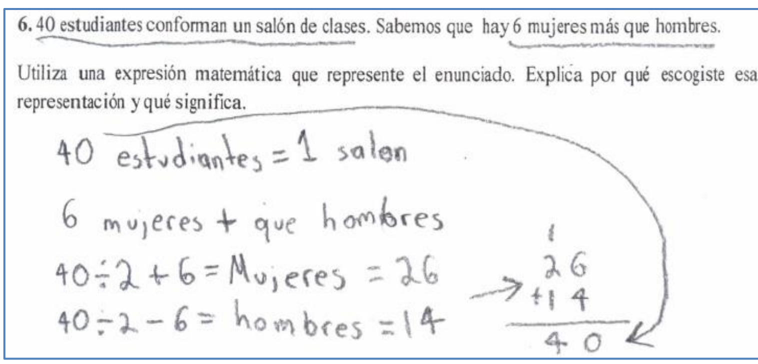
Mario= 1 vez

3+1=4

Imagen 30. La solución de Beto a la tarea NA

El reconocimiento de las cantidades y las relaciones entre ellas, direcciona el trabajo *analítico contextual* para que Beto logre representar y manipular las expresiones, encontrando los precios individuales de cada boleto. Aunque él no consigue formular una ecuación o emplear *notaciones simbólicas*, quizás porque se trata de un problema de palabras (Andrews & Sayers, 2012), la identificación de la información relevante y la construcción de una relación en términos cuantitativos no es menos importante que el desarrollo de sus habilidades para computar y simbolizar (Smith & Thompson, 2007).

En la imagen 31 se puede examinar el trabajo desplegado por Beto en la tarea RN. Llama la atención su insistencia en actuar analíticamente para encontrar la cantidad de hombres y mujeres que hay en el salón de clases, pese a que la tarea no se lo exige. Sus registros escritos dejan entrever que él identifica las cantidades que intervienen en el problema (número de hombres y número de mujeres), así como una de las relaciones entre dichas cantidades (hombres y mujeres suman 40). Sin embargo, presenta dificultades para comprender la relación dada por la frase: "hay seis mujeres más que hombres". Al parecer esta dificultad, típicamente enmarcada en la conocida *translación sintáctica*, es producto de factores lingüísticos provenientes del lenguaje natural, que afectan la comprensión y traducción del enunciado (Andrews & Sayers, 2012; Rojano, 1994; Stacey & MacGregor, 1999).


6. 40 estudiantes conforman un salón de clases. Sabemos que hay 6 mujeres más que hombres.

Utiliza una expresión matemática que represente el enunciado. Explica por qué escogiste esa representación y qué significa.

40 estudiantes = 1 salon

6 mujeres + que hombres

40÷2+6=Mujeres = 26

40÷2−6= hombres =14

26
+14
40

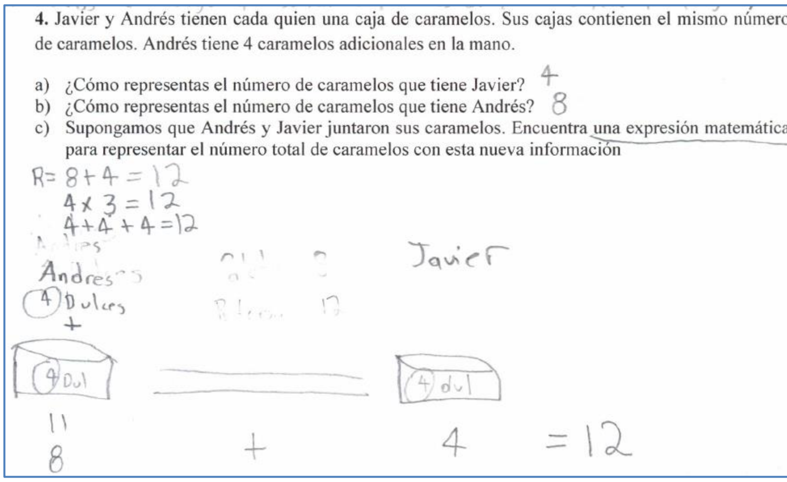
Transcripción:

40 estudiantes= 1salón
6 mujeres + que hombres

$40 \div 2 + 6 = Mujeres = 26$
$40 \div 2 - 6 = hombres = 14$

Imagen 31. La solución de Beto a la tarea RN

En conjunto, la imagen 31 y la imagen 32 ponen de manifiesto el uso constante de *notaciones singulares*, por parte de Beto. En particular, la imagen 32 revela que las expresiones matemáticas tienen sentido para el estudiante si se refieren a casos numéricos cerrados, tales como: $8 + 4 = 12$ y $4 + 4 + 4 = 12$. La solución dada por Beto a la tarea N, hace especial énfasis en la asignación de un valor particular para representar el número de caramelos en la caja.


4. Javier y Andrés tienen cada quien una caja de caramelos. Sus cajas contienen el mismo número de caramelos. Andrés tiene 4 caramelos adicionales en la mano.

a) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Javier? 4

b) ¿Cómo representas el número de caramelos que tiene Andrés? 8

c) Supongamos que Andrés y Javier juntaron sus caramelos. Encuentra una expresión matemática para representar el número total de caramelos con esta nueva información

R= 8+4=12

4x3=12

4+4+4=12

Andres

Javier

4 Dulces

+

4 Dul

4 dul

8 + 4 =12

Transcripción:

a) 4

b) 8

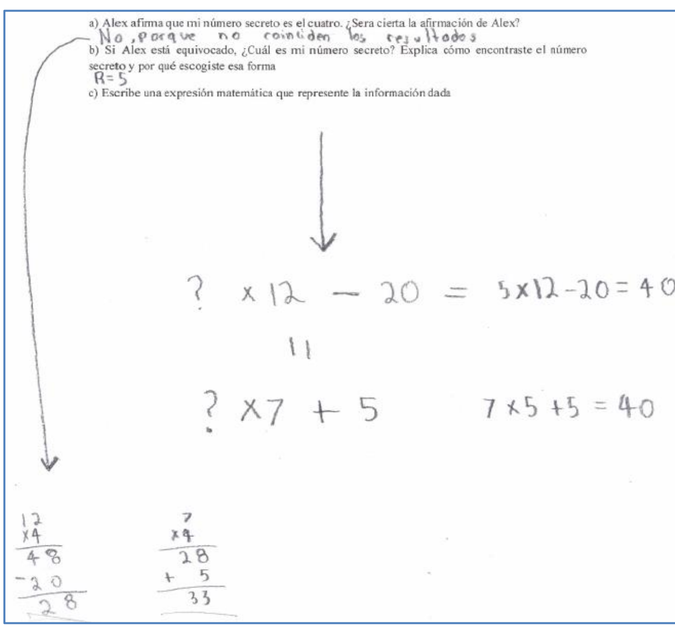
c) R= $8 + 4 = 12$

$4 \times 3 = 12$

$4 + 4 + 4 = 12$

Imagen 32. La solución de Beto a la tarea N

Si bien, algunas investigaciones sugieren que los estudiantes jóvenes pueden cambiar su enfoque de instancias individuales a conjuntos y sus interrelaciones (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008), en la práctica escolar tradicional, fuera de la instrucción del *early algebra*, ello resulta más complejo. Beto considera diferentes formas operacionales de representar el número 12, pero no reconoce la ambigüedad detrás de la tarea, sujeta a interpretaciones alternativas para el número de caramelos en la caja. Aunque en esta solución no se visualiza una forma general de representar lo desconocido, en la tarea RAN se aprecia un aspecto adicional para lo notacional.


a) Alex afirma que mi número secreto es el cuatro. ¿Sera cierta la afirmación de Alex?

No, porque no coinciden los resultados

b) Si Alex está equivocado, ¿Cuál es mi número secreto? Explica cómo encontraste el número secreto y por qué escogiste esa forma

R=5

c) Escribe una expresión matemática que represente la información dada

? x 12 − 20 = 5x12−20=40

||

? x7 + 5   7x5+5=40

12 x4 48 −20 28

7 x4 28 +5 33

Transcripción:

a) No, porque no coinciden los resultados

$12 \times 4 = 48 - 20 = 28$
$7 \times 4 = 28 + 5 = 33$

b) R= 5

c) $? \times 12 - 20 = 5 \times 12 - 20 = 40$

$||$

$? \times 7 + 5 = 7 \times 5 + 5 = 40$

Imagen 33. La solución de Beto Alegre a la tarea RAN

En la imagen 33 se ilustra la solución propuesta por Beto para responder los ítems de la tarea RAN. En efecto, él reconoce la necesidad de usar el significado relacional del signo igual para interpretar el enunciado. Seguidamente, comprueba que el cuatro no es el número secreto buscado y mediante una forma *analítica contextual* de proceder encuentra que tal número, es el cinco. Si bien, representa lo desconocido a través de un símbolo (?), este no interviene en el proceso de búsqueda para hallar el resultado. De hecho, no tiene por qué ser así, la forma algebraica de pensar de Beto pone énfasis en la consideración de las relaciones numéricas de una situación y en expresarlas en un simple lenguaje cotidiano, dando lugar, eventualmente, al uso de literales, pero la sintaxis algebraica es posterior a todo esto (Warren, 2003).

Finalmente, la figura 7 ilustra las trayectorias configuradas a partir de las soluciones dadas por dos estudiantes de octavo grado. Al igual que en los casos anteriores, estas trayectorias constatan el papel fundamental que tiene el *significado relacional* del signo igual en el contexto de resolución de ecuaciones, el cual ha sido ampliamente discutido en los análisis precedentes. En cambio, las trayectorias de Carlos y Celia sugieren mayor atención sobre a) las *notaciones simbólicas* que ellos utilizan para representar las cantidades desconocidas y b) la forma *analítica sintáctica* de proceder que predomina en la dinámica de trabajo.

Las soluciones dadas por Carlos a las tareas tipo: A, N, NA y RN se reflejan en las imágenes 6, 9, 14 y 17, respectivamente. Las mismas se cristalizan en la imagen 34 con el objetivo de resaltar las implicaciones de estos resultados sobre la manera en la cual, Carlos aborda la tarea RAN.

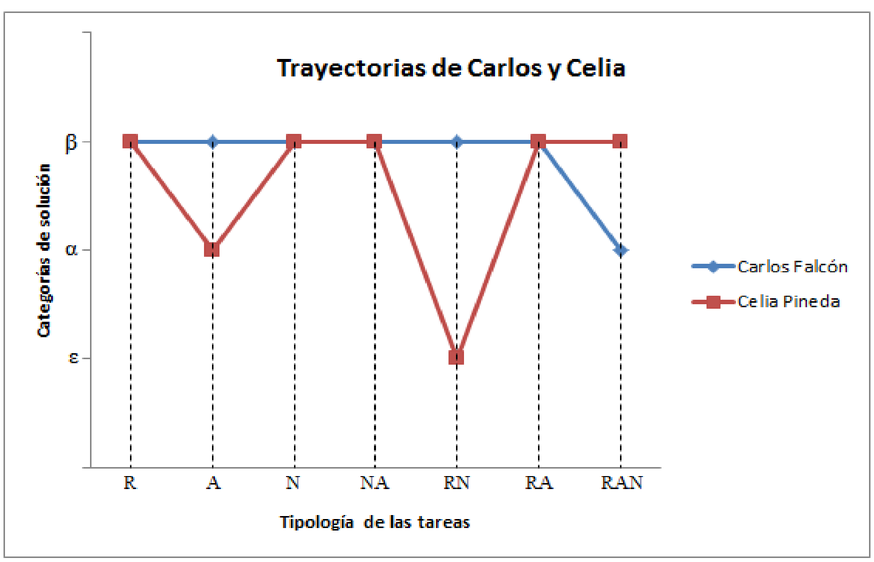


Figura 7. Trayectorias de solución configuradas por el trabajo de Carlos y Celia

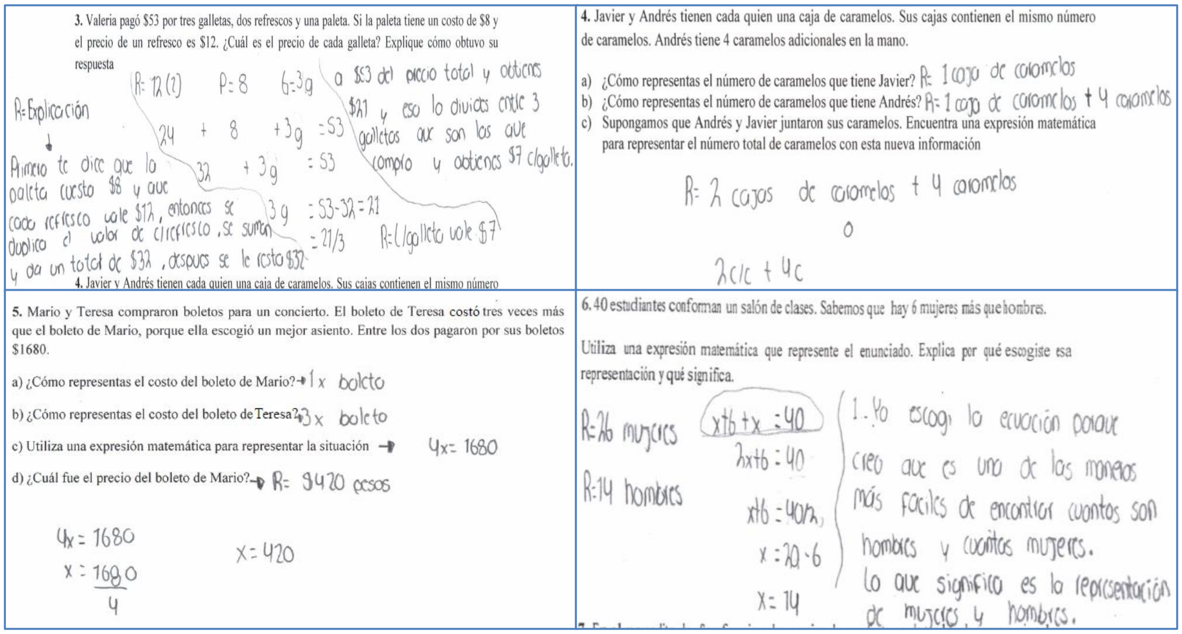
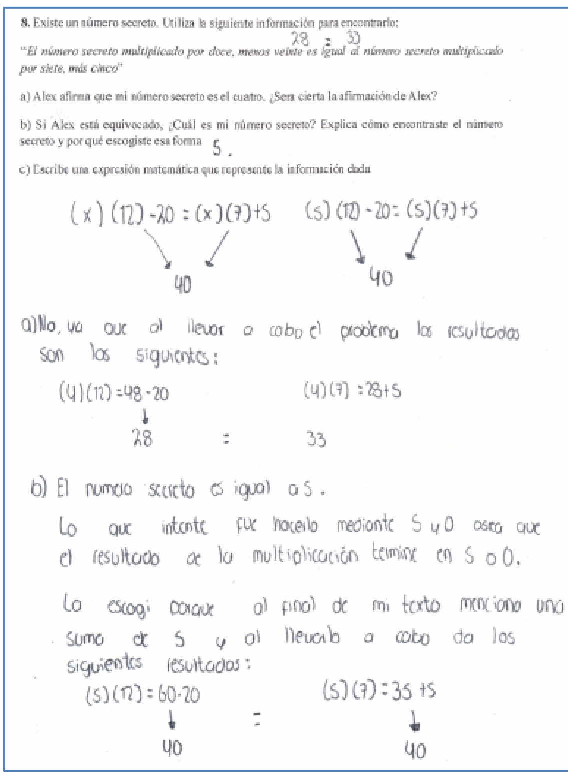


Imagen 34. Las soluciones de Carlos a las tareas A, N, NA y RN.

La imagen 34 proporciona un escenario amplio para explorar *lo analítico* y *lo notacional* en las producciones de Carlos. En la tarea N se puede ver las dos manifestaciones de *lo notacional*. Por un lado, hay presencia de notaciones singulares que desbordan la referencia de casos particulares y dan lugar a lo indeterminado; y paralelamente, se observa el uso de notaciones simbólicas que están ligadas al contexto de la tarea. Por ejemplo, al escoger c/c para representar la caja de caramelos y c para denotar la unidad. Incluso, en la tarea A, los literales escogidos por Carlos para representar los precios de los refrescos, la paleta y las galletas, se corresponden directamente con la inicial de cada palabra.

Inicialmente las notaciones simbólicas utilizadas por Carlos están vinculadas con la información que proporcionan las tareas (A y N), donde la representación del objeto está ligada a los referentes a los cuales sustituye (Aké, 2013; Godino et al., 2014). Sin embargo, al examinar las tareas NA y RN se observa que el literal escogido (x), para representar las cantidades desconocidas, esta desprendido de cualquier información referente al contexto de las tareas. Este hecho, sugiere que los estudiantes priorizan, el uso de notaciones simbólicas sobre notaciones singulares, una vez que consiguen cierto grado de familiaridad con la representación y el uso de literales (Cai & Knuth, 2011). Aún más, indica que los estudiantes pueden usar símbolos literales ligados a la información del contexto y a su vez usarlos sin referirse a ella.

En cuanto al trabajo analítico desplegado por Carlos, los análisis precedentes ilustran la convergencia de ambas formas analíticas de proceder. Dado que la analiticidad contextual tiene una fuerte base sobre la aritmética, la emergencia de la analiticidad sintáctica parece ser posterior, aunque esta última direcciona todo el trabajo que efectúa Carlos para darle solución a las tareas plasmadas en la imagen 34. Por otro lado, pese a que hay un buen trabajo con las operaciones básicas y sus inversas, la tarea RN revela falta de consolidación y familiaridad con la sintaxis algebraica, reconocibles en la resolución de la ecuación: $2x + 6 = 40$. Este hecho, parece ser la razón principal por la cual Carlos, no opera con la sintaxis algebraica, pese a que utiliza notaciones simbólicas para representar el enunciado de la tarea RAN (ver imagen 35).


8. Existe un número secreto. Utiliza la siguiente información para encontrarlo:

"El número secreto multiplicado por doce, menos veinte es igual al número secreto multiplicado por siete, más cinco"

a) Alex afirma que mi número secreto es el cuatro. ¿Será cierta la afirmación de Alex?

b) Si Alex está equivocado, ¿Cuál es mi número secreto? Explica cómo encontraste el número secreto y por qué escogiste esa forma 5.

c) Escribe una expresión matemática que represente la información dada

(x)(12)-20 = (x)(7)+5 (5)(12)-20 = (5)(7)+5

40 40

a) No, ya que al llevar a cabo el problema los resultados son los siguientes:

(4)(12) = 48-20 (4)(7) = 28+5

28 = 33

b) El numero secreto es igual a 5.

Lo que intente fue hacerlo mediante 5 y 0 osea que el resultado de la multiplicación termine en 5 o 0.

Lo escogi porque al final de mi texto menciona una suma de 5 y al llevarlo a cabo da los siguientes resultados:

(5)(12) = 60-20 (5)(7) = 35+5

40 = 40

Transcripción:

a) No, ya que al llevar a cabo el problema los resultados son los siguientes:

$(4)(12) = 48 - 20 \quad (4)(7) = 28 + 5$

$28 \quad = \quad 33$

b) El numero secreto es igual a 5.

Lo que intente fue hacerlo mediante 5 y 0 osea que el resultado de la multiplicación termine en 5 o 0.

Lo escogi porque al final de mi texto menciona una suma de 5 y al llevarlo a cabo da los siguientes resultados:

$(5)(12) = 60 - 20 \quad (5)(7) = 35 + 5$

$40 \quad = \quad 40$

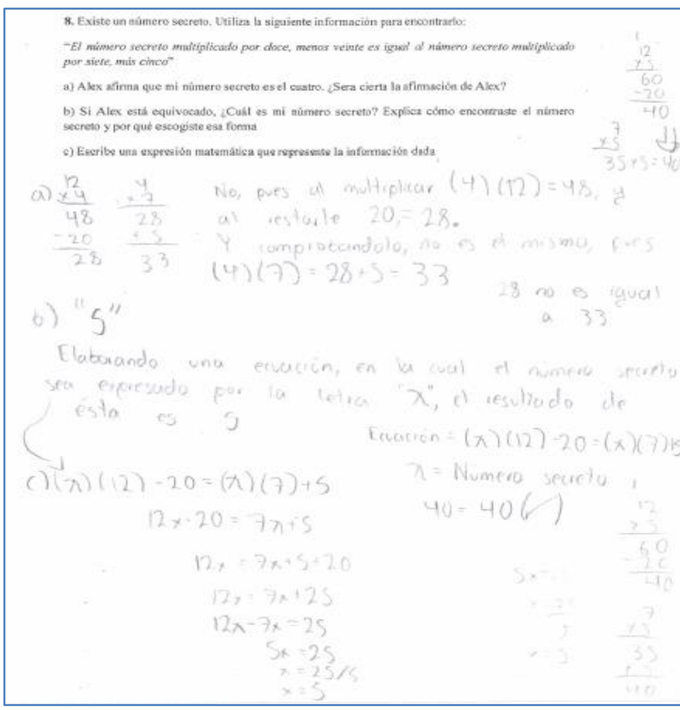
c) $(x)(12) = (x)(7) + 5 \quad (5)(12) - 20 = (5)(7) + 5$

$40 \qquad 40$

Imagen 35. La solución de Carlos a la tarea RAN

Carlos reconoce que el enunciado puede escribirse en términos de una ecuación algebraica y para ello emplea notaciones simbólicas. Sin embargo, recurre a una forma analítica contextual de proceder para encontrar el número secreto, quizás porque su trabajo analítico sintáctico no es suficiente para operar con lo desconocido, ante ecuaciones de la forma: $Ax \pm B = Cx \pm D$. Al respecto, Filloy et al., (2012) mencionan que la resolución de tales ecuaciones, operando directamente con las variables, exige que el estudiante tenga un conocimiento aritmético bien consolidado y que aprenda algunos elementos adicionales de la sintaxis algebraica que no son reconocidos en la solución de ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$. Si bien, Carlos no ha aprendido dichos elementos de la operatividad sintáctica del álgebra, el énfasis puesto sobre la relación de igualdad entre las dos cantidades y no simplemente en el cálculo, parece ser clave para orientar su trabajo hacia una forma analítica contextual de proceder que finalmente le ayuda a solucionar el problema.

A diferencia de Carlos, Celia demuestra una amplia familiaridad con las notaciones simbólicas y la sintaxis algebraica, reconocibles en la resolución de ecuaciones de la forma: $Ax \pm B = Cx \pm D$. La imagen 36 da muestra de ello, con la solución dada a la tarea RAN. Es destacable el trabajo analítico sintáctico desplegado por Celia para operar directamente con lo indeterminado. Además, tal como lo ilustran las imágenes 10, 15 y 19 correspondientes a las tareas N, NA y RA, las notaciones simbólicas de Celia están desprendidas de cualquier información del contexto *espacial y temporal* (Godino et al., 2014), lo cual implica *manipulación de símbolos* independientemente de sus significados, como un proceso enriquecedor a la *manipulación de cantidades* (Carraher & Schliemann, 2007).



Transcripción:

a) No, pues al multiplicar $(4)(12) = 48$, y al restarle $20, = 28$. Y comparándolo no es el mismo, pues $(4)(7) = 28 + 5 = 33$. 28 no es igual a 33.

b) "5" Elaborando una ecuación, en la cual el número secreto sea expresado por la letra "x", el resultado de ésta es 5.
Ecuación $= (x)(12) - 20 = (x)(7) + 5$
$x =$Número secreto

c) $(x)(12) - 20 = (x)(7) + 5$
$12x - 20 = 7x + 5$
$12x = 7x + 5 + 20$
$12x = 7x + 25$
$12x - 7x = 25$
$5x = 25$

Imagen 36. La solución de Celia a la tarea RAN

4.3. Consideraciones finales de los análisis desarrollados

Los análisis elaborados entorno a las producciones de los estudiantes, que conforman el caso, proporcionan nuevos elementos para enriquecer el modelo de algebrización propuesto y caracterizar la actividad algebraica emergente en el trabajo con tareas asociadas a la resolución de ecuaciones lineales. La tabla 7 muestra los hallazgos más representativos de ambos análisis y deja entrever la complementariedad entre ellos.

Componentes algebraicos	**Análisis descriptivo vertical**	**Análisis descriptivo horizontal**
Relacional	a) Uno de cada cinco estudiantes presenta un *significado operacional* del signo igual. b) El *significado operacional* del signo igual convive en la misma proporción tanto en estudiantes de primaria, como de secundaria.	a) En el trabajo con ecuaciones, ambos significados suelen estar presentes. Sin embargo, aquellos estudiantes que reconocen el *significado relacional* del signo igual, priorizan su uso en este tipo de tareas. b) El hecho de que un estudiante seleccione un significado u otro, depende de su capacidad para adaptar el punto de vista a la tarea en cuestión. c) La consideración del signo igual en su significado *relacional*, es un indicador de formas de pensamiento algebraico.
Analítico	a) La mayoría de los estudiantes emplean una forma *analítica contextual* de proceder caracterizada por el trabajo con las operaciones básicas y sus inversas, sobre cantidades conocidas. b) Incluso, en secundaria, son pocos los estudiantes que revelan una forma *analítica sintáctica* de proceder, en la cual, se opera con lo desconocido a través de la sintaxis algebraica. c) En algunas ocasiones, la *analiticidad sintáctica* esta permeada por una forma *analítica contextual* de proceder.	a) La mayoría de los estudiantes reconoce la *analiticidad contextual* como una forma de proceder para resolver ciertos problemas, pero ellos necesitan consolidar sus conocimientos acerca de las operaciones básicas y sus inversas. b) La identificación de las cantidades y la construcción de relaciones entre ellas, direcciona el trabajo *analítico contextual*, el cual no es menos importante que la capacidad para hacer cálculos y simbolizar. c) La búsqueda de relaciones entre las cantidades es un proceso de impulsa el desarrollo del pensamiento algebraico

Notacional	a) En contraste con las formas notacionales *simbólicas*, las *singulares* suelen tener mayor presencia en las producciones de los estudiantes. b) Las *notaciones singulares* pueden clasificarse en dos tipologías: 1) Lo desconocido es representado a través de la consideración de un caso particular 2) La representación de lo desconocido mantiene abiertas las posibilidades para la consideración de diversos casos. c) Las *notaciones simbólicas* pueden estar o no, asociadas a la información espacial y temporal del contexto de la tarea.	a) El uso de la *notación simbólica*, por parte del estudiante, no implica que él comprenda las operaciones subyacentes que dichos símbolos expresan. b) La mayoría de los estudiantes tienen dificultades para representar la información suministrada en problemas de palabras. c) Las diferentes formas notacionales no son exclusivas entre sí. Aunque, los estudiantes priorizan el uso de *notaciones simbólicas* sobre *notaciones singulares*, una vez que consiguen cierto grado de familiaridad con la representación y sintaxis del álgebra.

Tabla 7. Síntesis de los análisis desarrollados

4.4. Caracterización de formas de pensamiento algebraico

En este apartado se propone una caracterización del pensamiento algebraico desde una perspectiva local anidada al contexto de resolución de ecuaciones lineales. Se trata de una propuesta teórica sustentada en el modelo de algebrización y enriquecida con los análisis desarrollados en los apartados anteriores.

Las cuatro formas de pensamiento algebraico que aquí se presentan, no constituyen una jerarquía ordenada, en el sentido estricto. Una forma no es menos importante que la otra, pero curricularmente resulta útil y coherente organizarlas de acuerdo a la manera como emergen y se desarrollan a través de los diferentes grados escolares analizados. Los referentes teóricos del modelo de algebrización y lo aprendido en los análisis acerca de los tres componentes algebraicos y sus interrelaciones, posibilita la caracterización de las siguientes formas algebraicas de pensar:

1) ***Proto-algebraica***: conviven los dos significados asociados al signo igual, pero no hay *adaptabilidad* de ese conocimiento para usar el *significado relacional* en las situaciones que lo requieran. Las formas notacionales para representar lo desconocido remiten, exclusivamente, a casos particulares; las relaciones entre las cantidades son expresadas mediante el lenguaje natural. Se caracteriza por una forma analítica contextual de proceder sobre cantidades numéricas. Usualmente, manifiesta falta de consolidación sobre el trabajo con las operaciones básicas y sus inversas.

2) ***Transicional:*** impone el *significado relacional* del signo igual sobre su extensión *operacional*, lo cual implica *adaptabilidad* de ese conocimiento. Las notaciones para representar lo desconocido se enmarcan en *formas singulares*, generalmente aquellas

que desbordan el uso de casos particulares y se aproximan al reconocimiento de las cantidades como variables cuantitativas. Hay mayor consolidación del trabajo con las operaciones básicas y sus inversas, así como la identificación y construcción de relaciones entre las cantidades.

3) ***Proto-simbólica:*** prioriza el *significado relacional* del signo igual y el empleo de *notaciones simbólicas* para representar las cantidades y sus relaciones. Usualmente, los literales escogidos están arraigados al contexto espacial y temporal definido por la tarea. Aparecen rasgos de una forma *analítica sintáctica* de proceder con cierta compresión sobre las operaciones subyacentes que los símbolos representan, pero la operatividad sintáctica aún se encuentra en desarrollo. El nivel de simbolización puede parecer alto debido a la presencia de símbolos literales, pero estos no necesariamente, intervienen en el proceso de solución del problema.

4) ***Simbólica-instrumental:*** destaca el *significado relacional* del signo igual. Emplea *notaciones simbólicas* para representar lo desconocido, sin referirse a la información del contexto. Opera *sintácticamente* con las reglas del álgebra y construye relaciones entre las cantidades efectuando transformaciones con las expresiones simbólicas. Hay amplia consolidación de la representación y sintaxis del álgebra en su forma más sofisticada.

4.5. Conclusiones y nuevas rutas de investigación

En el presente apartado se exponen las conclusiones que surgen como producto del arduo proceso de investigación. Para empezar, se discute la respuesta a la pregunta de investigación, teniendo en cuenta algunos elementos destacables de la estructura del modelo de algebrización propuesto y de su funcionalidad para dar lugar a formas de pensamiento algebraico. En segunda instancia, se presenta un marco de reflexiones didácticas, sustentadas en los análisis desarrollados, las cuales pueden resultar útiles para a) orientar los procesos de enseñanza del álgebra en la escuela y b) generar mayores oportunidades para desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes. Finalmente, se exponen algunos interrogantes y posibilidades que pueden ayudar a robustecer este trabajo o bien, suscitar nuevas investigaciones.

4.5.1. Respuesta a la pregunta de investigación

Este trabajo se planteó una pregunta, delimitada en los siguientes términos: "¿Qué *formas de pensamiento algebraico* se configuran en estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado de Educación Básica (11-13 años), como resultado del trabajo con tareas enmarcadas en las ecuaciones lineales?". Dicha pregunta direccionó el planteamiento de ciertos objetivos que posibilitaron la construcción de un modelo de algebrización y la consecuente configuración de formas de pensamiento algebraico, caracterizadas a partir del trabajo con un grupo de estudiantes de Educación Básica, quienes resolvieron tareas relativas a la resolución de ecuaciones lineales.

La investigación desarrollada proporcionó pruebas importantes, tanto en la dimensión teórica como en la práctica, para reconocer, al menos, cuatro formas de pensamiento algebraico que pueden tener lugar durante la actividad matemática desplegada por los estudiantes. Tales formas, guardan una estrecha relación con la manera en que los estudiantes trabajan con los componentes algebraicos y sus conexiones, lo cual pone de manifiesto la riqueza del modelo de algebrización para explorar, describir y caracterizar la actividad algebraica.

La *forma de pensamiento proto-algebraica* destaca la *versatilidad* de significados del signo igual. Pese a que el modelo de algebrización propuesto, únicamente, considera dos significados asociados a dicho signo. La idea de *versatilidad*, en el sentido de Sfard y Linchevski (1994) permite interpretar el hecho de por qué se observan ambos significados en las producciones de algunos estudiantes. A diferencia de otros modelos, tales como: Aké (2013), esta forma de pensamiento, no sitúa en planos distintos el *significado operacional* y el *significado relacional* del signo igual. Si bien, el análisis descriptivo vertical sugiere tal hecho; el análisis descriptivo horizontal constata que la mayoría de los estudiantes, incluso en el sexto grado, consideran ambos significados del signo igual en la resolución de las tareas propuestas. En la práctica realizada, el caso de Blanca Leyua representó un buen ejemplo. Los análisis revelaron que esta estudiante mostró una fuerte tendencia hacia el uso del *significado operacional* del signo igual, pero su solución a la tarea RAN, también demostró que ella utilizó el *significado relacional*. De manera que, en esta forma de pensamiento se reconoce que los estudiantes cuentan con los dos significados del signo igual dentro de su arsenal de herramientas para resolver tareas, sin que ello implique que sean capaces de seleccionar y usar el significado apropiado para dar respuesta a una situación particular.

Otro aspecto característico de esta forma de pensamiento *proto-algebraica* es el uso exclusivo de *notacionales singulares*, priorizando el uso del lenguaje natural, dibujos y casos particulares para referirse a las cantidades desconocidas. Aunque este aspecto no se visualizó en los análisis de las producciones elaboradas por Blanca Leyua, fue posible observarlo con la actividad desplegada por Alicia Falcón. Por lo tanto, la consideración de esta forma algebraica de pensar puede asociarse más, con una contribución teórica que con un hecho derivado de la práctica. La hipótesis que, eventualmente, podrá evaluar otra investigación es que esta forma de pensamiento algebraico tiene lugar, por ejemplo: en un contexto de salón de clases con estudiantes de sexto y séptimo grado.

Por otra parte, la *forma de pensamiento transicional* destaca el uso de *notacionales singulares* que desbordan la referencia de casos particulares. Los resultados derivados de la aplicación práctica, demostraron que algunos estudiantes, por ejemplo: Andrés Vásquez y Carolina Nájera, no se limitaron a la asignación de un valor numérico particular para representar y operar con cantidades desconocidas. En su lugar, ellos mantienen abierto un abanico de posibilidades de sustitución numérica para lo desconocido, acercándose a la idea de cantidad como variable cuantitativa (Blanton et al., 2015). Sin embargo, el análisis descriptivo horizontal sugirió que la mayoría de los estudiantes recurren a *notaciones singulares* relativas a casos particulares y que únicamente, en el lapso de tiempo que implica transitar de un grado a otro, logran aprender que ciertas notaciones son más potentes que otras, hasta consolidar su trabajo con *notaciones simbólicas*, como en el caso de Carlos Falcón y Celia Pineda.

La emergencia de esta forma de pensamiento algebraico *transicional* está asociada con la actividad algebraica desplegada por Bruno Wong y Beto Alegre. Si bien, estos estudiantes dieron prioridad al uso de *notaciones singulares*, tales como: el lenguaje natural, dibujos y casos particulares; la manera *analítica contextual* en la que ellos procedieron dejó entrever buena consolidación del trabajo con las operaciones básicas y sus inversas, así como el reconocimiento de las cantidades y las relaciones entre ellas. De manera que, esta forma de pensamiento algebraico, le asigna un papel especial a la identificación de la información relevante en el problema y a la construcción de relaciones en términos cuantitativos, como aspectos fundamentales del pensamiento algebraico (Smith & Thompson, 2007).

La tercera *forma de pensamiento algebraico* denotada como *proto-simbólica*, asigna un lugar protagónico a la *notación simbólica*. La idea del prefijo *proto* tiene relación directa con un primer acercamiento al uso de los símbolos literales para sustituir las cantidades y relaciones indeterminadas, que en principio son representadas a través de *notaciones singulares*. El análisis descriptivo vertical demostró que la *notación simbólica*, empleada por un estudiante, puede estar permeada por factores asociados a la información suministrada en el contexto de la tarea. La solución de Carlos Falcón a la tarea tipo N, es un buen ejemplo de ello. Además, el análisis descriptivo horizontal, reveló que la presencia de *notaciones simbólicas*, en las soluciones dadas por los estudiantes, no implica que las *notaciones singulares* dejen de usarse, sino que a) ambas *formas notacionales* empiezan a ser consideradas dentro del conjunto de herramientas para abordar una tarea en cuestión, y b) la *notación simbólica* se impone una vez que ellos se familiarizan, a partir de las diferentes experiencias con las tareas, con los conceptos y representación de las variables (Brizuela & Schliemann, 2004; Van Amerom, 2003).

En la práctica, la *forma de pensamiento proto-simbólica* tiene relación directa con la actividad algebraica desplegada por Carlos Falcón. El uso de *notaciones simbólicas* vinculadas al contexto de las tareas y la falta de consolidación de la *forma analítica sintáctica* de proceder, soportan esta declaración. Pese a que Carlos emplea símbolos literales para representar las cantidades desconocidas, no necesariamente opera con ellos, tal como lo reveló su tratamiento a la tarea RAN, donde la ecuación es usada, únicamente, para estructurar el enunciado, sin interferir en el proceso de solución. En esta forma de pensamiento, el estudiante puede plantear un sistema de ecuaciones bien definido, pero seguir con estrategias asociadas a la *analiticidad contextual*, tales como: a) trabajar con las operaciones y sus inversas o b) adivinar y checar.

En contraste con la propuesta de Aké (2013), el tipo de objetos, las transformaciones y el lenguaje presente en la forma de pensamiento *proto-simbólica,* posee rasgos similares con el *nivel dos de algebrización*, puesto que en ambas conceptualizaciones intervienen variables para referirse a las cantidades desconocidas, las cuales están ligadas a la información del contexto espacial y temporal. Sin embargo, son diferenciables, porque en la forma de pensamiento *proto-simbólica* las notaciones no están restringidas a esta tipología y porque la analiticidad sintáctica aún se encuentra en desarrollo, incluso al intentar dar solución a ecuaciones de la forma: $Ax \pm B = C,$ aspecto que se considera consolidado en el *nivel dos de algebrización*.

Finalmente, se reconoció la forma de pensamiento algebraico: *simbólica-instrumental* al conjugar algunos elementos teóricos que soportan el modelo de algebrización y la actividad algebraica configurada por Celia Pineda. Esta forma de pensamiento destaca la *analiticidad sintáctica* en su fase consolidada, tal como lo demuestra el trabajo de Celia con ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D.$ La *notación simbólica* que ella usa para representar y operar directamente con las cantidades desconocidas, esta desprendida de cualquier referente contextual. De manera que, esta forma de pensamiento algebraico se corresponde ampliamente con el *nivel tres de algebrización* propuesto por Aké (2013), donde la característica más importante es el uso de símbolos literales de manera analítica, en el sentido de Filloy et al. (2012).

4.5.2. Algunas reflexiones didácticas

En conjunto, la revisión variada de literatura y la evidencia desprendida del estudio de caso, demostraron que una conceptualización del pensamiento algebraico a partir de los tres componentes: *relacional*, *analítico* y *notacional*, proveen un adecuado modelo para comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes. De hecho, sin pretender ser categóricos, las cuatro formas de pensamiento algebraico, son útiles para orientar la acción curricular y docente en la introducción y desarrollo del álgebra en la escuela.

Esta investigación constató que los estudiantes son capaces de trabajar con tareas focalizadas en uno o más componentes algebraicos, y que estos últimos se entrelazan para dar lugar a formas de pensamiento algebraico. Las formas notacionales que los estudiantes usan, los significados del signo igual que ellos manifiestan, las formas analíticas que ellos emplean para trabajar con lo indeterminado; la manera en la que identifican, buscan y construyen relaciones entre las cantidades, configuran un andamiaje para la enseñanza del álgebra en, al menos, los tres niveles escolares, objetos de estudio. Por ejemplo, lo aprendido sobre la manera en la cual los estudiantes emplean el signo igual, exhorta hacia la búsqueda de escenarios y tareas que ayuden a los estudiantes a reflexionar simultáneamente en los dos significados del signo igual. De modo que ellos aprendan a seleccionar y usar el significado más acorde a la situación, hasta reconocer que el signo igual como símbolo de relación, es una versión general del *significado operacional*.

La enseñanza de las ecuaciones en su fase introductoria, debería considerar dentro de sus directrices, el diseño de tareas que den lugar a expresiones, tales como: $5+8=$ $\_$, donde el *significado operacional* del signo igual es suficiente para responder acertadamente, y a su vez, involucrar a los estudiantes con problemas más sofisticados, como las ecuaciones de la forma: $5+8=\_+4,$ las cuales demandan el uso del *significado relacional* del signo igual. Además, el papel del docente en la implementación de este tipo de tareas será decisivo para que los estudiantes adquieran habilidades para pensar algebraicamente, puesto que es un hecho que las tareas por sí solas no bastan para conseguir tal objetivo (Blanton, 2008).

A partir de este trabajo surgen nuevas evidencias que demuestran, una vez más, que la riqueza del pensamiento algebraico de los estudiantes no está vinculada únicamente al uso de los símbolos alfanuméricos. La decisiva introducción de la *notación simbólica* para representar las cantidades desconocidas debería hacerse gradualmente. La mayoría de los estudiantes tienen pocas oportunidades y escaso tiempo para aprender a usar la *notación simbólica* y en lugar de ello, terminan aprendiendo procedimientos rutinarios, sin entender cómo funcionan las propiedades de las operaciones en sus cálculos. En consecuencia, pocos estudiantes reconocen que la aritmética y el álgebra convergen en aspectos fundamentales visibles en la resolución de tareas que implican, por ejemplo: determinar un número el cual satisface algunas relaciones aritméticas dadas (Lins, 1992).

4.5.3. Preguntas abiertas y nuevas rutas de investigación

Los resultados obtenidos en esta investigación, informan sobre la construcción de un modelo de algebrización y la configuración de formas de pensamiento algebraico en el contexto de la resolución de ecuaciones, los cuales responden a dos áreas críticas para la investigación y desarrollo del *early algebra*, a saber: 1) identificar ideas algebraicas centrales, así como sus conexiones con el plan de estudios a través de la educación k-12 del álgebra, y 2) comprender la naturaleza profunda del pensamiento algebraico de los niños (Katz, 2007). Sin embargo, las contribuciones de este trabajo a tales áreas, aún pueden ser robustecidas. Por ejemplo, al tratarse de una primera versión del modelo, indudablemente se requieren otros estudios que ayuden a consolidar una mejor interpretación de los componentes algebraicos identificados, o bien proponer otros, que posibiliten la exploración y comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

Las formas de pensamiento algebraico rescatan la importancia que tienen los tres componentes algebraicos para abordar tareas relativas a las ecuaciones lineales. No obstante, se requieren estudios que validen estos resultados con tareas inscritas bajo otras perspectivas diferentes a la *resolución de problemas y modelación matemática*. De hecho, en el auge de los recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática, es fundamental explorar las distintas configuraciones que emergen como resultado del trabajo con tareas inscritas en ambientes tecnológicos, tales como: Excel y Logo.

La secuencia de tareas propuestas demostró ser viable y productiva, pero frágil en algunos puntos, especialmente en aquellas tareas que combinan dos componentes algebraicos. En ese sentido, es importante orientar investigaciones hacia la búsqueda y el diseño de tareas que permitan develar con mayor profundidad cómo se entrelazan tales componentes en la actividad algebraica configurada por los estudiantes, así como el diseño de tareas con características bien definidas, que promuevan la emergencia de las distintas formas de pensamiento algebraico.

El contenido de esta investigación, sin lugar a dudas, resultará útil para la comunidad de investigadores interesados en el estudio y desarrollo del *early algebra*, debido a i) la variedad de aspectos teóricos y metodológicos que se presentan, ii) los resultados alcanzados, y iii) las preguntas e inquietudes que se plantean para fines de otros estudios. El cierre de la presente investigación, a su vez, es la apertura de una nueva, porque es indispensable seguir contribuyendo al enriquecimiento de discusiones teóricas y metodológicas sobre la naturaleza del álgebra y las alternativas prometedoras para trabajar el álgebra en el sistema escolar.

REFERENCIAS

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Granada.

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 476–488. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.002

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272. http://doi.org/10.1080/10986060701360910

Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra: The core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. C. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 249–260). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth Graders' Figural and Numerical Strategies for Generalizing Patterns in Algebra. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*(1), 95–101.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 1–10). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. (2008). *Teaching Practices That Develop Children's Algebraic Thinking Skills*. *Algebra and the Elementary Classroom Transforming Thinking , Transforming Practice*. Retrieved from https://books.heinemann.com/shared/onlineresources/E00946/blanton00946Sample.pdf

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., & Kim, J. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking : The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 99–119). Dordrecht, Kluwer.

Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2001), 33–40. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/10.2307/40248456

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53–59. http://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87–115.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 45–65. http://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.006

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 1–27. http://doi.org/10.1080/10986065.2012.625074

Demosthenous, E., & Stylianides, A. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 369–376). Vancouver, Canada. http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Dickinson, P., & Eade, F. (2004). Using the Number Solving To Investigate the Solving of Linear. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 41–47.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. (A. Bishop, Ed.)*Saudi Med J* (Vol. 43). New York: Springer. http://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(June), 19–25.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias*, *32*(1), 199–219. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación En Matemática Educativa*, *8*, 117–142.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships Between Students' Fractional Knowledge and Equation Writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(2), 196–243.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Los enfoques cuantitativo y cualitativo en la investigación científica. In *Metodología de la investigación* (cuarta, pp. 3–30). México: McGraw-Hill Interamericana.

Herscovics & Linchevski. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59–78.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 115–139. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.005

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary cchool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288. Retrieved from http://homepages.math.uic.edu/~martinez/PD-EarlyAlgebra.pdf

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum* (pp. 1–20). Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Katz, V. J. (Ed.). (2007). *Algebra: Gateway to a Technological Future*. New York: The Mathematical Association of America.

Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.) *Proceedings of the eighth International Congress on Mathematics Education: selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kindt, M., Abels, M., Dekker, T., Meyer, M., Pliegge, M., & Burrill, G. (2010). *Comparing Quantities*. (Wisconsin Center for Education Research &

Freudenthal Institute, Ed.)*Mathematics in context*. Chicago.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*, 297–312.

Leung, F. K. S., Park, K., Holton, D., & Clarke, D. (Eds.). (2014). *Algebra Teaching around the World*. sense publishers.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Nottingham.

Martinez, J. D. (2014). *Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización*. Universidad de Medellín.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa: síntesis conceptual. *Iipsi*, *9*(1), 123–146. http://doi.org/1560 - 909X

Molina, M., & Castro, E. (2007). *Desarrollando una agenda de investigación: Pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas*. Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, and M. Kendal (Eds.), *The Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189–224). Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1–19. http://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2010b). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *4*(2), 37–62.

Radford, L. (2012). On the Development of Early Algrebraic Thinking. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *6*(4), 117–133.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. http://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015a). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semmiotic, and Developmental Issues. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 209–227). http://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Radford, L. (2015b). Introduction: The Phenomenological, Epistemological and Semiotic Components of Gneralization. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *9*(3), 129–141.

Ramírez García, M., & Rodríguez Marcos, P. (2011). Interpretaciones del Signo Igual. Un estudio de libros de texto. *UNIÓN*, *26*, 41–55.

Reeuwijk, M. Van. (1995). The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations. In *AERA Conference - The learning and Teaching of Algebra* (pp. 1–11). Retrieved from http://www.fisme.uu.nl/publicaties/literatuur/3781.pdf

Rivera, F. (2015). The Distributed Nature of Pattern Generalization. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *9*(3), 165–191.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y eneseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*. *Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, *1*(12), 45–56.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15–39. http://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 191–228. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000028403.25781.79

Smith, J. P., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Retrieved from http://books.google.com/books?id=Ve7uAAAAMAAJ

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *77*, 5–34.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167. http://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, K-12*, 8–19.

Van Amerom, B. a. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63–75. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). the Didactical Use of Models in Realistic. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*.

Vergel, R. (2015). Generalización de Patrones y Formas de Pensamiento Algebraico Temprano. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *9*(3), 193–215.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122–137. http://doi.org/10.1007/BF03217374

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185. http://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2

Watson, A. (2007). algebraic reasoning. In *Key understandings in mathematics learning* (pp. 1–43).

Windsor, W. (2008). Algebraic Thinking : A Problem Solving Approach. *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 665–672.