



**UAGRO**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Unidad Académica de Matemáticas Centro de  
Investigación de Matemática Educativa

# Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum de matemáticas en Cuba

Tesis que presenta:

Lic. Katia Meneses Suárez

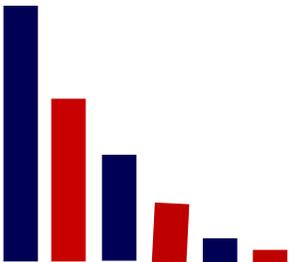
para obtener el grado de Máster en Ciencias con  
Especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Crisólogo Dolores Flores

Codirectora. Dra. María del Socorro García

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero (2021)



“Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum de matemáticas Cuba”

Tesis de maestría

Autora: Katia Meneses Suárez

Director de tesis: Dr. Crisólogo Dolores Flores

Codirectora: Dra. María del Socorro García

Comité evaluador:

Martha Iris Rivera López

Gerardo Salgado Beltrán

Javier García García

2021

Centro de Investigación en Matemática Educativa

Universidad Autónoma de Guerrero

Chilpancingo de los Bravo, Gro., México.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y  
Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero para la  
realización de mis estudios de Maestría con número de  
registro: **930871**

## *Agradecimientos*

Primero a **DIOS**, por ayudarme a vivir, a darme la fortaleza y acompañarme en todo momento.

A mi madre Teresa Suárez Álvarez y mi padre Omar Meneses Yero, por confiar cada minuto en mí, por su paciencia y atenciones que me brindaron siempre. A mi hermano, Antonio de Jesús Alonso Suárez, mis abuelos y mi adorado bebé “Alain Daniel Castañón Meneses”, quién ha cubierto todos los minutos de mi tiempo de tristeza con su compañía, dándome momentos agradables y fortaleza para no desistir en este proyecto. Gracias al apoyo incondicional a mis bellos tíos Estela y Leonardo, por sus momentos de sabiduría para que cumpla una meta más.

Al Dr. Crisólogo Dolores Flores por su voto de confianza y por compartir sus conocimientos y experiencias relacionadas con la investigación, en particular, con la educación matemática. Agradezco, asimismo, su interés y preocupación hacia mi formación como investigador, destacando su incondicional atención por momentos de enfermedad hacia mi persona. A la Dra. María de Socorro García González por sus opiniones y sugerencias con el fin que mi investigación sea exitosa y con auge investigativo.

A los investigadores y amigos, Dra. Martha Iris Rivera y el Dr. Gerardo Salgado, cuyas aportaciones académicas y personales fueron de gran apoyo para sobresalir durante el proyecto de investigación, a mi equipo, compañeros de discusión y análisis, de todas

preciadas y relevantes aportaciones, críticas, comentarios y sugerencias para el desarrollo y culminación de esta investigación. Cabe resaltar que fue lindo contar siempre con sus presencias incondicionales. También quiero agradecer a la UAGro (Universidad Autónoma de Guerrero) y en especial a la Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa por brindarme todos los recursos y herramientas que fueron necesarios para llevar a cabo el proceso de investigación. No hubiese podido arribar a estos resultados de no haber sido por su incondicional ayuda.

A Safira, Gustavo, Fátima, amigos de mi primer plano y compañeros destacados en mi vida, sus palabras alentadoras y precisas me fueron de mucho para culminar con éxito este esfuerzo. A mis compañeros de grupo y profesores de los seminarios de investigación, gracias a todos por los momentos de debate y análisis del trabajo investigativo, siempre me motivaron y permitieron impulsar la culminación del proyecto de investigación. En fin, todas las personas que ahí estuvieron para brindarme su apoyo.

***A todos, gracias por existir.***

# Índice de contenido

<b>Resumen .....</b>	<b>8</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo I.....</b>	<b>14</b>
1.1. Importancia del concepto de pendiente .....	14
1.2. Conceptualizaciones de la pendiente.....	15
1.3. Investigaciones en el currículum sobre las conceptualizaciones de la pendiente .....	18
<b>2. Marco referencial .....</b>	<b>20</b>
2.1. ¿Qué es la pendiente?.....	20
2.2. Acerca de la pendiente .....	22
2.3 Como noción geométrica.....	22
2.3 Como noción variacional.....	23
2.3. Conceptualización de la pendiente .....	24
2.4. El concepto de currículum.....	28
<b>3. Metodología .....</b>	<b>31</b>
3.1. Investigación cualitativa-exploratoria .....	31
3.1.1. Exploratoria.....	32
3.2. Método de Análisis de contenido.....	33
3.3. Fase de pre-análisis .....	34
3.3.1. Estructura curricular (Niveles educativos) .....	35
3.4. Fase de explotación del material .....	40
3.4.1. Descomposición: Elección de unidades de análisis .....	41
3.4.2. Reglas de enumeración .....	42
3.4.3. Análisis cualitativo y cuantificación de los datos .....	43

3.5. Fase dedicada al tratamiento de los resultados.....	47
<b>4. Resultados.....</b>	<b>48</b>
4.1. Nivel primario.....	49
4.2. Nivel medio .....	52
4.2.1. Conceptualizaciones de la pendiente en 7° grado .....	52
4.2.2. Conceptualizaciones de la pendiente en 8° grado .....	54
4.2.3. Conceptualizaciones de la pendiente en 9° grado. ....	59
4.2.4. Conceptualizaciones de la pendiente en 10° grado.....	61
4.2.5. Conceptualizaciones de la pendiente en 11° grado.....	64
4.2.6. Conceptualizaciones de la pendiente en 12° grado.....	68
4.3. Conceptualizaciones de la pendiente de cada Nivel Educativo en Cuba .....	73
4.3.1. Conceptualizaciones de la en el Nivel primario.....	74
4.3.2. Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel medio (7°, 8° y 9° grado).....	77
4.4. Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel medio Superior (10°, 11° y 12° grado) .....	79
<b>5. Discusión y conclusiones .....</b>	<b>83</b>
5.1. Conclusión.....	89
5.2. Limitaciones y futuras investigaciones.....	95
5.3. Reflexión del estudio realizado en Cuba .....	97
<b>6. Bibliografía .....</b>	<b>100</b>

## Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum de matemáticas en Cuba

### Resumen

El presente trabajo de investigación reporta evidencia sobre las conceptualizaciones de la pendiente que promueven y predomina en el currículum de matemáticas en Cuba. Se trata de un estudio de corte cualitativo-exploratorio, que involucró identificar frases o palabras claves presentes en el currículum de matemáticas contenidas en la descripción de las once conceptualizaciones de pendiente han sido previamente reportadas por Stump (1999) y Morre-Russo et al.(2011). Para ello utilizamos el método de Análisis de Contenido sugerido por Bardin (2002), donde el objeto de estudio se encuentra en la exposición del contenido. Por lo cual, el marco conceptual de esta investigación se integra por la definición de la pendiente, el constructo conceptualización de pendiente y currículum (Arce, 2018; Lehmann, 2005; Moore-Russo et al. 2011).

Para la recolección de datos utilizamos una matriz, donde se ubican todos los contenidos por cursos que evocan relación con alguna palabra clave con filtro en las conceptualizaciones en todo el currículum de matemáticas. Los resultados muestran la presencia de diez conceptualizaciones de la pendiente que promueven el currículum de matemáticas de Cuba. Dentro de estas, con mayor frecuencia se identificaron por orden: *propiedad funcional* y *coeficiente paramétrico*, los contenidos que contribuyen a estas fueron los temas que se relacionan con *tanto por ciento*, *proporciones*, *proporcionalidad*, *ecuación*, *ecuación lineal* y *función lineal*. Con muy poca frecuencia, se identificó a la pendiente como

*propiedad física.* En el currículum no figuraron contenidos que permitieran identificar la conceptualización *concepción en cálculo.* Cabe destacar que se evidencian cinco conceptualizaciones de la pendiente identificadas con mención explícita en todo el currículum de matemáticas identificadas como las predominantes en el currículum, en orden: *razón geométrica, razón algebraica, coeficiente paramétrico, propiedad determinante y constante lineal.*

*Palabra claves:* Conceptualizaciones de la pendiente, pendiente, currículum

## Introducción

---

En el contexto “educación” es de suma importancia que el profesor le dé un interés privativo a la forma en que va a transmitir el conocimiento adquirido, siempre con el enfoque hacia un objetivo principal: lograr que los estudiantes alcancen a tener un buen desenvolvimiento dentro de la sociedad, asumiendo como base los conocimientos, habilidades y actitudes de cada individuo con el fin de obtener resultados eficientes y satisfactorios. Sin embargo, los docentes en cada salón de clases se enfrentan a retos de suma importancia. Dentro de ellos, el poder “conectar” a los educandos a las amplias representaciones y nociones de conceptos que son abordados a lo largo del currículum de matemáticas. De esta forma, cada concepto matemático en el aula representa un desafío para el profesor, al hacer relacionar su aplicación a problemas reales a un contexto matemático. Es por esta razón que la labor del currículum educativo aparte de ser guía y maximizar los procesos de aprendizaje debe ser el estar presente en las dificultades y aportaciones que investigaciones en el contexto brindan en el ambiente escolar de formación para la mejorara de la enseñanza.

El concepto “pendiente” es objeto de estudio en este trabajo, importante en la educación y protagonista en el currículum de matemáticas de Cuba. A partir de la revisión de la literatura sobre el concepto pendiente se puede observar que la evolución científica en los últimos años ha elevado su nivel de interés, centrándose en tres direcciones principales: estudio de las conceptualizaciones en estudiantes y profesores; los obstáculos y errores que presentan tanto estudiantes como profesores y el proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de pendiente (Deniz y Uygur-Kabael, 2017). El análisis del currículum con foco de

interés en las conceptualizaciones de la pendiente se puede decir que solo se han realizado por Stanton y Moore-Russo (2012) en el contexto estadounidense y, en el mexicano por Dolores et al. (2020). Por tanto, no se han reportado otro estudio curricular en otro ámbito de Latinoamérica sobre el tema que marque futuras direcciones en este campo de estudio.

A partir de la amplitud investigativa del tema nos da interés y motivación, ya que este concepto es enseñado desde nivel básico hasta el superior (Dolores et al., 2020). Su trayecto en el currículum queda con incógnitas a investigadores en la línea investigativa a continuar indagando y ampliando el perfil investigativo del concepto.

Por tanto, la utilización del concepto de pendiente va más allá de solo usarlo algebraicamente, ya que se utiliza para entender conceptos matemáticos más avanzados (Stanton & Moore-Russo, 2012; Stroup, 2002) y su interpretación en la vida real (Stump, 2001). Su enseñanza ha reportado una desvinculación en las diferentes representaciones reportadas por Moore-Russo, Coner y Rugg (2011), siendo así un concepto difícil de entender tanto para profesores (Byerley y Thompson, 2017; Hoffman, 201; Salgado et al., 2019), como para estudiantes (Dolores-Flores et al., 2019; Rivera, 2019; Salgado et al., 2019; Santos, 2019). También se ha investigado sobre qué conceptualizaciones de la pendiente tienen presencia en los libros de textos (Choy et al. 2015; Dolores-Flores e Ibáñez, 2020), así como una exploración sobre los elementos no textuales en libros de texto estadounidenses y coreanos, donde la pendiente fue uno de los tópicos analizados (Kim, 2012).

Sin embargo, el énfasis en las poblaciones antes descritas, dio un giro al centrar la atención en el currículum, siendo la base investigativa de nuestro trabajo. Los principiantes

en el entorno curricular por su parte son Stanton y Moore–Russo (2012), examinaron los currículum de la enseñanza primaria, secundaria y bachillerato de los 50 estados de USA para investigar cómo es tratado el concepto de pendiente, y por consiguiente (Dolores et al., 2020; Nagle y Moore-Russo, 2014). En este orden por (Dolores et al., 2020) en el currículum mexicano han impulsado y dado pie a la línea de investigación. Por tanto, siendo evidencia las investigaciones publicadas sobre la pendiente son muy pocas en el currículum (Dolores et al., 2020), por ende ampliar el tema investigativo en Latinoamérica este contexto es un punto clave en la investigación.

La tesis vigente sigue la línea curricular y toma como objeto de estudio “identificar las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum”, tema actual en la línea de investigación del grupo liderado por el Dr. Crisólogo Dolores de la “Universidad Autónoma de Guerrero”. Desde la Matemática Educativa, el estudio sobre las “conceptualizaciones de la pendiente” se vuelve relevante, toda vez que se sabe que la escasa comprensión de los estudiantes acerca de este tema, proviene de la falta de conexiones que hacen entre los diversos componentes y subcomponentes de la pendiente (Abreu Blaya et al., 2020).

De acuerdo con Zaslavsky et al. (2002) los investigadores internacionales se han referido a un "descuido" con respecto a la pendiente. Por nuestra parte, consideramos necesario ampliar geográficamente la investigación sobre este concepto, para conocer si el currículum de matemáticas de Cuba promueve sus diversas conceptualizaciones. Con el fin de ampliar el contexto en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de pendiente, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

*¿Qué conceptualizaciones de la pendiente promueven y predominan el currículum de matemáticas de Cuba?*

Para dar respuesta a la pregunta se propone el siguiente objetivo:

*“Identificar qué conceptualizaciones de la pendiente evidencia el currículum de matemáticas de Cuba en la educación primaria, secundaria y bachillerato”.*

La elección de Cuba obedeció a que es el país natal de la autora de esta tesis y tiene amplio conocimiento del Sistema Educativo.

Esta tesis está integrada por 5 capítulos:

En el **Capítulo 1**, se presenta la problemática, y aspectos relacionados con las conceptualizaciones de la pendiente en contexto de la investigación.

En el **Capítulo 2**, se describe el Marco referencial en el que se basa esta investigación, integrado por el concepto de pendiente, lo que se entenderá por conceptualización y currículum.

En el **Capítulo 3**, se presenta la Metodología de la investigación, en ella se incluye el tipo de estudio, contexto de análisis, y el diseño de recolección de los datos.

En el **Capítulo 4**, se evidencian los resultados de la investigación.

En el **Capítulo 5**, se plantean la discusión y conclusiones a las cuales se han llegado con el presente trabajo de investigación.

# Capítulo I

---

La presente investigación tiene por objetivo identificar qué conceptualizaciones de la pendiente se evidencia en el currículum de matemáticas de Cuba, en la educación primaria, secundaria y bachillerato (currículum). En este capítulo se aportan los elementos para justificar la investigación; se exponen elementos que avalan la importancia de la pendiente, hallazgos reportados entorno al concepto que vinculan a las conceptualizaciones; seguido el análisis los trabajos referidos acerca de investigaciones relacionadas sobre el concepto pendiente y el currículum.

## **1.1. Importancia del concepto de pendiente**

El concepto de pendiente como primer punto es un concepto matemático fundamental, de naturaleza geométrica, el cual puede representarse de diferentes maneras y en diversos contextos a lo largo de distintos cursos de matemáticas. Se considera esencial en la formación matemática de los estudiantes, siendo base de otros conceptos importantes dentro de la matemática elemental y superior. Su presencia está en los currículum de matemáticas, abarca su estudio desde nivel básico hasta el superior de todos los países y es objeto de estudio, de manera formal a partir del nivel de secundaria, en México y otros países, (Dolores et al., 2020; Stanton & Moore-Russo, 2012) Sin embargo, Leinhardt et al., (1990) consideran que es un “concepto de enlace poderoso” porque ayuda a los estudiantes a comprender las funciones y sus gráficas.

En el proceso enseñanza–aprendizaje el concepto encierra una gran complejidad debido a la multiplicidad de significados que se le asocian, pasando por sus aplicaciones en diferentes contextos, hasta las diversas formas en que puede conceptualizarse (Moore-Russo et al., 2011; Nagle, C., y Moore-Russo, 2013; Stump, 1999; Zaslavsky et al., 2002). La pendiente se aplica en muchos campos de las ciencias en general, y, en particular, es relevante para el desarrollo de temas de matemática avanzada; siendo un punto clave para describir el comportamiento de una curva jugando un papel esencial en el desarrollo del cálculo (Carlson et al., 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble et al., 2001). Este último marca una transición propia en la comprensión matemática de la pendiente por parte de los estudiantes, pasando de funciones lineales a funciones no lineales y de razón de cambio medio a razón de cambio instantáneo (McGee et al., 2015; Teuscher y Reys, 2012). Y yendo más allá de solo considerarlo como un cálculo algebraico, hace que su comprensión no sea tarea fácil (Rivera et al.,(2019).

## **1.2. Conceptualizaciones de la pendiente**

El dominio de los conceptos matemáticos es una parte esencial de la formación matemática de un estudiante. Tales conceptos, según González (2005), constituyen una clase especial y como tales deben ser tratados.

El concepto como base ha dado pauta al interés por explorar el conocimiento y su comprensión en el currículum. El estudio de las conceptualizaciones de la pendiente ha inspirado a la búsqueda de explicaciones orientadas hacia la naturaleza de dicha

problemática. Ha llevado a los investigadores a evidenciar ciertas particularidades que han dado pie a proporcionar conocimiento de aspectos que lo hacen especial.

Como punto de partida está el trabajo de Stump (1999), quién al explorar el conocimiento sobre pendiente que tienen profesores norteamericanos de nivel Bachillerato, identifica siete conceptualizaciones sobre la pendiente en actividades que involucran dicho concepto, las cuales son: *razón algebraica (A)*, *razón geométrica (G)*, *propiedad funcional (F)*, *propiedad física (P)*, *coeficiente paramétrico (PC)*, *trigonométrica (T)* y *cálculo (C)*. Dichas conceptualizaciones son ideas asociadas a la pendiente que son manifestadas a través del lenguaje verbal y no verbal (Hoffman, 2015; Salgado et al., 2020), sin embargo, fueron llamadas posteriormente conceptualizaciones de la pendiente, mismas que han tenido aceptación y actualmente en muchos países mantienen vigente el estudio de la pendiente como tema investigativo.

Posteriormente se amplía en la misma línea las representaciones de la pendiente, dado que Stump lleva nuevos aciertos más allá de ser un tema actual de investigación. Su camino lo incita a un estudio con profesores de posgrado basado en los recursos que estos utilizan cuando enseñan la pendiente; Stump (2001) encuentra que al ejemplificar dicho concepto a través de situaciones del mundo circundante los profesores utilizaron la conceptualización *situaciones mundo real (R)* la cual Stump la clasifica en *situaciones físicas (SP)* y *situaciones funcionales (SF)*, estas se destacan por los vínculos que los profesores realizaron de la pendiente con objetos como: escaleras, rampas, calles, etc. O con situaciones que involucran razones de cambio, por ejemplo, distancia vs tiempo, volumen vs tiempo, etc. Pues bien, los hallazgos reportados por Stump han sido durante muchos años la fuente de inspiración para

otros investigadores, quienes han continuado desarrollando sus ideas y engrosando el poco conocimiento que hasta esas fechas se tenía sobre la enseñanza y aprendizaje de la pendiente. Tal es el caso de Moore-Russo, Coner y Rugg (2011), quienes reafirmaron que en el marco de las conceptualizaciones de la pendiente descubiertas por Stump existían vacíos de los cuales estaban vinculados a otras representaciones de dicho concepto, mismas que al realizar una exploración cualitativa con estudiantes de posgrado las identifican y tipifican como: *indicador de comportamiento* (B), *constante lineal* (L) y *propiedad determinante* (D). En este orden de ideas, por Moore-Russo et al. (2011), las once conceptualizaciones de la pendiente reportadas en su totalidad por primera vez son por naturaleza propia y las representaciones guardan vínculos directos con el concepto de pendiente. Dicha totalidad puede concebirse como una red conectada de ideas sobre dicho concepto, que a su vez enmarcan lo que un individuo requiere para lograr la comprensión del mismo (Mudaly & Moore-Russo, 2011b; C Nagle et al., 2017). Para tener claridad a continuación son descritas en la Tabla 1, siendo la base conceptual de esta investigación.

**Tabla 1**  
Conceptualizaciones de la pendiente

Categoría	La pendiente como...	Código
Razón geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida en el gráfico de una recta.	G
Razón algebraica	Cambio en $y$ sobre el cambio en $x$ ; representación de la razón con expresiones algebraicas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .	A
Propiedad física	Propiedad de la recta a menudo descrita con expresiones como: grado, inclinación, ladeo, declive, empinado, “qué tan alto sube una recta”.	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre variables o cantidades (por ejemplo, cuando $x$ aumenta 2, $y$ aumenta 3) que se encuentra en varias representaciones de funciones; a veces se vé en situaciones que involucran razones relacionadas o constantes de proporcionalidad (donde la tasa unitaria es la pendiente).	F
Coefficiente paramétrico	Coefficiente $m$ (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o en $y - y_1 = m(x_2 - x_1)$ que actúa como un parámetro.	PC
Concepción trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que una recta que forma con una recta horizontal (usualmente el eje positivo $x$ ); tangente del ángulo de inclinación.	T
Concepción en Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso no lineal).	C

Situación del mundo real	Situación física (estática, por ejemplo: una rampa, escalera, etc.) Situación funcional dinámica que relaciona dos variables (distancia vs tiempo, velocidad vs time, costo vs tiempo).	R
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; propiedad con la cual una recta puede ser determinada si un punto de la recta es también dado.	D
Constante lineal	"Recta" o "plana", ausencia de curvatura de una recta que no se ve afectada por la traslación; propiedad única de las "rectas" (puede ser referenciada como lo que hace que una línea sea "recta" o la "rectitud" de una línea); mención de que cualesquiera dos puntos de una recta pueden ser utilizados para determinar la pendiente.	L
Indicador de comportamiento	Propiedad que indica el crecimiento, decrecimiento, tendencia horizontal de una recta o la propiedad que indica la cantidad (o severidad) del aumento o disminución de una recta; si no es cero, indica que la recta tiene una intersección con el eje $x$ .	B

*Nota.* Fuente adaptada de Moore-Russo et al. (2011)

### 1.3. Investigaciones en el currículum sobre las conceptualizaciones de la pendiente

Las investigaciones de las conceptualizaciones de la pendiente en los diferentes currículos que han sido reportadas están relacionadas con el currículum oficial, currículum potencial y currículum aprendido. En el currículum oficial se evidencian en Estados Unidos y por México (Nagle & Moore-Russo, 2014; Salgado et al., 2020; Stanton & Moore-Russo, 2012). Su intención se basa en conocer cuáles conceptualizaciones de pendiente son favorecidas en el currículum matemático. Sin embargo, otras investigaciones han dado pie en el currículum potencial (Choy et al., 2015; Dolores-Flores & Ibáñez, 2020) indagando qué conceptualizaciones de pendiente tienen presencia en los libros de textos y con respecto al currículum enseñado, Salgado (2020) detectó en el nivel bachillerato los profesores tienden a enseñar las conceptualizaciones vinculadas a las ideas geométricas con enfoque procedimental, mientras que, Nagle y Moore-Russo (2013) exploró en el mismo nivel al elaborar materiales de instrucción, que la razón algebraica y la geométrica son las sobresalientes. Y con respecto al currículum aprendido, la mayoría de investigaciones que se han realizado en este contexto (Casey y Nagle, 2016; Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y

Moore-Russo, 2011; Nagle et al., 2017; Nagle y Moore-Russo, 2013; Newton y Poon, 2015; Rivera et al., 2019; Santos, 2019).

Las investigaciones en la línea investigativa dan inicio en norteamérica; actualmente en México los estudios con la misma dirección están en auge relacionadas a las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum es tema reciente. Pero nos hemos preguntado: ¿qué trabajos relacionados al contexto investigativo hay Cuba? Cabe destacar que las investigaciones referentes en Cuba tiene un enfoque principal en la didáctica y metodológica de la enseñanza en los distintos niveles educativos, con el fin de la mejora en la enseñanza y aprendizaje de a matemáticas y muy poca relacionadas con conceptos matemáticos, y menos con el concepto pendiente. Por tanto, nos basamos en Rivera (2019) plantea que se necesita más estudio internacional, para comprender cómo se aborda el concepto en todo el mundo y ayudar a diferentes países a identificar diferentes etapas para la instrucción de pendiente. Por tal razón, en el presente estudio se propone dar cuenta de qué conceptualizaciones de la pendiente promueven y predominan en el currículum de matemáticas de Cuba, siendo así se atiende dicho vacío internacional.

# Capítulo II

## 2. Marco referencial

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo general identificar las conceptualizaciones de la pendiente que se promueven y predominan en el currículum de matemáticas de Cuba. Por lo tanto, los elementos referenciales de este estudio son: la definición de pendiente, conceptualizaciones de la pendiente y currículum. Estos serán abordados en las siguientes líneas a partir de la literatura especializada en Matemática Educativa. En este capítulo se detallan qué son estos conceptos y las razones por las cuáles fueron elegidos.

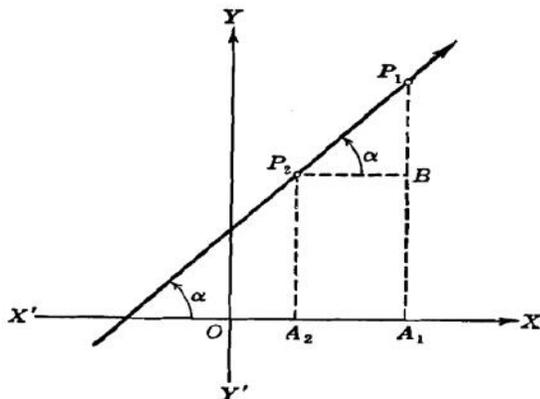
### 2.1. ¿Qué es la pendiente?

En el artículo #8 “La pendiente de una recta”, la pendiente es definida por Lehman (1989) como coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación:

“Según la postura de Lehman, definición 3, se llama “pendiente o como coeficiente angular”, de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Designa como  $m = \operatorname{tg} \alpha$ , en el teorema 4 plantea, “si  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, x_2 \neq x_1$ ” (p. 17).

Esta definición analítica no está definida para  $x_2 = x_1$ . Siendo el caso, la interpretación geométrica es que una recta determinada por dos puntos diferentes con abscisas iguales es paralela al eje  $Y$ , por tanto, no tiene pendiente. En fin esta definición refiere a la recta como

un lugar geométrico, destaca el ángulo de inclinación, la relación con la tangente trigonométrica y la razón geométrica en términos de la fórmula algebraica para calcular la pendiente.



**Figura 1** Imagen tomado de Lehmann (1980, p. 17)

Demostración:

Consideremos la recta  $P_1 P_2$  de la figura 1, determinada por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , y sea  $a$  su ángulo de inclinación. Por  $P_1$  y  $P_2$  tracemos las perpendiculares  $P_1 A_1$  y  $P_2 A_2$  al eje  $x$ , y por  $P_2$  tracemos una paralela al eje  $x$  que corte a  $P_1 A_1$  en  $B$ . El ángulo  $P_1 P_2 B = a$ , y, por trigonometría, tendremos  $m = \operatorname{tg} a = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2 B}}$ . Las coordenadas de los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B(X_1, Y_2)$ . Por tanto, por el teorema  $\overline{BP_1} = y_1 - y_2$ ;  $\overline{P_2 B} = \overline{A_2 A_1} = x_1 - x_2$ . El orden que se toman las coordenadas no tiene importancia ya que  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ , debe evitar, en cambio, el error muy frecuente de tomar las ordenadas en un orden y las abscisas en el orden contrario, ya que esto cambia el signo de la  $m$ ". (p.18)

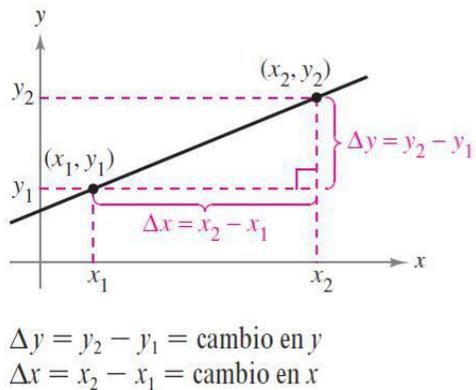
## 2.2. Acerca de la pendiente

El concepto de pendiente es un importante concepto geométrico, según Salgado (2020) la pendiente se representa a través de una razón que puede interpretarse desde dos nociones, una geométrica y otra variacional. La *geométrica* hace referencia a una medida de la inclinación de la recta y la variacional hace referencia a la razón de cambio, la cual es la variación de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares (Dolores et al., 2017; Lobato & Thanheiser, 2002; Reyes-Gasperini, 2013). Según Rivera (2019) en los libros de Cálculo, las definiciones que dan para pendiente y razón de cambio involucran tanto la noción geométrica como la noción variacional, solo que se emplean diferentes notaciones.

## 2.3 Como noción geométrica

La postura de Larson (2010) define a la pendiente de la siguiente manera

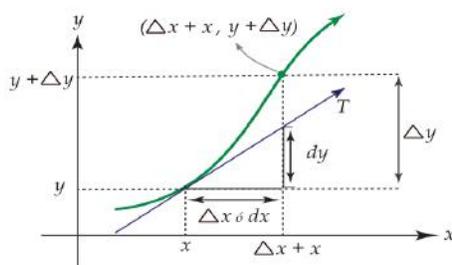
La pendiente de una recta no vertical como una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha. Considera los dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de la recta. Al desplazarse de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de  $\Delta y = y_2 - y_1$  (cambio en y) unidades por cada variación horizontal de  $\Delta x = x_2 - x_1$  (cambio en x) unidades. La pendiente  $m$  de una recta no vertical que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$  (Larson, 2010, p. 10)



**Figura 2.** Pendiente de la recta dados dos puntos, tomado de Larson (2010)

### 2.3 Como noción variacional

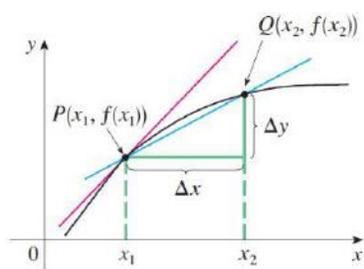
“Si  $y = f(x)$  entonces el incremento en “y” correspondiente al incremento  $\Delta x$  de  $x$ , que se denota por  $\Delta y$ , está dado por  $f(x + \Delta x) - f(x)$ . Así,  $\Delta y$  es el cambio en “y” debido al cambio  $\Delta x$  en  $x$ . La razón  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  recibe el nombre de razón promedio de cambio (ver Figura 2) de  $f$  o de “y”, respecto a  $x$ , para el intervalo  $[x, x + \Delta x]$ .” Hernández, E.(2016).



**Figura 3.** Razón de cambio como pendiente de la secante tomado de (Hernández, 2016, p. 123)

Stewart define a la razón de cambio como:

“La razón de cambio es el cociente de diferencias, donde  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , donde  $y = f(x)$ . Si  $x$  cambia de  $x_1$  a  $x_2$ , el cambio en  $x$  (también conocido como incremento de  $x$  es,  $\Delta x = x_2 - x_1$  y el cambio correspondiente en  $y$  es  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ . En términos geométricos la razón de cambio es la pendiente de la secante a la curva  $f$  que corta a ésta en los puntos P y Q, tal como se muestra en la Figura 4 (Stewart, 2012, pp. 147–148)”



razón de cambio promedio =  $m_{PQ}$

**Figura 3.** Imagen tomada de Stewart (2012, p.148)

Por tanto, la medición de la inclinación de una recta, el cambio en una función de las variables por medio de una razón o tasa de cambio o la medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha son referentes del concepto de pendiente.

### 2.3. Conceptualización de la pendiente

El término conceptualización se refiere al proceso de formar un concepto o idea. La formación de conceptos, según Ballester et al. (1992) coincidiendo con González (2005) reconoce que se utilizan vías o estrategias para formar un concepto, y dentro de ellas se encuentra la *vía inductiva*, el concepto se desarrolla partiendo de explicaciones y

descripciones hasta llegar a la explicación o definición. Esta parte de lo particular (contenido) a lo general (extensión) y cuenta con los siguientes pasos: asegurar el nivel de partida; motivar y orientar hacia el objetivo; poner a disposición de los alumnos objetos de análisis (representantes o representaciones del concepto).

El proceso de formación de conceptos matemáticos tienen lugar las imágenes, y estas como una estructura cognitiva total que se asocia con un concepto dado Tall y Vinner (1981). Donde predomina el pensamiento en imágenes, es decir, lo que se forma es una imagen del concepto, que es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias (Tall y Vinner (1981).

Para Vergnaud (1996) el desarrollo cognitivo de una persona se da a través de la conceptualización, la cual permite el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales. Este último entendido como un conjunto de conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones Vergnaud (2013).

Una conceptualización se relaciona con el conocimiento conceptual, pero también se relaciona con el conocimiento procedimental, ya que ambos juegan un papel importante en la comprensión matemática (Baroody, (2003). Sin embargo, el proceso de comprensión involucra conocimiento conceptual y procedimental de la pendiente (Stump, (1999). El conocimiento conceptual es un conocimiento rico en relaciones, que vincula nuevas ideas con ideas que ya se entienden (como en la conceptualización *propiedad funcional*); el

conocimiento procesal consiste en un lenguaje formal y sistemas de símbolos, así como algoritmos y reglas (relacionados con la pendiente como el uso de la fórmula  $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$  en la conceptualización *razón algebraica*).

Para efectos de este estudio, asumimos como conceptualización de la pendiente en el mismo sentido de Hoffman (2015), como una representación específica del concepto. Una representación hace alusión a una expresión materializada de una idea asociada a la pendiente, a través de lenguaje verbal (oral, escrito e icónico) o no verbal (Kinestésico) (Rivera, et al. , 2019).

La representación hace presente al concepto y a los procedimientos matemáticos, con las cuales cada sujeto aborda e interactúa con el conocimiento matemático, es decir, registra y comunica su conocimiento sobre la pendiente. Por tanto, al hablar de una representación específica de la pendiente en este trabajo nos referimos a una de las 11 conceptualizaciones que describió Moore-Russo et al., (2011). Las 11 conceptualizaciones de la pendiente se muestran en la Tabla 1, siendo el referente fundamental para el de análisis de datos, como se describe en el siguiente capítulo.

La categoría *razón geométrica* está relacionada al recorrido o desplazamiento horizontal y vertical, corresponde a una interpretación de los cambios en  $x$  ( $\Delta x$ ) y los cambios en  $y$  ( $\Delta y$ ). Las conceptualizaciones *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico*, *concepción trigonométrica* están asociadas a la definición clásica de la pendiente y se relacionan. La primera con la fórmula algebraica para calcular la pendiente  $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , la segunda con la

literal  $m$  presente en la ecuación de la recta y la tercera con la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta.

La categoría *situación del mundo real* incluye la situación física centradas en la inclinación de objetos físicos estáticos como carreteras de montaña, pistas de esquí o rampas para sillas de ruedas; la situación funcional dinámica enfatizaron la relación lineal entre dos cantidades variables, como la distancia y el tiempo. La categoría *concepción en cálculo* se refiere a la idea de pendiente de la tangente o secante a una curva o a la razón de cambio instantánea, ambas asociadas a la derivada de una función.

La *propiedad determinante*, hace referencia a la idea de que en el plano cartesiano se determina una única recta si se tiene dado un punto de ella y su pendiente; esta categoría también incluye la pendiente como el factor que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares. La pendiente como *constante lineal* se refiere a una constante que garantiza la "rectitud" constante de una línea y que está libre de cualquier curvatura. Asimismo bajo ésta categoría la pendiente es una propiedad constante, y como tal, la rectitud continua de una recta se conserva aún en las traslaciones. La categoría *indicador de comportamiento* es se refiere al comportamiento de la recta, si crece, decrece o se mantiene constante, también refiere a la idea que el valor absoluto de la pendiente indica la rigor de la inclinación de la recta.

La *propiedad funcional* se relaciona con la razón de cambio constante entre variables o cantidades, se encuentra en varias representaciones de funciones; a veces se ve en situaciones que involucran razones relacionadas o constantes de proporcionalidad (donde la

tasa unitaria es la pendiente). La *propiedad física* refiere a descripción de la recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, empinada, etc.

## **2.4. El concepto de currículum**

Antes de empezar, es pertinente aclarar que, en este escrito, las palabras currículum, currícula y currículum se emplean con un mismo significado que enseguida se describe.

En cierto sentido la tarea de definir el concepto currículum es quizás una de las más difíciles de todas, porque el término currículum se ha utilizado con significados muy diferentes desde el campo que lo forma. Currículum puede ser definido como prescriptivo, descriptivo o ambos, "las definiciones prescriptivas nos dicen lo que debe suceder y a menudo la forma de un plan, un programa predeterminado, o algún tipo de opinión de los expertos sobre lo que debe pasar en el período de estudio" ( Ellis 2004, p. 4).

Desde los 70 existen diversas definiciones de currículum, siendo así está la de Hirst (1973), citado en Gvirtz, S. y Plamidessi (1998, p.88) donde plantea que este es un programa de actividades, con diseño de forma tal que los alumnos alcancen, tan como sea posible determinados fines y objetivos educativos. Siendo así Stenhouse (1984), citado en Coll (2007, p. 32) plantea que es una tentativa para comunicar principios y rasgos esenciales de un propósito educativo, de forma tal que permanezca abierto a discusión crítica y pueda ser trasladado efectivamente a la práctica.

Valenzuela y Dolores (2012) plantean que algunos investigadores señalan que el concepto de currículum se ha venido utilizando más ampliamente con treinta o cuarenta años

dentro de la literatura pedagógica de países de habla latina, y se destaca que no se puede asumir un significado preciso de él. Autores como (Coll, 2007; Gvirtz & Plamidessi, 1998; Rico, 1998) coinciden en que el significado de currículum varía según los autores y sus orientaciones teóricas. Por otro lado, como lo señala Mullis, I. Martin, M. Smith, T. Garden, R. Gregory, K. González, E. Chrostowski, S. O'Connor (2002), el currículum puede ser referido a tres tipos: el *currículum pretendido*, el cual representa las matemáticas que la sociedad espera que aprendan los estudiantes y cómo debería organizarse el sistema educativo para facilitar este aprendizaje. El *currículum aplicado*, este se refiere a lo que realmente se imparte en las aulas, quién las imparte y cómo se imparte. El *currículum obtenido*, se refiere a lo que han aprendido los estudiantes.

Pero de acuerdo con Alsina (2000), quien se refiere a cuatro tipos de currículum:

“El *currículum oficial*, que viene dado en el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben alcanzarse, etc. El *currículum potencial* queda determinado en publicaciones docentes, libros de texto, materiales, etc. El *currículum impartido* es el que efectivamente desarrolla el profesorado en clase a lo largo del curso, y por último el *currículum aprendido* es el que efectivamente queda adquirido por el alumnado (p. 14).

Después de la revisión de literatura para la realización de la presente investigación, se asume por currículum” la clasificación por Alsina.

Tomando en consideración la clasificación de Alsina (2000), nuestra caracterización de currículum está centrada en el oficial, ya que en Cuba este currículum es único y utilizado en todos los niveles educativos de todo el país. Está integrado por los Planes de estudio y Programas de estudio de 1º al 12º grado de la educación cubana.

A fin, se reconoce que sea cual sea su significado está directamente vinculado con los procesos de selección, organización, distribución, transmisión y evaluación del contenido y de sus objetivos dentro de los sistemas educativos (Valenzuela y Dolores, 2012).

## Capítulo III

---

### 3. Metodología

Debido a la naturaleza de investigación y con el objetivo de identificar las conceptualizaciones del concepto de pendiente que se promueven en el currículum de matemáticas de Cuba, el paradigma de investigación adoptado es el cualitativo-exploratorio, desde un enfoque temático. Los datos fueron recolectados de los documentos curriculares oficiales, para su análisis nos apoyamos del método de Análisis de contenido por Bardin (2002) y las conceptualizaciones de la pendiente descritas anteriormente.

#### 3.1. Investigación cualitativa-exploratoria

La presente investigación es de tipo cualitativa en el sentido de Cohen y Gómez (2019) y con enfoque exploratorio de acuerdo con Monje (2011). Bajo la postura Baéz et al. (2007) este tipo de investigación cualitativa tiene como objetivo principal la descripción de las cualidades de un fenómeno. Este estudio se apoya en esta investigación ya que tienen un objetivo principal y su ventaja de estudiarla es que estudia el fenómeno en un escenario natural, estableciendo una comunicación más directa entre el investigador y los investigados involucrados en el estudio. Se trata al final de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su sistema de relaciones, su estructura dinámica, con el claro propósito de proveer descripciones detalladas de los contextos estudiados; se debe hablar de un entendimiento en profundidad en lugar de exactitud García(2006). La investigación cualitativa se encarga de describir, analizar, entender y comprender fenómenos sociales. En el campo de educativo,

Blanco (2005), manifiesta que los estudios de este tipo, son aquellos que desarrollan objetivos de comprensión de diversos fenómenos socio-educativos y transforman la realidad.

### **3.1.1. Exploratoria**

Los estudios exploratorios se realizan cuando el objetivo es examinar un tema, o sea si la revisión de la literatura (en nuestro tema investigativo) revela que hay resultados que se realizaron en distintos países pero con un común denominador: explorar algo poco investigado. Pero de forma general no hay un trabajo concreto que diga que solo existen tales..., conceptualizaciones de la pendiente en el currículum de forma general, sin embargo los estudios exploratorios en pocas ocasiones constituyen un fin en sí mismos. Generalmente determinan tendencias, identifican áreas, ambientes, contextos y situaciones de estudio, relaciones potenciales entre variables; o establecen el “tono” de investigaciones posteriores más elaboradas y rigurosa. Por tanto, nuestro análisis amplio, da pauta, y familiarización sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa respecto de un contexto en particular, indagar nuevos problemas, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones futuras, o sugerir afirmaciones y postulados (Hernández et al., 2015, p. 91).

Sin embargo, la investigación sigue una metodología cualitativa y exploratoria, utilizando el Análisis de Contenido, que busca investigar sobre la naturaleza del discurso y se utiliza para el estudio sistemático de documentos escritos (Zapico, 2006).

### **3.2. Método de Análisis de contenido**

Por tanto, la investigación consideró que por el hecho de trabajar con la investigación cualitativa era necesario recurrir a algún método de investigación, y debido al carácter exploratorio de nuestro trabajo se usó el método Análisis de contenido por Bardin (2002). Se seleccionó este método, permitiendo al investigador explicitar y sistematizar la evidencia recolectada con el objetivo de efectuar deducciones lógicas y justificadas.

Según Monje (2011), “es un método para manejar material narrativa cualitativo, pero también un procedimiento que permita la cuantificación. Es una técnica de investigación para el análisis sistemático del contenido de una comunicación, bien sea oral o escrita” (p. 119). El Análisis de contenido se basa en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información, lectura que a diferencia de la lectura común se realiza siguiendo el método científico, es decir, de manera, sistemática, objetiva, replicable, y válida. No obstante, lo característico del Análisis de contenido que le distingue de otras técnicas de investigación, es que combina intrínsecamente, y de ahí su complejidad, la observación y producción de los datos y la interpretación o análisis de los datos. Sin embargo, es posible cuantificar elementos de los mensajes emitidos por un emisor e igualmente se puede realizar comparaciones entre mensajes de diferentes medios de comunicación. Apoyados en Berelson (1952), esta técnica de investigación pretende ser objetiva, sistemática y cuantitativa en el estudio del contenido manifiesto de la comunicación.

De acuerdo con Bardin (2002) el análisis de contenido refiere:

... “a un conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (variables inferidas) de estos mensajes” (p. 32).

**Tabla 2**

**Fases del método Análisis de contenido.**

1ª Fase : Pre – análisis	2ª Fase: Explotación de material	3ª Fase : Tratamiento de los resultados e interpretación
Preparando el material	Explorando el material	Análisis de los resultados
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lectura superficial.</li> <li>2. Elección de documentos</li> <li>3. Formulación de hipótesis y de objetivos.</li> <li>4. Señalamiento de índices y elaboración de indicadores.</li> <li>5. Preparación del material.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Descomposición: Elección de las unidades.</li> <li>2. Enumeración: elección de reglas de recuento.</li> <li>3. Análisis cualitativo.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Tratamiento de los resultados.</li> <li>2. Proponer inferencias</li> <li>3. Hacer interpretaciones con relación a los objetivos</li> </ol>

Este método consta de tres fases: **Fase de pre-análisis; Explotación del material y**

**Tratamiento de los resultados e interpretación.**

**3.3. Fase de pre-análisis**

Esta primera fase está constituida por cinco actividades no estructuradas, pero dentro de ellas se tiene tres misiones importantes, la elección de los documentos a revisar (Corpus),

las hipótesis (en caso de ser necesario) y los objetivos de investigación (sustentan el trabajo a desarrollar). Lo cual no se encuentran obligatoriamente en un orden cronológico.

El objetivo de análisis es el currículum de matemáticas, que está integrado por los Planes y Programas de estudio. Su obtención se realizó mediante una petición institucional de la Universidad Autónoma de Guerrero al Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP) de La Habana, Cuba, ya que solo por esta vía puede ser compartido al extranjero. Ya obtenidos los documentos de análisis da inicio en la búsqueda de los elementos del contexto de análisis de la investigación.

### **3.3.1. Estructura curricular (Niveles educativos)**

El currículum de matemáticas para la educación en Cuba corresponde a los niveles de educación casi universales: primaria, secundaria y preuniversitario (bachillerato para México):

La *primaria*: Se compone de 1° a 6° grado, el primer ciclo (de 1° a 4° grado) tiene carácter preparatorio y el segundo ciclo (de 5° a 6° grado) es la etapa de culminación de la educación primaria y de tránsito entre la primaria el primer ciclo y la secundaria.

*Secundaria*: comprende 7° a 9° grado. El séptimo grado inicia a la nueva enseñanza, da conocimientos previos para las posteriores y profundiza en los contenidos de primaria, en los otros dos grados, al terminar el 9° grado, último año de la secundaria, los alumnos pueden aspirar a continuar el estudio en un instituto preuniversitario.

**Preuniversitario:** incluye el 10º, 11º y 12º grado, se cursa previo a los estudios universitarios y prepara a los estudiantes para cursar carreras profesionales en ciencia, ciencia social, historia o letras y es uno de los dos destinos a elegir tras cursar la secundaria básica.

Los documentos curriculares cubanos están plasmados principalmente en los Planes y Programas de estudio. El Plan de Estudio se asume como el documento oficial más general y en él están incluidos un grupo de componentes que deben regir la vida de la escuela en cada nivel educativo. Estos componentes recogen y sintetizan las principales modificaciones que caracterizan el perfeccionamiento del Sistema Educativo Nacional. Los programas de estudio son los documentos curriculares donde se dan lineamientos más específicos acerca de lo que los estudiantes deben aprender y están organizados por asignaturas. En este trabajo seleccionamos los programas de estudio de la asignatura de matemáticas desde el 1º hasta el 12º grado. Estos programas tienen una estructura similar, se componen de:

- Portada
- Índice
- Caracterización del contenido y la concepción metodológica de la asignatura
- Objetivos generales de la disciplina en el nivel
- Objetivos generales de la asignatura en el grado
- Plan temático (h/c) ( Ver imagen 1)
- Orientaciones generales por unidades
  - Unidad temática
  - Objetivos de la unidad

- Contenidos por unidades temáticas y tiempo aproximado (h/c) (Imagen 2)
- Ampliación de la unidad de cada unidad temática ( Imagen 3)
- Objetivos que se deben evaluar en la unidad
- Exigencias para la evaluación de los estudiantes en la Matemática ( Imagen 3)
- Sistema de evaluación de los educandos en la asignatura
- Bibliografía para el docente

### Imagen 1.

Ejemplo de los apartados “Plan temático e indicaciones generales del programa de estudio”

#### IV. Plan temático.

Unidad	Título	Tiempo aproximado
		(en horas clases)
1.	Estadística descriptiva	17 h/c
2.	Geometría plana	44 h/c
3.	Sistemas de ecuaciones lineales	20 h/c
4.	Trabajo con variables, ecuaciones de segundo grado y funciones cuadráticas	45 h/c
5.	Cuerpos	20 h/c
6.	Evaluaciones	4 h/c
7.	Reserva	3 h/c
	<b>Total</b>	<b>153 h/c</b>

#### V. Indicaciones generales por unidades

##### UNIDAD 1: “Estadística descriptiva” (17 h/c)

##### **Objetivos:**

1. Argumentar proposiciones relativas a los conjuntos numéricos estudiados, en los que apliquen sus conocimientos sobre las relaciones de inclusión, de pertenencia, de orden y las propiedades de las operaciones con números reales.
2. Formular y resolver ejercicios con texto y problemas relacionados con fenómenos y procesos de carácter político-ideológico, económico-social y científico-ambientales a nivel local, nacional, regional y mundial, incluidos aquellos que requieren extraer información de tablas y gráficos, aplicando de forma integrada sus conocimientos sobre la numeración, el orden y las operaciones de cálculo en los conjuntos numéricos

**Nota:** Foto tomada (estructura del Programa de estudio de 9º grado)

## Imagen 2.

Ejemplo de la estructura de contenidos y unidades temáticas

### Contenidos:

1.1 Sistematización sobre las relaciones de inclusión y pertenencia en los conjuntos numéricos; el orden y las operaciones aritméticas con números reales a partir de la formulación y resolución de problemas relacionados con la vida económica, social y política del país y del mundo.	7 h/c
<b>1.2 Estadística descriptiva para datos agrupados</b>	<b>10 h/c</b>
Sistematización sobre los conceptos básicos de la Estadística Descriptiva. Resolución de ejercicios y problemas que se resuelven haciendo uso de recursos estadísticos en datos simples.	2
Variables continuas. Representación de datos agrupados a través de tablas de frecuencia absoluta y relativa. Rango. Conceptos de clase, rango o recorrido de la variable, clase de frecuencias, límite de clase, marca de clase, amplitud de clase.	3
Construcción de histogramas y polígonos de frecuencia.	2
Determinación de la media aritmética para datos agrupados y de la clase modal y mediana, a través de tablas e histogramas. Problemas que se resuelven haciendo uso de recursos estadísticos.	3

Nota: Foto tomada (estructura de contenidos y unidades temáticas del Programa de estudio de 9º grado)

### Imagen 3.

Ejemplo de ampliación de contenidos de la unidad temática y las exigencias de evaluación en la unidad

15

“**Estadística descriptiva**” es la primera unidad del programa de noveno grado por lo que se pretende que los educandos sistematicen y profundicen en las relaciones elemento-conjunto (relaciones de pertenencia) y conjunto-conjunto (relaciones de inclusión), el orden de los números reales, sus diferentes formas de representación y el cálculo combinado con las cuatro operaciones básicas, la potenciación y la radicación lo que incluye la utilización de tablas para determinar cuadrados, raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas de números racionales y lo apliquen a la resolución y formulación de problemas aritméticos en que intervengan de forma combinada, la proporcionalidad, el tanto por ciento y por mil, la estimación, la conversión y el cálculo con cantidades de magnitud y donde se apliquen las reglas del cálculo aproximado. Es importante que en estos problemas se interrelacionen las distintas áreas matemáticas.

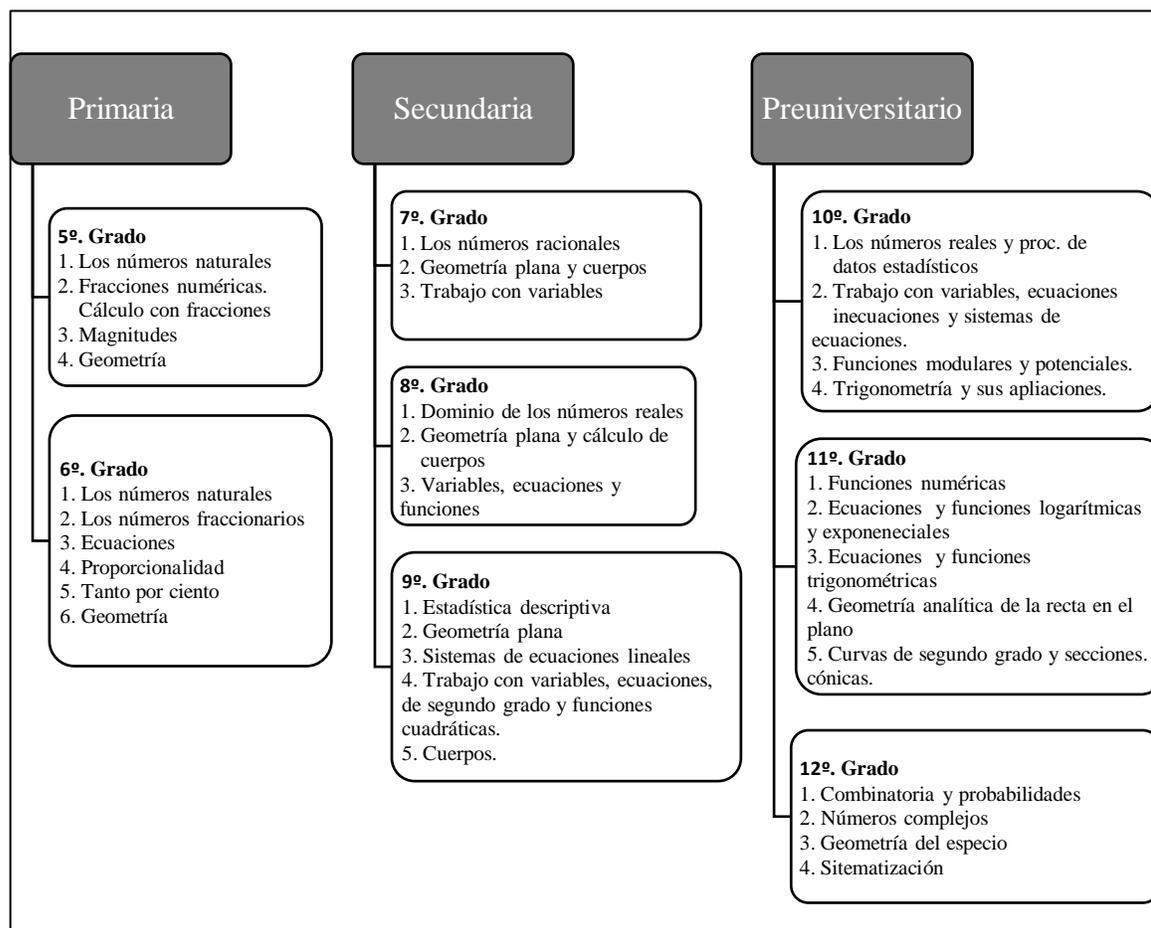
Los conceptos, relaciones y procedimientos que se estudian en Estadística Descriptiva, se introducen teniendo como base los conceptos básicos de la Estadística Descriptiva estudiados en séptimo y octavo grados. En esta unidad se introduce el análisis de datos agrupados en clases y los conceptos, variables continuas, rango o recorrido de los datos, clase de frecuencia, límite de clase, marca de clase, amplitud de clase y la representación de datos agrupados utilizando tablas de frecuencia absoluta y relativa, se construyen histogramas y polígonos de frecuencia y se determinan, la media aritmética para datos agrupados, la clase modal y la clase mediana, utilizando tablas e histogramas.

#### Exigencias para la evaluación del contenido en la unidad

- Comparar y ordenar números reales.
- Representar en la recta numérica subconjuntos de números reales dados en intervalos con diferentes formas representativas y viceversa.
- Establecer relaciones elemento-conjunto (relaciones de pertenencia) y conjunto-conjunto (relaciones de inclusión)
- Establecer relaciones de inclusión entre subconjuntos de números reales dados en

Nota: Foto tomada (ampliación de contenidos de unidad y objetivos a evaluar del Programa de 9º grado)

Las conceptualizaciones de la pendiente buscadas están potencialmente presentes desde el 5º grado hasta el 12º. Grado, tal como se muestra en la siguiente gráfica 1.



**Gráfica 1.** Contenidos potenciales del currículum de matemáticas cubano

### 3.4. Fase de explotación del material

Esta fase representa en sí la parte fundamental del método de “Análisis de contenido”, toda vez que se realizó una revisión detallada y profunda, consiste en realizar operaciones de

codificación, corresponde a la administración sistemática de las decisiones tomadas. La codificación corresponde a una transformación que por descomposición, agregación y enumeración permite desembocar en una representación del contenido. La organización de la codificación comprende tres apartados:

1) **La descomposición:** la elección de las unidades (la elección de la unidad de análisis debe responder al objeto del análisis en cuestión)

2) **La enumeración,** es decir, la elección de reglas de recuento

3) **La clasificación y la agregación,** referida a la elección de categorías. Estos apartados señalan qué elementos hay que tomar en cuenta y cómo hay que descomponerlos.

#### **3.4.1. Descomposición: Elección de unidades de análisis**

Como primer punto, una vez ubicados los documentos, se realizó una revisión y análisis detallado de qué se iba analizar, si todo el currículum o sólo contenidos. En dicho proceso se realizó una descomposición de la estructura del currículum. La decisión fue tomar solo los contenidos, dado que toda la estructura del currículum no nos daba evidencia objetiva. Estos son repetidos y tomados de los contenidos, por tanto, es más eficaz optar por el análisis de los contenidos ya que son distribuidos para la dosificación del docente para la enseñanza y aprendizaje de los educandos.

Las unidades de análisis fueron las **frases o palabras claves** que refieran a alguna de las conceptualizaciones de pendiente. Dado que en los programas de estudio no se detalla mucho sobre los contenidos matemáticos a desarrollar, se llegó a la conclusión, junto con el

grupo de trabajo tomar como unidades de análisis a menciones que dieran evidencia de *frases explícitas o implícitas* de la pendiente. Ambas menciones nos permiten identificar propiedades o características del concepto, por ejemplo, sobre cómo está representado y los procedimientos típicamente asociados con él. De esta manera, cuando en el programa de estudio se menciona el término pendiente o alguna expresión sinónima (por ejemplo, fórmula de pendiente, razón de cambio de una función lineal), se documentó como una *mención explícita* de la conceptualización correspondiente. Mientras que, una *mención implícita* está asociada a aquellos contenidos que contribuyen a la formación de ideas asociadas a alguna de las conceptualizaciones (por ejemplo, proporciones, proporcionalidad constante, funciones lineales). Según el currículum de matemáticas, este concepto es introducido por primera vez en el 8° curso<sup>1</sup> (MINED, s/f).

### 3.4.2. Reglas de enumeración

Ya elegidas las unidades de análisis, se procedió al diseño de tablas, con el fin de registrar los contenidos que relacionaran algún inicio de pendiente. Con este registro se logró identificar todos los contenidos que evidenciaban al menos alguna **frase o palabra clave** relacionada con el concepto de pendiente. (Ver tabla 3)

---

<sup>1</sup> Se puede traducir como carrera. Hace referencia al período de tiempo establecido de forma anual para el dictado de clases en una Institución educativa.

**Tabla 3**

**Organización inicial de los datos de la revisión y análisis del currículum. (Adaptación propia)**

Nivel Educativo	Grado	Ubicada	Extracto	Mención	Código	Conceptualización	Justificación
Nivel primario	5	Unidad # 4 Igualdad de figuras y movimiento 4.7 La traslación en el plano	Concepto de <i>dirección y sentido</i> : las <i>rectas</i> <sup>2</sup> <i>paralelas</i> tienen la misma dirección y las que se cortan tienen distinta dirección. P.9	Implícita	P,D	Propiedad física Propiedad determinante	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive etc. -Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares.

En las cuatro primeras columnas se colocaron los datos de ubicación del contenido; nivel educativo, grado<sup>3</sup>, ubicación y la frase (extracto) identificada, el número de página con el planteamiento textual tomado del programa analizado que exhibe alguna relación con el concepto pendiente.

### **3.4.3. Análisis cualitativo y cuantificación de los datos**

#### **3.4.3.1. Análisis cualitativo**

El análisis cualitativo de la investigación permitió identificar todas las **frases o palabras claves** en una matriz de datos para cada nivel educativo de todo el currículum. Siendo un campo de acción muy intuitivo, flexible y válido para hacer deducciones específicas. Para

---

<sup>2</sup> La letra en cursiva corresponde a la frase que se consideró para la codificación

<sup>3</sup> Etapas que divide un Nivel educativo

validar el análisis se recurrió a la triangulación por investigadores en el sentido de Okuda, M., y Gómez-Restrepo (2005). Este tipo de método es llevado a cabo por varios investigadores, algunas veces, para darle rigor a la investigación suelen utilizarlo investigadores de diferentes perfiles. Esto permite reducirse la desviación o sesgo al momento de realizar el análisis de los datos. Sin embargo, este tipo de análisis puede ejecutarse de forma individual y ser expuesto el análisis a comparación con los demás investigadores. De forma independiente, cada uno revisó el currículum y realizó la clasificación correspondiente. Luego, en conjunto se compararon y discutieron las propuestas. En caso de algún desacuerdo, se comparte nuevamente el extracto hasta llegar a un consenso.

#### 3.4.3.2. *Cuantificación de los datos*

Se distribuyen los contenidos en renglones en cinco columnas, estas se dividen en: 1) grado, 2) mención (explícitas e implícitas, 3) contenido (página) ,4) código de cada conceptualización y 5) valor numérico de la cantidad de códigos identificados (frecuencia) (**ver tabla 4**).

Para la elección de cada mención explícita o implícita, se denota cada frase o palabra claves identificada en *cursiva* de cada contenido. Las frases o palabras claves están relacionadas con la descripción de alguna de las conceptualizaciones de la pendiente. Se notó que algunos contenidos podían involucrar o contribuir a dos o más conceptualizaciones.

Esta notación se propuso para justificar cada contenido las frases o palabras clave que hacen relación y selección a las conceptualizaciones de la pendiente, por tanto, cada

contenido seleccionado contiene alguna relación con la unidad de análisis, (**ver tabla 5**). La frecuencia nos permite obtener un dato cuantificable, mirar la cantidad de códigos identificados en cada contenido.

En la tabla 4 y 5 se muestra un ejemplo de la recopilación de datos en los cursos de secundaria (8° grado) y preuniversitario (11° grado).

**Tabla 4**

Muestra (toma de datos)

Grado (x)	Mención Implícita/explicita	Contenido (x)/ página	Código Códigos de las conceptualizaciones	Frecuencia (#)
--------------	--------------------------------	--------------------------	---	-------------------

**Tabla 5**

Frases y palabras claves identificadas que relacionan alguna conceptualización de la pendiente

Mención implícita(I) explícita (Ex)	Frases o palabras claves	Códigos asociados a las frases o palabras claves que se relacionan con las conceptualizaciones de la pendiente
5I	Rectas paralelas	D
I	Razón y proporción	F
6I	Magnitudes directamente	F
I	Factor de proporcionalidad	F-PC
I	Cantidades de magnitudes	F
I	Representación gráfica de la proporcionalidad directa	F-G
7I	Tanto por ciento mediante el uso de las proporciones	F
I	Perpendicularidad entre la tangente y el radio en el punto de contacto	D-T
I	Ecuación lineal	F
I	Consolidación mediante problemas relacionados con la vida económica, política y social del país, de su hogar y su escuela	R
8I	Función lineal	F
I	Problemas relacionados a con la vida económica, social y política del país y del mundo	R
I	Representación gráfica de la función lineal.	F-G-A
	Representación gráfica de datos sobre fenómenos naturales y el desarrollo económico y social que demuestren el crecimiento y decrecimiento de situaciones prácticas	R
Ex	Pendiente de una recta y su interpretación geométrica	G
Ex	Fórmula para calcular el pendiente de una recta conocido dos puntos	A
9I	Razón de semejanza.	
I	Sistematización sobre las ecuaciones y funciones lineales	F-D
10I	Resolución y formulación de problemas aritméticos intramatemáticos y extramatemáticos	R
	Sistematización del concepto de función lineal	F

I	Función constante, de proporcionalidad directa e idéntica	F-PC-L-B
I	Monotonía( Propiedad global)	B
I	Representación gráfica e interpretación de datos relacionados con situaciones naturales, sociales, económicas y científicas	R
I	Semejanza de figuras planas	L
11Ex	Pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación, condiciones de paralelismo o perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes	A-T-D
Ex	Ecuación de un lugar geométrico, ecuación de la recta como lugar geométrico (casos particulares), pendiente, representación gráfica, punto de intersección de dos rectas	PC-L-A-T-G-D
12I	Incógnitas y parámetros en ecuaciones lineales	PC
	Funciones lineales, a partir de su ecuación o su gráfico	A-PC-L-G
I	Ecuación general de la recta	A-L-T
Ex	Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes	D

**Tabla 7**

**Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en 11° grado**

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
11	Implícita	Resolución y formulación de <i>problemas intramatemáticos y relacionados con situaciones de la vida cotidiana, de otras ciencias, de la economía y de la sociedad en general</i> , en los que se apliquen las <i>funciones lineales</i> cuadráticas, modulares y potenciales de exponente entero, sus propiedades (cero, signo, <i>monotonía</i> , valores funcionales extremos, asíntotas, simetría del gráfico y paridad) y <i>sus gráficos</i> . p. 14	R,F,B,PC	4
	Explícita	<i>Pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación, condiciones de paralelismo o perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes</i> . p. 26	A,T,D	3

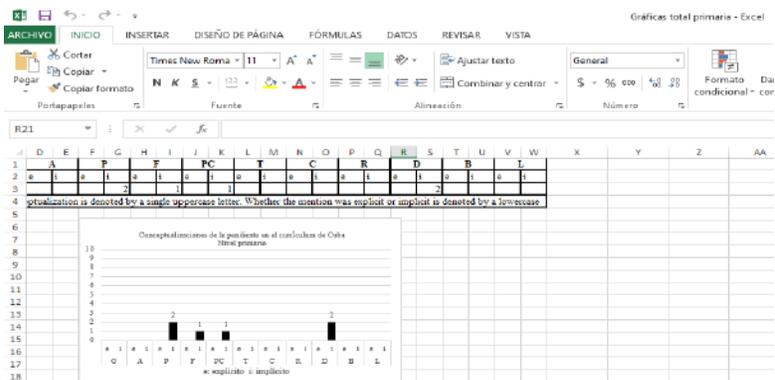
**Tabla 8**

**Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en 8° grado**

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
8	Implícita	El <i>tanto por ciento</i> , <i>Problemas relacionados a con la vida económica, social y política del país y del mundo</i>	F,R	2
	Explícita	<i>Fórmula para calcular la pendiente de una recta conocido dos puntos</i> . p. 21	A	1

### 3.5. Fase dedicada al tratamiento de los resultados

En la tercera fase, dedicada al tratamiento de los datos y a su interpretación, el equipo de trabajo se enfocó en el objetivo de la investigación. Al analizar las tablas de concentrado, evidenciando los resultados completos y principalmente respondiendo la pregunta de investigación y al alcance de responder al objetivo de la investigación. Se realizaron gráficas de barras (ver **imagen 5**) por grado para mostrar la frecuencia, el cuánto apareció cada una de las conceptualizaciones de pendiente identificadas. Los resultados fueron significativos y fiables, proponiendo inferencias, hallazgos nuevos en el contexto investigativo como base para nuevas investigaciones.



**Imagen 5:** Muestra del análisis de frecuencias de las conceptualizaciones identificadas

Finalmente, los resultados obtenidos se ubican en el capítulo IV, mientras el análisis y discusión se presentan V de este trabajo de tesis.

## Capítulo IV

---

### 4. Resultados

Este capítulo se despliega los resultados obtenidos basados en análisis realizado al currículum de matemáticas de Cuba. Los resultados están estructurados de la siguiente manera: en primer lugar, se comienza la descripción desde el **Nivel primario** (primaria), siendo la base educativa principal en la enseñanza-aprendizaje del educando, seguido del **Nivel medio** (secundaria) y luego el **Nivel medio superior** (prepa o preuniversitario). En segundo lugar, se describen las conceptualizaciones de la pendiente identificadas en gráficos de barra con el fin de visualizar las evidenciadas en cada curso escolar y en conjunto con el valor numérico de regularidad de cada código previamente identificado (frecuencia).

Primeramente, debemos tener claro que el término "pendiente" se utilizó explícitamente en los cursos de 8°, 11°, y 12°. Sin embargo, en el 5°, 6°, 7°, 9°, 10° cursos, hubo menciones que abordaron implícitamente las conceptualizaciones de la pendiente. En efecto, para los grados que se incluyen en el **Nivel primario** (1°, 2°, 3°, 4° grados), no se evidenció ninguna mención relacionada con las conceptualizaciones de pendiente, por esta razón no fueron tomados a consideración para el análisis investigativo.

## 4.1. Nivel primario

### 4.1.1. Conceptualizaciones de la pendiente en 5° y 6° grado

**Tabla 8**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel Primaria (5°- 6° grados)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
5	Implícita	Concepto de dirección y sentido: <i>las rectas paralelas tienen la misma dirección y las que se cortan tienen distinta dirección.</i> p.39	P,D	2
6	Implícita	Concepto de <i>razón</i> . Concepto de <i>proporción</i> . Términos de una proporción. Propiedad fundamental de las proporciones. p.38	F	1
		<i>Magnitudes directamente proporcionales. Factor de proporcionalidad. Formación de proporciones entre cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra. Representación gráfica de la proporcionalidad directa.</i> p.38	P,F, PC,D,L	5
		Ejemplos que ilustran la relación entre los <i>conceptos de razón</i> , fracción decimal, centésimas y <i>tanto por ciento</i> . Uso de <i>proporciones</i> para trabajar con <i>por ciento</i> . <i>Solución de ejercicios con texto y problemas de tanto por ciento mediante el uso de proporciones.</i> p.39	F	1

En este *Nivel Primario* se identificaron seis conceptualizaciones de la pendiente con mención implícita; “*propiedad física, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, propiedad determinante y constante lineal*” (ver **tabla 8**). Se evidencian a partir del 5° grado al introducir el concepto de “movimiento” de una forma aún no rigurosa, utilizado como procedimiento geométrico constructivo con base en el estudio de la simetría axial. Específicamente en la Unidad 4 “Igualdad de figuras y movimiento”, de la temática 4.7 “La traslación en el plano”.

Al hacer referencia a la “dirección y sentido” entre rectas permitió tomar a consideración la *propiedad determinante*, como descripción que si las rectas tienen “diferente dirección” se cortan y no tienen el mismo sentido (sus pendientes son diferentes) o que las

rectas “paralelas” tienen la misma dirección e igual sentido, por tanto, tienen iguales pendientes. Sin embargo, sabemos que el grado no hace un énfasis preciso del concepto de análisis; inicia con un repaso de algunos conceptos como la recta y las principales relaciones entre puntos y rectas y entre rectas (se cortan, paralelismo y perpendicularidad). No obstante, al hablar de plano como lo hace el curso las rectas paralelas están siempre a una misma distancia una de la otra, o sea nunca se cruzan, y las rectas perpendiculares se intersectan formando un ángulo de 90 grados, siendo tema introducido desde la temática 4.2 denominado “Ángulo”, por tanto, ya deben estar familiarizados. Dentro de los logros que se deben cumplir en el grado plantean: “dominar las definiciones constructivas de los movimientos que estudian y saber utilizarlas debidamente en ejercicios y problemas geométricos de reconocimiento, construcción y argumentación” (p. 30). Esto nos permite incidir en la *propiedad física* dado que el contenido se encuentra dentro de uno de los tipos de movimientos, utilizar descripciones de una recta utilizando expresiones en ejercicios propuestos en la clase. Pero cabe destacar que posteriormente el contenido que está incluido en la misma temática relaciona el “vector”, dado por hecho que es necesario conocer la dirección y sentido.

En el grado 6° las menciones implícitas de las conceptualizaciones de pendiente identificadas están presentes en tres contenidos específicos (“razones y proporciones”; “proporcionalidad”; “razones, fracciones, tanto por ciento y proporciones”) en la Unidad 4: Proporcionalidad y Unidad 5: Tanto por ciento. La *propiedad física, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, propiedad determinante y la constante lineal*”, son las conceptualizaciones de la pendiente identificadas en los contenidos señalados. La *propiedad*

*funcional* se codifica en cada contenido referido, “concepto de razón y proporción”, “magnitudes directamente proporcionales” y “representación gráfica de la proporcionalidad directa”, y “tanto por ciento”. Las tres primeros contenidos se observa relaciones que intervienen razones y constantes de proporcionalidad al abordar el factor de proporcionalidad y los temas de razón y proporciones, incidiendo en el *coeficiente paramétrico* y *propiedad funcional*. Dado por hecho en la caracterización de la asignatura en el grado se plantea:

.... que la proporcionalidad tiene un enfoque muy práctico, con pocas consideraciones teóricas y organizada de modo tal que los conceptos de razón y proporción constituyen el punto de partida y el centro de las definiciones que se hacen de proporcionalidad directa e inversa, así como de los procedimientos fundamentales de cálculo.(p. 28)

El programa aborda:

La representación gráfica de la proporcionalidad es una vía para ilustrar propiedades importantes de estas relaciones, especialmente de la proporcionalidad directa; constituyen una condición previa importante para el estudio de relaciones similares entre magnitudes físicas que se estudian a partir del próximo curso. (p.28)

Al abordar la proporcionalidad directa entre dos magnitudes su representación gráfica es una línea recta dado que la constante de proporcionalidad ( $k$ ) es la pendiente de la recta, esto nos conlleva a codificar la *constante lineal* y el *coeficiente paramétrico*. Se puede incidir que al determinar un punto e identificando la pendiente (constante de proporcionalidad)

podemos afirmar que es una línea recta y se puede describir utilizando diferentes expresiones de descripción relacionando la *propiedad física*.

El tratamiento del tanto por ciento concluye en este grado con el estudio integrado de conceptos como razón, por ciento, entre otros. La utilización de la regla de tres es una de las vías que los estudiantes pueden utilizar para trabajar el tanto por ciento. Por tanto, la regla de tres es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres valores conocidos y una incógnita, estableciendo una relación de proporcionalidad entre todos ellos. Es decir, lo que se pretende con ella es hallar el cuarto término de una proporción conociendo los otros tres. La proporción es la igualdad entre dos o más razones. O sea, si  $\frac{a}{b}$  corresponde a la razón, entonces  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  equivale a una proporción, por tanto, incide en relacionar la *propiedad funcional*.

## 4.2. Nivel medio

### 4.2.1. Conceptualizaciones de la pendiente en 7º grado

**Tabla 9**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel medio (7º grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
7	Implícitas	El significado de comparaciones a través del <i>tanto por ciento</i> . p. 15	F	1
		Consolidación mediante <i>problemas relacionados con la vida económica, política y social del país, de su hogar y su escuela</i> en que se aplique el procedimiento para <i>resolver ecuaciones lineales</i> . p. 23	F,R	2

El 7º curso siendo el primer curso en el **Nivel Medio**, se identificaron dos conceptualizaciones de la pendiente, *propiedad funcional* y la *situación mundo real* (**ver**

**tabla 9).** La primera se evidencia en este curso escolar al ser relacionada con el contenido de “tanto por ciento” y ecuaciones lineales; esta última en la resolución de problemas

Desde la primera unidad el programa inicia sistematizando contenidos estudiados con anterioridad incluyendo el “tanto por ciento”; sin embargo ya para este curso se incide que los estudiantes tengan amplia noción del “tanto por ciento”, permitiendo evocar relación al tanto por ciento afín con la proporcionalidad directa e implicando razones relacionadas incidiendo la *propiedad funcional*. Ejemplificando un poco más, al referirse el contenido a comparaciones se espera que amplíen las formas de resolver algún ejercicio o problema que se utilice el tanto por ciento, dentro de ellas está la tabular al ubicar los datos se observa muy bien que entre la cantidad de (ejemplo: personas) y el porcentaje hay proporcionalidad directa, o sea, a más (personas), más porcentaje o a menos personas, menos porcentaje.

Este curso profundiza en la comprensión profunda de las variables, con el fin de aplicar métodos y procedimientos diversos para la resolución de ecuaciones lineales. El programa plantea que el tema “ecuación” está dentro de los siete grandes núcleos temático, según el programa aplicar métodos y procedimientos diversos para resolver ecuaciones lineales estableciendo en cada ocasión una fuerte conexión con sus conocimientos geométricos”. (p.5). Esto nos evidencia que al buscar vínculo con las representaciones geométricas, las cuales no se evidencia explícito en el contenido seleccionado nos apoya para justificar que a partir de 5º curso específicamente en la temática 4.3 “Coordenadas y gráficos” ya se aborda la representación de pares ordenados en un sistema de coordenadas. Por tanto, ya los educandos en este grado se pueden incidir en identificar la conceptualización *situación mundo real* en la resolución de problemas relacionados con la vida económica, política y

social del país, de su hogar y su escuela en que se aplique el procedimiento para resolver ecuaciones lineales. Sin embargo, esto nos da pie a aplicar un poco más acerca del amplio contexto que no brinda involucrar esa conceptualización. La identificación de la conceptualización *propiedad funcional* también nos brinda relación en el contenido; para escribir la ecuación necesitamos la razón de cambio entre las ordenadas y las abscisas, o sea, el cociente que relacione la variación vertical con la variación horizontal entre dos puntos de una recta. Dado por hecho, que una de las características del modelo lineal es que su razón de cambio es constante.

#### 4.2.2. Conceptualizaciones de la pendiente en 8° grado

**Tabla 10**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel medio (8° grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
8	Implícita	El <i>tanto por ciento</i> . Problemas relacionados con la vida económica, social y política del país y del mundo. p. 14	F, R	2
		Conceptos de <i>ecuación</i> , solución de la ecuación, conjunto solución, ecuaciones equivalentes. p. 21	PC	1
		La <i>proporcionalidad directa</i> . Formulación, resolución de problemas y confección de tablas y gráficos utilizando los conceptos de <i>proporción</i> , de <i>proporcionalidad directa</i> . p. 21	F	1
		La <i>función lineal</i> . Representación gráfica de la función lineal. p. 21	G,A,F,PC,L	5
		Representación gráfica de datos sobre fenómenos naturales y el desarrollo económico y social que demuestren el crecimiento y decrecimiento de situaciones prácticas utilizando el concepto de función lineal y funciones definidas por tramos de <i>funciones lineales</i> . p. 21	F,R,B	3
	Explícita	Concepto de <i>pendiente de una recta</i> y su interpretación geométrica. p. 21	G	1
Fórmula para calcular la <i>pendiente de una recta conocido dos puntos</i> . p.21		A	1	

En el 8° curso evidencian siete conceptualizaciones de la pendiente, se identifica la *propiedad funcional* relacionada en casi todos los contenidos identificados con mención implícita. Su relación principal está en contenidos como el “tanto por ciento, ecuación, proporción y proporcionalidad directa y función lineal”.

La sistematización del tanto por ciento, ecuación, proporción y proporcionalidad directa se retoman como conceptos base, los educandos en este de grado se aproximan en su acepción como dependencia entre cantidades variables al concepto función. Tanto así que la temática 3.4 “La función lineal” para dar inicio con la función lineal, retoma la proporcionalidad, los conceptos de proporción en la resolución y confección de problemas utilizando tablas y gráficos”, relacionados a con la vida económica, social y política del país y del mundo, codificando la *situación mundo real*. Sin embargo en las “Exigencias para la evaluación del contenido en la unidad”, se plantea: “Identificar las funciones lineales que representan relaciones de proporcionalidad directa y analizar las propiedades que se cumplen (p.22), lo cual da lugar a promover la *propiedad funcional*.

Por otro lado, la ecuación toma su papel, dado que en la “Caracterización del contenido y de la concepción metodológica de la asignatura”, plantea que los estudiantes deben poder aplicar métodos y procedimientos diversos para resolver ecuaciones lineales, estableciendo en cada ocasión una fuerte conexión con sus conocimientos geométricos y sobre funciones (p.4). Pero para más, en la “Exigencias para la evaluación del contenido en la unidad”, uno de los puntos dice: Reconocer que las funciones lineales (como clase) se definen por una ecuación de la forma  $y = mx + n$ , con  $m, n$  números reales, que su gráfico es una recta (en el caso que su dominio de definición sea  $\mathbb{R}$ ) y saber el significado de los parámetro  $m$  y  $n$  (p.22).

Dado por hecho, que al referenciar lo anterior podemos identificar las conceptualizaciones, el *coeficiente paramétrico* y la *constante lineal*.

La *razón geométrica* y la *razón algebraica* se identificaron en la misma temática en el contenido representación gráfica (función lineal). Determinar la ecuación de una función lineal dada su representación gráfica o dos puntos que pertenecen al gráfico de la función, nos da más que evidencia que al educando se le debe enseñar con claridad en la razón de la expresión algebraica  $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$  y evocar al desplazamiento vertical y horizontal de una recta. Siendo estos aspectos de evaluación en la unidad, por tanto, son de gran importancia ser abordados en clases.

La proporcionalidad directa se identifica en un contenido previo en la temática 3.4 “La función lineal”, relaciona incidentemente en retomar las propiedades y características utilizando conceptos ya estudiados como el de proporción en la resolución de problemas. Tan así, que en las exigencias para la evaluación del contenido de la unidad (p. 23) plantea, identificar las funciones lineales que representan relaciones de proporcionalidad directa y analizar las propiedades que se cumplen, incidiendo relacionar la *propiedad funcional* con razones y constantes de proporcionalidad.

La función lineal y su representación gráfica nos conlleva a identificar la *razón geométrica* la cual está relacionada con la representación gráfica, permitiendo incidir que al abordar el tema en la razón del desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal en la gráfica de la recta, dado por consiguiente que la *constante lineal* también está involucrada en lo anterior al promover que la representación de la función lineal es una recta cumpliendo

con la propiedad única de las rectas. La *razón algebraica* también está presente al poder determinar la pendiente la expresión algebraica  $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$  mediante dos puntos que pertenecen a la recta, o identificando el coeficiente  $m$  o valor numérico dado la ecuación de la función lineal, esto conlleva relacionar el *coeficiente paramétrico*.

Lo esencial de este tema de función lineal según la ampliación de contenidos de la unidad plantea que:

.... el dominio del concepto de “función lineal”, sus propiedades y representación gráfica, para aplicar estos conocimientos en la interpretación de situaciones de la vida que se modelan mediante gráficos de funciones lineales definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}$  o funciones definidas por tramos de funciones lineales (p.22)

Esto nos permite el reconocimiento que las propiedades globales de las funciones lineales son un punto importante en el curso. Es la referencia principal de la caracterización del contenido y de la concepción metodológica de la asignatura en el grado. El analizar la *monotonía* de una función lineal nos permite mirar si está aumentando, disminuyendo o es constante, el valor absoluto de la pendiente indica la severidad de la inclinación de la línea como sugiere Nagle, C., y Moore-Russo (2013). Esto nos comprende relacionar el *indicador de comportamiento*, y la *situación mundo real* al plantear su relación con fenómenos naturales y el desarrollo económico y social con el concepto función lineal y las definidas por tramos de funciones lineales.

#### 4.2.2.1. Explícitas

El concepto de pendiente de una recta y su interpretación geométrica y; la fórmula para calcular la pendiente de una recta conocido dos puntos son contenidos explícitos que relacionan las conceptualizaciones *razón geométrica* y la *razón algebraica*.

La pendiente es un importante concepto geométrico, al evocar del concepto de pendiente la justificación no nos queda completa, dado que la amplitud de la unidad no nos da evidencia clara cómo abordan ese concepto. Sin embargo, algunos aspectos como “Exigencias para la evaluación del contenido en la unidad”, uno de los puntos exige “Analizar el crecimiento ¿monotonía? de una función lineal”, esto nos brinda el dato que el concepto de pendiente estaría muy relacionado a lo geométrico (p.23) Dado por hecho, que la unidad no nos brinda una ardua información, siendo este contenido expresado por el texto o por el intermediario (profesor), podemos plantear que por el curso la pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas, dicho de otra forma es la tangente del ángulo de inclinación que forma la recta con la parte positiva del eje X. El ángulo se forma en sentido contrario a las agujas del reloj. Este último se le puede afirmar, pero no es formal hasta el Nivel medio superior. Sin embargo, podemos incidir que la pendiente es la razón entre el desplazamiento vertical (arriba positivo, abajo negativo) y el horizontal (derecha-positivo, izquierda-negativo) permitiendo codificar la *razón geométrica*.

La interpretación geométrica de la pendiente de una recta en un sistema de representación rectangular (de un plano cartesiano), está definida como la diferencia en el eje Y dividido por la diferencia en el eje X para dos puntos distintos en una recta ( $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ),

otro procedimiento es a partir de las coordenadas de dos puntos de la recta o dos puntos dados siendo la base de la ecuación punto-punto que relaciona la *razón algebraica*.

#### 4.2.3. Conceptualizaciones de la pendiente en 9º grado.

**Tabla 11**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel Medio (9º grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
9	Implícita	Sistematización sobre <i>razones y proporciones</i> . p. 17	F	1
		<i>Segmentos proporcionales. Su interpretación geométrica.</i>	F	1
		Cálculo de la longitud de segmentos aplicando las <i>proporciones</i> . p. 17		
		<i>Razón de semejanza</i> . p. 17	F	1
		Sistematización sobre las <i>ecuaciones lineales y funciones lineales</i> . p. 20	F,D	2

Para el 9º grado las conceptualizaciones de la pendiente identificadas son la *propiedad funcional* y la *propiedad determinante* (ver **tabla 11**). Los contenidos se encuentran en la Unidad 2: “Geometría plana” y Unidad 3: “Sistemas de ecuaciones lineales”. *Propiedad funcional* se identificó en contenidos como “razones y proporciones”, “razón de semejanza”, “ecuación y función lineal”. Las razones y proporciones están presentes en la Unidad 2 “Geometría plana” siendo la segunda unidad del programa de 9º grado. Se continúa el estudio sistémico de la geometría plana con carácter propedéutico que se consolidó en 7º y 8º grado. Su identificación se relaciona ya que desde el 6º grado los educandos aprendieron los conceptos, razón y proporción, así como la propiedad fundamental de las proporciones, estos conocimientos sirven de base para el estudio del nuevo contenido que se inicia en noveno grado, “razón entre segmentos” y “segmentos proporcionales” (p.18)

La razón de semejanza está dentro de la unidad “Semejanza de triángulos” se relaciona siendo la que surge entre dos triángulos, la razón se define por los lados opuestos a los ángulos iguales, o sea, lados homólogos. Cada lado de estos triángulos semejantes decimos que son proporcionales, y estos tiene la misma razón, el mismo valor y esto es para estos dos triángulos, es constante, cada par de triángulos que cumplan con la propiedad de semejanza su razón de semejanza en constante.

La Unidad 3: “Sistemas de ecuaciones lineales” inicia con una sistematización sobre las ecuaciones lineales y funciones lineales abordadas en Unidad 3 “Variables, ecuaciones y funciones lineales” del curso de 8° grado. Específicamente la temática 3.1 “Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales” el contenido Unidad 3 “Variables, ecuaciones y funciones lineales” de 8° grado el contenido profundiza el trabajo con ecuaciones, al introducirse los procedimientos de resolución de ecuaciones lineales con dos variables y sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Este último se plantea en la unidad que es necesario que comprendan que estas ecuaciones que forman el sistema son representadas por dos rectas en el plano, por tanto, se puede realizar la representación gráfica de las rectas que determinan las ecuaciones que forman el sistema siendo posible determinar la solución. Esto relaciona con los tipos de sistemas y dentro de ello los casos que se pueden dar de solución y su representación gráfica. Tomando a consideración las gráficas de las ecuaciones se intersectan, entonces existe una solución que es válida para ambas ecuaciones, si las gráficas de las ecuaciones no se intersectan (por ejemplo, si son paralelas). Entonces no existen soluciones que sean válidas para ambas ecuaciones. Y un último caso, si las gráficas

de las ecuaciones son la misma, entonces existe un número infinito de soluciones que son válidas para ambas ecuaciones, por tanto, nos permite codificar la *propiedad determinante*.

#### 4.2.4. Conceptualizaciones de la pendiente en 10º grado.

**Tabla 12**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel Medio Superior (10º grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
10	Implícita	Resolución y formulación de problemas aritméticos intramatemáticos y extramatemáticos relacionados con el cálculo de <i>cantidades de magnitudes, el tanto por ciento y el tanto por mil</i> . p. 15	F,R	2
		Sistematización del concepto de <i>función lineal</i> como un ejemplo de <i>función numérica</i> , casos particulares ( <i>función constante, de proporcionalidad directa e idéntica</i> ), representación gráfica, dominio de definición, conjunto imagen, cero, signos y <i>monotonía</i> . p. 28	F, PC, L B	4
		Ejercicios y problemas sencillos de optimización; <i>representación gráfica e interpretación de datos relacionados con situaciones naturales, sociales, económicas y científicas</i> en los que se aplique el concepto de <i>función lineal</i> , modular o cuadrática. p.29	F, R	2
		Ejercicios de aplicación de la igualdad y la <i> semejanza de figuras</i> . p. 34	G, L	2

El curso de 10º se identificó seis conceptualizaciones de la pendiente, *propiedad funcional, coeficiente paramétrico, situación mundo real, constante lineal, indicador de comportamiento y razón geométrica*. La *propiedad funcional* se codificó con mención implícita en cada frase seleccionada en los contenidos de cálculo de cantidades de magnitudes, tanto por ciento o tanto por mil, ecuación y ecuación lineal, función constante y proporcionalidad directa.

La temática 1.2 específicamente denominada “Dominios numéricos” se identifica la conceptualización *propiedad funcional*, al considerar que en el 8º grado se introdujeron los

números reales como el conjunto numérico más amplio, por lo que en el 10° grado se deben “sistematizar los dominios numéricos a partir del análisis de las propiedades que los caracterizan, las limitaciones y las relaciones conjuntistas entre ellos”.(p.17).Por tanto, lo esencial es que resuelvan y formulen problemas que requieran dentro de otros del tanto por ciento y el tanto por mil en situaciones relacionadas en resolución de problemas intr-extra matemáticos siendo un objetivo a evaluar en la unidad, esto conlleva a codificar la conceptualización *situación mundo real*.

La “función lineal” en la temática 3.1 de la Unidad 3 “Ecuaciones e inecuaciones lineales, modulares y cuadráticas”, se evidencian las conceptualizaciones *propiedad funcional, coeficiente paramétrico, constante lineal e indicador de comportamiento*.

La sistematización del concepto de función ya siendo contenido evidenciado en el 8° grado nos permite relacionar la *propiedad funcional* y el *coeficiente paramétrico* al plantear el concepto de función como un ejemplo de función numérica. Se evidencia al incidir en “*m*” como coeficiente o valor numérico en  $y=mx+b$  o  $y_2- y_1m (x_2- x_1)$ . Pero al incidir en los casos particulares (función constante, de proporcionalidad directa e idéntica) la *constante lineal* se involucra en los casos particulares, ejemplo, la función constante es una *función lineal* del tipo  $f(x)= k$ , siendo  $k$  un número real cualquiera, cortan el eje vertical en el valor de la *constante* y son paralelas al eje horizontal (y por tanto no lo cortan). La función de proporcionalidad directa o *función lineal* relaciona *dos magnitudes* directamente proporcionales tales que su cociente es *constante*, dicho cociente recibe el nombre de constante de proporcionalidad, es creciente si  $m$  es positiva, decreciente si  $m$  es negativa y tanto más cerca de la vertical cuanto mayor sea el valor absoluto de  $m$ . La función idéntica

es del tipo  $f(x)=x$ , siendo de primer grado pues son en línea recta, su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante por tanto la recta forma con la parte superior al eje de las abscisas un ángulo de  $45^\circ$  y tiene pendiente  $m= 1$ . Todo lo anterior nos relaciona con la representación gráfica así sea de la función lineal y sus casos particulares, dado que al incidir en la monotonía también hace énfasis en la conceptualización *indicador de comportamiento* al abordar la pendiente gráficamente. No obstante, en esta unidad temática se “resuelven y se formulan problemas que puedan ser modelados mediante una función lineal y diferenciar, por la importancia que tienen, dos casos particulares de funciones lineales: la función idéntica y la función constante” (p.30).

La igualdad y semejanza de figuras planas es la temática presente en la unidad 4 “Trigonometría y sus aplicaciones” la conceptualización *constante lineal y razón geométrica*, se relaciona ya que el programa plantea que la temática se debe sistematizar a partir de la resolución y formulación de problemas, los conocimientos anteriores y previos que son necesarios para aplicar la igualdad y la semejanza de figuras planas (en particular de triángulos) en el cálculo geométrico y trigonométrico. Por tanto, la semejanza entre dos triángulos se plantea cuando estos tiene sus ángulos y lados homólogos proporcionales, donde la razón entre los lados homólogos de los triángulos de le llama razón de semejanza. Según Rivera (2019), la validación de la razón constante permite reconocer la constancia de la razón del aumento (o disminución) sobre el avance como sugiere Nagle y Moore-Russo (2013) y Dolores y Gerardo (2020), lo constante de la razón de cambio es una característica esencial de la linealidad y de los modelos lineales.

#### 4.2.5. Conceptualizaciones de la pendiente en 11° grado.

En el 11° grado escolar se identificaron nueve conceptualizaciones de la pendiente, *razón geométrica, razón algebraica, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, concepción trigonométrica, situación mundo real, propiedad determinante, constante lineal e indicador de comportamiento.*

**Tabla 13**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel Medio Superior (11° grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
11	Implícitas	<i>Resolución y formulación de problemas intramatemáticos y relacionados con situaciones de la vida cotidiana, de otras ciencias, de la economía y de la sociedad en general, en los que se apliquen las funciones lineales cuadráticas, modulares y potenciales de exponente entero, sus propiedades (cero, signo, monotonía, valores funcionales extremos, asíntotas, simetría del gráfico y paridad) y sus gráficos. p.14</i>	F,PC,R,B	4
		Definición de función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, a partir de las <i>funciones lineales</i> , cuadráticas, modulares y potenciales de exponente entero. p.14 - 15	F	1
	Explícitas	<i>pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación, condiciones de paralelismo o perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes p. 26</i>	A,T,D	3
		Ecuación de un lugar geométrico, <i>ecuación general de la recta como lugar geométrico (casos particulares), pendiente, representación gráfica, punto de intersección de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. p. 26</i>	G, A, PC, T, D, L	6

La temática 1.1 “Funciones numéricas” se plantea en una sistematización de las funciones numéricas estudiadas hasta este curso, dentro de ellas están las funciones lineales. Esta sistematización se realiza a partir de la resolución y formulación de problemas intramatemáticos y relacionados con la vida cotidiana, relacionando la *propiedad funcional* y la *situación mundo real*. “Analizar sus propiedades globales (monotonía) e interpretarlas en diferentes formas de representación y representarlas gráficamente” (p.16). Esto nos afirma

la relación al identificar el *indicador de comportamiento* al analizar la la “monotonía”, nos permite mirar cómo es la pendiente, es decir, cuando “ $m$ ” es positiva, negativa o cero, del mismo modo describir el comportamiento de una función y así determinar si es creciente, decreciente o constante,

El *coeficiente paramétrico* se evidencia al relacionar la expresión  $y=mx+n$  que los estudiantes deben de tener claro de grados anteriores, siendo un objetivos que se deben evaluar en la unidad “representar gráficamente una función en diferentes dominios de definición, de la cual se conoce su *ecuación* y las propiedades, y viceversa” (p.17).

Sin embargo, luego de abarcar los contenidos anteriores, dentro de la misma temática definir a la función inyectiva y su interpretación geométrica, siendo necesario analizar cuáles de las funciones estudiadas son inyectivas y cómo se puede lograr que una función cumpla esta propiedad a partir de restringir su dominio. Luego proponen definir la función sobreyectiva y posteriormente función biyectiva todas las anteriores a partir de las “funciones lineales” como base (tabla 14), por tanto la *propiedad funcional* se codifica en este contenido.

Se identificaron menciones explícitas específicamente en la temática 4.2 “Geometría analítica de la recta en el plano”, en la temática “Fórmulas y relaciones básicas”, los contenidos relacionados con “pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación”, y “condiciones de paralelismo o perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes”

La *razón algebraica* y la *concepción trigonométrica* se evidencian al asociar el calcular la pendiente efectuamos el cociente entre la diferencia de las ordenadas ( $y_2-y_1$ ) y la

diferencia de las abscisas  $(x_2-x_1)$  de los dos puntos en el plano cartesiano. Por tanto, refiere a la expresión algebraica  $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$  relacionada con la *razón algebraica* al hallar la pendiente dado dos puntos. La *concepción trigonométrica* relaciona la pendiente o coeficiente angular de una recta, es la tangente del ángulo de inclinación de la recta ( $m = \tan \alpha$ ), es claro incidir el ángulo de inclinación esta intrínsecamente ligado a la pendiente  $m$ . De aquí se dice que la pendiente de una recta equivale a la tangente de su ángulo de inclinación. Entonces dado el ángulo de inclinación podemos calcular la pendiente y viceversa, dada la pendiente se puede calcular el ángulo de inclinación.

En la temática “Ecuación cartesiana de la recta” presente en la misma Unidad 4: “Geometría analítica de la recta en el plano” se plantea que lo esencial es reconocer que lugar geométrico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$  ( $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros reales que  $A \neq 0$  o  $B \neq 0$ ) es una recta, permitiendo codificar la *constante lineal*. Se codifican explícitamente las frases que hacen relación con la temática, “ecuación de un lugar geométrico”, “ecuación general de la recta como lugar geométrico (casos particulares)”, “pendiente” y “representación gráfica”. Para iniciar con las frases identificadas podemos decir que lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que satisfacen ciertas condiciones dadas, y solamente esos puntos se llaman el lugar geométrico de esas condiciones. La idea central de la geometría analítica está basada en el concepto de lugar geométrico, en el sentido de que si conocemos cualquier punto que pertenece al lugar geométrico dado, entonces las condiciones nos ayudan a encontrar la ecuación del lugar geométrico. Por tanto, a la ecuación de la recta como lugar geométrico lo relacionamos con el conjunto de puntos, y solamente de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación, se llama gráfica de la ecuación o bien, lugar geométrico. La forma

general de la ecuación de la recta es la que considera todos los casos de las rectas; horizontales, verticales e inclinadas permitiendo codificar el *coeficiente paramétrico*.

“Representar puntos y rectas en un sistema de coordenadas rectangulares y aplicar los métodos y procedimientos de la geometría analítica en la formulación”, (p. 27), nos evoca a relacionar la pendiente y su representación gráfica a un amplio contexto por el curso. La pendiente de una recta no vertical es una medida de la inclinación de la recta dada como la razón entre desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal y denotado por la letra  $m$ , la elevación correspondería al cambio en  $Y$  el recorrido al cambio en  $X$ , ( $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ) Si la recta está ubicada en el plano cartesiano es posible determinar la pendiente de la recta a través de cualesquiera dos puntos distintos de la recta, relaciona a la *razón geométrica razón algebraica, concepción trigonométrica y la constante lineal*.

La intersección de dos rectas es el punto donde éstas se cortan, se calcula igualando sus ecuaciones. Al resolver la ecuación resultante, se obtienen las coordenadas del punto de corte; pero las rectas paralelas, o sea las que tienen la misma pendiente no se cortan, no hay intersección. Sin embargo, al mencionar la distancia de un punto a una recta en conjunto con el tema anterior relaciona la *propiedad determinante*, en este último al incidir en que para encontrar la distancia de un punto  $(x_1, y_2)$  a una recta  $Ax + By + C = 0$ , primero se encuentra el punto de intersección de la recta con su perpendicular y después se aplica la distancia entre dos puntos, dado que su pendiente es  $-\frac{A}{B}$  es una recta perpendicular.

#### 4.2.6. Conceptualizaciones de la pendiente en 12° grado.

**Tabla 14**

Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en el Nivel medio superior (12° grado)

Grado	Mención	Contenido	Código	Frecuencia
12	Implícitas	Relaciones de posición entre <i>puntos y rectas</i> y <i>entre rectas, distancia de un punto a una recta. Igualdad y semejanza de figuras planas</i> p.21	G,F D, L	4
		Resolución y formulación de problemas donde se combinen las diferentes operaciones, el <i>tanto por ciento y tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud</i> . p. 23	F	1
		Determinación de los valores reales de incógnitas y <i>parámetros en ecuaciones lineales, cuadráticas, fraccionarias, con radicales, exponenciales y logarítmicas</i> p. 25	PC, F	2
		Determinación de propiedades globales de las <i>funciones numéricas</i> : dominio de definición, valor máximo, valor mínimo, imagen, ceros, <i>monotonía</i> , simetría, periodicidad, paridad, signo, inyectividad, sobreyectividad y <i>biyectividad de funciones lineales, a partir de su ecuación o su gráfico</i> . p. 25	F,B,PC,L	4
		<i>Ecuación general de la recta, casos particulares. Punto de intersección de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Aplicaciones geométricas</i> . p. 27	PC,D	2
	Explícitas	<i>Pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación</i> . p. 27	A,L,T	3
		Condiciones de <i>paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes</i> .p.27	D	1

En el último curso de este nivel educativo el 12° grado hace referencia a conceptualizaciones de la pendiente con mención implícita y explícita, según las frases identificadas en unidades temáticas como 3.1 “Geometría plana”, 4.1 “Conjuntos y dominios numéricos”, 4.3 “Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones” (Ecuaciones e inecuaciones), 4.4 “Funciones”, 4.5 “Geometría y trigonometría” (Geometría plana y Geometría analítica de la recta).

Las relaciones de posición entre rectas, puntos y rectas la temática plantea que la idea esencial es sistematizar los recursos necesarios y precedentes para el estudio de la geometría sintética del espacio. La profundización de los conceptos, relaciones y procedimientos de la

geometría plana en el 12° grado, “radica en la comprensión de la demostración y formulación de las proposiciones geométricas (axiomas, teoremas, recíprocos y contra recíprocos), sobre todo, en la determinación de las condiciones necesaria y suficientes en una proposición” (p.22). El repaso y la sistematización en esta unidad temática de la “Geometría plana” son un punto base para la culminación de estudios y prósperos en el nivel superior.

Por el grado sabemos el rigor y la amplitud de temas provenientes de cursos anteriores. Dado por hecho, que al abordar la relación entre punto y recta y entre rectas, se tiene que es evidenciado en los niveles educativos inferiores.

Las posiciones relativas entre rectas pueden ser posible en diferentes situaciones, al ser paralelas (ningún punto es común), las secantes (1 punto en común), o las coincidentes (todos los puntos en común). Este contenido cabe evocar en sistemas de ecuaciones lineales o en las múltiples maneras de hacerlos dependiente de la ecuación de la recta, dado que son temas ya abordados y en este nivel educativo se puede ampliar y abordar estos temas en conjunto relacionando la *propiedad determinante*.

También ocurre con la sistematización de la distancia de un punto a una recta, siendo un tema fresco del 11° grado, a consecuencia, se codifica la *propiedad determinante*. Así con la igualdad y semejanza de figuras planas, según el programa, “la idea esencial no es realizar demostraciones aplicando los criterios correspondientes, sino formular y aplicar las relaciones entre lados, entre ángulos, entre lados y ángulos, entre los perímetros y las áreas de dos figuras iguales o semejantes” (p.22). Esto nos permite codificar *la razón geométrica*, *propiedad funcional* y *la constante lineal* en este intermedio de contenido asumiendo que se

han evidenciado los tres momentos es que se identifican contenidos en el mismo contexto (6°, 9° y 12° grados), se toma como deducción que las conceptualizaciones que se relacionen con la igualdad y semejanza se junten de forma general siendo una unidad de sistematización.

La unidad 4 “Sistematización” se plantea “Los contenidos a desarrollar en esta unidad de sistematización deberán tener un enfoque integrador y generalizador, que posibilite la consolidación y sistematización de todos los contenidos a tratar”, (p.28), dentro de esta amplitud se encuentra el tanto por ciento, tanto por mil, y el trabajo con magnitudes, que se identifica desde el Nivel primario, Nivel medio y el presente siendo de gran importancia y se evidencian en distintos contextos que promueven la formación de la conceptualización *propiedad funcional*. En consecuencia la determinación de los valores reales de incógnitas y parámetros en ecuaciones lineales también se identifica con la *propiedad funcional* en conjunto con el *coeficiente paramétrico* al incidir en la determinación de parámetros en ecuaciones lineales siendo un tema abordado en niveles anteriores.

Al identificar en la 4.4 “Funciones” a la relación con las propiedades globales como la “monotonía” de la función lo cual relaciona el *indicador de comportamiento*. Esta propiedad estudia el crecimiento y decrecimiento de la función, permitiendo identificar el comportamiento de la funciones y codificar la *propiedad funcional* al abordar funciones. A partir de relacionar el contenido de las propiedades globales de las funciones (función lineal) su ecuación o su gráfico permite codificar el *coeficiente paramétrico* y la *constante lineal* al incidir en la ecuación de la función (valor numérico) y la linealidad de la recta en un plano cartesiano.

En la geometría analítica de la recta tema dentro de la temática 4.5 “Geometría y trigonometría” se identificó el *coeficiente paramétrico* y la *propiedad determinante*, al relacionar la ecuación general de la recta, casos particulares y el punto de intersección de dos rectas y la distancia de un punto a una recta, aplicaciones geométricas. Dado por hecho que estos contenidos son también parte de la unidad de sistematización e incluso el programa plantea:

El profesor debe tener presente la condición de que está impartiendo contenidos, que son conocidos por los estudiantes, y su función principal, es la de reactivar aquellos elementos del conocimiento necesarios para que ellos puedan enfrentarse a las situaciones que se les vayan presentando. (p.28)

Cabe destacar que se identificaron menciones explícitas en la temática 4.5 “Geometría y trigonometría” en el tema “Geometría analítica de la recta”. Se evidencia parte del mismo contenido del curso de 11° al referirse a las frases “pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación”. Estos contenidos se relacionan muy claramente a las conceptualizaciones *razón algebraica* relacionada con la fórmula para calcular la pendiente dada dos puntos, cuando se trabaja se incide en explicar que necesitamos razón de cambio entre las ordenadas y las abscisas, o sea el cociente que relacione la variación en  $y$  es  $y_2 - y_1$  y similarmente el cambio en  $x$  es  $x_2 - x_1$ , entre dos puntos de una recta. En una recta, el valor de esta relación no cambia sino que se mantiene constante, relaciona la conceptualización *constante lineal*. Es por ello que se dice que una de las características del modelo lineal es su razón de cambio. La *concepción trigonométrica* se evidencia al referirse al ángulo de inclinación. La *propiedad determinante* relaciona la frase “condiciones de

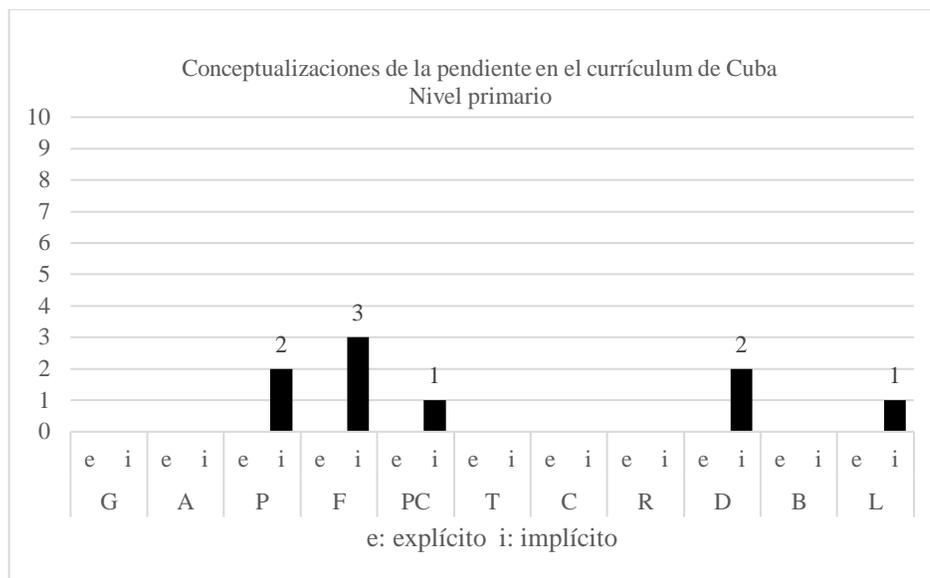
paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes, la cual involucra paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

### **4.3. Conceptualizaciones de la pendiente de cada Nivel Educativo en Cuba**

Un gráfico de barras es una forma de resumir un conjunto de datos por categorías. Muestra los datos usando varias barras de la misma anchura, cada una de las cuales representa una categoría concreta. Son una representación visual de los datos utilizados rectángulos horizontales o verticales, cuyas longitudinales son proporcionales a las cantidades que representan. Los gráficos de barra son de suma importancia, ya que dan la facilidad de comprender estudios complejos, ayudan a la necesidad de trabajo ordenadamente y mantener un esquema de los que se quiere informar.

Los textos, letras y números, no son la única manera de comunicar información, para ver mejor las cosas hace falta la utilización de figuras, siempre necesitamos una ayuda visual para poder manejar fácilmente la información; por ello en el trabajo usamos los gráficos. Dado por hecho, la utilización de la representación de datos en un gráfico de barra para apoyar el análisis de datos identificados.

### 4.3.1. Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel primario



**Gráfica 2.** Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel Primario

La gráfica 2 muestra evidencia de las conceptualizaciones identificadas y las frecuencias en el **Nivel Primario**. Se identifican cinco conceptualizaciones de la pendiente con mención implícita, *propiedad física*, *propiedad funcional*, *coeficiente paramétrico*, *propiedad determinante* y *constante lineal*. Para la comprensión más detallada de la gráfica 2, se puede notar tres agrupados. El primero relaciona la *propiedad física*, *propiedad funcional* y *propiedad determinante*, como las de mayor predominio en ese nivel educativo. Dado por hecho, que en este nivel no se menciona la pendiente, pero si incide en relacionar algunas representaciones que posteriormente contribuirán a evidenciar el concepto. Se inicia desde la introducción del concepto de movimiento en especial la “traslación en el plano”, a partir de ahí se evidencia al identificar en las frases relación con el paralelismo y perpendicularidad entre rectas al plantear que las rectas paralelas tienen la misma dirección y las que se cortan

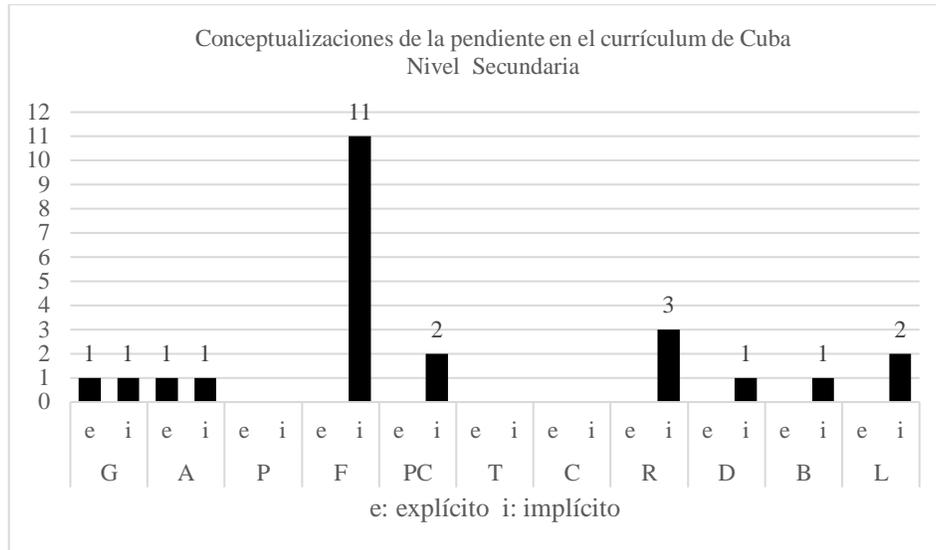
distinta dirección. Esto nos conlleva a incidir que para referirse a alguna de estas, se puede utilizar descripciones de una recta utilizando expresiones que incidan en ejercicios propuestos en la clase que relaciona la *propiedad física*. Pero cabe destacar que posteriormente el contenido que está incluido en la misma temática posterior relaciona el “vector”, dado por hecho que es necesario conocer la dirección y sentido.

Al abordar los contenidos de “razón y proporción”, estos constituyen el punto de partida y el centro de las definiciones que relacionan el tema de magnitudes directamente proporcionales con la *propiedad funcional*. Del tema se desprenden el “factor de proporcionalidad”, este conlleva a relacionar el *coeficiente paramétrico*. La representación gráfica abarca el *constante lineal coeficiente paramétrico, propiedad determinante y propiedad física* al incidir que la representación de la proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen, mediante su representación podemos aludir en tomar un punto que pertenezca a la recta y determinar la constante de proporcionalidad (pendiente) o mediante el valor numérico que se evidencia (constante). Se incide en utilizar expresiones de descripción en ejemplos ilustrativos codificando la *propiedad física*. El tanto por ciento también está incluido en los contenidos de “razón y proporciones”, siendo las proporciones tienen que ver con la comparación de cantidades, por tanto, una proporción es la igualdad o comparación entre dos razones equivalentes y el tanto por ciento también se escriben para comparar una cantidad con 100 lo cual nos permite codificar la propiedad funcional lo cual implican razones.

Las conceptualizaciones que no evidenciaron ningún vínculo, ni frases o palabras claves relacionadas al concepto pendiente fueron agrupadas en el grupo tres, por orden: *razón*

*geométrica, razón algebraica, concepción trigonométrica, concepción en cálculo, situación mundo real e indicador de comportamiento.*

### 4.3.2. Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel medio (7°, 8° y 9° grados)



**Gráfica 3.** Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel medio

En este **Nivel Educativo** se identificaron ocho conceptualizaciones de la pendiente y el gráfico muestra las frecuencias referentes cada una. La *propiedad funcional* tuvo un énfasis principal y se agrupa como la predominante de este nivel educativo. El tanto por ciento, la resolución de ecuaciones lineales, la proporcionalidad directa, se toma e inicia sistematizando contenidos estudiados con anterioridad. Dado que en este nivel se evidencia por primera vez el concepto pendiente, la “función lineal” es la prioridad en el 8° grado. Se sistematizan las razones y proporciones, se inicia con el nuevo contenido en 9° grado la razón entre segmentos y segmentos proporcionales; y dentro de la definición de triángulos semejantes la razón de semejanza.

La *situación mundo real* se evidencia en el grupo de las relacionadas con la predominante al abordar problemas relacionados con la vida económica, política y social del

país, de su hogar y su escuela, con la vida económica, social y política del país y del mundo o sobre fenómenos naturales y el desarrollo económico y social en temas como el tanto por ciento, la resolución de ecuaciones lineales y funciones lineales. El *coeficiente paramétrico* se identifica al relacionar el valor numérico de la pendiente con el número que acompaña la  $x$  o como el parámetro en la ecuación  $y = mx+n$ , en la determinación de solución de ecuaciones y en la representación gráfica de funciones lineales.

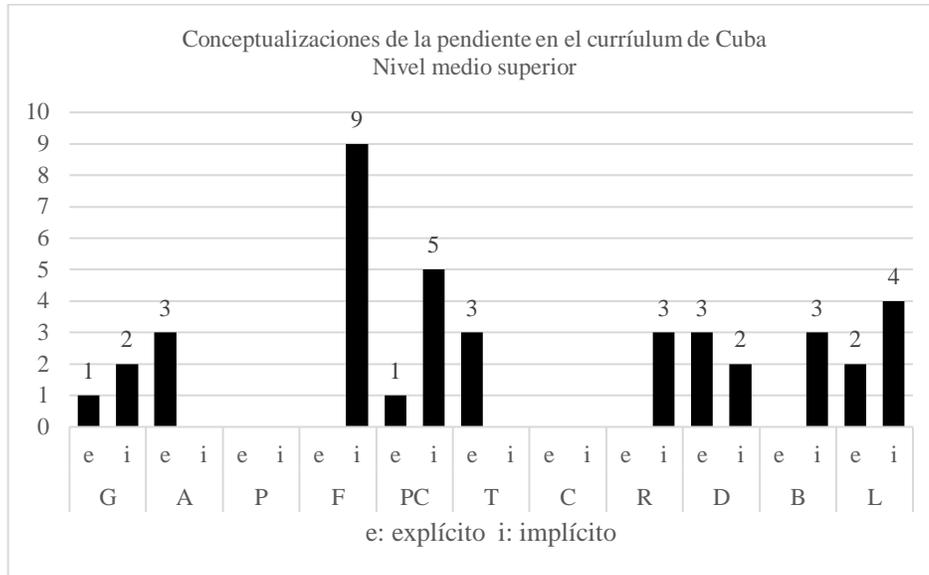
El tercer grupo lo integran las conceptualizaciones de pendiente con frecuencia uno, siendo incidentes y relacionadas con los temas de la conceptualización predominante., por orden la *razón geométrica*, la *razón algebraica*, *propiedad determinante*, *indicador de comportamiento* y *constante lineal*. La interpretación geométrica de la función lineal nos incide como una razón constante en la recta, situación que se vincula directamente con la conceptualización *constante lineal*. Pero la *razón algebraica* se relaciona con lo anterior al señalar que la pendiente es  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  a partir de dos puntos por donde pasa la recta.

Las explícitas en este nivel son muy evidentes, la *razón geométrica* y la *razón algebraica*. La primera se identifica al abordar el concepto de pendiente de una recta y su interpretación geométrica, puede considerarse al incidir en que la interpreten a través del “desplazamiento vertical” respecto del “desplazamiento horizontal. La segunda al abordar la fórmula para calcular la pendiente conocido dos puntos de la recta.

Con nula evidencia son tres las conceptualizaciones de la pendiente la *propiedad física*, *concepción trigonométrica* y la *concepción en cálculo*.

#### 4.4. Conceptualizaciones de la pendiente en el Nivel medio Superior (10°, 11° y 12°

grados)



**Gráfica 4.** Conceptualizaciones de la pendiente en el preuniversitario

La gráfica 4 muestra las frecuencias de las conceptualizaciones de la pendiente identificadas en **Nivel medio superior** (llamado también bachillerato o vocacional). En ella, se puede evidenciar nueve conceptualizaciones de pendiente que inciden en frases o palabras claves con relación al concepto pendiente, lo cual hemos ubicado en cuatro grupos. El primero agrupa las de mayor predominio, incluye las conceptualizaciones por orden: *propiedad funcional*, *coeficiente paramétrico* y la *constante lineal*. La *propiedad funcional* está directamente relacionada con temas de tanto por ciento, ecuación lineal y función lineal siendo este último como contexto principal del nivel educativo. El *coeficiente paramétrico* también está de la mano de la predominante, se identifica a partir de la resolución y distinción de parámetros e incógnitas de ecuaciones lineales, función constante, función de

proporcionalidad directa e idéntica como una sistematización del concepto de función lineal, al incidir en gráficos de función lineal y en la ecuación de la recta como lugar geométrico y sus caso particulares. La *constante lineal* parte de la razón de semejanza dada en el 9º curso y se planta en el 10º curso partiendo desde ejercicios de aplicación de figuras.

La *razón geométrica, situación mundo real, propiedad determinante* y el *indicador de comportamiento* son las conceptualizaciones desprendidas de las predominantes e integran el segundo grupo. La primera se identifica desde 10º grado en conjunto con la constante lineal al abordar el tema de igualdad y semejanza de figuras y sus aplicaciones. La *propiedad determinante* se identifica a partir del 11º curso siendo lo fundamental identificar estas curvas como lugares geométricos, pero al incidir en la tangente aluden relaciones entre puntos y perpendiculares, y el ángulo de inclinación que hace incidir la *razón geométrica* siendo la única integrante del grupo tres, ya que solo es identificada como la de menor frecuencia. La posición entre puntos y rectas y entre rectas y las relaciones entre ellas conllevan a resolver problemas que involucran paralelismo y perpendicularidad.

La sistematización de la función lineal como un ejemplo de función numérica, la monotonía en una propiedad global de las funciones lineales que incide en el *indicador de comportamiento* utilizada para describir funciones que crecen, decrecen o se mantienen constantes o el signo de la pendiente para describir el comportamiento de una recta a partir de su gráfica. La resolución de problemas intra y extra matemáticos, las relaciones con situaciones de la vida cotidiana, de otras ciencias, de la economía y de la sociedad en general se social con la *situación mundo real*. Siendo así se identifica en el 10º siendo un tema a evaluar al interpretar el significado del tanto por ciento y el tanto por mil; y siendo también

de partida de situaciones en las que puedan sistematizar el concepto de función. En 11° curso se evidencia en la resolución y formulación en los que se apliquen las funciones lineales.

Las menciones explícitas son las integradas del grupo cuatro, se emergen desde el 8° curso, pero se retoma en este nivel es el 11° grado. Se identifica desde forma algebraica y la relación con el ángulo de inclinación, y condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función a sus pendientes, lo que conlleva a identificar explícitamente las conceptualizaciones *razón algebraica*, *concepción trigonométrica* y *propiedad determinante*. Pero el mismo contexto de evidencia en el 12° curso los cual coinciden las conceptualizaciones de la pendiente y solo se integra la *constante lineal* dado que la unidad en el grado plantea:

Los estudiantes no activan los contenidos matemáticos de la misma manera que lo hicieron en los grados anteriores, lo esencial es que sistematizan los conocimientos a partir de las relaciones interconceptuales; de las propiedades generales y de las de cada objetos en particular; de la aplicación de los procedimientos que requiere un proceso en particular y la posibilidad de generalización en otros contenidos matemáticos y de la resolución y formulación de problemas intramatemáticos y extramatemáticos. (p.28).

Por tanto, al relacionar los contenidos podemos plantear que dada la gráfica de una recta puede conllevar a tomar cualquier pareja de puntos y la pendiente será la misma o funciones que varían con razón constante sus graficas son rectas y no curvas.

La ecuación cartesiana de la recta integra contenidos como ecuación de lugar geométrico, ecuación general como lugar geométrico (casos particulares), la pendiente, representación gráfica, punto de intersección de dos rectas y la distancia de un punto a una recta. Al evidenciar la pendiente conlleva a relacionar las conceptualizaciones incidentes conjuntas a las frases que le hacen presente el concepto. Se identifica primero en temas que involucran la ecuación de la recta donde la pendiente se incide como sistematización de contenido, siendo la base principal de la unidad temática es reconocer el lugar geométrico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$  ( $A$ ,  $B$  y  $C$ ) es una recta. Por tanto, lo planteado en el programa nos ayuda a identificar conceptualizaciones que se inciden que puedan ser trabajadas en los estudiantes; representar puntos y rectas en un sistema de coordenadas rectangulares y aplicar los métodos y procedimientos de la geometría analítica en la formulación, y verificación de propiedades de la geometría sintética, son aspectos que nos permiten inferir en la *razón geométrica*, *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico*, *concepción trigonométrica*, *propiedad determinante* y *constante lineal*.

Las integradas al grupo cinco son las llamadas nulas, o sea la que no presentan ninguna frase o palabra clave; o vínculo con algún contenido con ningún contenido que relacione al concepto pendiente.

## Capítulo V

---

### 5. Discusión y conclusiones

El presente capítulo está dedicado a la discusión del análisis de los datos y las conclusiones a las cuales se han llegado en la investigación. El análisis de los programas del currículum de matemáticas desde 5° y 12° grado, permitió identificar conceptualizaciones que promueven y predominan en el currículum de matemáticas de Cuba. Esto permite mirar cómo se comporta el concepto “pendiente” en los tres niveles educativos de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, en la cual se identifica que se desarrolla en tres ciclos (ver Figura 4). Para comprender la secuencia del concepto de pendiente se analizó cada curso escolar integrado a sus respectivos niveles educativos; y por intermedios se ubican como puentes implícitos que se identifican como temas previos de base relacionados al concepto de pendiente. Estos ciclos inciden al analizar un currículum oficial se estará repitiendo cada año hasta que se restructure temas, contenidos o algún cambio del currículum de matemáticas por Ministerio de Educación en Cuba (MINED)<sup>4</sup>.

El “**Primer ciclo**” ocurre en los grados 5° y 6° (**Nivel Primaria**), se ha concebido denominar como “**Ciclo 1: Base sistemática**”. Considerada “*repetitiva o sistematizada*”, ya

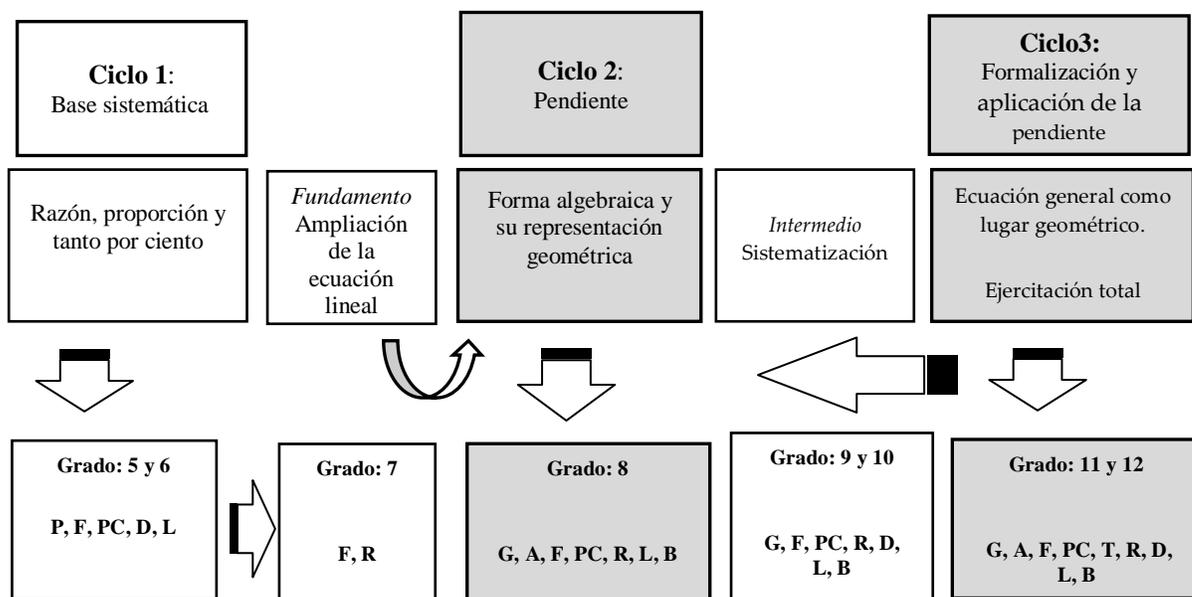
---

<sup>4</sup> El Ministerio de Educación de Cuba (MINED) es el organismo encargado de organizar y dirigir el sistema educativo de la República de Cuba.

que los temas “razón, proporción y tanto por ciento” en contenidos combinados están presentes entre las tres primeras unidades de cada curso escolar exceptuando 11° curso.

Como se estructuran los contenidos en este nivel educativo el currículum no amplía cada temática, solo lo explicita organizado por los temas generales del curso.

Por orden, los precedentes de la pendiente están basados en los conceptos de razón y proporción, siendo el punto de partida y el centro de las definiciones que se hacen de proporcionalidad directa e inversa, así como procedimientos fundamentales de cálculo. Sin embargo, el programa de 6° grado (p.2) plantea que tratamiento del tanto por ciento concluye con el estudio integrado de los conceptos de razón, entre otras, poniéndose de manifiesto las relaciones internas de los diferentes contenidos matemáticos estudiados en el grado, así como la posibilidad de encontrar nuevos procedimientos para interpretar y resolver situaciones prácticas, especialmente la de poder utilizar las proporciones en la solución de los problemas de tanto por ciento. A consecuencia de la inclusión asumimos que la conceptualización *propiedad funcional* se relaciona implícitamente a los conceptos antes mencionados en sus diferentes contextos y forman parte de su frecuencia en el currículum de matemáticas, presentes dentro de las tres primeras unidades excepto el curso de 11° y en la cuarta unidad de sistematización en el 12° grado.



**Figura 4.** Secuencia de la pendiente a lo largo del currículum de Matemáticas de Cuba.

El 7º grado se nombra “*Fundamento*” al evidenciar presencia implícita del concepto de pendiente. Este puente relaciona a la ecuación lineal, razón principal e incidente de la función lineal del 8º grado. En consecuencia, la caracterización del contenido plantea “que los estudiantes deben poder aplicar métodos y procedimientos diversos para resolver ecuaciones lineales, estableciendo en cada ocasión una fuerte conexión con sus conocimientos geométricos” (p.5). Por consiguiente, el programa de 7º grado plantea:

La incidencia de determinar incógnitas y parámetros en la resolución y formulación de problemas extra matemáticos relacionados a fenómenos y procesos de la vida cotidiana que conducen a ecuaciones lineales nos permite apoyar que esta línea directriz brinda enormes posibilidades para que los alumnos conecten sus conocimientos y habilidades matemáticas con temas relevantes. (p.5)

Por tanto, la *propiedad funcional* y la *situación mundo real* se son los fundamentos principales que conllevar a incidir que la visualización implícita del concepto pendiente se basa en la interpretación geométrica en diferentes esferas, con el fin de que los estudiantes deben plantearse preguntas y hacer valoraciones sobre las inferencias que se pueden extraer o que se pueden corroborar (Programa de 7º, p.6).

“**Segundo ciclo**” se torna de color gris y la integra el 8º grado, denominado “**Pendiente**”. Lo involucra la temática “función lineal” como la principal fuente de análisis en este curso. La “función lineal” en contenido tiene un conexo explícito con la "pendiente" en este ciclo, siendo identificada por primera la presencia del concepto.

El concepto en sus dos poses se evidencia mediante la interpretación geométrica o representación gráfica. Sin embargo, no referido en la unidad temática pero sí en las exigencias de evaluación de la unidad en las Funciones lineales se “plantea que las funciones lineales se debe reconocer como las que se definen por la ecuación  $y = mx + n$  con  $m, n$  números reales, el significado de los parámetros  $m$  y  $n$  números reales, que su gráfico es una recta” (Programa 8º grado, p.23). En efecto, el concepto explícito se evidencia en su interpretación y representación geométrica de la pendiente de una recta y conocidos dos puntos, de ahí por la forma que se evidencian el contenido está relacionado con el eje cartesiano, a fin de incidir que su enfoque se basa en la representación gráfica del concepto.

El “*Intermedio*” lo integran los cursos de 9º y 10º, la sistematización es el inicio de la evidencia implícita del concepto pendiente. La conceptualización *propiedad funcional* relacionada con temas como: razón y proporción, segmentos proporcionales, razón de

semejanza, ecuación lineal y función lineal, son sistematizados e identificados en cursos anteriores. Lo cual refleja una toma de contenidos precedentes en cada grado en ambos cursos con el fin de ser ampliados y servir de inicio para nuevos contenidos. Por consiguiente, se identificaron otras conceptualizaciones desprendidas han sido identificadas y toman constancia en ambos cursos, entre ellas están por orden la *razón geométrica*, *coeficiente paramétrico*, *situación mundo real*, *propiedad determinante*, *constante lineal* e *indicador de comportamiento*.

El **ciclo tres** y último denominado “**Ampliación de la pendiente**”, lo conforman los cursos 11° y 12°. Se torna de color oscuro siendo por segunda vez evidencia de contenidos referentes de la pendiente de manera explícita en el curso de 11° y de sistematización en el 12°. A pesar de que algunas referencias a las conceptualizaciones de pendiente son explícitas, la presencia del concepto se redunda, a partir de la determinación de la pendiente de la recta por dos puntos, la relación con el ángulo de inclinación y condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función de sus pendientes. Pero lo esencial, es reconocer que lugar geométrico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$  ( $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros reales tales que  $A \neq 0$  o  $B \neq 0$ ) es una recta. (Programa 11° grado, p.27). Por lo cual, se asume lo que plantea el Programa 11° grado, representar puntos y rectas en un sistema de coordenadas rectangulares y aplicar los métodos y procedimientos de la geometría analítica en la formulación, y verificación de propiedades de la geometría sintética” (p.27). Dicho así, en los objetivos a evaluar en la unidad, se plantea el cálculo de la pendiente y la aplicación del método analítico a la geometría en la demostración y fundamentación de propiedades y proposiciones de la geometría sintética. Visto que el enfoque principal se evidencia en la

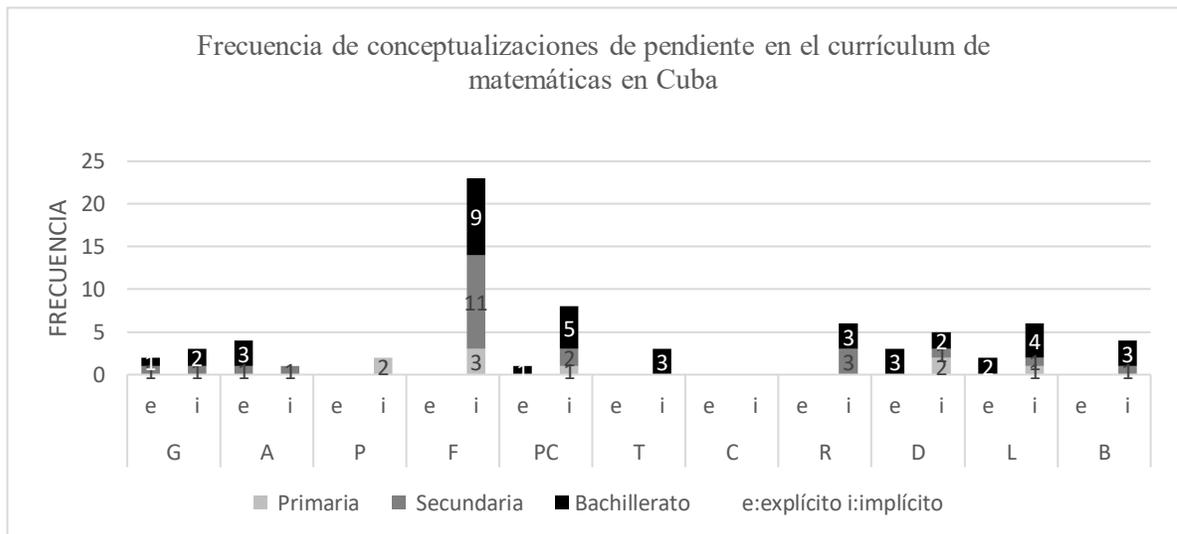
*conceptualización razón algebraica y razón geométrica*, dado por hecho que todas las conceptualizaciones explícitas que se desprenden de las principales frases identificadas inciden en la representación gráfica del concepto pendiente.

## 5.1. Conclusión

Con respecto a la pregunta de investigación planteada ¿Qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven y predominan en el currículum de matemáticas de Cuba?, la pendiente debe tener una secuencia de aprendizaje para incidir en la enseñanza-aprendizaje. Su fin es el estar integrada por la definición de las once conceptualizaciones de pendiente propuestas por Moore-Russo, et al (2011) y la vinculación con las distintas representaciones del concepto.

### Gráfica 5

Total de frecuencias de las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum de matemáticas de Cuba



El currículum de matemáticas de Cuba proporciona evidencia para considerar la pendiente y sus múltiples conceptualizaciones. Este estudio proporciona un análisis detallado del tratamiento de pendiente como se describe en los tres niveles educativos en la asignatura

de matemáticas. Aunque el tratamiento de la pendiente parece estar presente en los tres niveles, el análisis detallado a través de los cursos destaca importantes vacíos que influirán en la formación y, en última instancia, cómo los estudiantes llegan a comprender y hacer uso de la pendiente bajo el rigor del currículo. Sabemos que todos los profesores se guían fuertemente por su plan de estudios oficial. Por tanto, se incide en un estudio continuado, con el fin de tener claridad completa del concepto en todo el ámbito educativo en matemáticas. Asumiendo que lo evidenciado en el currículum nos deja claro que las menciones explícitas se alinean a relacionar la pendiente mediante la representación gráfica en sus diferentes representaciones.

EL concepto, ha sido objetivo de análisis en cada nivel educativo, con el fin de identificar qué conceptualizaciones promueven y predominan en el currículum de matemáticas de Cuba. Por esa razón, los tres niveles educativos abordan entre 6(primaria), 9(secundaria) y 10(preuniversitario) conceptualizaciones de pendiente, la *propiedad funcional* es la más predominante seguida el *coeficiente paramétrico*.

La gráfica 5 muestra diez conceptualizaciones de pendiente que “promueven el currículum de matemáticas de Cuba”, lo que indica una muy amplia cobertura del concepto. La *propiedad funcional* en el currículum es la conceptualización más común y “predominante” en los tres niveles educativos coincidiendo con (Rivera, 2019), en contenidos como “tanto por ciento, razón y proporción, proporcionalidad, ecuación lineal y función lineal”. Dado por hecho, que la reiterada presencia de la *propiedad funcional*, se basa en la presencia de los temas anteriores, siendo “repetitivos y sistematizados” en el currículum de matemáticas, identificados dentro de las tres primeras unidades en cada nivel educativo

exceptuando en curso de 11°. El *coeficiente paramétrico* también toma notable frecuencia en el currículum como contenido base al tema de la ecuación – ecuación lineal, y luego a la función lineal, (pendiente recibe la mayor atención). Se evidencia al abordar la identificación de los parámetros de la ecuación o función lineal, en la representación gráfica y valor numérico o coeficiente numérico en la ecuación y función lineal. Sin embargo, el currículum no detalla cómo se va a reconocer la definición en los contenidos por impartir como por ejemplo, (ecuación de la función lineal de la forma  $y = mx + n$  con  $m$  y  $n$  números reales), solo se evidencia en exigencias de evaluación de la unidad. Cabe destacar que la explicitud de algunos temas y contenidos que relacionan las conceptualizaciones de pendiente son identificados en externos pero incidentes implícitos de las temáticas a abordar. La *propiedad física* es un caso de ello, tanto que es la de “menor frecuencia” en el currículum. Siendo el tema que se relaciona de forma incidente al identificarse en cada contenido del currículum bajo la justificación que nos brinda la ampliación de temas de cada unidad temática identificado. En conclusión, en la investigación se toman como predominantes cinco conceptualizaciones de pendiente las cuales se evidencian de forma explícita en el currículum, siendo las que en sí se identifican en su propio contenido. No podemos incidir en que sean las repetidas y de ahí ser las predominantes sino las que están presentes al lector, por tanto, son las predominantes en orden: *razón geométrica, razón algebraica, coeficiente paramétrico, propiedad determinante y constante lineal.*

La primera enseñanza (primaria) abarca implícitamente seis conceptualizaciones, se identifica con baja presencia del concepto. Puede ser el resultado, ya que es el Nivel Educativo base en el Sistema Educativo, sus contenidos están guiados para la preparación

elemental básica y garantía de la formación del estudiantado a continuar su nivel educativo. Pero, los contenidos “repetitivos” identificados a lo largo de los niveles parten de la primaria, lo que indica que los códigos identificados también son repetidos cada vez que haya mención del contenido.

En secundaria, brote de cambio y acercamiento al concepto pendiente. Siendo el nivel que identifica ambas menciones (explícitas e implícitas), con presencia de la “función lineal” como contenido principal y básico en el 8° curso. La interpretación geométrica y la fórmula para calcular el pendiente conocido dos puntos, en la evidencia explícita que en el grado identifica la presencia del concepto (*razón geométrica* y la *razón algebraica*). Cabe destacar que estos códigos explícitos se evidencian al abordar el tema en un eje de coordenadas. Aunque la fórmula para calcular la pendiente también puede ser vista en ejercicios y problemas, pero el pensamiento matemático está cognitivamente en la representación gráfica. Por tanto, en base a lo sistematizado de la primaria y la “función lineal”, son las evidencias de las conceptualizaciones identificadas en la secundaria.

En preuniversitario, completa el análisis y evidencia diez códigos asociados a las conceptualizaciones de pendiente. El curso de 11° y parte de 12° en la unidad de sistematización son los grados que se identifican con mención explícita de la pendiente. Los contenidos son basados en el tema “función lineal” un poco más amplio, retomado el tema de 8° grado de la fórmula de la pendiente determinada por dos puntos, se amplía la relación con el ángulo de inclinación (grado satisface su análisis) y las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en función a sus pendientes. *La razón algebraica*, la *razón trigonométrica* y la *propiedad determinante* son las identificadas que hacen relación con lo

explícito anterior. La ecuación general de la recta como lugar geométrico (casos particulares) se aborda en el medio curso del preuniversitario, además la “pendiente”, representación gráfica y el punto de intersección entre dos rectas, es dónde se identifican seis códigos explícitos en el curso. Dentro ellos están el *coeficiente paramétrico* al abordar la ecuación de la recta o pendiente, la *constante lineal*, *razón algebraica y geométrica*, *concepción trigonométrica* y *propiedad determinante* se desprenden de los contenidos identificados con inclusión de la pendiente.

El 12° curso se vuelve a identificar el mismo contenido del curso medio, donde los mismos, las conceptualizaciones previas codificadas son coincidentes al abordar la “pendiente de una recta determinada por dos puntos y su relación con el ángulo de inclinación”. Pero se incorpora la *constante lineal*, debido por el avance de nivel y el curso escolar ya se proporciona con más rigor en el contenido de abordar e incidir en ampliar su contorno, ya que en el curso terminal del currículum y los educandos se preparan para las pruebas de ingresos para nivel superior.

La *concepción en cálculo* se evidenció con nula presencia en los cursos requeridos por el currículum. Probablemente se deba a los contenidos que involucran la conceptualización ya sea la “pendiente” de una línea tangente a una curva, o como la derivada, o como un componente de dirección a un vector en su curso requerido Stanton y Moore-Russo (2012), no son abordados en el nivel preuniversitario. Siendo en este nivel el que se debe abarcar los temas que involucran el cálculo para ser evidenciada en cualquier mención pero, ni tan siquiera en relación con ninguna medida relacionada con el concepto.

Si bien, la pendiente no muestra evidencia principal en los tres niveles educativos, es posible e importante promover que las menciones implícitas sean parte de la clase diaria del alumnado ya que las explícitas están presente en cada temática. Siendo así se promueve una conexión del concepto de pendiente desde las primeras edades, inculcando desde el nivel primario un amplio panorama de las diferentes formas de representación del concepto hasta el nivel medio superior y superior. Desarrollar una comprensión conceptual conectada de ideas matemáticas clave, como la pendiente, es fundamental en la educación matemática (Cai & Ding, 2017). En particular, para que un estudiante tenga una mejor comprensión de la pendiente no basta que conozca la pendiente en la representación gráfica, sino más bien la conexión entre las variedades de representación del concepto “pendiente”.

Existen estudios que abordan el análisis del currículum en países que han investigado al concepto pendiente, estos han reportado hallazgos sobre algunas conceptualizaciones que hacen o no presencia en el plan de estudios. Cabe destacar la investigación hace énfasis en mencionar que en el currículum cubano se hacen evidencia la mayor frecuencia de conceptualizaciones de la pendiente que estudios antes realizados. De hecho, se identifican mayores menciones implícitas que explícitas en el currículo, a que deba esto, a la poca presencia de “conectividad” que el currículum debería de abordar.

A partir de esto, hemos identificado un contraste con las investigaciones reportadas en el currículo. Investigaciones como Rivera (2019) plantea que se podía hipotetizar que el plan de estudios mexicano de preferencia tiene un enfoque más analítico o procedimental, en los Estados Unidos podrían estar enfatizando un enfoque más visual, centrado en el gráfico de la recta, mientras que en Cuba se asemeja a lo evidenciado en Estados Unidos. Donde los

códigos identificados de la pendiente apuntan a justificar la afirmación, debido al predominio explícito de las conceptualizaciones en el gráfico de la recta.

El aporte de este trabajo, de la misma manera que lo plantea Rivera (2019) por la yuxtaposición geográfica y la frecuente inmigración de México los EE. UU., siendo un caso muy a diario de Cuba y de ambos países, (dado que los cubanos en los EEUU constituyen la mayor comunidad cubana fuera del país y la tercera comunidad hispana en los Estados Unidos, después de los mexicanos y puertorriqueños), es proporcionar la estructura del cómo se presenta la pendiente del currículum cubano, lo cual es de gran ayuda para los educadores estadounidenses lo de otros lugares donde hallan inmigrantes cubanos. Además, los hallazgos dan evidencia que la pendiente es introducida en las escuelas de EE. UU desde el 8° curso (Nagle y Moore-Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo, 2012) al igual se aborda de forma paralela el concepto en el currículum de Cuba bajo el contexto de cada país.

## **5.2. Limitaciones y futuras investigaciones**

La Matemática Educativa es una disciplina científica joven cuyas actividades están relacionadas con la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Nieto et al., 2009). Por tanto, el trabajo investigativo realizado su énfasis ha sido un concepto matemático.

La investigación nos ha dado evidencia del análisis del currículum de matemáticas de Cuba con respecto al concepto de pendiente. Es importante destacar que el currículum no ofrece lo que el maestro enseña en el aula o lo que pueden aprender los estudiantes. Pero lo que sí está claro es la vigencia de contenidos que son abarcados por el currículum de

matemáticas, y serán puestos a prueba en las aulas. A esto se suma que lo integra el plan de estudio y el programa de la asignatura (matemática) en los tres niveles educativos, pero las evidencias sólo se aportan en el programa de estudio. Estas sólo se identifican en el contenido de cada temática, pero en la “Caracterización el contenido y de la concepción metodológica” de la asignatura se hace énfasis general de lo que cada núcleo temático involucra y su enlace entre ellos. En los objetivos de cada unidad también se amplía lo que se debe cumplir en el resto de la unidad pero no se especifica en los contenidos a tratar. Por tanto, eso no nos permite mirar si el docente solo toma los objetivos para evaluar o si de verdad los explota en la clase. Ya que cada unidad tienes sus propios objetivos que se deben evaluar, entonces la claridad de esto nos proporcionaría riqueza en el análisis del concepto, porque se sabría entonces qué el educador se enfoca con más rigor en su clase. Por otra parte, algunos contenidos son copia y pega de objetivos generales o de la propia unidad, siendo esto de poca evidencia para poder identificar que amplitud que tiene el tema en cuestión.

Por partes, el Nivel Primaria abarca los grados que la conforman, pero no se evidencia ningún Plan de estudios que nos permita mirar cómo se planifica la asignatura de Matemáticas. Sólo el Programa de estudio es el presente, el (MINED, s/f) ([www.mined.gob.cu](http://www.mined.gob.cu)), lo cual contiene los temas principales del currículum escolar, objetivos, breves orientaciones al profesor y la distribución de horas clases. Estos en cada grado están en conjunto de 4-5 asignaturas, siendo el programa un conjunto único en la primaria.

La secundaria o Nivel Secundaria, en [www.mined.gob.cu](http://www.mined.gob.cu) también presenta huecos que no son evidenciados en el Programa de estudio. Dentro de ellos está la no presencia del

programa de matemáticas de ningún grado. Para la investigación se tuvo que acudir a Educación Provincial de la provincia de Sancti-Spíritus para de forma personal poder tener acceso a los programas de los tres cursos educativos. Al igual ocurre con el preuniversitario, en [www.mined.gob.cu](http://www.mined.gob.cu) están presente los tres cursos que lo conforman, pero solo se evidencia el programa de Biología, por tanto, de igual manera se realiza lo mismo del Nivel Secundaria para la obtención de los programas de matemáticas del nivel en cuestión.

Todo lo anterior se finaliza con la dificultad que se tiene al no poder tener una accesibilidad de forma libre del currículum cubano. Y de no presentar un documento que se pueda tomar como plan para cumplir con lo encomendado en cada curso. Por lo tanto, para saber cuánta influencia tiene el currículum en las prácticas de los docentes, se necesita investigación futura para dar evidencias de cómo los docentes comunican lo declarado en los documentos oficiales. En conjunto, los textos son un objeto primordial en el aula, pero es importante determinar el papel que juegan, cómo accionan en el currículum y qué decimos luego que el docente brinde su clase cómo el estudiantado ha asimilado lo impartido. Son cuestiones que deben tomar en cuenta para futuras investigaciones ya que es solo el comienzo de una vista longitudinal basado del currículum.

### **5.3. Reflexión del estudio realizado en Cuba**

Vale la pena dedicar un minuto y detenerse en el análisis del “currículo” de matemáticas en Cuba, es este caso el concepto “pendiente”. El “currículo”, siendo un problema que se plantea en la actualidad, en los diferentes países del mundo, independientemente de las condiciones económicas, políticas e ideológicas, especialmente lo

concerniente a la formación para la educación de postgrado ya que esta debe lograr ante todo la actualización y la sistematización de los conocimientos recibidos durante los estudios del pregrado (Alonso y Díaz-Pimienta, 2014). Lo anterior proporciona que la investigación se tome a conciencia que es de utilidad y apoyo a la mejora y actualización de los temas y conceptos matemáticos que son de prioridad y no se explotan en la investigación.

Todos sabemos que en matemática, el programa director, permite fortalecer el cumplimiento de los objetivos de cada grado y nivel con el mayor alcance en la asimilación de los conocimientos, desarrollo de las habilidades matemáticas y del pensamiento lógico (Ministerio de Educación de la República de Cuba, 2001). Pero se debe incluir las investigaciones actuales que aportan a ampliar el panorama de aprendizaje en la Matemática al currículum de Cuba en este caso. No hablamos de que cambie la estructura y ni objetivos generales, sino de ser válidos para una nueva estructura de los mismos.

De forma general se toma en cuenta la diferencia de contexto en el que el país prioriza la educación con su eje principal (enseñanza–aprendizaje). Su distribución y la forma en querer que todo tenga sentido explícito en cada contenido y objeto a cumplir son valioso. Pero hay que mirar un poquito más en explotar los contenidos matemáticos. La “pendiente” es uno de los tantos conceptos que se presta en el currículum de matemáticas de Cuba con poca atención, pero al ser analizado nos damos cuenta de tema se evidencia sólo lo que se va a abordar. No se toma de importancia su amplia explotación y utilidad para el nivel superior. Por tanto, el análisis realizado en el currículum se puede decir que es un tema innovador en el país por lo cual para ser cumplido en su totalidad se debe continuar ampliando el análisis dentro del contexto educativo en matemáticas.

¿Qué importa saber lo que es una línea recta si no  
sabes lo que es una rectitud?

SENECA

## 6. Bibliografía

- Abreu Blaya, R., Flores, C. D., Sánchez, J. L., & Sigarreta, J. M. (2020). El concepto de pendiente : estado de la investigación y prospectivas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 103(Marzo de 2020), 81–98.
- Alonso, A., & Díaz-Pimienta, E. (2014). El diseño curricular, su importancia para la educación de postgrado. *EFDeportes.com, Revista Digital.Buenos Aires, Año 19, N° 198*. <http://www.efdeportes.com/>
- Alsina, C. (2000). *Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*.
- Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 21(2), 367–388.
- Báez Melendres, Mayra Anaharely Sarai , Cntú Interaián, Cristy Arely, Gómez Osalde, K. M. (2007). *Un estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio*. Mérida, Yucatán.
- Ballester, S., Santana de Armas, H., Hernández Montes de Oca, S., Cruz, I., Arango González, C., García García, M., & Torres Fernández, P. (1992). *Metodología de enseñanza de la Matemática (Vol.1)* (Pueblo y E).
- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido*. (3ra ed.).
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. Baroody & A. *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*, 1–33.
- Berelson, B. (1952). *Content analysis in communication research* (Free Press).
- Blanco, C. (2005). Reseña “Investigación cualitativa en Educación: fundamentos y tradiciones” de M<sup>a</sup> Paz Sandín Esteban. *Revista de Pedagogía*, XXVI(77), 525–528.
- Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers’ meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, 48(November), 168–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003>
- Cai, J., & Ding, M. (2017). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *J Math Teacher Educ*, 20, 5–29. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10857-015-9325-8>

- Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113–145. <https://doi.org/10.1080/07370001003676587>
- Casey, S. A., & Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 163–177. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9679-y>
- Choy, B., Lee, M., & Mizzi, A. (2015). Textbook signatures: an exploratory study of the notion of gradient in Germany, Singapore and South Korea. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 201–208.
- Cohen, N., & Gómez Rojas, G. (2019). *Metodología de la investigación ¿para qué?* (1a ed.).
- Coll, C. (1994). Psicología y currículum. En *Psicología y Currículum. Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar* (p. 6). [https://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha\\_Pacheco/Software\\_e\\_hipertexto/Antologia\\_Electronica\\_pa121/Coll\\_cap2.PDF](https://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha_Pacheco/Software_e_hipertexto/Antologia_Electronica_pa121/Coll_cap2.PDF)
- Coll, C. (2007). *Psicología y currículum*.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66. <https://doi.org/10.2307/749228>
- Deniz, Ö., & Uygur-Kabael, T. (2017). Eğitim kavramının gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında matematikleştirilme süreci. *Hacettepe Eğitim Dergisi*, 32(1), 123–142. <https://doi.org/10.16986/HUJE.2016018796>
- Dolores-Flores, C., & Ibáñez, G. (2020). [Aceptado] Conceptualizaciones de la pendiente en libros de texto de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 19, 825–846.
- Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369–389. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050>
- Dolores, C., García-García, J., & Gálvez-Pacheco, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educacion Matematica*, 29(2), 125–158. <https://doi.org/10.24844/em2902.05>
- Dolores, C., Rivera López, M. I., & Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104–115.

<https://doi.org/10.1111/ssm.12389>

- Ellis, A. K. (2004). *Exemplars of Curriculum Theory*. Routledge.  
<https://doi.org/10.4324/9781315855318>
- García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula, elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo ( Tesis de Licenciatura)*. Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades*, VI(11), 37–80.
- Gvirtz, S., & Plamidessi, M. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza* (Aique grup).
- Hernández, E. (2016). *Calculo Diferencial e Integral*.
- Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, M. del P. (2015). *Metodología de la investigación* (Sexta edic).
- Hoffman, W. (2015). Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews (Doctoral dissertation). *The University Of North Carolina At Charlotte*.
- Kim, R. . (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM Mathematics Education* 4, 2, 175–187. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-012-0399-9>
- Larson, R. (2010). *Cálculo de una Variable* (Novena Edi).
- Lehmann. (1989). *Temas que trata la obra : 516*.
- Lehmann, C. (2005). *Geometría analítica* (México: Ed).
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1. <https://doi.org/10.2307/1170224>
- Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. Litwiller y G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook*, 162–175.
- McGee, D., Moore-Russo, D., & Martinez-Planell, R. (2015). Making Implicit Multivariable Calculus Representations Explicit: A Clinical Study. *PRIMUS*, 25(6), 529–541. <https://doi.org/10.1080/10511970.2015.1038858>

- MINED. (s/f). *Ministerio de educación*. Habana, Cuba. [www.mined.gob.cu](http://www.mined.gob.cu)
- Ministerio de Educación de la República de Cuba. (2001). *Contenido de la educación y estrategias de aprendizaje para el siglo XXI*. 12. [http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user\\_upload/archive/curriculum/Caribbean/CaribbeanPdf/cuba.pdf](http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/archive/curriculum/Caribbean/CaribbeanPdf/cuba.pdf)
- Monje, C. A. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica. *Universidad Surcolombiana*, 1–216. <http://carmonje.wikispaces.com/file/view/Monje+Carlos+Arturo+-+Guía+didáctica+Metodología+de+la+investigación.pdf>
- Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.
- Morre-Russo, C. y R. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics* 76(1), 3–21. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y>
- Mudaly, V., & Moore-Russo, D. (2011a). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 1–8. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.25>
- Mudaly, V., & Moore-Russo, D. (2011b). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 27–33. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.25>
- Mullis, I. Martin, M. Smith, T. Garden, R. Gregory, K. González, E. Chrostowski, S. O'Connor, K. (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003* (Ministerio).
- Nagle, C., y Moore-Russo, D. y katy. (2013). *Connecting Slope, Steepness, and Angles* 107(4). 272–279.
- Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2013). Connecting Slope, Steepness, and Angles. *Mathematics Teacher*, 107(4), 272–279.
- Nagle, C, Casey, S., & Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1–2), 13–26.
- Nagle, Courtney, Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). CALCULUS STUDENTS' AND INSTRUCTORS' CONCEPTUALIZATIONS OF SLOPE: A

COMPARISON ACROSS ACADEMIC LEVELS. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491–1515. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2>

- Nagle, & Moore-Russo, D. (2014). Slope across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *Mathematics Educator*, 23(2), 40–59.
- Newton, X. A., & Poon, R. C. (2015). Mathematical Content Understanding for Teaching: A Study of Undergraduate STEM Majors. *Creative Education*, 06(10), 998–1031. <https://doi.org/10.4236/ce.2015.610101>
- Nieto, N., Viramontes, J. de D., & López, F. (2009). ¿Qué Es La Matemática Educativa? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 13(3), 16.
- Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, T. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85–108. <http://linkseeker.lanl.gov/stanford?genre=article%5C&%5C#38;issn=0021-8251%5C&%5C%2338;date=2000%5C&%5C%2338;volume=32%5C&%5C%2338;issue=1%5C&%5C%2338;spage=85%5C&%5C%2338;atitle=Experiencing%5Cchange:%5CThe%5Cmathematics%5Cof%5Cchange%5Cin%5Cmulti>
- Okuda, M., y Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 34(1), 118–124.
- Páez, D., Guzmán, J., & Zambrano, J. (2015). Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.
- Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad* (Número June).
- Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1(4), 7–42.
- Rivera, M. I. (2019). *Preconcepciones de Pendiente en Estudiantes de Bachillerato*. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO.
- Rivera, M. I., Salgado, G., & Dolores, C. (2019). Explorando las conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1027–1046.
- Salgado, G. (2020). *Conceptualizaciones de pendiente que poseen profesores y las que enseñan a sus estudiantes*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.
- Salgado, G., Rivera, M., & Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente :

- Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 57, 33–48.
- Salgado, G., Rivera, M., & Dolores, C. (2020). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(75), 33-48.
- Santos, E. (2019). *Imagen del concepto de pendiente en alumnos universitarios*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.
- Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*.
- Stroup, W. M. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 167–21. <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1021147132127>
- Stump. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207–227.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144. <https://doi.org/10.1007/BF03217065>
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151–169.
- Teuscher, D., & Reys, R. E. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions After Completing Different Curricular Paths. *School Science and Mathematics*, 112(6), 359–376. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00150.x>
- Valenzuela, C., y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números*, 79, 47–69.
- Valenzuela, C., & Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 79(1998), 47–69.
- Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Revista trimestral de educación comparada*, 1, 195–207. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=2293>
- Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje*, 36(2), 131–161. <https://doi.org/10.1174/021037013806196283>

- Zapico, M. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares*, 149–155.
- Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.
- Abreu Blaya, R., Flores, C. D., Sánchez, J. L., & Sigarreta, J. M. (2020). El concepto de pendiente : estado de la investigación y perspectivas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 103(Marzo de 2020), 81–98.
- Alonso, A., & Díaz-Pimienta, E. (2014). El diseño curricular, su importancia para la educación de postgrado. *EFDeportes.com, Revista Digital.Buenos Aires, Año 19, N° 198*. <http://www.efdeportes.com/>
- Alsina, C. (2000). *Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*.
- Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 21(2), 367–388.
- Báez Melendres, Mayra Anaharely Sarai , Cntú Interaián, Cristy Arely, Gómez Osalde, K. M. (2007). *Un estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio*. Mérida, Yucatán.
- Ballester, S., Santana de Armas, H., Hernández Montes de Oca, S., Cruz, I., Arango González, C., García García, M., & Torres Fernández, P. (1992). *Metodología de enseñanza de la Matemática (Vol.1)* (Pueblo y E).
- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido*. (3ra ed.).
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. Baroody & A. *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*, 1–33.
- Berelson, B. (1952). *Content analysis in communication research* (Free Press).
- Blanco, C. (2005). Reseña “Investigación cualitativa en Educación: fundamentos y tradiciones” de M<sup>a</sup> Paz Sandín Esteban. *Revista de Pedagogía*, XXVI(77), 525–528.
- Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers’ meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, 48(November), 168–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003>
- Cai, J., & Ding, M. (2017). On mathematical understanding: perspectives of experienced

- Chinese mathematics teachers. *J Math Teacher Educ*, 20, 5–29. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10857-015-9325-8>
- Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113–145. <https://doi.org/10.1080/07370001003676587>
- Casey, S. A., & Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 163–177. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9679-y>
- Choy, B., Lee, M., & Mizzi, A. (2015). Textbook signatures: an exploratory study of the notion of gradient in Germany, Singapore and South Korea. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 201–208.
- Cohen, N., & Gómez Rojas, G. (2019). *Metodología de la investigación ¿para qué?* (1a ed.).
- Coll, C. (1994). Psicología y currículum. En *Psicología y Currículum. Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar* (p. 6). [https://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha\\_Pacheco/Software\\_e\\_hipertexto/Antologia\\_Electronica\\_pa121/Coll\\_cap2.PDF](https://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha_Pacheco/Software_e_hipertexto/Antologia_Electronica_pa121/Coll_cap2.PDF)
- Coll, C. (2007). *Psicología y currículum*.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66. <https://doi.org/10.2307/749228>
- Deniz, Ö., & Uygur-Kabael, T. (2017). Eğitim kavramının gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında matematikleştirilme süreci. *Hacettepe Eğitim Dergisi*, 32(1), 123–142. <https://doi.org/10.16986/HUJE.2016018796>
- Dolores-Flores, C., & Ibáñez, G. (2020). [Aceptado] Conceptualizaciones de la pendiente en libros de texto de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 19, 825–846.
- Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369–389. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050>
- Dolores, C., García-García, J., & Gálvez-Pacheco, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educacion Matematica*, 29(2), 125–158. <https://doi.org/10.24844/em2902.05>

- Dolores, C., Rivera López, M. I., & Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104–115. <https://doi.org/10.1111/ssm.12389>
- Ellis, A. K. (2004). *Exemplars of Curriculum Theory*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315855318>
- García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula, elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo ( Tesis de Licenciatura)*. Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades*, VI(11), 37–80.
- Gvartz, S., & Plamidessi, M. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza* (Aique grup).
- Hernández, E. (2016). *Calculo Diferencial e Integral*.
- Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, M. del P. (2015). *Metodología de la investigación* (Sexta edic).
- Hoffman, W. (2015). Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews (Doctoral dissertation). *The University Of North Carolina At Charlotte*.
- Kim, R. . (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM Mathematics Education* 4, 2, 175–187. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-012-0399-9>
- Larson, R. (2010). *Cálculo de una Variable* (Novena Edi).
- Lehmann. (1989). *Temas que trata la obra* : 516.
- Lehmann, C. (2005). *Geometría analítica* (México: Ed).
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1. <https://doi.org/10.2307/1170224>
- Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. Litwiler y G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook*, 162–175.
- McGee, D., Moore-Russo, D., & Martinez-Planell, R. (2015). Making Implicit Multivariable

Calculus Representations Explicit: A Clinical Study. *PRIMUS*, 25(6), 529–541.  
<https://doi.org/10.1080/10511970.2015.1038858>

MINED. (s/f). *Ministerio de educación*. Habana, Cuba. [www.mined.gob.cu](http://www.mined.gob.cu)

Ministerio de Educación de la República de Cuba. (2001). *Contenido de la educación y estrategias de aprendizaje para el siglo XXI*. 12.  
[http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user\\_upload/archive/curriculum/Caribbean/CaribbeanPdf/cuba.pdf](http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/archive/curriculum/Caribbean/CaribbeanPdf/cuba.pdf)

Monje, C. A. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica. *Universidad Surcolombiana*, 1–216.  
<http://carmonje.wikispaces.com/file/view/Monje+Carlos+Arturo+-+Guía+didáctica+Metodología+de+la+investigación.pdf>

Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.

Morre-Russo, C. y R. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics* 76(1), 3–21. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y>

Mudaly, V., & Moore-Russo, D. (2011a). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 1–8.  
<https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.25>

Mudaly, V., & Moore-Russo, D. (2011b). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programme. *Pythagoras*, 32(1), 27–33.  
<https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.25>

Mullis, I. Martin, M. Smith, T. Garden, R. Gregory, K. González, E. Chrostowski, S. O'Connor, K. (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003* (Ministerio).

Nagle, C., y Moore-Russo, D. y katy. (2013). *Connecting Slope, Steepness, and Angles* 107(4). 272–279.

Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2013). Connecting Slope, Steepness, and Angles. *Mathematics Teacher*, 107(4), 272–279.

Nagle, C, Casey, S., & Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1–2), 13–26.

- Nagle, Courtney, Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). CALCULUS STUDENTS' AND INSTRUCTORS' CONCEPTUALIZATIONS OF SLOPE: A COMPARISON ACROSS ACADEMIC LEVELS. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491–1515. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2>
- Nagle, & Moore-Russo, D. (2014). Slope across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *Mathematics Educator*, 23(2), 40–59.
- Newton, X. A., & Poon, R. C. (2015). Mathematical Content Understanding for Teaching: A Study of Undergraduate STEM Majors. *Creative Education*, 06(10), 998–1031. <https://doi.org/10.4236/ce.2015.610101>
- Nieto, N., Viramontes, J. de D., & López, F. (2009). ¿Qué Es La Matemática Educativa? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 13(3), 16.
- Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, T. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85–108. <http://linkseeker.lanl.gov/stanford?genre=article%5C&%5C#38;issn=0021-8251%5C&%5C%2338;date=2000%5C&%5C%2338;volume=32%5C&%5C%2338;issue=1%5C&%5C%2338;spage=85%5C&%5C%2338;atitle=Experiencing%5Cchange:%5CThe%5Cmathematics%5Cof%5Cchange%5Cin%5Cmulti>
- Okuda, M., y Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 34(1), 118–124.
- Páez, D., Guzmán, J., & Zambrano, J. (2015). Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.
- Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad* (Número June).
- Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1(4), 7–42.
- Rivera, M. I. (2019). *Preconcepciones de Pendiente en Estudiantes de Bachillerato*. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO.
- Rivera, M. I., Salgado, G., & Dolores, C. (2019). Explorando las conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1027–1046.
- Salgado, G. (2020). *.Conceptualizaciones de pendiente que poseen profesores y las que enseñan a sus estudiantes*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

- Salgado, G., Rivera, M., & Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente : Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *Union: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 57, 33–48.
- Salgado, G., Rivera, M., & Dolores, C. (2020). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(75), 33-48.
- Santos, E. (2019). *Imagen del concepto de pendiente en alumnos universitarios*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.
- Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*.
- Stroup, W. M. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 167–21. <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1021147132127>
- Stump. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207–227.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144. <https://doi.org/10.1007/BF03217065>
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151–169.
- Teuscher, D., & Reys, R. E. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions After Completing Different Curricular Paths. *School Science and Mathematics*, 112(6), 359–376. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00150.x>
- Valenzuela, C., y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números*, 79, 47–69.
- Valenzuela, C., & Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 79(1998), 47–69.
- Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Revista trimestral de educación comparada*, 1, 195–207. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=2293>
- Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje*,

36(2), 131–161. <https://doi.org/10.1174/021037013806196283>

Zapico, M. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares*, 149–155.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119–140.