



Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Ecuación diferencial del tipo
Black-Scholes con derivada
fraccionaria.**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestría en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Juan Carlos Hernández Pastrana

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Jorge Sánchez Ortiz

Dr. Martín P. Arciga Alejandre

Abril de 2016.



Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Ecuación diferencial del tipo
Black-Scholes con derivada
fraccionaria.**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Juan Carlos Hernández Pastrana

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Jorge Sánchez Ortiz

Dr. Martín P. Arciga Alejandre

Abril de 2016.

Agradecimientos

A mi madre, mi prometida y mis hermanos, que siempre se encuentran apoyándome a cada momento. Y me alientan para seguir realizando mis metas y propósitos.

A mis asesores, que me permitieron trabajar a su lado y tuvieron la paciencia y las ganas de apoyarme en este proyecto.

A todos mis maestros y al núcleo básico de la maestría, pues ya que sin duda, fueron los formadores y pilares para que yo cumpliera este gran logro.

A mis compañeros y amigos, que me ayudaron a lo largo de este proceso.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios.

Resumen

En este trabajo se estudia una generalización de la ecuación de Black-Scholes, la cual es utilizada ampliamente para determinar el valor teórico de opciones, que son de gran interés en el ámbito económico. Nosotros cambiamos la derivada ordinaria en el tiempo por una derivada fraccionaria de orden $0 < \alpha < 1$. La aportación principal de este trabajo consiste en adaptar las ideas principales del Método de Fokas, para construir una representación integral de la solución de un problema de valor inicial y de frontera para la ecuación generalizada de Black-Scholes. En general, el Método de Fokas consiste en utilizar las propiedades geométricas del símbolo del operador diferencial, para construir una representación integral de soluciones para problemas de valor inicial y de frontera en ecuaciones diferenciales parciales. Una propiedad muy importante que se obtiene por el método antes mencionado es la convergencia absoluta de las integrales involucradas en la solución del problema en cuestión.

Abstract

In this work, we study a generalization of the Black-Scholes equation, which is widely used to determine the theoretical value for options, a financial derivative of great interest in the economic sphere. We change the derivative of order one in time by a fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$. The main contribution of this work consist in adapting the basic ideas of the Fokas method, in order to construct an integral representation for solutions of the corresponding initial boundary-value problem.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Valor de una opción	3
1.2. Funciones especiales	7
1.2.1. Función Gama	7
1.2.2. Función de Mittag-Leffler	17
1.3. Operadores fraccionarios	22
1.4. Transformada de Laplace	26
2. Ecuación de Black-Scholes	30
2.1. Ecuación de Black-Scholes clásica	30
2.2. Ecuación del tipo Black-Scholes con derivada fraccionaria	34
Conclusiones	39
Referencias	40

Índice de figuras

1.1.	Gráfica de ganancias y pérdidas al adquirir una opción	4
1.2.	Contorno C	12
1.3.	Contorno de Hankel.	14
1.4.	Contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$	15
1.5.	Transformación del contorno Ha al contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$	16
2.1.	$D = \left\{ k = k_R + ik_I \in \mathbb{C} : \left(k_I - \frac{a}{2}\right)^2 - k_R^2 < \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 \right\}$	33
2.2.	$D = \left\{ k = k_R + ik_I \in \mathbb{C} : \left(k_I + \frac{b-a}{2a}\right)^2 - k_R^2 < \left(\frac{b+a}{2a}\right)^2 \right\}$	37

Introducción

En 1973 Fisher Black y Myron Scholes propusieron en [1] un modelo teórico para determinar el valor de opciones europeas y americanas del tipo call o put, en activos que no pagan dividendos. El modelo antes mencionado se basa en la ecuación diferencial

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (S, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T],$$

donde $V(S, \tau)$ es el valor de la opción, S es el precio del activo subyacente, τ es el tiempo, T es la fecha de expiración, σ es la volatilidad subyacente y r es el interés libre de riesgo. La ecuación anterior se conoce como ecuación de Black-Scholes.

Un gran número de trabajos se han dedicado a estudiar el modelo de Black-Scholes desde diferentes puntos de vista, por ejemplo en [2] resuelven la ecuación aplicando un método numérico al momento de calcular la transformada inversa de Laplace, en [3] dan un método directo para hallar una representación integral de la solución, en la cual utilizan la transformada de Mellin, y en [4] se muestra como obtener la solución a partir de la función de Green de la ecuación de difusión. Por otro lado, algunos autores han generalizado éste modelo, reemplazando el movimiento Browniano geométrico por el movimiento Browniano fraccionario, en la deducción de la ecuación de Black-Scholes, [5], [6], [7].

En las últimas décadas el cálculo fraccionario ha despertado un gran interés en la comunidad científica, debido a sus aplicaciones en diferentes áreas de investigación, tales como la economía, física, mecánica, química, entre otras. En comparación con las derivadas estándar de orden entero respecto al tiempo, las derivadas de orden fraccionario se caracterizan por tener memoria; es decir, la tasa de cambio de una función cerca de un punto es afectada por el pasado en el dominio de definición, en lugar de sólo una vecindad del punto. Existen algunos trabajos, que al igual que nosotros, han estudiado una generalización de la ecuación de Black-Scholes, la cual se obtiene al cambiar la derivada parcial en el tiempo por una

derivada fraccionaria. Por ejemplo, en [8] utilizan la transformada de Laplace para encontrar una solución de esta generalización, en [9] dan una solución numérica utilizando el método de diferencias finitas, en [10] utilizan dicha generalización de Black-Scholes para construir una ecuación que determine el precio de opciones de doble barrera.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1, se darán los rudimentos necesarios que serán utilizados durante el desarrollo del trabajo. Se describe un modelo de valoración de opciones. Además, se dan las definiciones de algunas funciones especiales, sus características más relevantes y representaciones con integrales de contorno. Al final del capítulo se presenta la derivada fraccionaria y la transformada de Laplace. En el capítulo 2, utilizando el Método de Fokas [11], se construye la función de Green para la ecuación de Black-Scholes clásica y haciendo uso de las ideas del Método Fokas, se construye la función de Green para la ecuación de Black-Scholes generalizada con derivada fraccionaria en el tiempo.

Finalmente, se da una pequeña conclusión del trabajo y se proponen algunos nuevos retos, los cuales son consecuencia de las aportaciones que se han hecho aquí.

Preliminares

En este capítulo, se darán las herramientas y conceptos que son de utilidad en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Valor de una opción

En esta sección se habla de algunos conceptos y situaciones que ayudan a entender acerca de lo que estudia un modelo de valoración de opciones, como lo es el modelo de Black-Scholes.

Definición 1.1.1 *Una opción es un contrato por el que se otorga el **derecho a comprar o vender** "algo" (comúnmente llamado subyacente) a un precio determinado en un periodo de tiempo determinado.*

Definición 1.1.2 *El precio fijado en el contrato al que se otorga el derecho de compra o venta se denomina precio de ejercicio. El periodo de tiempo de dicho contrato se denomina periodo de vida o tiempo a vencimiento de la opción, y la fecha en la que dicho contrato expira se denomina fecha de vencimiento.*

Definición 1.1.3 *La opción por la que se otorga el derecho de compra se denomina opción **call**. La opción por la que se otorga el derecho de venta se denomina opción **put**.*

Definición 1.1.4 *Una opción es de estilo europeo si sólo se puede ejercer al final de la fecha de vencimiento. Y es de estilo americano si la opción se puede ejercer en cualquier momento en el periodo de vida del contrato.*

El siguiente ejemplo ayuda a esclarecer los conceptos antes mencionados.

Ejemplo 1.1.5 *Suponga que desea comprar un smartphone que tiene un valor de \$8000.00, pero debido a la demanda, este no se encuentra en existencia. Sin embargo, le dicen que tendrán disponibles estos aparatos dentro de 3 meses, por lo que la distribuidora le ofrece el siguiente trato: Al cabo de 3 meses se le respetara el precio del smartphone de \$8000.00 a cambio de que usted pague en este momento una cantidad de \$200.00, por tener derecho a este privilegio, con la garantía de que al cabo del término del trato usted decide si comprar o no comprar el teléfono.*

El ejemplo anterior hace referencia a la adquisición de una opción europea del tipo call, con un precio de ejercicio de \$8000.00 y tiempo de vencimiento de 3 meses. La siguiente gráfica muestra las posibles ganancias o pérdidas que se pueden generar al adquirir esta opción.

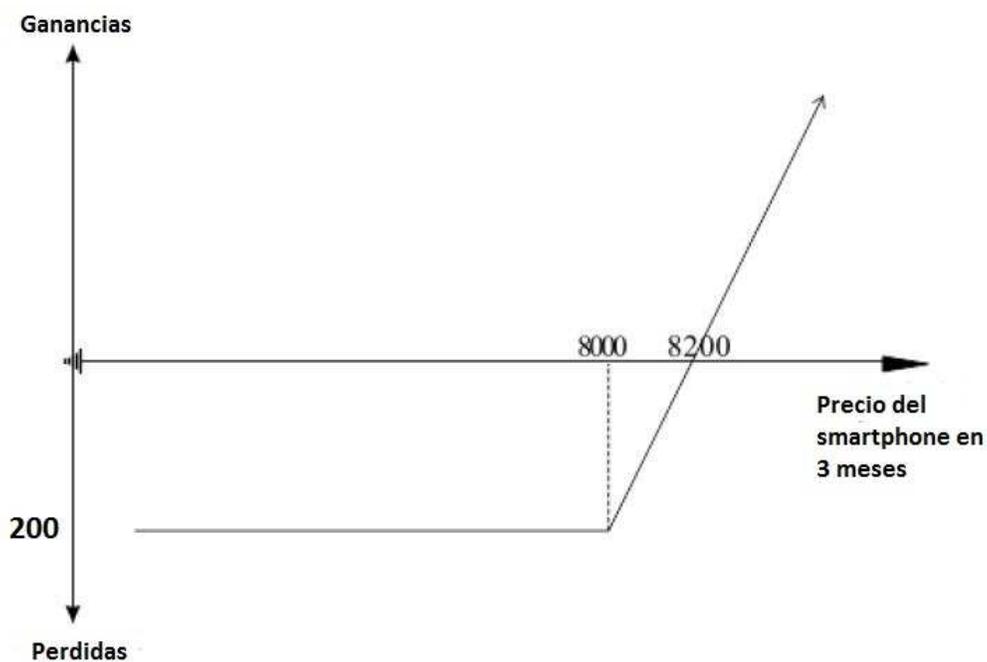


Figura 1.1: Gráfica de ganancias y pérdidas al adquirir una opción

Como se puede observar en la gráfica, si el smartphone al término del contrato tiene un precio en el mercado menor a \$8200.00, entonces no hacemos valida la opción, es decir, no compramos el teléfono a un precio de 8000.00, por lo que se podría decir que se tendrá una

”perdida” de \$200.00, que fue lo que se invirtió en el contrato. Por otra parte, si al vencimiento de la opción el precio en el mercado del smartfhone es de \$8200.00, entonces da igual si se ejerce o no la opción, ahora si resulta que el precio del smartfhone en el mercado es superior a \$8200.00 al cabo de los 3 meses, entonces lógicamente se ejerce la opción, obteniendo así una ”ganancia”.

Algo que es preciso notar en el ejemplo, es el precio del contrato, es decir, el precio de la opción. Entonces la pregunta importante es: **¿Cual es el valor de una opción?**. El siguiente ejemplo nos da una idea de esto.

Ejemplo 1.1.6 *Suponga que actualmente una determinada acción está cotizada en 20 unidades. Suponga además que dentro de un periodo determinado su precio final tiene las siguientes probabilidades:*

<i>Precio final</i>	5	10	15	20	25	30	35
<i>Probabilidad</i>	0.04	0.1	0.18	0.36	0.18	0.1	0.04

Ahora, con estas probabilidades, suponga que se compra una opción call, sobre la acción mencionada, con un precio de ejercicio de 20, entonces sólo se obtiene beneficios al ejercer el contrato cuando la acción se coticen en 25, 30 o 35, descartando los precios por iguales o menores que 20. Así, calculando el valor esperado se tiene

$$0.18 \times (25 - 20) + 0.10 \times (30 - 20) + 0.04 \times (35 - 20) = 2.5.$$

Luego, tomando en cuenta el costo de financiamiento, por ejemplo, un interés anual del 3% con fecha de vencimiento de 3 meses, entonces el precio de la opción será de

$$2.5 - 2.5 \times 0.0075 = 2.48125.$$

Ahora, piense que se tienen expectativas altas acerca de los precios de la acción, por ejemplo:

<i>Precio final</i>	5	10	15	20	25	30	35
<i>Probabilidad</i>	0.05	0.1	0.2	0.36	0.25	0.3	0.1

De igual manera que antes, considere que se compra una opción call con precio de ejercicio de 20 a un tiempo de vencimiento de 3 meses, teniendo un costo de financiamiento del 3%

anual, entonces procediendo igual que antes se tiene

$$0.25 \times (25 - 20) + 0.3 \times (30 - 20) + 0.1 \times (35 - 20) = 5.75.$$

Por lo que el precio de la opción en este caso será

$$5.75 - 5.75 \times 0.0075 = 5.706875.$$

Se puede notar, que el precio de la opción depende en gran parte de los cambios que sufre el precio de la acción durante el tiempo que dura el contrato.

Un modelo de valoración de opciones se encarga de, dadas ciertas condiciones del mercado, determinar el precio teórico de una opción. Los parámetros mas comunes de este tipo de modelos son:

- **Precio de ejercicio.**

Constante a lo largo de la vida del contrato.

- **Tiempo de vencimiento.**

Fecha fija.

- **Precio del subyacente.**

Precio cambiante a lo largo de la vida del contrato.

- **Tipo de interés.**

Se aplica sobre el tiempo de vida de la opción, comúnmente un interés libre de riesgo.

- **Volatilidad.**

Velocidad con la que el precio del la subyacente cambia.

1.2. Funciones especiales

En esta sección, se enunciarán y se darán propiedades de ciertas funciones que se utilizan a lo largo del trabajo, las cuales dada su importancia merecen resaltarse.

1.2.1. Función Gama

La función Gama es una de las funciones especiales más importantes en varias áreas de estudio, pues juega un papel importante en el desarrollo de algunas teorías, tal es el caso del cálculo fraccionario.

Definición y propiedades

A continuación se dará la definición y algunas propiedades relevantes de la función Gama.

Definición 1.2.1 La función $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

es llamada *función Gama de Euler*.

Como se puede observar, el exponente $x - 1$ no debe tomarse a la ligera, por lo que se da el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2 La función Gama está bien definida para $x > 0$.

Demostración.

De la definición, se divide la integral como sigue

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

► Primero se analizará la convergencia de la primera integral. Así, dado que $t > 0$, entonces $0 < e^{-t} < 1$, por lo que

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt,$$

ahora, para $x > 0$ se tiene que

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{t^x}{x} \right|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{\epsilon^x}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

Por otro lado, si $x = 0$, entonces

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(t) \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(\epsilon)) \rightarrow \infty.$$

Si $x < 0$, entonces

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 t^{x-1} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} t^x \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 - \epsilon^x) \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, la integral $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge para $x > 0$.

► Ahora falta ver que sucede con $x > 0$, en la integral $\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Para lo cual se consideran los casos $0 < x \leq 1$ y $1 < x$.

Para $0 < x \leq 1$ se tiene que la función t^{1-x} es creciente, pues su derivada $(1-x)t^{-x}$ es positiva, entonces, $t^{1-x} \geq 1$, es decir, $\frac{1}{t^{1-x}} \leq 1$, por lo tanto, se tiene

$$\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt = \int_1^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r e^{-t} dt = - \lim_{r \rightarrow \infty} (e^{-r} - e^{-1}) = e^{-1}.$$

Para $x > 1$, sea n la parte entera de x , entonces aplicando integración por partes n veces, se tiene

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{1-x} dt = e^{-1} + (x-1)e^{-1} + \dots + (x-1)(x-2) \dots (x-n-1) \left(\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-n-1} dt \right).$$

Luego $0 < x - n \leq 1$ y como antes, la integral

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-n-1} dt$$

se puede acotar. Así,

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{1-x} dt$$

es acotada para $x > 1$ y $0 < x \leq 1$. Por lo tanto, la función Gama está bien definida para $x > 0$.

◇

Observese que inmediatamente de la definición de la función Gama se tiene que $\Gamma(1) = 1$. Además como se pudo ver, la función Gama se manipula bien con integración por partes, lo que conduce al siguiente teorema.

Teorema 1.2.3 Si $x > 0$ entonces $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Demostración.

Por definición de la función se tiene

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^r t^x e^{-t} dt \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-t^x e^{-t} \Big|_{\epsilon}^r + \int_{\epsilon}^r x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-r^x e^{-r} + \epsilon^x e^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^r x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\
 &= x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^r t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= x\Gamma(x).
 \end{aligned}$$

◇

El resultado anterior es una propiedad importante de la función Gama, pues de alguna manera se puede decir que es una generalización del factorial. Además, note que por el teorema anterior se puede escribir

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x},$$

de esta forma, la función Gama se puede definir también en $-1 < x < 0$. De la misma manera se tiene que

$$\Gamma(x + 1) = \frac{\Gamma(x + 2)}{x + 1},$$

así,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 2)}{x(x + 1)},$$

entonces se puede definir la función Gama para $x > 0$, $-1 < x < 0$ y $-2 < x < -1$. Siguiendo con el mismo razonamiento se tiene que para $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1) \cdots (x + n - 1)},$$

está bien definida para $\{x > -k : x \neq 0, -1, -2, \dots, -k + 1\}$. Así, la función Gama se puede extender a $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$.

Como se puede ver, hay representaciones alternativas de la función Gama, el siguiente teorema nos da otra.

Teorema 1.2.4 Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^- \cup 0\}$, entonces

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}.$$

Demostración

Por definición se tiene que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt,$$

pues $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Así, haciendo el cambio de variable $s = \frac{t}{n}$, se obtiene

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds,$$

luego, integrando por partes n -veces se llega a

$$\int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)},$$

con lo que se tiene

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}.$$

◇

Usando el teorema anterior, se puede dar una representación de la función Gama cuando $0 < x < 1$.

Teorema 1.2.5 Sea $0 < x < 1$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)}. \quad (1.1)$$

Demostración.

Por el teorema anterior se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \left(\frac{2}{x+2}\right) \cdots \left(\frac{n}{x+n}\right) \left(\frac{2^x}{1^x}\right) \left(\frac{3^x}{2^x}\right) \cdots \left(\frac{n^x}{(n-1)^x}\right), \end{aligned}$$

reordenando, se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(-x) &= \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right] \frac{1}{-x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1} \right] \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-x^2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{-x^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} \\
&= \frac{-\pi}{x \operatorname{sen}(\pi x)},
\end{aligned}$$

el resultado anterior, se obtiene del hecho que $\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

Finalmente, dado que $\Gamma(-x) = -\frac{\Gamma(1-x)}{x}$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

◇

Integral de contorno de la función Gama

Lo que se hace aquí, es dar una representación de Gama, como una integral de contorno. Anteriormente se dio la definición de la función Gama para un x real, pero también se puede definir para un complejo z . Entonces

Definición 1.2.6 *La función Gama $\Gamma(z)$ está definida por la integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.2)$$

que converge en la parte derecha del plano complejo ($\operatorname{Re}(z) > 0$).

Note que, se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \operatorname{sen}(y \log(t))] dt.
\end{aligned}$$

Como se puede observar la expresión $\cos(y \log(t)) + i \operatorname{sen}(y \log(t))$, es acotada para toda t ; luego, la convergencia en el infinito se da por e^{-t} , y para la convergencia en $t = 0$ se debe tener $x = \operatorname{Re}(z) > 1$. Los teoremas que se dieron anteriormente para la Gama con argumento real x , son también válidos para esta Gama compleja.

Ahora, en la definición de la función Gama (1.2), la variable de integración t , es real. Si se toma a t como complejo, entonces la función $e^{(z-1)\log(t)-t}$ tiene un punto de ramificación en $t = 0$. Cortando el plano complejo a lo largo del semieje real desde $t = 0$ a $t = +\infty$ se tiene una función inyectiva. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Cauchy, la integral

$$\int_C t^{z-1} e^{-t} dt = \int_C e^{(z-1)\log(t)-t} dt$$

tiene el mismo valor para cualquier contorno C que corra alrededor del punto $t = 0$ con ambos extremos en $+\infty$.

Considere el siguiente contorno

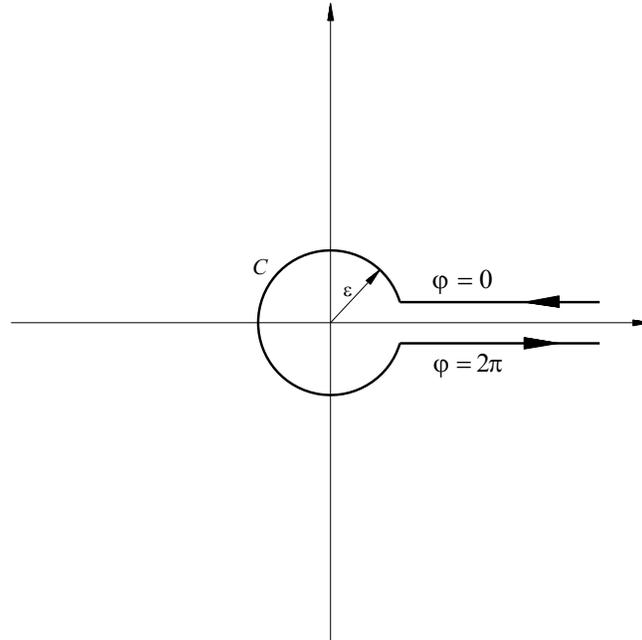


Figura 1.2: Contorno C .

El cual consiste de la parte superior del borde $(+\infty, \epsilon)$ del corte, el círculo C_ϵ de radio ϵ con centro en $t = 0$ y la parte inferior del corte del borde $(\epsilon, +\infty)$.

Tomando $\log(t)$ real en el corte superior del borde, se tiene

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}.$$

En el corte inferior del borde se reemplaza $\log(t)$ por $\log(t) + 2\pi i$, entonces

$$t^{z-1} = e^{(z-1)(\log(t)+2\pi i)} = e^{(z-1)\log(t)} e^{(z-1)2\pi i} = t^{z-1} e^{2(z-1)\pi i}.$$

Por lo tanto,

$$\int_C e^{-t}t^{z-t}dt = \int_{+\infty}^{\epsilon} e^{-t}t^{z-t}dt + \int_{C_{\epsilon}} e^{-t}t^{z-t}dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_{\epsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{z-t}dt.$$

Se muestra enseguida que la integral a lo largo de C_{ϵ} tiende a cero si $\epsilon \rightarrow 0$. Así, sea $z = x + iy$, y teniendo en cuenta que $|t| = \epsilon$ en C_{ϵ} , entonces se puede escribir

$$M = \max_{t \in C_{\epsilon}} |e^{-y \arg(t)-t}|,$$

donde M es independiente de t , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\epsilon}} e^{-t}t^{z-1}dt \right| &\leq \int_{C_{\epsilon}} |e^{-t}t^{z-1}| dt = \int_{C_{\epsilon}} |t^{x-1}| |e^{-y \arg(t)-t}| dt \\ &\leq M\epsilon^{x-1} \int_{C_{\epsilon}} dt = M\epsilon^{x-1} \cdot 2\pi\epsilon = 2\pi M\epsilon^x, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon}} e^{-t}t^{z-1}dt = 0$$

y

$$\int_C e^{-t}t^{z-t}dt = \int_{+\infty}^0 e^{-t}t^{z-t}dt + e^{2(z-1)\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-t}dt.$$

Usando (1.2) se obtiene

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-t}t^{z-1}dt. \quad (1.3)$$

Como se sabe la función $e^{2\pi iz} - 1$ tiene ceros en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Luego, los puntos $z = 1, 2, \dots$ no son polos de $\Gamma(z)$, por que en este caso la función $e^{-t}t^{z-1}$ es inyectiva y analítica en el plano complejo (respecto a t) y de acuerdo al teorema de Cauchy

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt = 0.$$

Si $z = 0, -1, -2, \dots$, entonces la función $e^{-t}t^{z-1}$ no es una función entera con respecto a t y la integral a lo largo de C no es igual a cero. Así, los polos de $\Gamma(z)$ son $z = 0, -1, -2, \dots$.

Integrales de contorno de la función $1/\Gamma(z)$

Lo que se hará ahora es dar representaciones integrales para $1/\Gamma(z)$. Así, para obtener una representación, se reemplaza z por $1 - z$ en (1.3), lo que resulta en

$$\int_C e^{-t}t^{-z}dt = (e^{-2z\pi i} - 1)\Gamma(1 - z), \quad (1.4)$$

entonces, haciendo la sustitución $t = \tau e^{\pi i} = -\tau$, el corte a lo largo del semieje real positivo en el plano complejo (t), se transforma a un corte a lo largo del semieje real negativo en el plano complejo (τ). El borde del corte inferior $\arg(\tau) = -\pi$ en el (τ)–plano corresponde a el borde del corte superior $t = 0$ en el (t)–plano. Así, el contorno C se transforma en el contorno de Hankel (Ha).

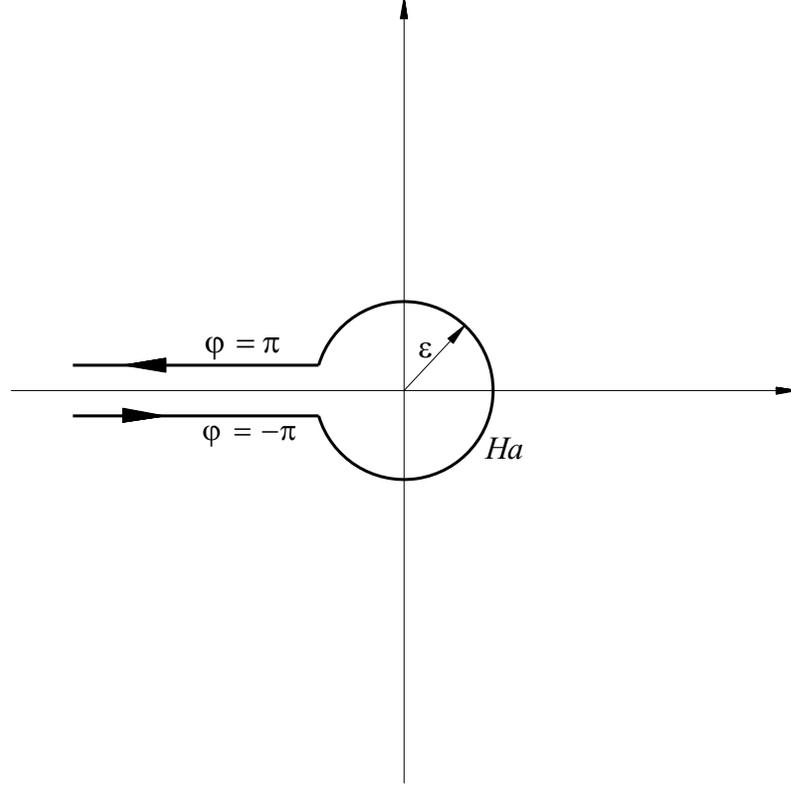


Figura 1.3: Contorno de Hankel.

Por lo tanto, se tiene

$$\int_C e^{-t} t^{-z} dt = - \int_{Ha} e^{\tau} (e^{\pi i} \tau)^{-z} d\tau = -e^{-z\pi i} \int_{Ha} e^{\tau} \tau^{-z} d\tau.$$

Usando las ecuaciones (1.1) y (1.4), se obtiene

$$\int_{Ha} e^{\tau} \tau^{-z} d\tau = (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i}) \Gamma(1-z) = 2i \operatorname{sen}(\pi z) \Gamma(1-z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}.$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente representación integral para la función recíproca de la función Gama:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\tau} t^{-z} d\tau. \quad (1.5)$$

Ahora, se denota por $\gamma(\epsilon, \varphi)$ ($\epsilon > 0$, $0 < \varphi \leq \pi$) al contorno que consiste de las siguientes partes:

1. $\arg \tau = -\varphi$, $|\tau| \geq \epsilon$;
2. $-\varphi \leq \arg \tau \leq \varphi$, $|\tau| = \epsilon$;
3. $\arg \tau = \varphi$, $|\tau| \geq \epsilon$.

El contorno se traza de tal manera que el $\arg \tau$ sea no decreciente. Quedando como se muestra enseguida

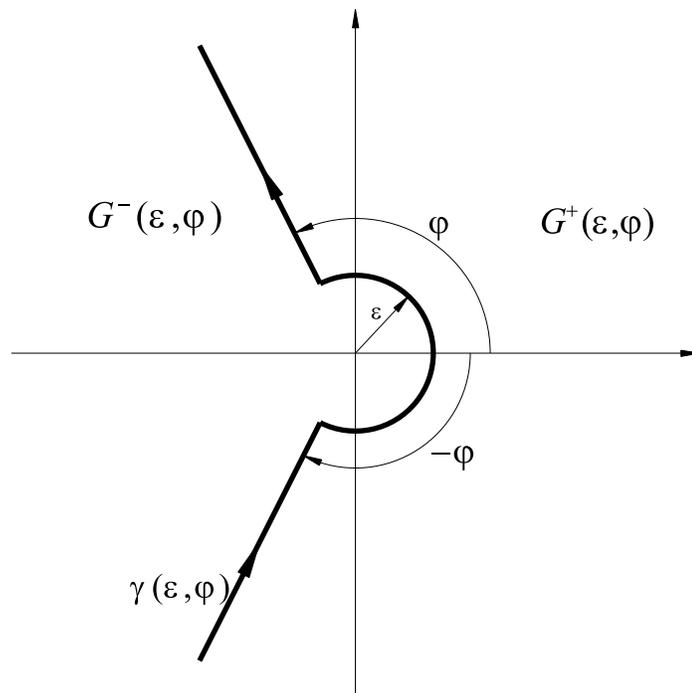


Figura 1.4: Contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$.

Como se puede observar, el contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$ divide el plano complejo τ en dos dominios, que se denotan por $G^-(\epsilon, \varphi)$ y $G^+(\epsilon, \varphi)$ que están respectivamente en el lado izquierdo y derecho del contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$.

Si $0 < \varphi < \pi$, entonces $G^-(\epsilon, \varphi)$ y $G^+(\epsilon, \varphi)$ son dominios infinitos. Si $\varphi = \pi$, entonces $G^-(\epsilon, \varphi)$ se convierte en el círculo $|\tau| < \epsilon$ y $G^+(\epsilon, \varphi)$ se convierte en el plano complejo, excepto el círculo $|\tau| < \epsilon$ y la línea $|\arg \varphi| = \pi$.

A continuación, se ilustra una transformación de contornos, del contorno de Hankel al contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$:

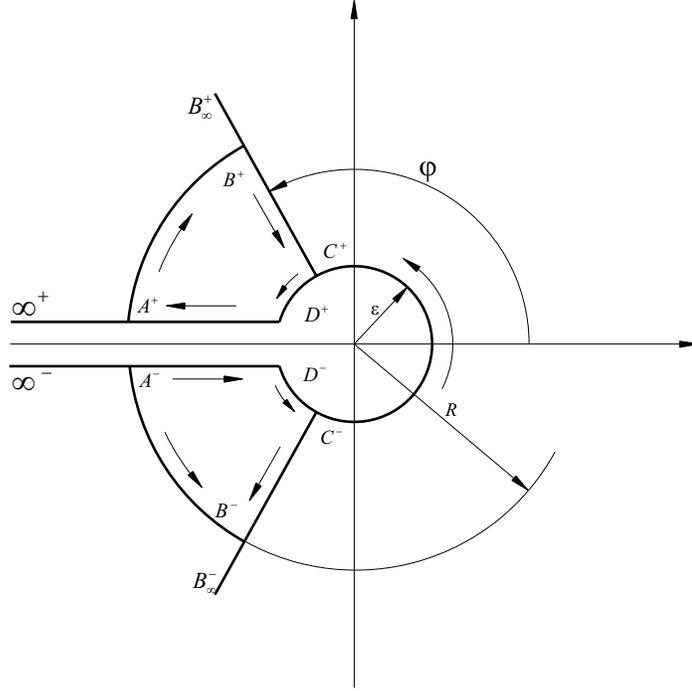


Figura 1.5: Transformación del contorno Ha al contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$.

Por lo que, se puede integrar a lo largo del contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$ en (1.5), donde $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, es decir, se tiene que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\epsilon, \varphi)} e^{\tau} \tau^{-z} d\tau, \quad (\epsilon > 0, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi).$$

Ahora, con $\alpha < 2$, se sustituye $\tau = \zeta^{1/\alpha}$ en la ecuación anterior y dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se llega a la siguiente representación integral

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{\gamma(\epsilon, \mu)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-z-\alpha)/\alpha} d\zeta, \quad (\alpha < 2, \quad \frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}). \quad (1.6)$$

1.2.2. Función de Mittag-Leffler

Durante los últimos años el interés por estudiar funciones de Mittag-Leffler ha crecido debido a su potencial en problemas de aplicación. La función de Mittag-Leffler se puede entender como una generalización de la función exponencial, la cual con frecuencia es usada en la solución de ecuaciones diferenciales de orden entero. Así, la función de Mittag-Leffler resulta de manera natural en la solución de ecuaciones integrales de orden fraccionario o ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Aquí, solamente se da la definición de la función y se mencionan algunas ejemplos y resultados.

Definición y relación con otras funciones

La función de Mittag-Leffler fue introducida por G. M. Mittag-Leffler en [12].

Definición 1.2.7 *La función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ con $\alpha > 0$ es definida por la siguiente serie de potencias, válida en todo el plano complejo:*

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

Después Agarwal en [13] da una generalización de la función.

Definición 1.2.8 *La función de Mittag-Leffler en dos parámetros está definida por la serie de potencias*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

Algunos casos especiales de funciones de Mittag-Leffler son las siguientes:

- $E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$
- $E_1(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$
- $E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$
- $E_2(-z^2) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C}.$
- $E_4(z) = \frac{1}{2} \left[\cos(z^{\frac{1}{4}}) + \cosh(z^{\frac{1}{4}}) \right], \quad z \in \mathbb{C}.$
- $E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$
- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Representaciones asintóticas de Mittag-Leffler

A continuación se dan algunas fórmulas de representaciones asintóticas de $E_{\alpha,\beta}$ en forma de teoremas. El contorno $\gamma(\epsilon, \varphi)$ y los dominios $G^-(\epsilon, \varphi)$ y $G^+(\epsilon, \varphi)$ que se usan, son los que se usaron anteriormente.

Teorema 1.2.9 Sean $0 < \alpha < 2$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Entonces para un $\epsilon > 0$ arbitrario y μ tal que

$$\pi\alpha/2 < \mu \leq \min\{\pi, \pi\alpha\}, \quad (1.9)$$

entonces se tiene

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon,\mu)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^-(\epsilon, \mu), \quad (1.10)$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon,\mu)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^+(\epsilon, \mu). \quad (1.11)$$

Demostración.

Se $|z| < \epsilon$, entonces

$$\left| \frac{z}{\zeta} \right| < 1, \quad \zeta \in \gamma(\epsilon, \varphi).$$

Usando la definición de la función Mittag-Leffler dada en (1.8) y la representación integral de la función $1/\Gamma(z)$ dada por (1.6) y teniendo en cuenta la desigualdad anterior, entonces para $\alpha < 2$ y $|z| < \epsilon$ se tiene

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\alpha\pi i} \left(\int_{\gamma(\epsilon,\mu)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha - k - 1} d\zeta \right) z^k \\ &= \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon,\mu)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha - 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon,\mu)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

De la condición (1.9) se tiene que la última integral de la ecuación anterior converge absolutamente y define una función de z , analítica en $G^-(\epsilon, \mu)$ y $G^+(\epsilon, \mu)$.

Por otra parte, para cada $\mu \in (\pi\alpha/2, \min\{\pi, \pi\alpha\})$ el círculo $|z| < \epsilon$ está en $G^-(\epsilon, \mu)$. Por lo tanto, de acuerdo con el principio de continuación analítica, la integral (1.12) es igual a

$E_{\alpha,\beta}$ no sólo en el círculo $|z| < \epsilon$, pero esto sucede en $G^-(\epsilon, \mu)$, por lo que se tiene la fórmula (1.10).

Ahora, para $z \in G^+(\epsilon, \mu)$, tomese un ϵ_1 arbitrario tal que $\epsilon_1 > |z|$, entonces se tiene $z \in G^-(\epsilon_1, \mu)$, y usando la fórmula (1.10), entonces

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon_1, \mu)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.13)$$

Por otra parte, si $\epsilon < |z| < \epsilon_1$ y $-\mu < \arg(z) < \mu$, entonces por el teorema de Cauchy se tiene

$$\frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\epsilon_1, \mu) - \gamma(\epsilon, \mu)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha} \zeta^{(1-\beta)/\alpha}}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}},$$

así, combinando la ecuación anterior y la ecuación (1.13) se obtiene la representación integral (1.11).

◇

Usando el teorema anterior se establecen las siguientes formulas asintóticas.

Teorema 1.2.10 Si $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ arbitrario y μ un número real arbitrario tal que

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\},$$

entonces para un entero $p \geq 1$ arbitrario se obtiene la siguiente expansión

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg(z)| \leq \mu.$$

Demostración

Tome φ de tal manera que se cumpla

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \varphi \leq \min\{\pi, \pi\alpha\}. \quad (1.14)$$

Tomando ahora $\epsilon = 1$ y sustituyendo la expresión

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k=1}^p \frac{\zeta^{k-1}}{z^k} + \frac{\zeta^p}{z^p(\zeta - z)}$$

en la ecuación (1.11) del Teorema 1.2.9, se obtiene la siguiente expresión para la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ en el dominio $G^+(1, \varphi)$ (es decir, en el lado derecho del contorno $\gamma(1, \varphi)$):

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{\gamma(1, \varphi)} e^{\zeta^{1/\alpha} \zeta^{(1-\beta)/\alpha + k - 1}} d\zeta \right) z^{-k} + \frac{1}{2\pi\alpha i z^p} \int_{\gamma(1, \varphi)} e^{\zeta^{1/\alpha} \zeta^{(1-\beta)/\alpha + p}} d\zeta. \quad (1.15)$$

La primera integral de la relación anterior puede ser evaluada con la ayuda de la fórmula (1.6):

$$\frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{\gamma(1,\varphi)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha+k-1} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)}, \quad (k \geq 1).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.15) y tomando en cuenta la condición (1.14), se obtiene:

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \frac{1}{2\pi\alpha i z^p} \int_{\gamma(1,\varphi)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha+p} d\zeta, \quad (1.16)$$

donde $|\arg(z)| \leq \mu$, $|z| > 1$. Ahora, sigue estimar la integral

$$I_p(z) = \frac{1}{2\pi\alpha i z^p} \int_{\gamma(1,\varphi)} e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{(1-\beta)/\alpha+p} d\zeta$$

para un $|z|$ grande y $|\arg(z)| \leq \mu$. Así,

$$\min_{\zeta \in \gamma(1,\varphi)} |\zeta - z| = |z| \operatorname{sen}(\varphi - \mu),$$

y por lo tanto para un $|z|$ grande y $|\arg(z)| \leq \mu$ se tiene

$$|I_p(z)| \leq \frac{|z|^{-1-p}}{2\pi\alpha \operatorname{sen}(\varphi - \mu)} \int_{\gamma(1,\varphi)} |e^{\zeta^{1/\alpha}}| |\zeta^{(1-\beta)/\alpha+p}| d\zeta. \quad (1.17)$$

La integral del lado derecho converge, pues para ζ tal que $\arg(\zeta) = \pm\varphi$ y $|\varphi| \geq 1$ es valido

$$|e^{\zeta^{1/\alpha}}| = e^{|\zeta|^{1/\alpha} \cos(\frac{\varphi}{\alpha})},$$

donde $\cos(\varphi/\alpha) < 0$ debido a la condición (1.14). Finalmente combinando la ecuación (1.16) y la estimación (1.17) se obtiene la fórmula deseada.

◇

Teorema 1.2.11 Si $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ arbitrario y μ un número real tal que

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}, \quad (1.18)$$

entonces para un entero $p \geq 1$ arbitrario se obtiene la siguiente expansión:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

Demostración

Sea

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \varphi < \min\{\pi, \pi\alpha\}.$$

Tome $\epsilon = 1$ en la ecuación (1.10) del Teorema 1.2.9 y usando

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k=1}^p \frac{\zeta^{k-1}}{z^k} + \frac{\zeta^p}{z^p(\zeta - z)},$$

se obtiene

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + I_p(z), \quad z \in G^-(1, \varphi), \quad (1.19)$$

donde I_p es el mismo que en el teorema anterior. Ahora, para un $|z|$ grande, tal que $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$, lo siguiente es valido:

$$\min_{\zeta \in \gamma(1, \varphi)} |\zeta - z| = |z| \sin(\varphi - \mu).$$

Adicionalmente, se tiene que $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$ está en $G^-(1, \varphi)$, por lo que la ecuación (1.19) se cumple en $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$. Por lo tanto, para un $|z|$ grande se tiene la estimación

$$|I_p(z)| \leq \frac{|z|^{-1-p}}{2\pi\alpha \sin(\varphi - \mu)} \int_{\gamma(1, \varphi)} |e^{\zeta^{1/\alpha}}| |\zeta^{(1-\beta)/\alpha+p}| d\zeta,$$

para $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$. Así, combinando la ecuación (1.19) y la estimación anterior, se obtiene la fórmula deseada.

◇

Los siguientes teoremas que dan estimaciones del comportamiento de la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ en diferentes partes del plano complejo, son una consecuencia de los dos últimos teoremas.

Teorema 1.2.12 Sean $\alpha < 2$, β un número real arbitrario, μ con la condición

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$$

y C_1 y C_2 constantes reales, entonces

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq C_1(1 + |z|)^{(1-\beta)/\alpha} e^{Re(z^{1/\alpha})} + \frac{C_2}{1 + |z|}, \quad |\arg(z)| \leq \mu.$$

Teorema 1.2.13 Si $\alpha < 2$, β es un número real arbitrario, μ es tal que $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ y C es una constante real, entonces

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad \mu \leq |\arg z| \leq \pi.$$

1.3. Operadores fraccionarios

En los últimos años el auge del cálculo fraccionario ha ido en aumento, pues ha sido punto de intersección de distintas teorías, tales como la de ecuaciones integro-diferenciales, funciones especiales, transformadas, análisis numérico, teoría de probabilidades y procesos estocásticos.

Las ecuaciones diferenciales que involucran derivadas de orden fraccionario son temas de gran interés debido a sus aplicaciones en diferentes disciplinas. Cabe mencionar que aunque los operadores fraccionarios son una generalización de los ordinarios, estos pierden algunas propiedades importantes, como la inexistencia de una interpretación geométrica y física, entre otras.

Lo que se hará ahora es dar las herramientas necesarias para posteriormente definir la derivada fraccionaria.

Como es de esperarse es necesario definir un espacio sobre el cual se aplicaran los operadores.

Definición 1.3.1 Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se denota por $L^1[a, b]$ el espacio de todas las funciones Lebesgue medibles sobre $[a, b]$, acotadas, es decir,

$$L^1[a, b] := \left\{ q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : q \text{ medible sobre } [a, b] \text{ y } \int_a^b |q(x)| dx < \infty \right\}.$$

Se define la norma de este espacio como

$$\|q\|_1 = \int_a^b |q(x)| dx.$$

Con tal norma $L^1[a, b]$ es un espacio de Banach.

El siguiente operador se puede considerar como una pieza fundamental, base para la construcción de las derivadas fraccionarias.

Definición 1.3.2 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el operador J^α sobre $L^1[0, b]$ definido por

$$J^\alpha q(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (x-t)^{\alpha-1} q(t) dt,$$

para $0 \leq x \leq b$, es llamado, operador integral fraccionario de orden α de Riemman-Liouville.

Para $\alpha = 0$ se considera a $J^0 q(x) = I$ como el operador identidad.

Se puede notar que si $\alpha \geq 1$ la integral $J^\alpha q(x)$ existe para cualquier $x \in [0, b]$. Sin embargo, si $0 < \alpha < 1$, la existencia no es tan obvia. El siguiente resultado justifica la existencia de la definición del operador integral.

Teorema 1.3.3 *Sea $q \in L^1[0, b]$ y $\alpha > 0$, entonces la integral $J^\alpha q(x)$ existe para todo $x \in [0, b]$ y además $J^\alpha q \in L^1[0, b]$.*

Demostración.

Considere lo siguiente

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} q(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-t) \phi_2(t) dt,$$

donde

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{\alpha-1}, & \text{para } 0 < u \leq b, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\phi_2(u) = \begin{cases} q(u), & \text{para } 0 < u \leq b, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

observe que $\phi_1, \phi_2 \in L^1\{\mathbb{R}\}$. Así, se tiene convolución entre ϕ_1 y ϕ_2 , con lo que se cumple lo deseado.

◇

Algo que es de interés, es ver que sucede cuando α se va acercando a cero en el operador, por lo que se da el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 *Sea $\alpha > 0$ y $\phi \in L^1[0, b]$, entonces*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J^\alpha \phi(x) = \phi(x)$$

casi en todas partes sobre $[0, b]$.

Demostración.

Aplicando integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} J^\alpha \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt \\ &= -\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\phi(t)(x-t)^\alpha \Big|_0^x - \int_0^x (x-t)^\alpha \phi'(t) dt \right] \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-\phi(0)(x)^\alpha - \int_0^x (x-t)^\alpha \phi'(t) dt \right], \end{aligned}$$

haciendo que $\alpha \rightarrow 0$, se obtiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J^\alpha \phi(x) = \phi(0) + \int_0^x \phi'(t) dt = \phi(x).$$

◇

Una de las propiedades más importantes del operador integral de Riemann-Liouville es el siguiente:

Teorema 1.3.5 Sean $\alpha, \beta \geq 0$ y $\phi \in L^1[0, b]$, entonces

$$J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta} \phi,$$

casi en todas partes sobre $[0, b]$. Si además $\phi \in C[0, b]$ o $\alpha + \beta \geq 1$, entonces se cumple sobre todo $[0, b]$.

Demostración.

Por definición se tiene

$$J^\alpha J^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) d\tau dt,$$

dado que la integral existe, entonces por el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} \phi(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \phi(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-u)]^{\alpha-1} [u(x-\tau)]^{\beta-1} du d\tau, \end{aligned}$$

con $t = \tau + u(x - \tau)$. Luego,

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

por lo que finalmente se tiene

$$J^\alpha J^\beta \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x \phi(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = J^{\alpha+\beta} \phi(x),$$

casi en todas partes sobre $[0, b]$. Por otra parte, si $\phi \in C[0, b]$, entonces también $J^\beta \phi \in C[0, b]$ y por lo tanto $J^\alpha J^\beta \phi, J^{\alpha+\beta} \phi \in C[0, b]$. Dado que estas funciones son continuas e iguales casi en todas partes sobre $[0, b]$, entonces resultan iguales sobre todo $[0, b]$.

Ahora, si $\phi \in L^1[0, b]$ y $\alpha + \beta \geq 1$, entonces

$$J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta+1-1} \phi = J^{\alpha+\beta-1} J^1 \phi$$

casi en todas partes sobre $[0, b]$, dado que $J^1 \phi$ es continua, entonces $J^{\alpha+\beta-1} J^1 \phi$ también lo es, por lo tanto, $J^\alpha J^\beta \phi = J^{\alpha+\beta} \phi$ sobre todo $[0, b]$.

◇

Un resultado inmediato del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 1.3.6 *Con las mismas hipótesis de teorema anterior se tiene que*

$$J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha.$$

Una vez definido el operador integral de Riemann-Liouville, se procede a definir las derivadas fraccionarias. Se considera a $D^{(n)}$ como el operador derivada de orden n .

Definición 1.3.7 *La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in (0, 1)$ está definida por el operador*

$$\mathfrak{D}^\alpha q = D^1 J^{1-\alpha} q.$$

Esto es

$$\mathfrak{D}^\alpha q(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{q(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

Definición 1.3.8 *La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1)$ está definida por el operador*

$$\mathcal{D}^\alpha q = J^{1-\alpha} D^1.$$

Esto es

$$\mathcal{D}^\alpha q(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{q_\tau(x)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (1.20)$$

De la definición de las derivadas, se puede notar que estas cumplen la propiedad de linealidad.

Aunque no se hará hincapié en las propiedades de las derivadas, puede observarse que estas no son similares y se obtendrán en ocasiones resultados diferentes de acuerdo en como y donde se apliquen.

1.4. Transformada de Laplace

Las transformadas son una herramienta útil al momento de resolver ecuaciones diferenciales, ya que al usarlas se llega a ecuaciones que son fáciles de resolver. En este trabajo se hará uso de la transformada de Laplace.

Definición 1.4.1 Sea q una función definida en $0 \leq x < \infty$, la transformada de Laplace de la función q se define como

$$\widehat{q}(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} q(x) dx,$$

para $0 < s < \infty$.

Teorema 1.4.2 (Criterio de la existencia) Supongase que q es una función definida en $0 \leq x < \infty$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Cada intervalo finito $[0, b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos $[0, b_1], [b_1, b_2], \dots, [b_{n-1}, b]$, tales que, q es continua en $[b_{k-1}, b_k]$ y $\lim_{x \rightarrow b_{k-1}^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b_k^-} f(x)$ existen y son finitos.
2. Existen constantes, $a \in \mathbb{R}$ y $M > 0$, tales que

$$|f(x)| \leq M e^{ax},$$

para $0 \leq x < \infty$. Entonces q tiene transformada de Laplace definida en el intervalo $0 < s < \infty$.

Demostración.

Por la segunda propiedad se tiene que

$$\int_0^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-sx} M e^{ax} dx = M \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx,$$

luego, por la primera condición se tiene que $\int_0^b e^{-sx} f(x) dx$ existe para todo $b > 0$, así,

$$\int_0^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \leq \frac{M}{s-a},$$

para $a < s < \infty$.

◇

Algunas propiedades básicas de la transformada, que son de gran utilidad en el desarrollo de soluciones de ecuaciones diferenciales son las siguientes:

Teorema 1.4.3 Sean q y f funciones continuas por tramos de orden exponencial en $0 \leq x < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$1. (\widehat{aq + f})(s) = a\widehat{q}(s) + \widehat{f}(s)$$

$$2. \widehat{q^{(n)}}(s) = s^n \left(\widehat{q}(s) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{(m)}(0)}{s^{m+1}} \right)$$

$$3. (\widehat{q * f})(s) = \widehat{q}(s) \cdot \widehat{f}(s), \text{ donde } (q * f)(x) = \int_0^x q(t)f(x-t)dt.$$

Demostración.

- La primera propiedad se obtiene directamente de la definición.
- Para la segunda propiedad se usara inducción sobre n . Note que, por hipótesis, las funciones son de orden exponencial, entonces para $n = 1$ se tiene

$$\widehat{q'}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} q'(x) dx = e^{-sx} q(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} q(x) dx = -q(0) + s\widehat{q}(s).$$

Ahora supongamos que se cumple para n , entonces se cumple que

$$\widehat{q^{(n)}}(s) = s^n \left(\widehat{q}(s) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{(m)}(0)}{s^{m+1}} \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \widehat{q^{(n+1)}}(s) &= \widehat{(q^{(n)})'}(s) \\ &= s\widehat{q^{(n)}}(s) - q^{(n)}(0) \\ &= s \left(s^n \left(\widehat{q}(s) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{(m)}(0)}{s^{m+1}} \right) \right) - q^{(n)}(0) \\ &= s^{n+1} \left(\widehat{q}(s) - \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{(m)}(0)}{s^{m+1}} + \frac{q^{(n)}(0)}{s^{n+1}} \right) \right) \\ &= s^{n+1} \left(\widehat{q}(s) - \sum_{m=0}^n \frac{q^{(m)}(0)}{s^{m+1}} \right), \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la tesis de inducción.

- Para la tercera propiedad se tiene por definición

$$\begin{aligned} \widehat{q}(s)\widehat{f}(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-sx} q(x) dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-sy} f(y) dx \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} q(x)f(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-st} q(t-y)f(y) dx dy \quad [\text{haciendo } t = x + y]. \end{aligned}$$

Haciendo la integración sobre el conjunto

$$\{(t, y) : 0 \leq y < \infty, y \leq t < \infty\} = \{(t, y) : 0 \leq t < \infty, t \leq y < \infty\},$$

y por el teorema de Fubini se tiene

$$\widehat{q}(s)\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t q(t-y)f(y)dydt = \widehat{(q * f)}(s).$$

◇

Como es de esperarse, una vez definida la transformada de Laplace, se puede definir su transformada inversa.

Definición 1.4.4 Una función Q definida sobre $a < s < \infty$, tiene transformada inversa de Laplace, si existe una función q , definida en $0 \leq x < \infty$, tal que

$$\widehat{q}(s) = Q(s).$$

En este caso se dice que q es la transformada inversa de Laplace de Q y se denota por $\widehat{Q}^{-1}(x)$.

Algunas propiedades de la transformada inversa de Laplace que se derivan de las propiedades de la transformada de Laplace ya mencionadas, son las siguientes: Sean q y f funciones que tienen transformada inversa de Laplace, entonces

1. $\widehat{(aq + f)}^{-1}(x) = a\widehat{q}^{-1}(x) + \widehat{f}^{-1}(x)$.
2. $\widehat{\int_s^\infty q(\tau)d\tau}^{-1}(x) = \frac{1}{x}\widehat{q}^{-1}(x)$.
3. $\widehat{qf}^{-1}(x) = \widehat{q}^{-1}(x) * \widehat{f}^{-1}(x)$.

Dado que el trabajo hace uso de una derivada fraccionaria entonces se dan los siguientes resultados.

La transformada de Laplace, para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville está dada por

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha q}(s) = s^\alpha \widehat{q} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [\mathfrak{D}^{\alpha-k-1} q(x)]_{x=0}, \quad \text{con } n = [\alpha]$$

y la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo por

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha q}(s) = s^\alpha \widehat{q} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} q^{(n)}(0), \quad \text{con } n = [\alpha].$$

En este trabajo se usara una traslación de la transformada de Laplace definida como sigue:

Definición 1.4.5 *La transformada de Fourier-Laplace está definida por*

$$\widehat{q}(k, t) = \int_0^{\infty} e^{-ikx} q(x, t) dx, \quad \text{Im}(k) < 0.$$

La transformada inversa de Fourier-Laplace es

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{q}(k, t) dk.$$

Ahora, se afirma una importante relación entre la transformada de Fourier-Laplace y la función Mittag-Leffler, la prueba puede verse en [14].

Lema 1.4.6 *La siguiente formula es verdadera*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \frac{(is)^{\alpha-\beta}}{(is)^{\alpha} - z} ds = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}), \quad |z/(is)^{\alpha}| < 1,$$

donde $\text{Re}(z) \leq 0$, $\beta > 0$ and $0 < \alpha < 1$.

Ecuación de Black-Scholes

En este capítulo, se construye una representación integral de la solución de la ecuación de Black-Scholes clásica, usando el Método de Fokas y posteriormente usando las ideas de dicho método se construye una solución integral para una ecuación de Black-Scholes generalizada con derivada fraccionaria en el tiempo.

2.1. Ecuación de Black-Scholes clásica

En esta sección, haciendo un cambio de variables se lleva la ecuación de Black-Scholes con coeficientes variables a una ecuación diferencial con coeficientes constantes, posteriormente utilizando el Método de Fokas se construye la función de Green de la ecuación obtenida.

Como se ha mencionado antes la ecuación de Black-Scholes está dada por

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (S, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T], \quad (2.1)$$

tomese a r y σ constantes y considere el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} V(S, \tau) &= Kv(x, t), \\ S &= Ke^x, \quad x \geq 0, \\ t &= (T - \tau)\sigma^2/2. \end{aligned}$$

Usando este cambio de variables y utilizando la regla de la cadena en las derivadas de $V(S, \tau)$

se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau} &= K \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = -K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial t}, \\
\frac{\partial V}{\partial S} &= K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \ln(S/K) = \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \left(\frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.1), se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v,$$

haciendo $a = \frac{2r}{\sigma^2} - 1$ y $b = -\frac{2r}{\sigma^2}$, se tiene

$$v_t = v_{xx} + av_x + bv.$$

Lo que sigue ahora es implementar el Método de Fokas para construir la función de Green.

Así, aplicando la transformada de Fourier-Laplace a v , se tiene

$$\widehat{v}(k, t) = \int_0^\infty e^{-ikx} v(x, t) dx,$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\widehat{v}(k, t)) &= \frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-ikx} v(x, t) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-ikx} \frac{d}{dt} v(x, t) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-ikx} (v_{xx}(x, t) + av_x(x, t) + bv(x, t)) dx \\
&= \widehat{v}_{xx}(k, t) + a\widehat{v}_x(k, t) + b\widehat{v}(k, t).
\end{aligned}$$

Usando propiedades de la transformada, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_t(k, t) &= -k^2 \widehat{v}(k, t) - ikv(0, t) - v_x(0, t) + a(ik\widehat{v}(k, t) - v(0, t)) + b\widehat{v}(k, t) \\
&= \widehat{v}(k, t)(-k^2 + iak + b) - v_x(0, t) - (ik + a)v(0, t)
\end{aligned}$$

Así,

$$\widehat{v}_t(k, t) = -p(k)\widehat{v}(k, t) - v_x(0, t) - (ik + a)v(0, t), \tag{2.2}$$

donde $p(k) = k^2 - iak - b$.

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{p(k)\zeta} \widehat{v}_\zeta(k, \zeta) d\zeta &= \int_0^t e^{p(k)\zeta} d\widehat{v}(k, \zeta) d\zeta \\ &= e^{p(k)\zeta} \widehat{v}(k, \zeta) \Big|_0^t - \int_0^t p(k) e^{p(k)\zeta} \widehat{v}(k, \zeta) d\zeta \\ &= e^{p(k)t} \widehat{v}(k, t) - \widehat{v}(k, 0) - \int_0^t p(k) e^{p(k)\zeta} \widehat{v}(k, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^t e^{p(k)\zeta} (\widehat{v}_\zeta(k, \zeta) + p(k) \widehat{v}(k, \zeta)) d\zeta = e^{p(k)t} \widehat{v}(k, t) - \widehat{v}(k, 0). \quad (2.3)$$

Ahora, de la ecuación (2.2) se obtiene

$$\widehat{v}_t(k, t) + p(k) \widehat{v}(k, t) = -v_x(0, t) - (ik + a)v(0, t),$$

entonces

$$\int_0^t e^{p(k)\zeta} (\widehat{v}_\zeta(k, \zeta) + p(k) \widehat{v}(k, \zeta)) d\zeta = \int_0^t e^{p(k)\zeta} (-v_\zeta(0, \zeta) - (ik + a)v(0, \zeta)) d\zeta,$$

así, por la ecuación (2.3) se tiene

$$e^{p(k)t} \widehat{v}(k, t) - \widehat{v}(k, 0) = \int_0^t e^{p(k)\zeta} (-v_x(0, \zeta) - (ik + a)v(0, \zeta)) d\zeta,$$

por lo tanto

$$e^{p(k)t} \widehat{v}(k, t) = \widehat{v}(k, 0) - \widetilde{g}_1(p(k), t) - (ik + a) \widetilde{g}_0(p(k), t),$$

donde

$$\widetilde{g}_0(p(k), t) = \int_0^t e^{p(k)\zeta} v(0, \zeta) d\zeta \quad \text{y} \quad \widetilde{g}_1(p(k), t) = \int_0^t e^{p(k)\zeta} \frac{\partial}{\partial x} v(0, \zeta) d\zeta.$$

Luego

$$\widehat{v}(k, t) = -e^{-p(k)t} \widetilde{g}_1(p(k), t) - e^{-p(k)t} (ik + a) \widetilde{g}_0(p(k), t) + e^{-p(k)t} \widehat{v}(k, 0). \quad (2.4)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier-Laplace a la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - p(k)t} \widehat{v}(k, 0) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - p(k)t} \widetilde{g}_1(p(k), t) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - p(k)t} (ik + a) \widetilde{g}_0(p(k), t) dk. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por otro lado, observe la región de la siguiente imagen:

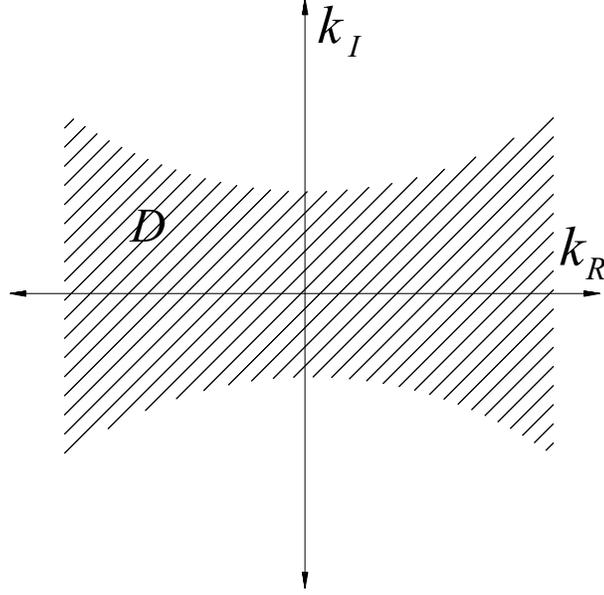


Figura 2.1: $D = \left\{ k = k_R + ik_I \in \mathbb{C} : \left(k_I - \frac{a}{2}\right)^2 - k_R^2 < \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 \right\}$.

Note que, si $k \in D$ entonces $\text{Re}(-p(k)) < 0$, así, las integrales anteriores convergen absolutamente. Por lo tanto, usando el teorema de Cauchy, podemos deformar el contorno de integración a ∂D en (2.5), obteniendo

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-p(k)t} \widehat{v}(k, 0) dk \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)t} \widetilde{g}_1(p(k), t) dk \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)t} (ik + a) \widetilde{g}_0(p(k), t) dk.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $k \mapsto -k + ia$ en (2.4) y dado que $p(k)$ es invariante bajo este cambio, se tiene

$$e^{-p(k)t} \widetilde{g}_1(p(k), t) = e^{-p(k)t} (ik) \widetilde{g}_0(p(k), t) + e^{-p(k)t} \widehat{v}(-k + ia, 0) - \widehat{v}(-k + ia, t). \tag{2.7}$$

Tomando en cuenta que por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} \widehat{v}(-k + ia, t) dk = 0,$$

entonces, sustituyendo \tilde{g}_1 de la ecuación (2.7) en (2.6), se obtiene

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-p(k)t} \widehat{v}(k, 0) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)t} \widehat{v}(-k + ia, 0) dk \\ &\quad - \frac{a}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)t} \tilde{g}_0(p(k), t) dk. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Fubini, se llega a la solución integral

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)-p(k)t} v_0(y) dk dy \\ &\quad - \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ik(x+y)+ay-p(k)t} v_0(y) dk dy \\ &\quad - \int_0^t \frac{a}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)(t-\zeta)} g_0(\zeta) dk d\zeta, \end{aligned}$$

o bien,

$$v(x, t) = \int_0^{\infty} G^I(x, y, t) v_0(y) dy + \int_0^t G^B(x, t - \zeta) g_0(\zeta) d\zeta,$$

donde

$$\begin{aligned} G^I(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)-p(k)t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ik(x+y)+ay-p(k)t} dk \\ G^B(x, t - \zeta) &= -\frac{a}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx-p(k)(t-\zeta)} dk. \end{aligned}$$

2.2. Ecuación del tipo Black-Scholes con derivada fraccionaria

En esta sección, se usaran las ideas del Método de Fokas, para construir la función de Green de una variante de la ecuación de Black-Scholes en la cual se tiene una derivada fraccionaria en el tiempo.

De igual manera como se inicio en el capítulo anterior, en la ecuación de Black-Scholes considere el cambio de variables

$$\begin{aligned} V(S, \tau) &= kq(x, t) \\ S &= ke^x \\ \tau &= T - t, \end{aligned}$$

con $k > 0$ una constante. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tau} &= -kq_t(x, t) \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{k}{S}q_x(x, t) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{-k}{S^2}q_x(x, t) + \frac{k}{S^2}q_{xx}(x, t),\end{aligned}$$

sustituyendo en (2.1) se obtiene

$$q_t = aq_{xx} + (b - a)q_x - bq,$$

donde $a = \frac{1}{2}\sigma^2$, $b = r$. Entonces, se considera un problema de valor inicial y de frontera

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha q(x, t) = aq_{xx}(x, t) + (b - a)q_x(x, t) - bq(x, t), & x > 0, t \in [0, T], \\ q(x, 0) = q_0(x), & x > 0, \\ q(0, t) = g_0(t), & t > 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde \mathcal{D}_t^α es la derivada fraccionaria de Caputo definida por (1.20).

Se procede a continuación, a aplicar las ideas del Método de Fokas. Así, aplicando la derivada fraccionaria de Caputo a la transformada de Fourier-Laplace de $q(x, t)$, respecto a x , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t^\alpha \widehat{q}(k, t) &= \int_0^\infty e^{-ikx} \mathcal{D}_t^\alpha q(x, t) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-ikx} (aq_{xx}(x, t) + (b - a)q_x(x, t) - bq(x, t)) dx \\ &= -ak^2 \widehat{q}(k, t) - iakq(0, t) - aq_x(0, t) + i(b - a)k \widehat{q}(k, t) - (b - a)q(0, t) - b \widehat{q}(k, t) \\ &= (-ak^2 + ibk - iak - b) \widehat{q}(k, t) - aq_x(0, t) + (a - b - iak)q(0, t),\end{aligned}$$

así,

$$\mathcal{D}_t^\alpha \widehat{q}(k, t) = p(k) \widehat{q}(k, t) - aq_x(0, t) + (a - b - iak)q(0, t),$$

donde $p(k) = -ak^2 + i(b - a)k - b$. Ahora, aplicando la transformada de Fourier-Laplace respecto a t en la ecuación anterior, se obtiene

$$(is)^\alpha \widehat{q}(k, s) - (is)^{\alpha-1} \widehat{q}(k, 0) = p(k) \widehat{q}(k, s) - a \widehat{q}_x(0, s) + (a - b - iak) \widehat{q}(0, s),$$

esto es,

$$\widehat{q}(k, s) = \frac{1}{(is)^\alpha - p(k)} \left((is)^{\alpha-1} \widehat{q}_0(k) - a \widehat{q}_x(0, s) + (a - b - iak) \widehat{q}(0, s) \right).$$

Entonces, usando la transformada inversa de Fourier-Laplace en la ecuación anterior respecto a t y el Lema 1.4.6, se llega a

$$\begin{aligned}
\widehat{q}(k, t) &= (t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)t^\alpha)) * \left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \widehat{q}(k, 0) - a q_x(0, t) + (a - b - iak) q(0, t) \right) \\
&= \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) \frac{\xi^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \widehat{q}(k, 0) d\xi \\
&\quad - a \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) q_x(0, \xi) d\xi \\
&\quad + (a - b - iak) \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) q(0, \xi) d\xi,
\end{aligned}$$

donde $E_{\alpha, \beta}(z)$ es como en la definición (1.8), además no es difícil verificar que se cumple que

$$\int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) \frac{\xi^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} d\xi = E_{\alpha, 1}(p(k)t^\alpha).$$

Así

$$\widehat{q}(k, t) = E_{\alpha, 1}(p(k)t^\alpha) \widehat{q}_0(k) - a \widetilde{g}_1(p(k), t) + (a - b - iak) \widetilde{g}_0(p(k), t), \quad (2.9)$$

con

$$\widetilde{g}_0(p(k), t) = \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) q(0, \xi) d\xi$$

y

$$\widetilde{g}_1(p(k), t) = \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) q_x(0, \xi) d\xi.$$

Finalmente, aplicando la transformada inversa de Fourier-Laplace en (2.9) respecto a x , se llega a la representación integral de la solución

$$\begin{aligned}
q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_{\alpha, 1}(p(k)t^\alpha) \widehat{q}_0(k) dk \\
&\quad - \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widetilde{g}_1(p(k), t) dk \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (a - b - iak) \widetilde{g}_0(p(k), t) dk.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora, considere la siguiente región:

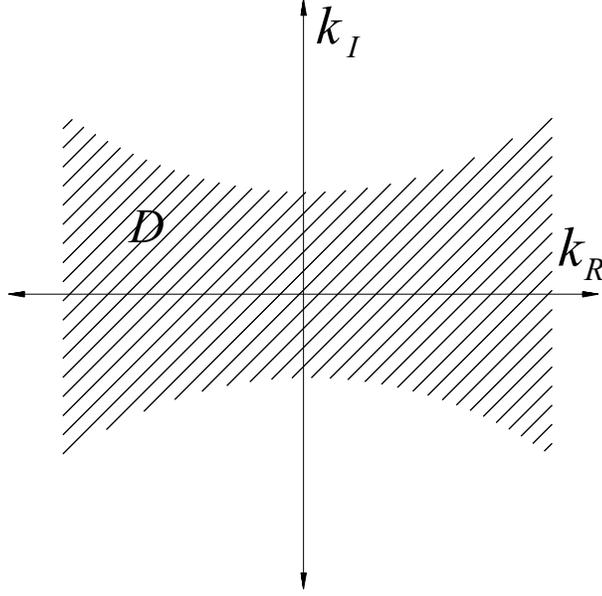


Figura 2.2: $D = \left\{ k = k_R + ik_I \in \mathbb{C} : \left(k_I + \frac{b-a}{2a} \right)^2 - k_R^2 < \left(\frac{b+a}{2a} \right)^2 \right\}$.

Note que, si $k \in D$, entonces $Re(p(k)) < 0$. Así, en virtud del Teorema 1.2.13,

$$|E_{\alpha,\beta}(p(k)t^\alpha)| \rightarrow 0, \quad \text{si } |k| \rightarrow \infty, \quad \text{para } k \in D \text{ y } t > 0,$$

por lo que podemos asegurar convergencia absoluta de las integrales en (2.10) en la región D . Por lo tanto, usando el teorema de Cauchy podemos deformar el contorno de integración a ∂D en la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) \widehat{q}_0(k) dk \\ &\quad - \frac{a}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} \widetilde{g}_1(p(k), t) dk \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} (a - b - iak) \widetilde{g}_0(p(k), t) dk. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k^* = -k - i\frac{b-a}{a}$ en (2.9) y usando el hecho de que $p(k)$ es invariante bajo este cambio, se tiene

$$a\widetilde{g}_1(p(k), t) = E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) \widehat{q}_0(k^*) + (2a - 2b + iak) \widetilde{g}_0(p(k), t) - \widehat{q}(k^*, t). \quad (2.12)$$

Además, por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} \widehat{q}(k^*, t) dk = 0.$$

Entonces, sustituyendo $\tilde{g}_1(p(k), t)$ de la ecuación (2.12) en la ecuación (2.11) y usando la ecuación anterior se llega a

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) \hat{q}_0(k) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) \hat{q}_0(k^*) dk \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ikx} (b - a - i2ak) \tilde{g}_0(p(k), t) dk. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Fubini, se encuentra la siguiente representación integral para la solución de (2.8)

$$q(x, t) = \int_0^\infty G^I(x, y, t) q_0(y) dy + \int_0^t G^B(x, t - \xi) g_0(\xi) d\xi,$$

donde la función de Green está dada por

$$G^I(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} e^{ik(x+y) - \frac{b-a}{a}y} E_{\alpha,1}(p(k)t^\alpha) dk,$$

y

$$G^B(x, t - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} (b - a - i2ak) e^{ikx} (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(p(k)(t - \xi)^\alpha) dk.$$

Conclusiones

La aportación principal de este trabajo consiste en haber construido una representación integral para soluciones de una ecuación de Black-Scholes con derivada fraccionaria. Esto se ha logrado siguiendo las ideas principales del Método de Fokas, el cual se ha utilizado extensamente para resolver problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones diferenciales parciales. Un trabajo a futuro consiste en considerar un problema de valor inicial y de frontera para una ecuación de evolución estocástica del tipo Black-Scholes con derivada fraccionaria en el tiempo y ruido blanco sobre la semirecta,

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^\alpha q = aq_{xx} + (b - a)q_x - bq + \mathcal{N}q + \dot{B}, & x > 0, \quad t \in [0, T], \\ q(x, 0) = q_0(x), \\ q(0, t) = g_0(t), \end{cases}$$

donde \mathcal{D}_t^α es la derivada fraccionaria de Caputo con $0 < \alpha < 1$; \mathcal{N} es un operador Lipschitz y $\dot{B}(x, t)$ es el ruido blanco en $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$. La propuesta anterior es natural debido a que ya tenemos la función de Green del problema lineal correspondiente y consideramos que es posible demostrar el teorema de existencia y unicidad vía el método de Picard. Por otro lado, también estamos interesados en implementar un método numérico que nos permita encontrar soluciones particulares.

Referencias

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*. 1973;p. 637–654.
- [2] Ahn J, Kang S, Kwon Y. A Laplace transform finite difference method for the Black–Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*. 2010;51(3):247–255.
- [3] Jódar L, Sevilla-Peris P, Cortés J, Sala R. A new direct method for solving the Black–Scholes equation. *Applied mathematics letters*. 2005;18(1):29–32.
- [4] Silverman D. Solution of the Black-Scholes equation using the Green’s function of the diffusion equation. Manuscript Department of Physics and Astronomy University of California Irvine. 1999;1(999):5.
- [5] Liu HK, Chang JJ. A closed-form approximation for the fractional Black–Scholes model with transaction costs. *Computers & Mathematics with Applications*. 2013;65(11):1719–1726.
- [6] Osu BO, Chukwunuzu AI. On the solution to a fractional Black-Scholes equation for the price of an option. *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2014;3(1):38–42.
- [7] Zeng C, Chen Y, Yang Q. Almost sure and moment stability properties of fractional order Black-Scholes model. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2013;16(2):317–331.
- [8] Kumar S, Yildirim A, Khan Y, Jafari H, Sayevand K, Wei L. Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform. *Journal of fractional calculus and Applications*. 2012;2(8):1–9.

- [9] Song L, Wang W. Solution of the fractional Black-Scholes option pricing model by finite difference method. In: Abstract and Applied Analysis. vol. 2013. Hindawi Publishing Corporation; 2013. .
- [10] Chen W, Xu X, Zhu SP. Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation. Computers & Mathematics with Applications. 2015;69(12):1407–1419.
- [11] Fokas AS. A unified approach to boundary value problems. vol. 78. Siam; 2008.
- [12] Mittag-Leffler G. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. CR Acad Sci Paris. 1903;137:554–558.
- [13] Agarwal R. A propos d’une note de M. Pierre Humbert. CR Acad Sci Paris. 1953;236(21):2031–2032.
- [14] Gorenflo R, Kilbas AA, Mainardi F, Rogosin SV. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Springer; 2014.