

Diario de *Campo:*

Resultados del desarrollo
de métodos y técnicas
de investigación

Volumen 10 • Tomo 2



UNIVERSIDAD COLEGIO
MAYOR DE CUNDINAMARCA

DIARIO DE CAMPO

Resultados del desarrollo de métodos y técnicas de investigación

Volumen 10 • Tomo 2

© 2020, Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca
Bogotá, Colombia

Diario de campo: Resultados del desarrollo de métodos y técnicas de investigación (Tomo 2)

ISBN: 978-958-8359-95-3

Compilador:

Juan Alberto Blanco Puentes

Olga Lucía Díaz Villamizar

Rectora

María del Pilar Jiménez Márquez

Vicerrectora Académica

Samuel Leonardo Villamizar Berdugo

Vicerrector Administrativo

Comité Editorial Institucional

María del Pilar Jiménez Márquez

Vicerrectora Académica

Claudia Consuelo González Ramírez

Jefe de Oficina de Investigaciones

Julián Vargas Bedoya

Jefe División de Promoción y Relaciones Interinstitucionales

Ana Isabel Mora Bautista

Decana Designada por el Consejo Académico

Nancy del Socorro Solano Jinete

Representante de los docentes ante el Consejo Superior Universitario

Leonardo Montenegro

Representante de las revistas institucionales

Mónica Alejandra Quintana Rey

Editor Sello Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Julieth Natally Navarrete Melo

Profesional de Asistencia al Sello Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

Corrección y diagramación

Xpress Estudio Gráfico y Digital SAS - Kimpres

Cra. 69H # 77-40

Concepto de diseño Bennuart Studio/Juan Carlos Cuartas Méndez

Derechos reservados de autor. Se autoriza la reproducción parcial o total de los textos de este documento siempre y cuando se realice la referencia bibliográfica correspondiente

Contenido

Capítulo 1. Aspectos teóricos de la investigación Patrimonio y Nuevos usos. Hoteles con encanto en Cartagena de Indias	17
<i>Florinda Sánchez Moreno, Mario Perilla Perilla (†), Rafael López Guzmán, Yolanda Guasch Mari</i>	
Capítulo 2. <i>Caenorhabditis elegans</i> como modelo inducido de diabetes	31
<i>Martha Gómez Jiménez, Ruth Mélida Sánchez Mora, Luz Adriana Monroy Caro, Angie Viviana Gómez Gómez, Jessika Alexandra Osorio Oviedo</i>	
Capítulo 3. Microorganismos y agua de riego de cultivos urbanos y periurbanos, Bogotá, Colombia.....	45
<i>Ligia Consuelo Sánchez Leal, Lucía Constanza Corrales Ramírez, Martha Lucía Posada Buitrago, Ruth Páez Díaz</i>	
Capítulo 4. La producción de identidad en el trabajo social	59
<i>Sandra del Pilar Gómez Contreras, Uva Falla Ramírez, Ramiro Rodríguez</i>	
Capítulo 5. Actividad antibacteriana de Nanopartículas de Plata obtenidas por síntesis verde de extractos de coliflor (<i>Brassica oleracea var. Botrytis</i>) y apio (<i>Apium graveolens</i>) para aplicación en tratamientos de agua residual .	75
<i>Sonia Marcela Rosas, Liliana Caycedo Lozano, Daniel Montaña</i>	
Capítulo 6. El testeo como herramienta para evolucionar los prototipos desarrollados en el proyecto arte público monumental y escultórico bogotano en el ciberespacio. Segunda parte - Planteamiento, desarrollo y resultados	89
<i>Freddy Chacón Chacón, Pedro Ricardo Medina Motta, Andrés Felipe Parra Vela</i>	
Capítulo 7. Calidad de la construcción del urbanismo en el entorno de la vivienda social de Bogotá. Periodo higienista de 1911 a 1942 en la urbanización Villa Javier	107
<i>Sandra Milena Benítez Villamizar, Yolanda Andrea Gómez Uribe, Francisco Javier Lagos Bayona</i>	

Capítulo 8. El teletrabajo académico como mediación en la investigación universitaria.....	127
<i>Guillermo Tomás Santacoloma Rivas, Lugo Manuel Barbosa Guerrero</i>	
Capítulo 9. El turismo cultural accesible para personas con discapacidad sensorial en la localidad La Candelaria, Bogotá. Primera Fase.....	147
<i>Yency Marcela Velandia</i>	
Capítulo 10. Disyuntivas del verbo <i>Haber</i>. Estudio léxico-pragmático con jóvenes universitarios.....	167
<i>Clarena Muñoz Dagua, Cristina Asqueta Corbellini</i>	
Capítulo 11. Evaluación de impactos ambientales y consumos hídrico y energético a partir de la aplicación del análisis del ciclo de vida de mampostería de arcilla en Cundinamarca	187
<i>Liliana Medina Campos, Sergio Alfonso Ballén Zamora, Adriana Cubides Pérez, Luz Amparo Hinestrosa Ayala</i>	
Capítulo 12. Una caracterización de la ecuación diferencial logística para el estudio de su comprensión en estudiantes universitarios	211
<i>Jeannette Vargas Hernández, Rafael Felipe Chaves Escobar, Flor Monserrate Rodríguez, Luis Alberto Jaimes Contreras</i>	
Capítulo 13. La representación del agua en las culturas precolombinas	233
<i>Gloria Elcy Gil Torres, Ana Dorys Ramírez López</i>	
Capítulo 14. Comparación de la actividad antibiopelícula de los péptidos AC-LL37-1 y D-LL37-1 en cepas de <i>Staphylococcus spp.</i>, <i>Escherichia coli</i> y <i>Pseudomonas aeruginosa</i>.....	261
<i>Wendy Gineth Martínez Lugo, Edith Yunary Acosta Urrego, Gladys Pinilla Bermúdez, Jeannette Navarrete O., Liliana Muñoz M.</i>	
Capítulo 15. Estudio de factibilidad para la creación del Observatorio de Cultura de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca (OCUCMA) .	283
<i>Ana Cristina Suárez Castro, Luis Eduardo Bejarano Jiménez</i>	

Presentación

La serie Diario de Campo ha dado un paso en su formato, desde el libro anterior, *La experiencia: requisito para la visibilidad, la divulgación y el impacto de la investigación*, se publica en formato digital. Hoy, presentamos **Resultados del desarrollo de métodos y técnicas de investigación** (Tomo II), el título número diez de la serie que desde sus inicios se ha encargado de difundir el conocimiento desde y para quienes se relacionan con la investigación como parte de su quehacer de enseñanza y aprendizaje. Con el formato digital podremos llegar a un público lector más amplio, casi como decir que vamos “a llegar a todo el mundo”, mientras ayudamos al medio ambiente; así mismo, el almacenamiento de la información requiere menos espacio físico y más espacio virtual; otra de las bondades es la inmediatez con que se puede compartir la información.

El capítulo 1, “Aspectos teóricos de la investigación: Patrimonio y Nuevos usos. Hoteles con encanto en Cartagena de Indias”, de Florinda Sánchez Moreno, Mario Perilla Perilla, Rafael López Guzmán y Yolanda Guasch Marí, presenta: “aspectos de tipo teórico relativos a Patrimonio cultural, patrimonio inmueble, turismo cultural y contexto del centro histórico, los cuales son soporte del proyecto de investigación”.

En el capítulo 2, “*Caenorhabditis elegans* como modelo inducido de diabetes”, de Martha Gómez Jiménez, Ruth Mérida Sánchez Mora, Luz Adriana Monroy, Angie Viviana Gómez Gómez y Jessika Alexandra Osorio Oviedo, establece que: “El *Caenorhabditis elegans* (*C. elegans*) es un organismo que ha sido ampliamente utilizado como modelo biológico, actualmente se realizan estudios en este nematodo como modelo de diabetes inducido, gracias a que se conoce algunos aspectos relevantes de su actividad metabólica. La diabetes es una enfermedad crónica degenerativa, caracterizada por la desregulación del metabolismo de carbohidratos, lípidos y proteínas, a causa de una completa o poca insuficiencia en la secreción o acción de la insulina, lo que genera un incremento crónico de los niveles de glucosa sanguínea que conduce a complicaciones a largo plazo que afecta varios órganos convirtiéndose en un problema de Salud Pública. De ahí surge la pregunta: ¿pueden los extractos de plantas aumentar la calidad y

esperanza de vida del nematodo al ser inducido a diabetes? Esta revisión documental presenta algunos aspectos importantes en el uso de este nematodo como modelo de diabetes inducido al ser sometido a altas concentraciones de glucosa”.

En el capítulo 3, “Microorganismos y agua de riego en cultivos urbanos y periurbanos, Bogotá, Colombia”, de Ligia Consuelo Sánchez Leal, Lucía Constanza Corrales Ramírez, Martha Lucía Posada Buitrago y Ruth Páez Díaz, se reconoce que: “El agua en las zonas urbanas y periurbanas de ciudades capitales, es generalmente la que proveen los acueductos y el agua lluvia. La inclusión de labores como la agricultura ha llevado a que la población utilice el agua residual, tratada o no, y, por lo tanto, el riesgo para la salud de la población, puede ser más alto. El contenido microbiano de estos cuerpos de agua varía y va a influir en su calidad biológica, algunos son inocuos para el hombre, pero la cantidad de inóculo presente, definirá su actividad biológica. En esta revisión, se presentan las temáticas para entender la importancia del agua de riego, la población que la compone, los métodos para caracterizar la microbiota presente en los cuerpos de agua utilizados para riego de cultivos en zonas urbanas y periurbanas de Bogotá”.

El capítulo 4, “La producción de identidad en el Trabajo Social”, de Sandra del Pilar Gómez Contreras, Uva Falla Ramírez y Ramiro Rodríguez, expone: “los resultados de dos procesos del grupo de “Investigación disciplinar en Trabajo Social y Tendencias Contemporáneas” culminados en el año 2017, que están relacionados con la identidad en el Trabajo Social, al tiempo que plantea unos interrogantes sobre las relaciones de poder que constituyeron los saberes que hoy denominamos intervención, actuación o práctica social, y que han dado lugar a lecturas en las que se encuentran presentes ejercicios de normalización disciplinaria y gestión de poblaciones”.

En el capítulo 5, “Actividad antibacteriana de Nanopartículas de Plata obtenidas por síntesis verde de extractos de coliflor (*Brassica oleracea var. Botrytis*) y apio (*Apium graveolens*) para aplicación en tratamientos de agua residual”, de Sonia Marcela Rosas, Liliana Caycedo Lozano y Daniel Montaña, reconocen que: “De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud alrededor de 842.000 personas mueren cada año de diarrea como consecuencia de la insalubridad en el agua, un saneamiento insuficiente o mala higiene en las manos. Esta situación representa un problema de salud pública en los países en los cuales todavía hay comunidades sin acceso permanente al recurso potable; de otra parte, el agua contaminada por microorganismos no solamente afecta a la salud humana por su consumo directo sino que también se comporta como un riesgo cuando las aguas no tratadas se utilizan en riego, convirtiéndose este mecanismo en un problema de sostenibilidad agrícola por la afectación de cultivos por hongos o bacterias fitopatógenas. Muchas alternativas de saneamiento del agua se utilizan en estas regiones, tratamientos físicos y químicos tradicionales pero el acceso

a estos no es seguro en términos ambientales o se dificulta. Así este proyecto propone la síntesis verde de Nanopartículas de plata a partir de extractos acuosos de coliflor (*Brassica oleracea var. Botrytis*) y apio (*Apium graveolens*) con funciones de control microbiológico en microorganismos bacterianos aislados de aguas residuales teniendo en cuenta el amplio espectro, la capacidad de dispersión y actividad sobre bacterias Gram negativas y Gram positivas promoviendo su uso como alternativa para el tratamiento de aguas con un método efectivo y ecoamigable”.

En el capítulo 6, “El testeo como herramienta para evolucionar los prototipos desarrollados en el proyecto arte público monumental y escultórico bogotano en el ciberespacio. segunda parte - planteamiento, desarrollo y resultados”, Freddy Chacón Chacón, Pedro Ricardo Medina Motta y Andrés Felipe Parra Vela, presentan “una síntesis descriptiva del testeo realizado, como parte de la fase proyectual, a los prototipos desarrollados (web, app, e-book, libro análogo y redes sociales), atendiendo a la cuestión por su calidad como interfaces conformadoras de la estrategia comunicativa hipermedial planteada en respuesta a la situación problemática que da pie a la investigación.

El objetivo fue realizar una evaluación, apoyados en el método de inspección denominado Evaluación Heurística (Nielsen, 1994), que evidenciará cómo funcionaban estos prototipos en términos de usabilidad, estética y pregnancia de la información presentada. Esta información constituye un insumo fundamental dado que permite perfeccionar el producto con miras a ser publicado formalmente”.

En el capítulo 7, “Calidad de la construcción del urbanismo en el entorno de la vivienda social de Bogotá. Periodo higienista 1911 a 1942 Urbanización Villa Javier”, Sandra Milena Benítez Villamizar, Yolanda Andrea Gómez Uribe y Francisco Javier Lagos Bayona, pretenden: “hacer un análisis de orden descriptivo del entorno urbano de la vivienda de interés social entre los años 1911 a 1942 en la ciudad de Bogotá, en el llamado periodo higienista, concebido desde las políticas institucionales que derivaron en la construcción de los conocidos como barrios obreros, estableciendo atributos del entorno en términos de localización, tipología, servicios y equipamientos social y comunitario, por lo tanto se toma como objeto de estudio el primer barrio consolidado en este periodo llamado Urbanización San Francisco Javier o Villa Javier. Este documento reconoce la calidad urbana de principios de siglo xx y las cualidades de su construcción como indicio de análisis similares en otros momentos históricos del país”.

El capítulo 8, “El teletrabajo académico como mediación en la investigación universitaria”, de Guillermo Tomás Santacoloma Rivas y Lugo Manuel Barbosa Guerrero, establece que: “La evolución acelerada de la tecnología ha impactado en todos los sectores económicos alrededor del mundo, obligando a todos sus

actores a optimizar procesos para volverse más competitivos y muestra de ello, es que surgen como respuesta a las necesidades del mercado laboral nuevas formas de trabajo entre las que se deben resaltar: el trabajo a distancia o desde el hogar; trabajo con tiempos flexibles, viernes hasta medio día, la no asignación de escritorios fijos, entre otros, lo cual permite suponer que en un futuro sería imposible imaginarse una empresa que no ofrezca esas bondades a sus empleados, de cara a la estimulación de la productividad en el ambiente laboral para la consecución de los objetivos y metas de negocio.

Si bien es cierto, algunas tareas son dependientes del sitio de trabajo y consecuentemente no se ajustan para ser tele-trabajables, en la actualidad, un creciente porcentaje de la fuerza laboral son trabajadores de la información y el conocimiento, por lo que no deben ser dependientes de un lugar específico de trabajo. Factores tales como el uso frecuente del computador, el grado de escolaridad y las habilidades en el uso de las TIC muestran asociación con la preferencia por teletrabajar.

Puntualmente, la labor docente desde las distintas dimensiones del quehacer universitario, como son la docencia, la investigación y la extensión, contempla la realización de múltiples actividades que no requieren de forma obligatoria su presencia en la institución, tales como la preparación de clases, la elaboración y calificación de actividades evaluativas, reuniones con colegas, trabajo investigativo, actividades de extensión universitaria, entre otros, por lo que de manera parcial se evidencia una afinidad entre el quehacer del profesor universitario y el teletrabajo; surgiendo así, el propósito principal de este proyecto de investigación, el cual consiste en determinar si la implementación de la metodología de Teletrabajo en el campo docente universitario contribuye en la optimización de los programas de investigación”.

En el capítulo 9, “El Turismo Cultural accesible para personas con discapacidad sensorial en la localidad La Candelaria Bogotá. Primera Fase”, Yency Marcela Velandia, precisa que: “La presente investigación aborda los postulados teóricos de los elementos claves como lo son la accesibilidad, discapacidad y turismo. Además, se debe tener un reconocimiento claro sobre los atractivos culturales materiales de la localidad de La Candelaria y su estado, con fin de visibilizar si se garantizan las condiciones necesarias para ofertar productos turísticos.

El proyecto toma como referente el Protocolo de servicio de turismo accesible para población joven, adulto mayor y personas en situación de discapacidad, porque este documento presenta los lineamientos que garantizan un servicio accesible e inclusivo. Dando al investigador una visión holística tanto de quienes tienen la logística pertinente de la oferta cómo de la población objeto de estudio. Esta investigación es de tipo cualitativo, porque para poder establecer el cumplimiento, o no, de las condiciones del protocolo de accesibilidad, se requiere

implementar un ejercicio de observación participativa que permita establecer la accesibilidad de estos espacios turísticos”.

En el capítulo 10, “Evolución del verbo Haber. Estudio lexicográfico de la variación con estudiantes de Comunicación Oral y Escrita de la UCMC”, Clarena Muñoz Dagua y Cristina Asqueta Corbellini dan cuenta de cómo el: “*Haber* es uno de los verbos que con mayor frecuencia se emplea en español y cuyo uso se torna complicado porque, además de su conjugación irregular, posee doble naturaleza como verbo pleno, tanto en usos impersonales como personales, y como verbo auxiliar, en la formación de tiempos compuestos. Con base en ejemplos tomados de un corpus compuesto por talleres realizados a estudiantes de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, este trabajo se enfoca en las variaciones que presenta el verbo e indaga, con base en los estudios de la gramática, la lexicografía y la pragmática, cómo inciden los recursos académicos y culturales en usos como *haiga*, *hubieron* y *hemos* entre otras variantes. Así se evidencia que estos estudios no se restringen al aspecto gramatical, sino que buscan comprender, por medio de recursos de carácter interdisciplinario, cómo incide el contexto en los usos idiomáticos que asumen los hablantes”.

En el capítulo 11, “Evaluación de impactos ambientales y consumos hídrico y energético a partir de la aplicación del análisis del ciclo de vida de mampostería de arcilla en Cundinamarca”, de Liliana Medina Campos, Sergio Alfonso Ballén Zamora.

Adriana Cubides Pérez y Luz Amparo Hinestrosa Ayala, los autores tienen presente que: “Considerando la cadena de producción de mampuestos de arcilla y el amplio uso de este recurso en el sector edificatorio, la identificación y evaluación integral fundamentado en el concepto de Análisis de Ciclo de Vida y su fase “de la cuna a la puerta”, considerando los consumos energéticos e hídrico son de relevancia. Se registran las resultantes del software SIMAPro v8 para la fase de la cuna a la puerta del producto Bloque No. 5, refiriéndose a consumos energéticos altos (55%) en las fases Beneficio y Transformación, seguido de las fases de Cocción y Secado (45%). El consumo de agua, al ser captada (agua lluvia; agua verde) es bajo, requiriéndose un total de 0,3696Kg H₂O (lluvia)/unidad. Los impactos evaluados, Eutrofización, Acidificación, Oxidación Fotoquímica, Potencial de Calentamiento Global y Toxicidad Humana, revelan alta afectación en la fase extractiva de materia prima (arcilla), seguida por las actividades de mezcla, molienda y moldeado”.

En el capítulo 12, “Una caracterización de la ecuación diferencial logística para el estudio de su comprensión en estudiantes universitarios”, Jeannette Vargas Hernández, Rafael Felipe Chaves Escobar, Flor Monserrate Rodríguez y Luis Alberto Jaimes Contreras manifiestan que: “Este trabajo de investigación configura situaciones problema de dinámica poblacional dirigidas a la búsqueda

de los elementos o factores que caracterizan la ecuación logística. Lo anterior, en orden a dar una respuesta a ¿cuáles son las características propias de la ecuación logística y cómo el estudiante comprende esta ecuación en problemas de dinámica poblacional? Para ello, se toma como marco teórico y metodológico la teoría APOS; recurriendo a la triangulación de información se identifican elementos concernientes al desarrollo histórico del concepto, reflexiones relativas a caminos en la enseñanza y aprendizaje de la ecuación y la fundamentación conceptual desde la matemática. Luego se procede mediante la triangulación de los investigadores al desarrollo de actividades, que permiten potenciar los conocimientos previos (derivada, crecimiento - decrecimiento de una función, ecuación de Malthus) que conducen a la comprensión de dicha ecuación. Así, se da la posibilidad de continuar este trabajo ampliando dichas actividades”.

En el capítulo 13, “La representación del agua en las culturas precolombinas”, Gloria Elcy Gil Torres y Ana Dorys Ramírez López comparten que: “La investigación permitió determinar cómo las culturas precolombinas Muisca y Tumaco, representaron el agua y las instalaciones hídricas en sus manifestaciones artísticas, teniendo en cuenta que su ubicación geográfica marcó diferencias importantes en el uso y concepción de esta. Además de formar parte de los procesos de supervivencia, el agua como líquido vital tuvo gran relevancia, puesto que se le rendía culto acudiendo frecuentemente a las lagunas como sitios ceremoniales, tal como ocurrió con los Muisca, o manejándola a través de complejos sistemas artificiales con intervención moderada del paisaje mediante técnicas de camellones y zanjas o sistema de campos elevados, que permiten aprovechar tanto lugares anegados como sabanas de inundación para la producción agrícola, el sistema permite la regulación del clima y de los caudales requeridos para los cultivos, conservando la biodiversidad en los lugares de su asentamiento, esto permitió adecuar cultivos en terrenos tan anegados como los de la cultura Tumaco e inundables como los de los Muisca.

Se encontraron diversas piezas en cerámica y orfebrería, que dan cuenta de la destreza de unos y otros, con el uso de los materiales y las técnicas empleadas para su elaboración y desarrollo; algunas de ellas relacionadas con la alfarería del agua, como alcarrazas, múcuras, jarras, cantaros y cuencos tanto en Muisca como en Tumaco; con ofrendas que narran rituales como las balsas en la Laguna de Siecha y Guatavita para los Muisca; representaciones en formas de animales, como peces, tortugas, monos, lagartos, etc.”.

El capítulo 14, “Comparación de la actividad antibiopelícula de los péptidos AC-LL37-1 Y D-LL37-1 en cepas de *Staphylococcus spp.*, *Escherichia coli* y *Pseudomonas aeruginosa*”, de Wendy Gineth Martínez Lugo, Edith Yunary Acosta Urrego, Gladys Pinilla Bermúdez, Jeannette Navarrete O., y Liliana Muñoz M., reconocen que: “La OMS clasificó a *E. coli* y *P. aeruginosa* en prioridad crítica

por tener la facultad de producir infecciones letales, la otra categoría es la alta, donde las bacterias presentan una farmacorresistencia creciente, siendo de mayor relevancia el *S. aureus*. Todos estos microorganismos poseen factores de virulencia que les favorece el desarrollo de infecciones crónicas, especialmente por su capacidad de formar biopelícula que favorece el incremento en la resistencia a los antibióticos; es por ello que constantemente se buscan soluciones y nuevas maneras de controlarla, por lo tanto, se han estudiado, durante los últimos 25 años, alternativas como lo son los péptidos antimicrobianos que presenten actividad para inhibitoria a la biopelícula”.

En el capítulo 15, “Estudio de factibilidad para la creación del Observatorio de Cultura de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca – OCUCMA”, Ana Cristina Suárez Castro y Luis Eduardo Bejarano Jiménez precisan que: “El proyecto de investigación tiene como objetivo realizar un Estudio de Factibilidad, para la creación del Observatorio de Cultura de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, OCUCMA, para investigar, analizar y registrar eventos y situaciones de carácter natural, físico, social, económico y cultural; que permitan la obtención de indicadores que nos ayuden a describir una visión concreta del panorama cultural y social, como herramienta para la toma de decisiones en los campos disciplinares, para el mejoramiento y contribución a la formación integral de los estudiantes de la universidad.

Para alcanzar este objetivo es necesario recopilar, analizar y evaluar la información sobre la situación actual de los observatorios de cultura universitaria y evidenciar si es factible la creación del observatorio en la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca; para ello, se basa esta investigación en un enfoque mixto de cortes cualitativo y cuantitativo y se apoya en las técnicas de recolección de información correspondientes a entrevistas y encuestas.

En este proyecto se desarrollan las etapas fundamentales de un estudio de factibilidad que son: Estudio de mercadeo, Estudio financiero, y Estudio técnico. Finalmente, y una vez se hecha la revisión de información primaria y secundaria, se procede a la formulación de las conclusiones producto de este estudio, las cuales darán una visión clara y profunda que servirá de referencia para saber si la idea de proyecto es prometedora para que se tome la decisión de ejecutarla en el plan de acción de la universidad”.

En siguiente capítulo, que corresponde a la sección Ayudas de escritura, el texto, “Comunicación/Lectura/y/Escritura@.Digit@les”, de Juan Alberto Blanco Puentes, aborda algunos aspectos relacionados con las nuevas formas de acceder al proceso de comunicación desde/para la lectura y la escritura en entornos digitales. En este sentido, el escrito reflexiona en torno a cómo se están asumiendo tanto la lectura como la escritura, en la que muchos denominan escritura en red (*net writing* o *e-writing*), o escritura en línea (*line writing*); así mismo, para

la lectura en red (*net reading* o *e-reading*), o lectura en línea (*line reading*). Los elementos aportados permiten establecer relaciones de diálogo entre autores y lectores de contenidos compartidos desde *web sites* hasta *social networks*, reconociendo inicialmente la combinación (confusión) entre lo verbal y lo escrito en una sociedad mediada por las TIC o las NTIC, denominaciones que también se adaptan desde el sujeto como individuo perteneciente a una sociedad digital.

Para terminar, les invitamos a consultar el tomo I, que contiene los siguientes capítulos y autores:

- “Turismo y responsabilidad social empresarial en el sector hotelero – caso GHM de Colombia” de Iván Fernando Amaya Cocunubo, Helber Ferney Guzmán Ramos y Lorena Salazar Toro.
- “Oportunidades operativas latentes en los procesos de diseño participativo para avanzar hacia una ciudad inteligente” de Camilo Rico Ramírez, Freddy Chacón Chacón y Sandra Uribe Pérez.
- “Expresión de genes en la ruta biosintética para la producción de Astaxantina en *Haematococcus pluvialis* utilizando diferentes factores de estrés” de Judith Elena Camacho Kurmen, Ana Graciela Lancheros y Myriam Judith Huérfano Torres.
- “Descripción de las prácticas formativas de Trabajo Social en el área educativa” de Yazmín Cruz Vargas, Clemencia del Carmen Gaitán Didier y Yamile Edith Borda Pérez.
- “Productos naturales derivados de plantas como una alternativa en el tratamiento terapéutico contra la Enfermedad de Chagas” de Nelson A. Salazar.
- “*Chlamydia trachomatis*: efectos sobre los espermatozoides humanos e infertilidad” de Ruth Mérida Sánchez Mora, Martha Gómez Jiménez y Luz Adriana Monroy.
- “Los campos de acción del trabajador social: una lectura desde la mirada tradicional y la emergente” de Ana Yadira Barahona Rojas, Melba Yesmit Chaparro Maldonado y José Roberto Calcetero Gutiérrez.
- “Anemias ferropénicas y subclínicas en comunidades indígenas colombianas Muiscas, Yanaconas, Huitotos – Embera, Bora, Muinane y Okaina” de Martha Castillo, Ana Lucía Oliveros y Ana Isabel Mora.
- “El uso de las analogías como herramienta didáctica, para la apropiación de conceptos químicos en el contexto ambiental. El caso del Colegio Distrital Kennedy I.E.D.” de Liliana Caycedo Lozano, Diana Marcela Trujillo Suárez, Juan Carlos Gómez Vásquez y Clara Patricia Pacheco Lozano.

- “Apropiación cultural del territorio en red a través de usos y aplicaciones tecnológicas: seis Núcleos Fundacionales de Bogotá” de Martha Cecilia Torres López, Claudia Marleny Rodríguez Colmenares y Jorge Eliécer Ariza Calderón.
- “Biopelícula como mecanismo de resistencia en *Candida albicans*” de Gladys Pinilla Bermúdez, Liliana Constanza Muñoz Molina y Jeannette Navarrete Ospina.
- “De recursos a atractivos turísticos: Avenida Jiménez con Carrera Séptima de Bogotá” de Diego Fernando Morales Castro, Alba Lucía Lucumí Silva y Judy Carolina Alfonso Rojas.
- “Metáforas de la economía o economía de las metáforas. Efectos de los mecanismos discursivos en la divulgación de las disciplinas. II Etapa” de Clarena Muñoz Dagua y Jorge E. Vigoya C.
- “Una modelación de mecanismos de construcción y las propiedades de los logaritmos” de Jeannette Vargas Hernández, María Teresa González Astudillo y Nury Vargas Hernández.
- “Creación de un repertorio para dúo instrumental: contrabajo y tiple - Música tradicional colombiana (1900 – 2000)” de Enertih Núñez Pardo.
- “Afrocolombianos en el barrio El Rincón, localidad de Suba, Bogotá” de Alba Stella Camelo Mayorga y Abelino Andrés Arrieta Sánchez.

Juan Alberto Blanco Puentes
Compilador

Una caracterización de la ecuación diferencial logística para el estudio de su comprensión en estudiantes universitarios

Jeannette Vargas Hernández

Rafael Felipe Chaves Escobar

Flor Monserrate Rodríguez

Luis Alberto Jaimes Contreras

Introducción

Asuntos como el potencial biótico, las curvas de supervivencia y la migración, informan sobre variables que intervienen en la dinámica de una población a lo largo del tiempo. Esta dinámica poblacional es una de las problemáticas que a corto y largo plazo genera interés a nivel mundial, lo cual exige la creación de diferentes políticas y estrategias que permitan controlar dicho fenómeno, así como la identificación de factores que influyen para que la tasa de crecimiento se mantenga en curva ascendente o factores que permitan reducir o controlar dicha tasa. Lo anterior, en la mayoría de oportunidades, deriva en que los profesionales encargados deben proponer alternativas que los llevan a acudir a la matemática.

Estos profesionales han sido parte de la población universitaria formada tanto en instituciones oficiales como privadas. En el caso de Colombia, en los programas de pregrado asociados a las áreas de economía, ingeniería, ciencias empresariales, biología y bioética, por lo general, se imparte el curso de ecuaciones diferenciales (ED) en el cual la dinámica poblacional es una de las situaciones ejemplificadas, utilizando poblaciones que se ajustan a la ecuación logística.

De acuerdo con lo expuesto en los párrafos anteriores, se emprende la tarea de realizar un aporte en la formación de docentes; al examinar con profundidad una alternativa a la pregunta ¿cuáles son las características propias de la ecuación logística y cómo el estudiante comprende dicha ecuación en problemas de dinámica poblacional?

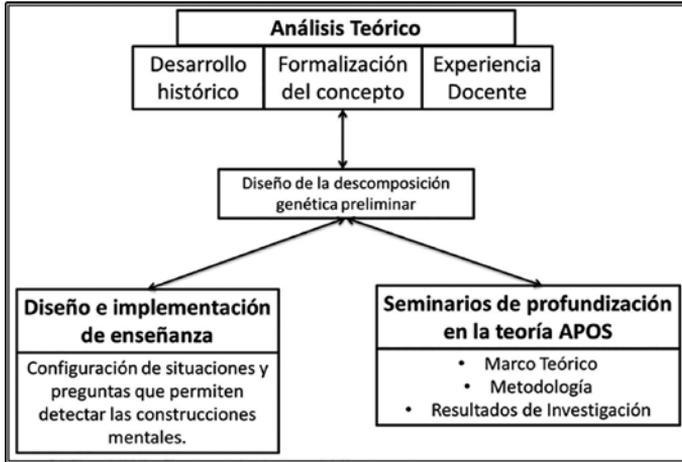
El método

La teoría del aprendizaje de las matemáticas (APOS), como marco metodológico, plantea un ciclo de investigación del cual se toman dos componentes (ver figura 1); análisis teórico y diseño de enseñanza. El componente relacionado con el análisis teórico implica la revisión del desarrollo histórico, la formalización del concepto, y una mirada desde la didáctica de la matemática, con el fin de diseñar una descomposición genética preliminar que describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción, que deben realizar los estudiantes para comprender la ED.

En el segundo componente se escogen o diseñan ciertas actividades, basadas en la descomposición genética preliminar, dichas actividades son la base para continuar el proceso de refinamiento, que se espera desarrollar en una investigación futura.

En relación a lo anterior este trabajo se divide en cinco etapas, producto de los encuentros de los investigadores y reuniones con algunos pares, las cuales no se desarrollaron de forma lineal.

Figura 1. Metodología para diseñar la descomposición genética preliminar



Las tres primeras etapas corresponden al análisis teórico, desde tres miradas diferentes; estudios concernientes a la enseñanza y el aprendizaje, acompañados de la identificación de momentos del desarrollo histórico de la ecuación logística y, el estudio de la definición formal de función y ecuación logística. Para ello, se utiliza la triangulación de investigadores y así se procede a establecer los elementos matemáticos del concepto y las relaciones entre ellos. En el proceso juega un papel transversal la experiencia como docentes de la asignatura de ED; planificación y gestión del profesor y los desempeños de los estudiantes, al igual que el análisis concerniente a la exigencia cognitiva que tienen las tareas sobre el concepto “ecuación logística”. La cuarta etapa está relacionada con la identificación de las características propias de la ecuación diferencial logística, sobre lo cual trata este capítulo. Posterior a esta caracterización se elaboró el diseño de la descomposición genética, la cual describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción que un estudiante realiza para comprender la ecuación diferencial logística. En la quinta y última etapa se configuran situaciones y preguntas que permiten detectar las construcciones mentales y los mecanismos de construcción propuestos, validadas con pares académicos.

Para iniciar este análisis se recurre al documento *Primer ensayo sobre la población*, elaborado por Malthus (1798), con el propósito de conocer las ideas que utilizó al plantear su modelo matemático y cuáles de estas fundamentan la

ecuación logística. Así mismo, se realizó una revisión de la forma como aparece la ecuación logística en los libros de texto y artículos o publicaciones académicas, con la intención de dar profundidad en lo que corresponde a la historia de la ecuación logística, la transformación de la ecuación original (Malthus) y la forma como Verhulst hizo la adaptación para obtener la ecuación que se estudia en este trabajo.

Para el diseño de la descomposición genética preliminar, se realiza un estudio de los elementos matemáticos que conforman el concepto, y alrededor se establecen unas construcciones mentales y mecanismos de construcción (desencapsulación, interiorización, coordinación y encapsulación), que generalmente se fundamentan en las acciones que el alumno llevaría a término, para pasar a un nivel de proceso y luego con esos elementos encapsular el objeto (ED logística). Finalmente, se proponen algunas situaciones y preguntas que permitan dar cuenta de las construcciones mentales planteadas previamente en la descripción de la descomposición genética preliminar.

Referentes teóricos

Se toman como referente la teoría APOS con sus tres elementos fundamentales, por un lado, las construcciones mentales y de otro los mecanismos de construcción que un individuo realiza para comprender determinado concepto matemático. El tercer elemento es el que establece el vínculo entre las construcciones mentales y los mecanismos de construcción y se llama descomposición genética.

Descomposición Genética

Una descomposición genética de un concepto actúa como una lente, análogo a una rejilla de difracción, que los investigadores usan para explicar cómo los estudiantes desarrollan o no, su comprensión de un concepto matemático (Traducido de Arnon, et al., 2014).

La descomposición genética juega un papel central en la investigación basada en APOS, desde este modelo teórico es necesario proveer a los investigadores con hipótesis que pueden servir como la bases para el diseño de instrumentos para guiar la instrucción y a su vez para obtener datos de los estudiantes y refinar dicha descomposición.

En conclusión, el valor de la descomposición genética reside en su uso como un modelo general, el cual describe aquellas construcciones mentales que encuentran ser necesarias para la mayoría de estudiantes en la comprensión de un concepto matemático (Arnon, et al., 2014).

Utilizando como marco teórico APOS, se ha realizado un importante número de investigaciones en didáctica de la matemática que proponen una descomposición genética sobre diferentes conceptos matemáticos. Este es el caso de las nociones conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008), ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso de mezclas (Chaves y Jaimes, 2014; Chaves, Jaimes y Vargas, 2017), las inecuaciones (Alvarenga, 2003), la transformada de Laplace (Cordero y Miranda, 2002), la transformación de funciones, el dominio y rango de una función (Baker, et al., 2001), la inducción y los conjuntos compactos (Dubinsky y Lewin, 1992), la función inversa, entre otros.

Varias descomposiciones han sido planteadas como tesis doctorales o al interior de ellas, así se encuentra la noción de integral definida Boigues (2010) y Aldana (2011), la convergencia de serie numérica (Codes, 2010), el infinito (Roa, 2012), la función exponencial (Vargas, 2017), entre otras. De otro lado, algunas investigaciones utilizan descomposiciones ya realizadas para analizar los esquemas de los estudiantes como es el caso del esquema de derivada. Sin embargo, de acuerdo con nuestra indagación, sobre ecuación diferencial logística no se encuentran estudios relacionados con propuestas de una descomposición genética.

Desarrollo

Revisión bibliográfica y desarrollo histórico

La historia nos remonta al artículo de 1838 “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement” de Pierre François Verhulst, en donde por primera vez publicó la denominada ecuación diferencial logística o ecuación de Verhulst. Este autor se interesó por la demografía, disciplina que se encarga del estudio estadístico de las poblaciones humanas según su estado y distribución en un momento determinado o según su evolución histórica.

Antecedente de esta aportación, es el *Ensayo sobre el principio de población* de Malthus de 1798, en el cual se expone la hipótesis en la que, si no se controlan los nacimientos, llegará un momento en que la tierra no producirá lo necesario para sus habitantes. Un resultado al que se llegó es que el modelo de Malthus $\frac{dp(t)}{dt} = ap(t)$ de Malthus, no se ajustaba a la realidad, excepto para cultivos de bacterias en cortos periodos de tiempo en los que el sustrato es suficiente y, por lo tanto, lo que resulta más realista es la suposición en la que un medio tiene un alcance máximo de población, es decir, ante las limitaciones de espacio, recursos, comida, enfermedades, etc., es más realista suponer que el medio solo se puede sostener de manera estable un máximo de población K .

Alrededor de 1840, Verhulst investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países (Zill, 1997). Uno de ellos fue $\frac{dP}{dt} = P \left(r - \frac{r}{K} P \right)$ donde P representa a la población, t al tiempo, el símbolo $\frac{dP}{dt}$ quiere decir la velocidad de crecimiento de la población en el tiempo, y r es la llamada tasa de crecimiento instantánea, K es valor óptimo del tamaño de la población para el lugar que estamos considerando, y a veces se le llama capacidad de carga del ambiente. Se considera que esta ecuación no es un modelo muy fiel de la población cuando esta es muy grande. Cuando las condiciones son de sobrepoblación, se presentan efectos negativos sobre el ambiente, lo cual puede tener un efecto inhibitorio en el crecimiento demográfico.

Verhulst estudió la ecuación de Malthus y determinó que la población crece exponencialmente con el tiempo y se duplica cada t años. El modelo se fue ajustando a resultados más realistas y se agregó un término de competición $-bp^2$; con b constante, a la ecuación diferencial lineal, ya que el promedio estadístico del número de encuentros por unidad de tiempo es proporcional a p^2 , obteniendo la nueva ecuación $\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$ e los números a y b son coeficientes vitales de la población. Esta última ecuación fue introducida Verhulst en el año 1837. De las características de su modelo poblacional, afirmó que la constante b es muy pequeña comparada con la constante a , y si p no es demasiado grande, el término $-bp^2$ se convierte insignificante comparado con ap y, de esta manera, pasaría lo mismo cuando se utilizaba el modelo de Malthus; pero si p es grande, el término $-bp^2$ es considerable porque reduce la tasa de crecimiento poblacional, es decir, si $a > b$, el término $-bp^2$ no es insignificante, sino que sirve como freno que evita el crecimiento exponencial de la población.

Bacaër (2011) menciona que Verhulst estudió el crecimiento exponencial motivado por Quetelet, quien consideraba que las poblaciones no podían crecer geoméricamente durante un largo período de tiempo, debido a que los obstáculos mencionados por Malthus formaban una especie de “resistencia”, pensando que era proporcional al cuadrado de la velocidad del crecimiento de la población, estableciendo una analogía con la mecánica Verhulst estableció que la analogía mecánica propuesta por Quetelet no era razonable y propuso la ecuación diferencial logística o ecuación de Verhulst para la población $P(t)$ en el tiempo t ,

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

En la cual, cuando la población $P(t)$ es pequeña comparada con el parámetro K , obtenemos la $\exp \frac{dP}{dt} \approx rP$, cuya solución $P(t) \approx P(0) e^{rt}$ es decir, un crecimiento exponencial. La tasa de crecimiento disminuye a medida que $P(t)$.

Posteriormente, la ecuación logística fue usada por Robertson en 1908 para modelar el crecimiento individual de animales, plantas, seres humanos y órganos del cuerpo. Posteriormente, fue empleada por McKendrick y Kesava Pai, en 1911, para modelar el crecimiento de poblaciones de microorganismos. Luego, por Pearl y Reed en 1920 para el crecimiento de la población de los EE.UU. (Bacaër, 2011). Así como, por Robert May en 1976 para estudiar la forma en que crecían una población de insectos (Plaza y Gutiérrez, 2013).

Luego de este breve recuento histórico, es posible enfatizar y contextualizar su impacto actual: la ecuación logística es un modelo que permite estudiar el crecimiento de una población, y es parte de un sistema dinámico que se dedica a estudiar el comportamiento de las iteraciones sucesivas de una función en términos de los diferentes puntos iniciales.

Una mirada a la formalización del concepto

El estudio que aquí se presenta se realiza desde una mirada formal del concepto, empezando por el modelo que Malthus propuso y exhibiendo la necesidad de reformular el mismo a partir de lo propuesto por Velhults con la ecuación logística.

Modelo de Malthus

La necesidad de predecir el comportamiento de una población con relación a su tamaño, a medida que pasa el tiempo, es lo que llevó, en 1798, a Robert Malthus a proponer dos postulados:

- La necesidad del alimento para el ser humano u otras especies (reflejado en el decrecimiento de la población debido a sus escases).
- La atracción sexual (reflejada en el crecimiento de la población).

Malthus suponía que el crecimiento de una población era de forma exponencial, considerando que la velocidad con que crece determinada población es directamente proporcional al tamaño de la población en un instante de tiempo.

Sea $P(t)$ la población en el instante t con tasas de natalidad (α) y mortalidad (β), ambas constantes, con lo que se podría considerar que para un intervalo de tiempo Δt el número de nacimientos viene dado aproximadamente por el producto de $P(t)$, α y Δt , esto es:

$$\text{Nacimientos} = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

Mientras que para el mismo intervalo de tiempo, el número de muertes viene dado aproximadamente por el producto de $P(t)$, β y Δt , esto es:

$$\text{Muertes} = \beta \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

Así, si se trata el crecimiento o decrecimiento de una población en términos de funciones de las tasas de natalidad y mortalidad, es claro que la población al tiempo $(t + \Delta t)$, implica los individuos que estaban en el tiempo t , más los que nacen, menos los que mueren, por lo tanto:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \text{Nacimientos} - \text{Muertes} \quad (1)$$

O lo que es lo mismo,

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \text{Nacimientos} - \text{Muertes} \quad (2)$$

Según Edwards y Penney (2009), la ecuación anterior implica que el cambio $\Delta P \approx P(t + \Delta t) - P(t)$ de la población durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ de longitud Δt es:

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t - \beta \cdot P(t) \cdot \Delta t \\ \Delta P &\approx (\alpha - \beta) \cdot P(t) \cdot \Delta t \\ \Delta P &\approx k \cdot P(t) \cdot \Delta t, \text{ con } k = \alpha - \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Dividiendo ambos lados por Δt se obtiene que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx k \cdot P(t)$$

La igualdad se logrará cuando $\Delta t \rightarrow 0$, esto es:

$$\frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = k \cdot P(t)$$

Cuyo resultado final es la ecuación diferencial del modelo de Malthus

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot P(t) \quad (4)$$

O lo que es lo mismo, la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = (\alpha - \beta) \cdot P(t) \quad (5)$$

Ahora bien, ¿qué información se puede extraer de la ecuación (4) con relación a la población? Para dar respuesta a la pregunta anterior es pertinente detenernos en el estudio de la constante de proporcionalidad k .

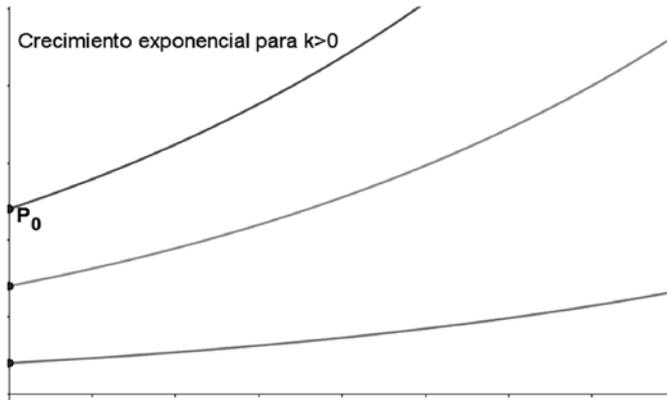
Considerando $P(t) > 0$ y dado que la diferencia entre nacimientos y muertes viene dada por $k = \alpha - \beta$, podemos considerar tres casos:

- i. Si $\alpha > \beta$ implica $\alpha - \beta > 0$ que y por tanto sabríamos que

$$k \cdot P(t) > 0 \rightarrow \frac{dp}{dt} > 0$$

Esto es, si la derivada es positiva quiere decir que la población $P(t)$ crecerá ilimitadamente para determinado tiempo y una condición inicial P_0 dada (ver figura 2).

Figura 2. Crecimiento Exponencial $k > 0$ para y diferentes valores de la condición inicial P_0

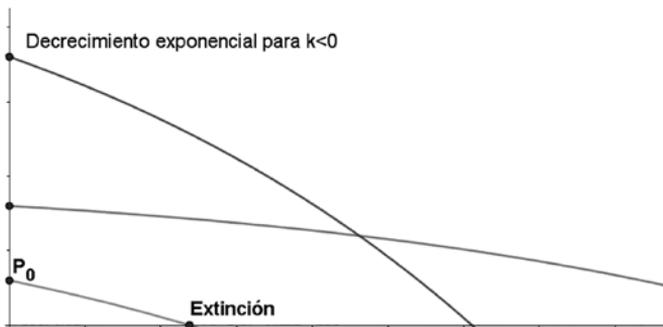


- ii. Si $\alpha < \beta$ implica que $\alpha - \beta < 0$ y por tanto sabríamos que

$$k \cdot P(t) < 0 \rightarrow \frac{dp}{dt} < 0,$$

ya que $P(t)$ siempre es positiva. Esto es, si la derivada es negativa quiere decir que la población $P(t)$ decrecerá quizá hasta el punto de desaparecer o extinguirse en un instante de tiempo y una condición inicial P_0 , (ver figura 3).

Figura 3. Decrecimiento Exponencial para $k < 0$ y diferentes valores de la condición inicial P_0

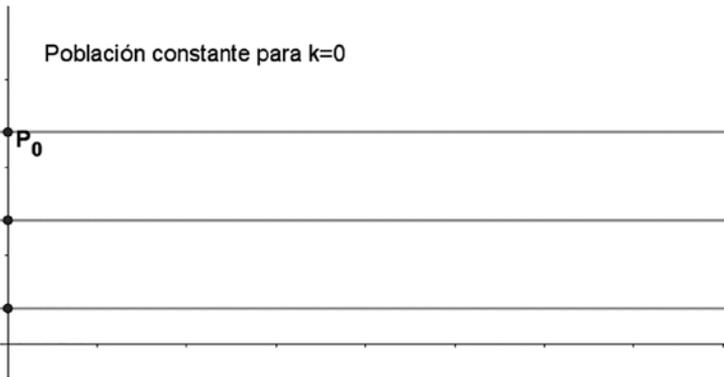


- iii. Si $\alpha = \beta$ entonces se tiene el caso más trivial, puesto que la tasa de nacimientos es igual a la tasa de muertes, lo que implica que $k = 0$ y por tanto sabríamos que

$$0 \cdot P(t) = 0 \rightarrow \frac{dp}{dt} = 0,$$

ya que $P(t)$ siempre es positiva. Esto es, si la derivada es cero entonces la población $P(t)$ es constante para una condición inicial P_0 (ver figura 4).

Figura 4. Población constante para $k = 0$ y diferentes valores de la condición inicial P_0



En este punto se ha realizado una revisión del modelo de Malthus, pero es prematuro afirmar, por ejemplo, que es un modelo adecuado para describir la evolución de la población humana, más cuando no se tienen en cuenta que las tasas de natalidad y mortalidad no necesariamente son constantes, sino que pueden ser variables al igual que otros factores que puedan afectar el crecimiento de la población, como enfermedades, emigraciones e inmigraciones, desastres naturales, entre otros.

Con lo anterior, no se quiere decir que el modelo de Malthus no sea de interés para el estudio de pequeñas poblaciones durante periodos de corto tiempo, sin embargo, al predecir un crecimiento ilimitado de la población no se ajusta a la realidad para periodos de tiempo más prolongados.

Ecuación logística

Considerando lo expuesto anteriormente, es claro que el crecimiento exponencial de una población no puede continuar de forma ilimitada, lo que involucra una modificación al modelo de Malthus formulado por medio de la ecuación (4).

Justamente fue el matemático belga Verhulst, en el año de 1846, quien a partir de suponer que el entorno en que se encuentra la población es capaz de dar sustento a un número fijo de individuos K . En algunas poblaciones es posible observar que la tasa de natalidad decrece conforme la población se incrementa; lo anterior puede darse por múltiples razones como por ejemplo la limitación en los recursos alimenticios.

Si retomamos la ecuación (5)

$$\frac{dp}{dt} = (\alpha - \beta) \cdot P(t)$$

Pero suponemos que la tasa de natalidad es una función lineal decreciente del tamaño de la población, de modo que $\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 \cdot P(t)$, donde los coeficientes son constantes positivas y la tasa de mortalidad permanece constante. Al reemplazar en la ecuación (5) se obtiene la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= (\alpha_0 - \alpha_1 \cdot P(t) - \beta) \cdot P(t) \\ \frac{dp}{dt} &= (\alpha_0 - \beta) \cdot P(t) - \alpha_1 \cdot (P(t))^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Si hacemos $a = \alpha_0 - \beta$ y $b = \alpha_1$, la ecuación (6) se puede reescribir como sigue:

$$\frac{dp}{dt} = a \cdot P(t) - b \cdot (P(t))^2 \quad (7)$$

Si los coeficientes a y b son positivos, la ecuación (7) se llama ecuación logística. Con el fin de simplificar la expresión anterior, sacamos en el lado derecho de la ecuación el factor común $b \cdot P(t)$, quedando la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = b \cdot P(t) \cdot \left(\frac{a}{b} - P(t) \right)$$

Y haciendo $k = b$ y $M = \frac{a}{b}$ finalmente la expresión:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot P(t) \cdot (M - P(t)) \quad (8)$$

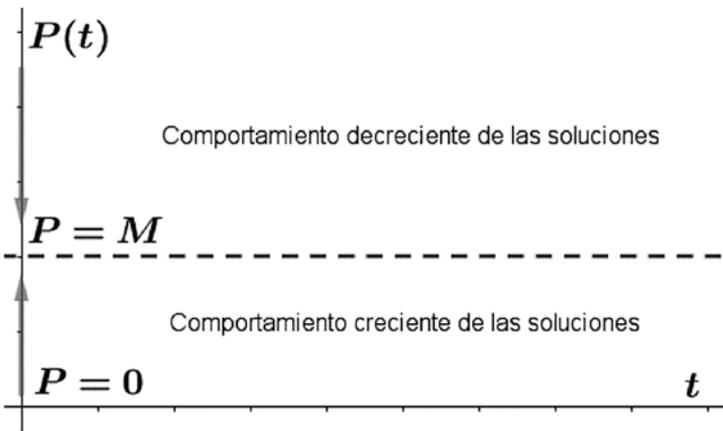
Zill (2008) menciona que, como la ecuación (8) es autónoma, podemos estudiar el comportamiento cualitativo de $P(t)$ en el eje vertical. Igualando a cero el lado derecho de la ecuación (8) se tiene que $k \cdot P(t) = 0$ ó $M - P(t) = 0$ lo que implica que $P(t) = 0$ puesto que k es positivo ó $P(t) = M$, las cuales son llamadas soluciones de equilibrio, también llamadas puntos críticos.

Al construir el retrato de fase de la ecuación autónoma (8) en el eje vertical $P(t)$ tendríamos que considerar tres intervalos a mencionar:

- $I_1: -\infty < P < 0$
- $I_2: 0 < P < M$
- $I_3: M < P < \infty$

Sin embargo, en la siguiente imagen solo se consideran los intervalos I_2 e I_3 , considerando que desde el modelo se está partiendo del supuesto que $P(t) > 0$ y, por tanto, no puede tomar un valor negativo (Cano, 2011).

Figura 5. Retrato de fase para la ecuación logística

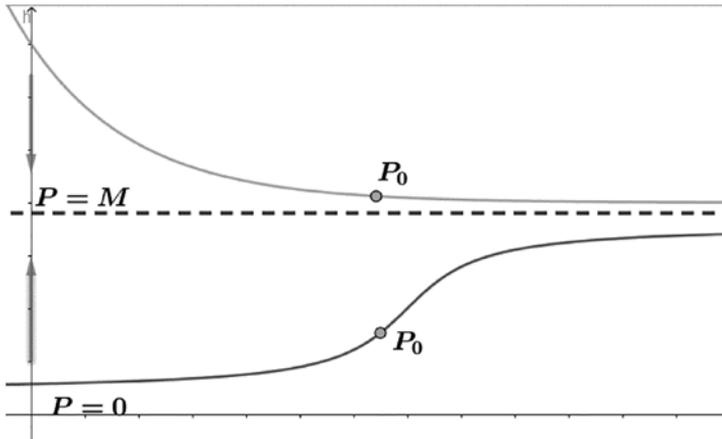


Si $P(0) = P_0$ es un valor inicial, entonces se puede afirmar con relación al retrato de fase que:

- i. Para el intervalo $0 < P_0 < M$, $P(t)$ está acotada. Como $P(t)$ es creciente, $P(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$, esto significa que M es el límite de la población o también conocida como capacidad de mantenimiento que el entorno puede soportar a lo largo del tiempo. También se tiene que $P(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Las gráficas de las soluciones de equilibrio $P(t) = 0$ y $P(t) = M$ son líneas horizontales que representan asíntotas horizontales para cualquier curva solución que inicie en el intervalo I_2 .
- ii. Para $M < P_0$, $P(t)$ está acotada inferiormente. Como $P(t)$ es decreciente, $P(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$. Lo que reitera que M es la capacidad de mantenimiento que el entorno puede soportar a lo largo del tiempo. La gráfica de la solución de equilibrio $P(t) = M$ representa una asíntota horizontal para una curva solución que inicie en el intervalo I_3 .

A continuación, se presenta el retrato de fase de la ecuación logística y curvas de solución:

Figura 6. Retrato de fase de la ecuación logística y curvas de solución



En términos generales se verifica que para valores pequeños de P , el crecimiento de la población es de tipo exponencial; pero, cuanto más grande es la población $P(t)$ en un instante de tiempo dado, a los valores de P le es más difícil seguir creciendo, de tal manera que al cabo de un tiempo, la población tenderá asintóticamente hacia el valor límite de población.

Un aporte desde la didáctica de la matemática

Los documentos consultados permiten identificar tres tipos de investigaciones, aquellas que reportan actividades vinculadas al estudio de la dinámica de poblaciones en la formación secundaria, otros relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de funciones que modelen dicha dinámica en los primeros años universitarios, previo al estudio de las ecuaciones diferenciales, y algunos correspondientes a la construcción del concepto de ecuación diferencial en los cuales se incluye como uno de los tópicos la dinámica de poblaciones.

La síntesis de algunas observaciones y conclusiones que se presentan en las propuestas e investigaciones señaladas en el párrafo anterior, sirven como uno de los referentes en el propósito de plantear una descomposición genética y, en el caso de este capítulo, aporta en los contextos de presentación en su enseñanza.

En cuanto a las indagaciones concernientes a la enseñanza de la ecuación logística en los estudios de secundaria, se plantea la intención de proporcionar a los

estudiantes una visión más amplia sobre las formas de crecimiento poblacional de los diferentes organismos de su región, ayudándolos a que los representen por medio de modelos matemáticos. Lo anterior mediante una propuesta de actividad pedagógica interdisciplinar, en la cual se hace énfasis en los binomios: tasa de natalidad y mortalidad, inmigración y emigración, factores bióticos y abióticos a partir de la temática de crecimiento poblacional de sagüis (micós) de la especie *Callithrix jacchus* (Carlos, Sierra y de Souza, 2010).

El problema de la enseñanza de las matemáticas en el primer curso universitario es indagado, entre otros, desde el precálculo en tareas concernientes a la enseñanza de la función exponencial (Vargas, 2017) y con preguntas como ¿qué tipo de matemáticas se deben enseñar en los primeros cursos de universitario de las facultades de Ciencias Experimentales CCEE y cómo deben ser enseñadas? (Barquero, Bosch y Gascón, 2011).

En la indagación citada, los investigadores presentan el análisis de un proceso de estudio en torno a la dinámica de poblaciones. Consideran tres experiencias; la primera se centró en el estudio de la dinámica en tiempo discreto de poblaciones con generaciones separadas (x_t solo depende del estado anterior x_{t-1}); la segunda, en el estudio en tiempo discreto de poblaciones con generaciones mezcladas (x_t depende del conjunto de estados anteriores) y, la tercera, al estudio de la evolución de las poblaciones en tiempo continuo.

En una primera etapa, los grupos de trabajo se dedican a ensayar herramientas para describir el tiempo, el tamaño y el crecimiento de la población de faisanes. En una segunda etapa, construyen modelos matemáticos de las dos grandes familias de modelos que se estudian durante todo el curso: por un lado, dentro de los modelos continuos, proponen modelos basados en ajustes exponenciales y modelos de interpolación polinómica y, por otro lado, dentro de los modelos discretos, aparecen modelos basados en sucesiones recurrentes.

Se encontró en todas las experimentaciones que la mayoría de estudiantes están más habituados a trabajar con funciones elementales, lo cual invitaría a trabajar con modelos «continuos». Sin embargo, los estudiantes raramente proponen el uso de la derivada para describir el crecimiento de X , ni disponen de herramientas matemáticas suficientes para ver la relación con un ajuste exponencial propuesto. En lugar de ello, “sí suelen considerar herramientas de naturaleza «discreta» para analizar las tablas que presenta el dossier, lo que facilita considerar el modelo basado en sucesiones recurrentes” (Barquero, Bosch y Gascón, 2011, p. 343).

Al interior de la literatura en Educación Matemática se encuentra una reflexión encaminada a reconocer y recordar la utilidad de la ecuación logística en el caso del estudio de poblaciones, como también su aplicación en el estudio de ventas de un producto, entre otros (Pineda, 2015).

También se considera de especial interés la indagación relativa a la construcción y comprensión del concepto de ecuación diferencial ordinaria (Perdomo, 2010). Investigación que incluye la resolución de problemas de dinámica poblacional como un caso para la comprensión de las ecuaciones diferenciales y, de manera similar, la indagación de Camacho, et al., (2012) en la cual se afirma que los estudiantes que hacían uso del concepto de derivada de una función, en muchos casos recurrían únicamente al uso de las reglas de derivación y, en muy pocas ocasiones, utilizaban las representaciones gráficas para explorar significados y relaciones matemáticas (Camacho-Machín et al., 2012a y 2012b). Los estudiantes se centraron, principalmente, en la búsqueda de algoritmos que les permitieran resolver los problemas, mostrando serias dificultades en aquellas actividades cuyo enunciado hacía referencia a un contexto basado en una situación real (Camacho et al., 2009).

En primer lugar, observamos que la reflexión de Pineda (2015), coincide en varios aspectos, con nuestra indagación presentada en las secciones correspondientes al análisis teórico; el cual incluyó la revisión de momentos del desarrollo histórico de la ecuación diferencial logística, al mismo tiempo que el estudio de la definición formal de dicha ecuación.

Para dicha reflexión, el autor se remite a tres libros y a partir de ellos realiza una breve explicación que repasa en algunas diferentes “versiones” de la ecuación diferencial logística. Así, retoma de Zill (2011) el trabajo en modelos matemáticos, del biólogo matemático Pierre François-Verhulst (1804-1849). Por otro lado, se tienen las presentaciones de esta ecuación en Larson y Stewart. Larson, (2006) asume que $y = f(x)$ satisface la ecuación diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ky \left(1 - \frac{y}{L}\right) \quad \text{El significado de} \quad \frac{dy}{dt}$$

es el ritmo o velocidad de cambio de la variable y (la población) en un instante de tiempo (t); mientras que Stewart (2008) el supuesto es que la población se incrementa de forma exponencial en sus primeras etapas, luego se estabiliza y tiende a su capacidad de soporte debido a que los recursos son limitados. Se tiene que

$$P(t) \text{ representa el tamaño de la población en el tiempo } t, \text{ luego } \frac{dP}{dt} = kP$$

pequeña. De lo anterior, en dicho texto, se presenta el modelo para el crecimiento

$$\text{población así: } \frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{L}\right) \text{ e si } P \text{ es pequeña comparada con } L,$$

entonces P/L tiende a cero, por lo tanto $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Se tiene que si P tiende a L ,

$$\text{entonces } \frac{P}{L} \rightarrow 1 \text{ y } \frac{dP}{dt} \rightarrow 0$$

Características de la ecuación logística

A continuación, se presenta una descripción de las principales características de la ecuación logística, junto con las construcciones mentales y mecanismos de construcción para comprenderla, basados en el análisis histórico, teórico y didáctico, presentado en los apartados anteriores.

Una de las primeras características en la comprensión de la ecuación logística, se plantea en relación al estudio de modelos de dinámica poblacional. Inicialmente, se sugiere la necesidad de transitar por el modelo de dinámica poblacional de Malthus; que precede al modelo de Verhulst, y se ajustó a una ecuación diferencial lineal de primer orden, esta dependencia se puede considerar; guardando las proporciones, como lo es la idea del límite de las pendientes de las rectas secantes, para llegar a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, refiriéndose a un curso de cálculo diferencial.

La ecuación de Malthus como preliminar a la ecuación logística

Partiendo de la ecuación diferencial de Malthus $\frac{dP}{dt} = kP$ se consideran dos elementos, el primero es la comprensión de la derivada, vista como la razón de cambio de $\frac{dP}{dt}$ que representa la velocidad con la que cambia la población respecto a un tiempo t . En trabajos como el realizado por Chaves y Jaimes (2014), se plantea una serie de actividades con el objetivo de mejorar y/o fortalecer la comprensión de dicho objeto matemático. De otra parte, el segundo elemento está relacionado con el lado derecho de la igualdad, y el significado de los componentes implícitos que dan como resultado la expresión kP . Según el análisis teórico realizado, el segundo elemento puede ser determinante en la comprensión de la ecuación de Verhulst o ecuación logística, cuando es explícito el significado de k ; más allá de indicar que k es una constante, es necesario mostrar la forma como esta constante se obtiene de un razonamiento básico que parte de las tasas de natalidad α y mortalidad β .

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P$$

Ecuación de Malthus con tasas de natalidad y mortalidad explícitas.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Ecuación de Malthus con tasas de natalidad y mortalidad implícitas.

Algo tan simple como escribir la ecuación diferencial de una forma u otra, implica ser consciente de los elementos que la conforman. Desde la experiencia de los investigadores en sus prácticas educativas se ha evidenciado que al escribir la ecuación diferencial de la forma $\frac{dP}{dt} = kP$ e relevancia del significado de k siendo no más que una constante que se debe hallar para determinar la razón de cambio de la población. Así mismo, es necesaria la identificación de la función P como la función población, que es la solución de la ecuación diferencial.

Dada la importancia que tiene el significado de la expresión $\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P$ en relación a los elementos que la conforman, se proponen actividades relacionadas con la tasa de nacimientos, que en la ecuación de Malthus es constante (α), pero, en la ecuación de Verhulst es necesario escribirla como una función decreciente, que en la mayoría de los casos es lineal ($\alpha_0 \pm \alpha_1 P$) donde α_0 y α_1 son constantes y P es variable. Así mismo, realizar actividades donde la constante de proporcionalidad k sea vista como la diferencia entre las tasas de nacimientos y mortalidad ($\alpha - \beta$).

Comprensión de la ecuación Logística

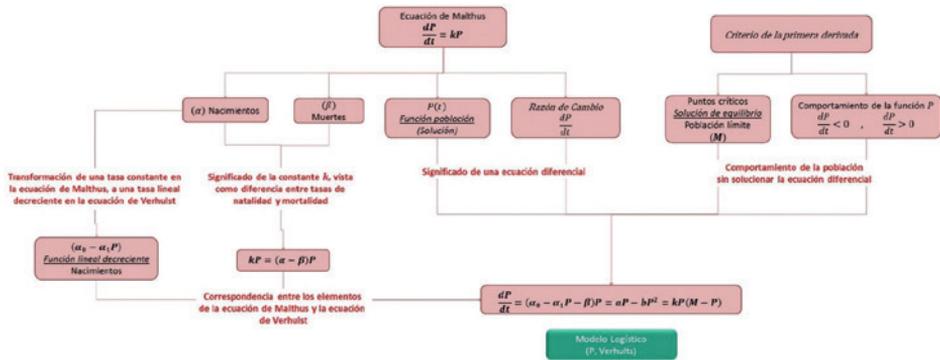
En las actividades sugeridas anteriormente, fundamentalmente se plantea la elaboración de ciertas preguntas relacionadas con la tasa de natalidad en una población P , por ejemplo, ¿qué condiciones requiere un ecosistema para que la población aumente de forma constante?, ¿en un área limitada cuál es la máxima cantidad de individuos que pueden sobrevivir?, este tipo de preguntas están orientadas a que los estudiantes comprendan la necesidad de cambiar la tasa de nacimientos constantes por una tasa de crecimiento lineal; $\alpha \rightarrow (\alpha_0 \pm \alpha_1 P)$. Adicionalmente, se plantean preguntas relacionadas con el comportamiento de esta función lineal (creciente o decreciente) para modelar una población sostenible. Todo esto con el propósito de comprender por qué la tasa de nacimientos es una función lineal decreciente; $\alpha \rightarrow (\alpha_0 - \alpha_1 P)$.

Otras preguntas o actividades están orientadas a determinar la forma como la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad $\alpha - \beta = k$, son las que determinan la constante de proporcionalidad y, por ende, su significado en relación a la forma como cambia la población, por ejemplo, el estudiante debe interpretar que si $k < 0$, es equivalente a tener una población en la que $\alpha < \beta$; lo cual implica constante crecimiento, pero sí $k > 0$, estamos hablando de poblaciones en las que $\alpha > \beta$; que, por lo contrario, implicaría decrecimiento constante. Cuando el estudiante tiene este nivel de comprensión, se considera que ha dado significado a la igualdad $kP = (\alpha - \beta)P$. Lo cual, es un elemento que permite

pasar de la comprensión de la expresión a la derecha en la ecuación de Malthus, a la comprensión de la expresión a la derecha en la ecuación de Verhulst; $kP \rightarrow (\alpha_0 - \alpha_1 P - \beta)P$. Así mismo, la manipulación algebraica permite escribir $(\alpha_0 - \alpha_1 P - \beta)P$, como $aP - bP^2$, y esta a su vez de la forma $kP(M - P)$, como se mostró en la ecuación (8).

Considerando todo lo anterior, a continuación, se presenta una caracterización de la ecuación logística concerniente a la descripción de una ruta para la comprensión de dicha ecuación diferencial:

Figura 7. Características propias de la ecuación diferencial logística



El papel de la derivada

Asumiendo que, en la formación del estudiante, uno de los cursos previos para iniciar el curso de Ecuaciones Diferenciales, es el de cálculo diferencial, el objeto Derivada interactúa con los elementos mencionados anteriormente en la comprensión de la ecuación logística. Primero, con el significado de los puntos críticos; al ser la ecuación logística una ecuación diferencial autónoma (ver sección 4.2), igualarla a cero permite encontrar los puntos críticos de la ecuación, que equivalen a soluciones singulares de la ecuación diferencial, estas soluciones singulares son asíntotas horizontales que acotan la función solución de la ecuación diferencial. La importancia de esto se fundamenta en que estas asíntotas, interpretadas en un problema de dinámica poblacional, limitan el tamaño de la población, es decir, la asíntota diferente de cero, indica cuál es el tamaño máximo de la población modelada. Segundo, el comportamiento (crecimiento o decrecimiento) de la función solución, que llevado a los problemas de dinámica poblacional indica si al pasar el tiempo aumenta o disminuye el tamaño de la población.

A manera de conclusiones y discusión de los resultados

La construcción de una reseña de trabajos relacionados con el desarrollo histórico de la ecuación logística permitió realizar un acercamiento a la evolución del concepto e identificar los momentos históricos más destacados con relación a los primeros modelos de dinámica poblacional, considerando como principal el de Malthus y los elementos que se consideraron en la transición al modelo de Verhulst.

La revisión de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio, permitió conocer diferentes momentos por los cuales transita el aprendizaje de los estudiantes y las diversas estrategias propuestas en cada uno de los niveles escolares. Así, se identificó que los estudiantes en la secundaria han estudiado situaciones con énfasis en los binomios: tasa de natalidad y mortalidad, inmigración y emigración, factores bióticos y abióticos y, en el nivel universitario, concerniente a estos problemas de dinámica poblacional, el uso que ellos hacen de la derivada, se limita a reglas de derivación o a considerar herramientas de naturaleza discreta.

La revisión tanto del desarrollo histórico, como el estudio de la formalidad del concepto y los aportes desde la didáctica, fundamentaron la identificación de características propias de la ecuación logística propuesta en esta investigación. Además, el estudio del desarrollo histórico-epistemológico de la ecuación logística exige profundizar en la comprensión de los elementos matemáticos inmersos en el concepto y, al mismo tiempo, permite la elaboración de hipótesis concernientes a las exigencias cognitivas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dichas ecuaciones.

Para comprender la ecuación logística, un estudiante requiere la comprensión de objetos matemáticos que se han trabajado previamente; como la derivada, en relación al criterio para determinar crecimiento o decrecimiento de una función, o la ecuación de Malthus que se aborda en el curso de Ecuaciones Diferenciales. Estos elementos representan una base para construir el objeto matemático. Sin embargo, en algunas ocasiones no es suficiente con el trabajo realizado previamente, por el contrario, el desarrollo de actividades como las mencionadas en este trabajo, permiten potenciar los conocimientos previos que conducen a la comprensión de la ecuación logística.

Referencias

- Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.
- Alvarenga, K.B. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, 6 (3), 199-219.

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, SR., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development. En *Mathematics Education*, Nueva York: Springer.
- Artigue, M. (1987). Ingenierie didactique a propos d'equations differentielles. En J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (eds.). *Proceedings of the eleventh international conference of Psychology of Mathematics Education*, (pp. 236-242). Montreal: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, DJ., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.
- Bacaër, N. (2011). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Francia: Springer Verlag London.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las Ciencias* 29(3), 339-352.
- Bermúdez, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario (tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.
- Boigues, F.J. (2010). El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente (tesis doctoral), Universidad de Alicante, España.
- Camacho, M., Perdomo, J., & Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias* 30(2), 9-32.
- Camacho, M., Perdomo, J., & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA* 3(3), 23-133.
- Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., & Santos-Trigo, M. (2012a). An Exploration of Students' Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equations Course (Part I), *The Teaching of Mathematics*, 15(1), 1-20.
- Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., & Santos-Trigo, M. (2012b). An Exploration of Students' Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equations Course (Part II). *The Teaching of Mathematics*, 15(2), 63-84.
- Cano Cancela, A. (2011). *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional* (tesis de grado) Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España.
- Carlos, J.G., Sierra, D.F., & Souza, A.R. (2010). El crecimiento poblacional: una propuesta pedagógica para abordar biología, matemáticas y TICs. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias* 5(2), 8-22.

- Chaves, R., & Jaimes, L. (2014). Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas (tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Clark, J., Cordero, F., Com-ill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolia, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal for Mathematical Behavior* 16 (4), 345-364.
- Codes, M. (2010). Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional (tesis doctoral no publicada), Universidad de Salamanca, España.
- Cordero, F., & Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: Una epistemología como base de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(2), 133-168.
- Dubinsky, E., & Lewin, P. (1992). Reflexive abstraction in mathematics education: The genetic composition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior* 5, 55-92.
- Edwards, C.H., y Penney, D.E. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación.
- Jaimes, L. A., Chavés, R. F., & Vargas, J., (2017). La descomposición genética como herramienta para matemáticos, ingenieros y licenciados en la enseñanza del cálculo: Investigación en educación matemática. *Revista Boletín REDIPE* 6(8), 73-78.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática* 20(2), 65-89.
- Malthus, T.R. (1846). Ensayo sobre el principio de la población. Madrid. Akal Ediciones.
- Pineda, J.F. (2015). Una mirada somera a la ecuación logística. *Ciencia Innovación Tecnología Ambiente Sociedad* (CITAS), 1(29), 9-18.
- Plaza S., & Gutiérrez, J. (2013). *Dinámica del Método de Newton*. Logroño, España: Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones. IV. Serie.
- Roa, S. (2012). Paradoja de las pelotas de tenis: construcción del infinito como un proceso iterativo infinito y un objeto trascendente. ASOCOLME, 554-560.
- Vargas, J. (2017). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Salamanca, España: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Verhulst, P.F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, publiée par A. Quetelet 10, 113-120.
- Zill, D.G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: International Thomson Editores.