

TRATAMIENTO DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN EL BACHILLERATO, PROPUESTA DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Noé Oswaldo Cabañas Ramírez, Edgardo Locía Espinoza, Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
noe_ocr@hotmail.com, lociae999@hotmail.com, armando280@hotmail.com

Resumen

El proceso enseñanza-aprendizaje de la educación en México, establece que sean desarrollados los conocimientos en los alumnos. Esto nos motiva a buscar alternativas, que respondan a los requerimientos postulados en la reforma educativa y que dichas alternativas contribuyan a mejorar estos procesos de la matemática del nivel medio y superior. En este trabajo, se presentan los avances de investigación cuyo objetivo es elaborar y poner en funcionamiento una ingeniería didáctica para el tratamiento de un contenido específico de las matemáticas del bachillerato: el análisis de funciones; a través, de un sistema de actividades según las etapas descritas por la metodología.

Palabras clave: análisis de funciones, teoría de situaciones didácticas, transposición didáctica, ingeniería didáctica, contraejemplos

Abstract

The teaching-learning process of education in Mexico establishes that students' knowledge should be developed. It motivates us to look for alternatives that respond to the requirements stated in the educational reform and contribute to improve mathematical processes at the middle and higher levels of education. In this paper, we show the progress of the research, which aims to elaborate and put into practice a didactic engineering for the treatment of a specific content of middle high school mathematics: the analysis of functions through a system of activities according to the stages described in the methodology.

Keywords: counter-examples, analysis of functions, didactic situation theory, didactic transposition, didactic engineering

■ Introducción

En la actualidad, las matemáticas se consideran como una de las disciplinas científicas que mayores problemas presenta sobre su enseñanza y aprendizaje; esto ha motivado el desarrollo de diversas investigaciones con la finalidad de incidir con propuestas que contribuyan a la mejora de estas situaciones (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares 2008).

Particularmente en México, los problemas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se identifican desde el nivel básico a superior. De acuerdo con diversos autores dichos problemas se presentan en la

interpretación y construcción de los conceptos básicos del cálculo tales como: crecimiento y decrecimiento de una función, máximos y mínimos, entre otros; además, hemos detectado que en los alumnos esta problemática ha tenido sus consecuencias: ha generado rezago, reprobación y como consecuencia un incremento en la deserción escolar en los niveles medio superior y superior.

La presente investigación, se centra en los procesos de enseñanza y aprendizaje del contenido del análisis de funciones que es propuesto en los planes y programas de estudio del nivel medio y superior. Entenderemos como análisis de funciones al sentido de variación, crecimiento y decrecimiento de una función, los intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas; determinación de máximos o mínimos, entre otros. (Swokowski, 1982; Leithold, 1992).

Los referentes teóricos y metodológicos sobre los que se sustenta nuestra investigación, recaen principalmente en: la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, (1978); la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) de Chevallard, (1980) y la Ingeniería Didáctica (ID) de Artigue, (1995); dentro de ella, se identificará el papel que juega el contraejemplo y el debate científico como herramienta de apoyo en el proceso de construcción y tratamiento de tal contenido.

■ Planteamiento del problema

Del análisis realizado a: tesis, artículos de revistas, planes y programas de estudio y libros de texto, se puede identificar que la educación media superior en México presenta inconsistencias para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas; derivado de no hacer alusión al desarrollo del razonamiento matemático, a la construcción de conjeturas, la utilización de contraejemplos ni a los mecanismos de validación de los resultados que se aplican, dando pie a que el alumno aplique los procedimientos de manera mecánica y memorística.

El estudio sobre el análisis de las funciones es un tema central en los programas de bachillerato. Es un aprendizaje de largo aliento en el cual los alumnos encuentran muchos obstáculos y dificultades. Por ello es que podemos determinar que, si bien en los alumnos se presentan serias dificultades en la construcción del concepto de función (Engler, A., Vrancken, S. & Müller, D., 2003), en los profesores también existen deficiencias tanto en su comprensión, como en la transmisión de este conocimiento (Cantoral, 2000; Rey Cabrera, 2016). Dado que la enseñanza del análisis de funciones es un tema de gran interés de contenido y sus conceptos, consideramos que debe ser subsanada esta deficiencia que se presenta tanto en el nivel medio como en el nivel superior.

Ejemplos de funciones se presentan desde la secundaria, como lecturas sobre gráficas, relaciones de proporcionalidad, entre otras. En bachillerato, se introduce el concepto general de función, analizando los elementos básicos de las funciones cuadráticas y trigonométricas; este aprendizaje se consolida y profundiza a lo largo de los estudios de matemáticas en el nivel medio superior y culmina con el análisis de la variación de las funciones, en el que se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, la existencia de máximos o mínimos, los intervalos de concavidad o convexidad, la existencia de puntos de inflexión, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

■ Indagación Bibliográfica

Si bien es cierto que los programas de estudio por los diversos subsistemas del Nivel Medio Superior (NMS) indican que debe desarrollarse el razonamiento matemático; en la realidad esto no se lleva a cabo y se considera que la situación general de la educación matemática en el país es crítica. Larrazolo, Backhoff &, Tirado (2013) respecto a esta situación determinaron que existe: “un planteamiento curricular desarticulado y excesivo en contenidos, desde el preescolar hasta el bachillerato”; además varios investigadores (Guzmán, 2006; Escorza, 2007; Fernández, 2009; Doval, 2014); entre otros, coinciden con ellos, referente a que los estudiantes en este nivel: “tienen un aprovechamiento sumamente bajo, no comprenden los conceptos básicos de matemáticas, no tienen las habilidades para solucionar problemas numéricos de mediana complejidad, y los conocimientos adquiridos se relacionan con la memorización de algoritmos”; proponen que el sistema educativo mexicano debe esforzarse para mejorar sustancialmente la educación matemática.

Algunos trabajos de investigación sobre el estudio de funciones que se reportan en (Valero, 2003; Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008; Benedicto, 2012; Russo, 2016); entre otros, documentan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en relación al estudio de las funciones, entre las que podemos citar las siguientes:

- Leer e interpretar un resultado sobre una gráfica.
- Dar sentido a la noción de derivada de una función en un punto y a su interpretación geométrica.
- Establecer el enlace entre las variaciones de una función y el signo de su derivada
- Estudiar el signo de una función derivada.
- Saber calcular la derivada de una función y de una función compuesta.
- Saber determinar el sentido de variación de una función con la ayuda de su derivada.
- Saber determinar un extremo de una función con la ayuda de su derivada.
- Saber escribir la ecuación de la tangente en un punto dado.
- Saber trazar la curva representativa de una función haciendo aparecer los objetos encontrados en el estudio de esta función (asíntotas, tangentes, máximos, mínimos,...)

Con el propósito de contribuir en la solución a la problemática detectada, consideraremos la implementación de una ID bajo los referentes teóricos mencionados y asumimos que, para lograr la transmisión de un conocimiento determinado, Brousseau plantea el diseño de Situaciones en donde se incluyan un conjunto de actividades que propicie la génesis ficticia de tal conocimiento. Estas actividades convertirán la clase en una micro-comunidad científica, en donde el conocimiento se construya a partir de formular ideas individuales o por equipo y validadas o cuestionadas a través del contraejemplo.

En este sentido consideraremos el contraejemplo como una herramienta didáctica preponderante en el desarrollo de consensos los cuales serán oficializados en la fase de la institucionalización de acuerdo a la TSD, ya que en investigaciones llevadas a cabo por (Morales, 2008; García & Morales, 2013; Klymchuk, 2012; Zazkis & Chernoff, 2008) coinciden entre otras cosas que el contraejemplo permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, así como, disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje y permite avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los estudiantes permitiendo la formación de un pensamiento crítico y analítico.

De tal manera que asumiremos la posición de Locia (2000), en el sentido de que en la enseñanza, muchos estudiantes e incluso profesores, no aprecian las diferencias entre argumentos empíricos y argumentos deductivos, tienen muchos problemas para aplicar correctamente definiciones, teoremas y fórmulas, confunden condiciones necesarias y condiciones suficientes, utilizan conclusiones no verificadas que a menudo resultan falsas.

■ Problema de investigación

Existen dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el nivel medio superior, sobre el contenido del análisis de funciones (Crecimiento y Decrecimiento de una función, Función Continua y Discontinua, Máximo y Mínimo).

Pregunta de investigación

¿Qué papel juega el contraejemplo en la estructuración y funcionamiento de una ingeniería didáctica para el tratamiento del análisis de las funciones en el bachillerato?

Objetivo de investigación

Elaborar y poner en funcionamiento una Ingeniería Didáctica para la enseñanza-aprendizaje del contenido relativo al análisis de las funciones (Crecimiento y Decrecimiento de una función, Máximos y Mínimos) en el nivel medio superior, en donde se revele el papel que juega el contraejemplo en el proceso de construcción y tratamiento de los conceptos principales asociados a esta temática.

Objetivos específicos

Descubrir las concepciones que tienen los alumnos y profesores del NMS, sobre la variación de funciones (crecimiento y decrecimiento de funciones, máximos y mínimos).

Poner en funcionamiento una ingeniería didáctica la cual permita contribuir en la solución de la problemática que se presenta en este tópico del Cálculo Diferencial.

Tareas Científicas

Como parte de la investigación y dar solución a la problemática planteada, nos hemos propuesto desarrollar las siguientes tareas científicas:

Búsqueda de información y puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica, la cual permita contribuir en la solución de la problemática que se presenta en la enseñanza-aprendizaje de este tópico del Cálculo Diferencial; así como, la revisión de fundamentos filosóficos, teóricos y metodológicos para el sustento de la investigación como son: tesis, artículos, documentales, libros, entre otros, que tratan sobre el tema del análisis de funciones.

Revisión del contenido matemático relativo al análisis de funciones, para identificar el nivel de tratamiento

que debe hacerse en los Niveles Medio Superior y Superior, del cual se desprenderá la elaboración y aplicación de un test que permita identificar la problemática que se presenta en profesores y estudiantes del NMS, en relación al tema de investigación.

Por último, la elaboración, validación y experimentación de una Ingeniería Didáctica para el tratamiento del contenido de análisis de funciones en el Nivel Medio Superior.

■ Resultados de los avances

Considerando que la presente investigación se encuentra en una etapa inicial, nos permitimos presentar un avance de la investigación que se ha realizado a la fecha, por lo que reportamos lo siguiente:

Se han analizado los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la investigación en proceso; además, se encuentra en proceso la elaboración de un test, con la finalidad de utilizarlo como un instrumento de exploración en profesores y alumnos del nivel medio superior, esto con el fin de obtener información que fortalezca la pertinencia del trabajo en desarrollo y por último nos encontramos en proceso del análisis de la bibliografía propuesta por los planes y programas de estudio; así como, libros de textos de otras editoriales. Se encuentra en proceso el análisis epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el contenido de análisis de funciones.

■ Reflexiones y Conclusiones

Son escasas las investigaciones centradas en el estudio del contenido análisis de funciones que se han realizado en el campo de la matemática educativa, al menos en México.

De las investigaciones que se han revisado, se ha identificado dificultades en la lectura del comportamiento de gráficas asociadas a funciones en contextos dentro y fuera de la matemática, y con ello dificultades sobre conceptos básicos del cálculo y propiedades esenciales que permiten el estudio del análisis de funciones.

En la revisión de algunos textos clásicos del cálculo que son utilizados en los niveles medio y superior; que tratan el contenido de análisis de funciones, se ha identificado que en algunos casos se carece de rigor y formalidad de tratamiento, haciendo que el tratamiento intuitivo deje a un lado la atención de la parte conceptual y de propiedades relativas al tópico del análisis de funciones.

Con el fin de avanzar en el desarrollo de esta investigación se contemplan los siguientes puntos: Revisar el análisis del contenido matemático relativo a la variación de funciones, para identificar el nivel de tratamiento que debe hacerse en los Niveles Medio Superior y Superior. Elaboración, validación y experimentación de una Ingeniería Didáctica para el tratamiento del contenido de análisis de funciones en el Nivel Medio Superior y Superior.

■ Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp.

- 33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Benedicto, C. (2012). *Estudio de Funciones con Geogebra*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Valencia, España.
- Brousseau, G. (1978), "La cours a 20", en *Theorie des situations didactiques* (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en *Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire* (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.
- Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 1, 146-157.
- Doval, L. (2014). *Estudiando la composición de funciones de la forma f o $g(x)$ con estudiantes de bachillerato usando diversas representaciones*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
- Engler, A., Vrancken, S. & Müller, D. (2003). La derivada: actividades que favorecen su comprensión. *Revista Novedades Educativas*. Año 15, N° 146.
- Escorza, A. (2007). *Estudio del desarrollo de programas de estudio de matemáticas para el nivel medio superior dentro del actual modelo educativo del IPN*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
- Fernández, J. (2009). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Granada, España.
- García, O., & Morales, L. (2013). El contraejemplo como recurso didáctico en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 35, pp. 161-175.
- Klymchuk, S. (2012). Counterexamples in calculus. *Mathematics teaching-research journal online*, 5(4), 1-30.
- Larrazolo, Backhoff & Tirado (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Multidisciplinaria en Investigación Educativa*, 18 (59), pp. 1137-1163.
- Leithold, L. (1992). *El cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.
- Locia, E. (2000). *Les contre – exemples dans l'enseignement des mathématiques*. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Toulouse, Francia.
- Morales, A. (2008). *El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: el caso de la función convexa*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAGro, México.
- Rey Cabrera, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Russo, C. (2016). *Diseño de una secuencia didáctica para el estudio del concepto de función utilizando software de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Sánchez-Matamoros, G.; García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11 (002), pp. 267-296.
- Swokowski, E. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
- Valero, S. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.
- Zazkis, R., & Chernoff, E.J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 195-208.