Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Simetrías de Lie y leyes de conservación en ecuaciones de evolución no lineales.

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Lic. Ingrid Pilo García

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Febrero 2020.

Dedicatoria

En mi vida he tenido a 4 personas que han cuidado de mi, que guían mis pasos y siempre me motivan para seguir adelante, esta tesis está dedicada a ellos (**mis padres y hermanos**) porque siempre han hecho hasta lo imposible para seguir apoyándome y mantenerme firme a mis objetivos, porque gracias a ellos siempre he buscado ser mejor.

Igualmente quiero dedicar este esfuerzo a **Jesús Goméz** quien se ha preocupado y ha hecho de todo para verme feliz, gracias por apoyarme día con día y mostrarme que uno no tiene que estar solo para cumplir sus objetivos.

Agradecimientos

A mi mamá **Mireya García**, quien siempre ha trabajado duro para vernos salir adelante, por enseñarme a no rendirme y ser mejor cada día.

A mi papá, **Fernando Pilo** por todos sus consejos, paciencia y amor que ha tenido siempre conmigo.

A **Jesús Goméz** por su apoyo incondicional, su paciencia, por compartir sus alegrías, por buscar siempre soluciones a mis problemas y consentirme en todo momento, muchas gracias.

A mis hermanos, **Fernando y Oscar Pilo García**, porque siempre están conmigo en los momentos más difíciles y día con día han llenado mi vida de risas y alegrías, gracias por todo.

A mi asesor, **Marco Antonio Taneco Hernández** por el tiempo y dedicación que me ha brindado a lo largo de esta etapa para que este trabajo esté lo mejor posible.

A mis familiares que siempre han creído en mi, por el apoyo y los consejos que me han brindado.

A mis amigos y compañeros, por todos sus consejos y su apoyo incondicional que me brindaron en esta linda etapa: Magloria, Emigdio, Miguel A., Miguel M., José Luis, Eduard y más.

Al Dr. Ramón Reyes Carreto por su apoyo en mi estancia en este posgrado.

A mis revisores: el **Dr. José Francisco Gómez Aguilar** y a el **M.C. Cruz Vargas**

de León por el tiempo y paciencia que me dedicaron ayudando a mejorar sustancialmente la versión final del presente trabajo.

Al comité sinodal por el tiempo y dedicación para poder evaluar mi trabajo.

Al Programa de Fortalecimiento Académico para Mujeres Indígenas por el apoyo económico que me brindaron para este proyecto.

Al Programa de becas de Movilidad por apoyarme económicamente para realizar una movilidad académica en la UAM., unidad Ixtapalapa.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de posgrado.

A todos ellos infnitamente

G R A C I A S.

Resumen

Las leyes de consercación desempeñan un rol importante en la ciencia y en la ingeniería. La meta de esta tesis es proporcionar una revisión y aplicación de los métodos mas recientes para la construcción de leyes de conservación usando la teoría de grupos de Lie. Clásicamente la derivación de leyes de conservación para problemas variacionales invariantes se basa en el teorema de Noether. Sin embargo N. H. ibragimov propone un nuevo teorema de conservación el cual se aplica para EDP o sistemas de EDP sin lagrangianos.

La ecuación de Kudryashov-Sinelshchikov describe los fenómenos de las ondas de presión en mezclas de burbujas de líquido-gas bajo la consideración de transferencia de calor y viscosidad. En esta investigación discutimos cómo encontrar leyes de conservación a la ecuación antes mencionada, utilizaremos una versión reciente del Teorema de Noether el cual se basa en el concepto de una ecuación adjunta para una EDP o sistema de EDP y la introducción de un lagrangiano formal. Específicamente encontraremos la adjunta de la ecuación Kudryashov-Sinelshchikov. Para esto tenemos que conocer sus generadores infinitesimales (que serán los que nos proporcionan las simetrías de nuestra ecuación), y el operador de Euler-Lagrange asociado generalizado, para posteriormente poder calcular sus leyes de conservación usando el teorema de N. Ibragimov.

Abstract

Trade laws play an important role in science and engineering. The goal of this thesis is to provide a review and application of the latest methods for constructing conservation laws using Lie group theory. Classically the derivation of conservation laws for invariant variational problems is based on Noether's theorem. However N. H. ibragimov proposes a new conservation theorem which applies to EDP or EDP systems without Lagrangians. The Kudryashov-Sinelshchikov equation describes the phenomena of pressure waves in mixtures of liquid-gas bubbles under the consideration of heat transfer and viscosity. In this investigation we discuss how to find conservation laws to the aforementioned equation, we will use a recent version of Noether's Theorem which is based on the concept of an attached equation for an EDP or EDP system and the introduction of a formal Lagrangian. Specifically we will find the attached of the equation Kudryashov- Sinelshchikov. For this we have to know its infinitesimal generators (which will be those that provide us with the symmetries of our equation), and the generalized associated Euler-Lagrange operator, to later be able to calculate its conservation laws using N. Ibragimov's theorem.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

La simetría ha sido explotada durante mucho tiempo por su belleza y por su ciencia. Por ejemplo, el antiguo Shang en China hizo uso de la simetría en sus vasijas de bronce. Las mezquitas españolas muestran muchas simetrías, además los patrones usados en la cultura Islámica reflejan la simetría completa de reflexiones y rotaciones en un plano bidimencional. Hasta ahora gracias a los trabajos de los matemáticos G. Pólya y P. Niggli sabemos que existen 17 grupos de simetría en los murales[1] antiguos musulmanes.

Desenredando la exploración histórica de la simetría desde los griegos hasta la edad moderna, Yang ganador del premio Nobel en Física (1957), mostró como el concepto de simetría ha contribuido a el de invariancia.

> *Una simetría puede ser definida como la invariancia en el patrón que es observado cuando alguna transformación es aplicada a esta.*

Generalizando, asociamos una simetría con formas geométricas. Aunque el concepto de simetría tiene sus orígenes en la geometría, es posible extender el concepto de invariancia con respecto a las transformaciones de otros tipos, un ejemplo es la fuerza electromagnética la cual permanece inalterada si las fuerzas positivas y las fuerzas negativas se intercambian. Es sorprendente notar que Albert Einstein formuló su Teoría Especial de la Relatividad desde la simetría en el espacio tiempo. Además, las leyes de electromagnetismo sobre las que se apoya la teoría especial de la relatividad se rigen por las simetrías de Lorentz[2].

[1] Los grupos de papel pintado son clases de grupos discretos de simetrías con dos traslaciones independientes.

[2] De hecho Einstein rechazó la idea de las simetrías de Lorentz, pero después la aceptó e incluso la generalizó en la Teoría de la Relatividad.

El secreto de la Naturaleza es la simetría, pero la mayoría de las observaciones en ella no exhiben simetrías[3]. Una manera profunda de esconder la simetría es por ejemplo, el fenómeno de la ruptura espontánea de la simetría en Mecánica cuántica.

Existen dos tipos de simetrias: Finitas e Infinitesimales. Las simetrías finitas pueden ser discretas o continuas. La paridad y la inversión del tiempo son simetrías discretas[4] de la Naturaleza, mientras que el espacio es una transformación continua. Los matemáticos siempre se han fascinados por los patrones. Las clasificaciones de patrones y planos espaciales comenzó seriamente en el siglo XIX, desde ese momento se han desarrollado varios métodos de clasificación y en particular una de las maneras de estudiar patrones y redes es analizando las transformaciones que dejan estos patrones invariantes a través del concepto de grupo de transformaciones. Más precisamente para una dimensión, existen 7 grupos y para dos dimensiones todas las teselaciones planas pueden ser clasificadas por 17 diferentes grupos de simetría.

Como un asunto de interés en los descubrimientos hechos por matemáticos, hacemos un breve recorrido, exponiendo algunos resultados interesantes:

1. Los matemáticos descubrieron la clasificación completa de los patrones cristalográficos tridimensionales antes de publicar los resultados para un problema bidimensional. La lista completa de 230 patrones cristalográficos tridimensional fue completada en 1890 por Fedorov [4]. Un año después elaboraron los detalles para los grupos bidimensional.

2. Cuando Hilbert se dirigió al Congreso Internacional de Matemáticos en Paris en 1900, propuso una serie de problemas, en los cuales los matemáticos podrían enfocarse y posiblemente resolver. Uno de esos se relacionó con la comprensión de grupos cristalográficos de mayor dimensión. En 1910, Bieberbach probó que solo existe un número finito de grupos en cualquier dimensión [3].

3. En 1944 Müller estudió patrones en el arte Islámico. Sucedió que los 17 tipos de patrones bidimensionales repetidos fueron usados creativamente en la cultura Islámica. De hecho ella solo pudo identificar once de las diecisiete clases de murales[5]. No fue sino hasta 1984

[3]Ya que hacen de las simetrías un fenómeno dado por Dios.

[4] Un patrón específico se repite a intervalos finitos en diferentes direcciones; el patrón es el mismo y por lo tanto invariante bajo transformaciones finitas.

[5]Müller también investigó otro tipo de grupos, en particular los ochenta grupos de dos lados en el plano

que los matemáticos pudieron documentar los diecisiete tipos de arte increíblemente hermosos creados por los constructores en el Palacio de la Alhambra en España.

4. En 1948 Zassenhaus proporcionó un algoritmo para determinar el conjunto completo de representantes para grupos especiales en dimensiones arbitrarias. Hoy en día existen 4783 grupos de simetría conocidos en cuatro dimensiones. Sin embargo, el problema de enumerar la cantidad exacta de simetrías en todas las dimensiones sigue siendo un problema abierto y desafiante.

Durante el invierno de 1873, Lie comenzó a desarrollar su teoría de los grupos de transformaciones continuas llamados Grupos de Lie[6]. Mostró que las simetrías de una ecuación diferencial forman un grupo (el grupo admitido de la ecuación) y demostró que el conocimiento de este grupo es tremendamente útil para comprender y construir soluciones de la ecuación diferencial.

Las aplicaciones de los grupos de simetría a ecuaciones diferenciales abarcan temas como

- Transformaciones de soluciones conocidas para obtener nuevas soluciones;
- Extensiones de métodos de integración de ecuaciones diferenciales (ordinarias);
- Construcción de soluciones invariantes, es decir, soluciones que no se alteran bajo la acción de un subgrupo del grupo admitido;
- Detección de una transformación de linealización;
- Construcción de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EPD) a partir de la invariancia bajo los grupos de Lie de transformaciones puntuales.
- Proporcionar soluciones invariantes y leyes de conservación.

Euclidiano. Estos son el tema de una nota corta por Müller, donde incluye solo ilustraciones de mosaicos de la Alhambra representando nueve diferentes grupos de murales. A pesar de los comienzos matemáticos, Müller fue una astrónoma conocida y durante varios años fue Secretaria General de la Union Matemática Internacional. En una carta de 1984 mencionó que hay un interés continuo en su tesis y que había un plan para republicarla. Eso no sucedió.

[6] Lie siempre escribió en términos de grupos mientras que en estos días se distingue entre un grupo y un álgebra.

- Probar que las leyes de conservación están ligadas a simetrías del sistema físico en cuestión utilizando la definición de lagrangiano clásico y generalizado asociado a la ecuación diferencial.

- Encontrar la conservación de una magnitud física y que esta requiere (en virtud del teorema de Noether) la existencia de simetrías del lagrangiano clásico generalizado; entre otros.

Para realizar cualquiera de estas tareas es imprescindible encontrar un método confiable para hallar simetrías de ecuaciones diferenciales. En principio, uno tiene que insertar el cambio arbitrario de variables en la ecuación diferencial y forzar las nuevas variables para satisfacer la misma ecuación diferencial. Esto generalmente produce un gran número de ecuaciones diferenciales[7] (generalmente no lineales), que la transformación satisface. Sin embargo, esto es demasiado engorroso para ser de gran utilidad, ya que produce un gran sistema de ecuaciones cuya solución está fuera de cuestión por razones de tedio y no de dificultad. Una observación crucial de Lie fue considerar la acción infinitesimal de un grupo.
En el tratamiento de las ecuaciones diferenciales usualmente se requiere algo similar para analizar una clase particular de ecuaciones. Por ejemplo, la clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden estaría representada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = w(x, y, y') \tag{1}$$

en donde, $y' \equiv \frac{dy}{dx}$; y una ecuación de difusión no lineal por

$$u_t = [D(u)u_x]_x \,. \tag{2}$$

En ambos casos w y D son funciones arbitrarias de sus argumentos, al menos en algún dominio de interés. Por lo tanto, la clase es caracterizada completamente al permitir que las funciones arbitrarias adoptan todas las formas funcionales posibles.

Una transformación puntual es el cambio habitual de variables en ecuaciones diferenciales dejando el orden sin cambios. Lie descubrió que existían estas transformaciones y comenzó a considerar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's), con la esperanza de

[7] Si una inyección no contrasta en la naturaleza de la simetría, el número de ecuaciones definitorias es igual a el número de ecuaciones del sistema bajo análisis. La especificación de un tipo particular de simetrías conduce a un mayor número de ecuaciones determinantes.

que se pudiera desarrollar una teoría que fuera análoga a la teoría de ecuaciones de Galois[8]. Lie, examinó las transformaciones de contacto o tangentes y consideró cómo afectaban a un proceso, debido a los trabajos de Jacobi quien generaba más soluciones de ecuaciones diferenciales a partir de una solución ya conocida.

La teoría de grupos ha tenido un rol importante en diversos dominios de las ciencias: matemáticas, física, teoría de la relatividad, mecánica cuántica, entre otras. Esta teoría fue introducida por la necesidad de encontrar una maquinaria matemática adecuada para estudiar propiedades de objetos matemáticos o físicos. Despues de la invención del calculo infinitesimal, el concepto de grupo es considerado el descubrimiento mas importante en matemáticas.

Como ya mencionamos estas ideas se las debemos a Sophus Lie. El grupo de simetrías de un sistema de EDP es el grupo de Lie local mas grande de transformaciones que actúan sobre el espacio de variables independientes y dependientes del sistema, con la propiedad de que se conserve el conjunto de soluciones. En la teoría de Lie este grupo consiste de transformaciones geométricas que actúan sobre el conjunto de soluciones transformando sus gráficas. El generador infinitesimal es un campo vectorial asociado al grupo local uniparamétrico de transformaciones y a partir de este se sigue que el grupo de simetrías se describe por la composición de los grupos uniparamétrico básicos.

El método para encontrar el grupo de simetrías asociado a una EDP o a un sistema de EDPs está basado en el criterio infinitesimal de invariancia y en este caso la prolongación o extensión del generador infinitesimal al espacio de funciones diferenciales (es decir, el espacio compuesto de todas las derivadas de las variables dependientes del sistema).

Para precisar un poco la idea de Lie consideremos la rotación del círculo en la Figura 1 en el plano (x, y), el cual forman el grupo de las transformaciones que son parametrizadas por el ángulo de rotación θ

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= xcos\theta - ysen\theta,\\ \tilde{y} &= xsen\theta + ycos\theta.\end{aligned}$$

Cuando $\theta = 0$, tenemos la transformación identidad. Dado que θ puede variar continuamente, estas rotaciones son transformaciones continuas y la apariencia del círculo no cambia

[8] La teoría de Galois, el producto final de muchos esfuerzos de los matemáticos para representar soluciones de ecuaciones algebraicas explícitamente por radicales, se ocupa de las transformaciones de un grupo finito.

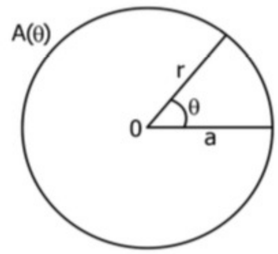

Figura 1: Rotación en el plano (x, y).

y no importa que se evalúe en cualquier ángulo que sea rotado. La expansión en series de Taylor en una vecindad de $\theta = 0$ produce

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon y + O(\epsilon^2), \\ \tilde{y} &= y + \epsilon x + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{3}$$

Lie considera la ecuación (3) como una rotación infinitesimalmente pequeña del plano. El teorema fundamental de Lie se refiere a que la acción de un grupo puede ser esencialmente recuperada por completo desde la acción infinitesimal del grupo e implica la solución de un problema de valor inicial para un sistema finito de ecuaciones diferenciales ordinarias (Ver Teorema 2).

Esto modera la tarea de resolver un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, es decir, las ecuaciones determinantes para la acción de grupo infinitesimal.

Por ejemplo, las tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden escalares del problema de Kepler tienen treinta y seis ecuaciones independiente, que es el mismo número que se obtiene cuando se usan transformaciones infinitesimales. Una vez que se encuentran los infinitesimales, es suficiente resolver el problema del valor inicial de las ecuaciones diferenciales ordinarias para recuperar el grupo de simetría. No se puede exagerar la importancia de la " *infinitesimalización* " en el cálculo de la simetría, como menciona Olver [10] página 47: *"casi todo el rango de aplicación de los grupos de Lie a las ecuaciones diferenciales depende finalmente de esta única construcción"* .

El teorema de Noether muestra una relación oculta entre dos conceptos básicos (simetrías y cantidades conservadas) que hasta entonces se habían tratado por separado. El teorema proporciona una fórmula matemática explícita para encontrar la simetría que subyace a una ley de conservación dada y, por el contrario, encontrar la ley de conservación que corresponde a una simetría dada. Pero ¿Quién fue Noether? (Ver Anexo 1 en el Apéndice para una breve semblanza)

El teorema de Noether vincula lo que se había reconocido como un hecho simple, de “cómo son las cosas” con simetrías en la Naturaleza, alterando nuestra comprensión de las Leyes de la Naturaleza. Antes de 1916, las leyes del movimiento de Newton (incluidas las alteraciones requeridas por la relatividad de Einstein) y las leyes de la termodinámica y la electrodinámica se reconocieron como hechos empíricos, expresiones de cómo funcionan las cosas sin indicar el por qué. Al mostrar que el comportamiento de la materia y las fuerzas está dictado por la geometría del espacio y el tiempo que ocupan, el Teorema de Noether cambió la forma en que consideramos el tejido esencial de la realidad. Por ejemplo “la forma en que se comportan las cosas no cambia con el tiempo” requiere la primera ley de la termodinámica que menciona: la energía de un sistema no puede crearse ni destruirse, sino que simplemente puede cambiar de forma; del mismo modo, la carga eléctrica total en un sistema no puede cambiar sin la entrada/salida desde fuera del sistema, esto resulta de una simetría matemática discreta (donde se menciona que el comportamiento de un sistema de cargas no se ve alterado por un cambio de fase general); el “Modelo estándar de Física de partículas” está construido con el trabajo de Emmy Noether; los dos problemas principales que se abordan en los aceleradores de partículas en este momento se plantean, en su nivel más primordial, en términos del Teorema de Noether. Como estos, existen muchos otros ejemplos que aborda el Teorema de Nother, es decir, el teorema sigue desempeñando un papel crucial en la vanguardia de la investigación en la Física.

En este tabajo examinemos un poco las ideas de Noether, y para esto mencionaremos algunas definiciones y resultados que se han obtenido en los últimos años para poder aplicarlos a las ecuaciones de Kuramoto-Sivashinsky y de Kudryashov-Sinelshchikov, enunciando así sus generadores infinitesimales para posteriormente definir sus leyes de conservación.

Descripción de la tesis

En el Capítulo 1 discutimos los fundamentos y algunas aplicaciones de la teoría de Lie de grupos de simetría de ecuaciones diferenciales. Se presenta el método básico infinitesimal para calcular grupos de simetría, y se utiliza para determinar el grupo de simetría general de algunas ecuaciones diferenciales particulares.

En Capítulo 2 hablamos de las simetrías en las EDO. Se presenta un algoritmo de reducción para una EDO de n-ésimo orden, admitiendo un grupo de transformaciones puntuales de Lie r paramétrico y reduciéndola a una ecuación diferencial de orden $(n-r)$. Mostramos cómo encontrar simetrías de orden superior y cómo extender el algoritmo de reducción para incorporar tales simetrías.

El Capítulo 3 se refiere a las simetrías en las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se muestra cómo encontrar simetrías puntuales y cómo construir soluciones invariantes relacionadas. Hay una discusión completa de la aplicabilidad a los problemas que involucran EDPs escalares y sistemas de EDPs.

En el Capítulo 4 definimos varios conceptos como leyes de conservación y ecuaciones adjuntas, autoadjuntas, lagrangiano generalizado y también hablamos de una de las versiones del teorema de Noether, descubierta por N. Ibragimov, la cual se basa esencialmente en las propiedades de invariancia de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El Capítulo 5 está organizado de la siguiente manera. Presentamos las ecuaciones determinantes generales para las componentes de los generadores de simetría de las ecuaciones de Kuramoto-Sivanshinsky (KS) 2-dimensional y la de Kudryashov-Sinelshchikov (K-S) 3-

dimensional, también presentamos la condición de autoadjuntes y establecemos las leyes de conservación correspondientes para las ecuaciones auto-adjuntas. Se escriben nuevos generadores de simetría puntuales de Lie para las ecuaciones antes mencionadas y se establecen algunas leyes de conservación.

Cabe mencionar que los resultados sobre las simetrías de Lie y leyes de conservación para la ecuación KS 2-dimensional se basaron en la referencia [29] y el objetivo de incluir estas ecuaciones fue a manera de ejemplo de cómo aplicar la maquinaria matemática desarrollada por N. H. Ibragimov y su grupo de investigación.

Las simetrías de Lie de la ecuación de K-S 3-dimensional se obtuvieron a partir de la referencia [17] y destacamos que los resultados sobre las leyes de conservación son, hasta donde sabemos, nuevos.

Finalmente en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones que obtuvimos en este trabajo y mencionamos los futuros planes del mismo.

Capítulo 1

Fundamentos de los Grupos de Lie

1.1. Introducción

En las ecuaciones diferenciales se presentó una amplia variedad de técnicas diseñadas para resolver particulares tipos de estas. Dichas ecuaciones parecían no estar relacionadas en todos los aspectos, particularmente en los tipos de ecuaciones como las separables, homogéneas o exactas. Por supuesto estás fueron el estado del arte al rededor del siglo XIX, hasta que Marius Sophus Lie hizo un descubrimiento profundo y trascendental, él decía que los métodos de solución especiales eran en realidad casos particulares de un procedimiento de integración basado en la invariancia de la ecuación diferencial sobre un grupo de transformaciones continuas[1]. Esta elegante observación[2] inmediatamente unificó y amplió significativamente las técnicas de integración. Estos grupos, ahora conocidos universalmente como grupos de Lie, han tenido profundo impacto en todas las áreas de Matemáticas, Física, Ingeniería, Finanzas y otras ciencias.

En este capítulo definiremos varios conceptos que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo. Los grupos de Lie de transformaciones se caracterizan por sus generadores infinitesimales. Mostraremos el algoritmo para encontrar todos los generadores infinitesimales de transformaciones puntuales y, más generalmente, transformaciones de contacto o tangentes

[1]Una transformación continua puede ser considerada como una sucesión de muy pequeñas transformaciones desde la identidad.

[2]En realidad esta fue mas que una observación, ya que Lie mostró cómo estos métodos estaban conectados.

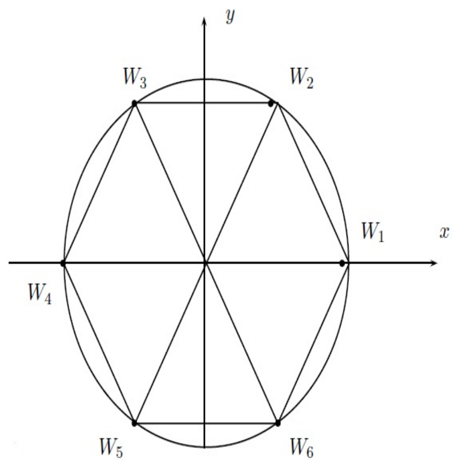

Figura 1.1: Las seis raíces de la unidad.

admitidas por una ecuación diferencial dada, así como algunas aplicaciones de generadores infinitesimales para transformaciones de Lie.

1.2. Transformaciones de simetrías: Un primer enfoque

Para prepararnos para las aplicaciones de la teoría de Lie de grupos continuos a ecuaciones diferenciales definiremos las primeras nociones básicas. La clave para el estudio es una compresión firme del término de simetría. Definimos una simetría como una transformación que satisface

1. Preservación de la estructura
2. Invertibilidad;
3. El objeto (un conjunto o una ecuación diferencial) es una transformación que se le puede asignar a si mismo otra transformación.

Para obtener una mejor comprensión de los puntos anteriores empecemos considerando el concepto de simetría en el contexto del álgebra y geometría básica la Figura 1.1 muestra las soluciones de la ecuación $z^6 = 1$ que se encuentran en el círculo unitario en el plano complejo. La transformación simétrica obvia de las seis raíces de la unidad son rotaciones sobre múltiples enteros del ángulo $\frac{2\pi}{6}$ y reflexiones en cada línea perpendicular a la línea dibujada en la Figura 1.1. Cada una de estas operaciones conserva la estructura ya que el círculo no se deforma de alguna manera, además el objeto se asigna a sí mismo, ya que cada solución en el círculo unitario se transforma en otra solución. Por otra parte, tanto las rotaciones como las reflexiones son operaciones claramente invertibles, porque se pueden girar en el sentido de las agujas del reloj y en el sentido contrario a estas y se puede invertir todas las reflexiones.

Como un ejemplo similar al determinar las simetrías de la ecuación $z^5 = 1$, como antes, notamos que esta ecuación tiene simetría rotacional (ángulos de $\frac{2\pi}{5}$) pero no existen reflexiones que transforman soluciones a otras soluciones. Para expresar los resultados anteriores de una manera matemática podemos representar solo las rotaciones multiplicando por z a $\lambda_6 = exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right)$ y $\lambda_5 = exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$, respectivamente. Aparentemente estas operaciones no alteran las soluciones de las dos ecuaciones dadas

$$(\lambda_6 z)^6 = exp(2\pi i)z^6 = z^6 = 1,$$

$$(\lambda_5 z)^5 = exp(2\pi i)z^5 = z^5 = 1.$$

Lo mismo ocurre al multiplicar z n-veces con λ_6 y λ_5 respectivamente, ya que $exp(2\pi ni) = 1$. Las reflexiones se pueden escribir como multiplicaciones de z con $\rho = exp(i\pi)$ (aquí solo es necesaria una reflexión, porque las demás pueden considerarse como una combinación de rotaciones adecuadas con la reflexión anterior)

$$(\rho z)^6 = exp(2\pi i)z^6 = z^6 = 1,$$

$$(\rho z)^5 = exp(2\pi i)z^5 = z^5 \neq 1.$$

Las reflexiones no producen transformaciones de simetrías en el segundo ejemplo, porque no dejan inalterado el objeto considerado. Vemos así que diferentes objetos pueden tener simetrías distintas, incluyendo la posibilidad de que no existan simetrías, excepto las triviales (que se definirán más adelante).

En el ejemplo anterior uno puede realizar varias transformaciones de simetría sucesivamente y aún así obtener una transformación de una simetría de nuevo, todas las transformaciones son invertibles y no hacer nada también es una transformación de simetría (la trivial). Por lo tanto, satisface los axiomas de grupo que mencionamos a continuación de manera precisa y formal.

Definición 1. *Un conjunto G de elementos junto con una operación llamada multiplicación $m : G \times G \to G$, $m(a, b) \mapsto c$, que se denota como $ab = c$, forman un grupo si cumple los siguientes axiomas*

1. La multiplicación: si $a, b \in G$ entonces $ab \in G$;

2. La asociatividad: $(ab)c = a(bc) = abc, \quad \forall\ a,\ b,\ c \in G$;

3. El elemento identidad: Existe un elemento $e \in G$, con la propiedad $ea = ae = a, \forall a \in G$;

4. Los inversos: Para cada $a \in G$ existe un único elemento inverso denotado por a^{-1}, con la propiedad: $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

1.2.1. Grupo de transformaciones

Sean ϕ, ψ funciones continuas, el conjunto de transformaciones con respecto a x y y

$$x_1 = \phi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a), \tag{1.1}$$

en donde, cada una está determinado por algún valor del parámetro a, constituye un grupo sí asignando un valor definido al parámetro a y dando cualquier valor b tenemos

$$x_2 = \phi(x_1, y_1, b), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, b), \tag{1.2}$$

que resulta de la sustitución de cualesquiera dos transformaciones una en otra resultando una nueva transformación. Las transformaciones (1.1) forman un grupo si los resultados de eliminar x_1 y y_1 de (1.1), (1.2), es decir, sustituyendo x_1, x_2 en (1.2)

$$x_1 = \phi(\phi(x, y, a), \psi(x, y, a), b),$$

$$x_2 = \psi(\phi(x, y, a), \psi(x, y, a), b),$$

se reduce identicamente a $x_2 = \phi(x, y, c)$, $y_2 = \psi(x, y, c)$, donde c está en función de a y b. Si (1.1) está representado por T_a y (1.2) T_b, expresaremos simbólicamente lo anterior como $T_a \cdot T_b = T_c$.

Ejemplo 1.

a) Las traslaciones, con $x_1 = x$ y $y_1 = y + a$, después de haber fijado algún valor en el parámetro a a una segunda transformación correspondiente al valor b es $x_2 = x_1$ y $y_2 = y_1 = b$, entonces $x_2 = x$ y $y_2 = y + (a + b)$ forman un grupo.

b) Consideremos el conjunto de las rotaciones,

$$x_1 = xcos\ a - ysen\ a, \qquad y_1 = xsen\ a + ycos\ a,$$
$$x_2 = x_1cos\ b - y_1sen\ b, \qquad y_2 = x_1sen\ b + y_1cos\ b.$$

Así, $x_2 = xcos\ (a+b) - ysen\ (a+b)$ *y* $y_2 = xsen\ (a+b) + ycos\ (a+b)$. *Que también forman un grupo.*

c) Las transformaciones afín también forma un grupo con $x_1 = x$, $y_1 = ay$, *se observa que* $x_2 = x$ *y* $y_2 = aby$ *constituye el grupo.*

En los grupos considerados en la teoría de Lie se presupone que las transformaciones se pueden organizar en pares cuyos miembros son mutuamente inversos, es decir, si (1.1) se resuelve para x y y entonces sus valores en términos de x_1, y_1 asumen la forma

$$x_2 = \phi(x_1, y_1, \overline{a}), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, \overline{a}),$$

en donde, $\overline{a}$ está en función de a.

Ya que la realización de dos sucesivas transformaciones mutuamente inversas dan como resultado la transformacón identidad, debe de existir un valor a_0 que reduce la transformación a una transformación identidad. Como ϕ y ψ son funciones continuas del parámetro a, si empezamos con el valor a_0 y permitimos que varíe continuamente, el efecto de la transformación correspondiente sobre x y y será una transformación continua.

Ejemplo 2.

a) En las traslaciones, $\overline{a} = -a$ *y* $a_0 = 0$.

b) En el conjunto de las rotaciones

$$x_2 = x\ cos(a+b) - y\ sen(a+b),$$

$$y_2 = x\ sen(a+b) + y\ cos(a+b),$$

$\overline{a} = -a$ *y* $a_0 = 0$.

Se puede observar que cuando x y y se toman como constantes mientras que x_1, y_1 se toman como variables, entonces las ecuaciones de (1.1) son ecuaciones parámetricas de la curva o trayectoria que pasa a través de un punto fijo (x, y). Por lo tanto, la curva o trayectoria correspondiente a algún punto (x, y) se obtiene eliminando a a de las dos ecuaciones de (1.1).

Observación 1. *El parámetro puede aparecer de varias formas en las transformaciones que determinan un grupo dado. Por ejemplo si* $x_1 = x$*, y* $y_1 = y + a^2$ *también determinan el grupo de traslaciones, en este caso* a *toma valores imaginarios y reales para dar todas las transformaciones de* (1.1)*.*

Estamos listos para enunciar la siguiente definición y formalizar las ideas anteriores.

Definición 2. *Sea* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *un punto en la región* $D \subset \mathbb{R}^n$*. El conjunto de transformaciones*

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \tag{1.3}$$

definido para cada $\boldsymbol{x}$ *en* D *y* ε *un parámetro en* $S \subset \mathbb{R}$*, con* $\varphi(\varepsilon, \delta)$ *una ley de composición de* ε *y* δ *en* S*, forma un* ***grupo uniparámetrico de transformaciones*** *en* D *si se cumple*

1. *Para cada* ε *en* S*, las transformaciones (1.3) son inyectivas en* D*.*

2. S *con la ley de composición* φ *forma un grupo* G*.*

3. *Para cada* $\boldsymbol{x}$ *en* D*,* $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}$*, cuando* $\varepsilon = \varepsilon_0$*, corresponde a la transformación identidad* I*, es decir,*

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^*, \varepsilon_0) = \boldsymbol{x}.$$

4. *Si* $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$*,* $\boldsymbol{x}^{**} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ *entonces*

$$\boldsymbol{x}^{**} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varphi(\varepsilon, \delta)).$$

1.3. Transformación infinitesimal

Definición 3. *Un grupo de transformaciones uniparamétrico define un* ***grupo de Lie de transformaciones uniparámetrico*** *si, además de satisfacer los axiomas* $(1) - (4)$ *de la Definición 2, se cumple*

i) ε *es un parámetro continuo, es decir,* S *es un intervalo en* $\mathbb{R}$ *y* $\varepsilon = 0$ *corresponde al elemento identidad* I*, en el grupo de transformaciones;*

ii) $\boldsymbol{X}$ *es infinitamente diferenciable con respecto a* $\boldsymbol{x}$ *en* D *y es una función analítica de* ε *en* S*.*

iii) La ley de composición $\varphi(\varepsilon, \delta)$ es una función analítica de ε y δ con $\varepsilon, \delta \in S$.

Consideremos un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \tag{1.4}$$

en donde, $\boldsymbol{x} = (x, y)$ y $\boldsymbol{X} = (\phi, \psi)$ son funciones continuas dadas, escribimos las transformaciones $x_1 = \phi(x, y, \varepsilon_0 + \delta\varepsilon)$, $y_1 = \psi(x, y, \varepsilon_0 + \delta\varepsilon)$, donde ε_0 es el valor del parámetro que determina la transformación identidad y $\delta\varepsilon$ es un infinitesimal.

Desarrollando x_1 y y_1 en series de Taylor al rededor de ε_0, encontramos, a primer orden

$$x_1 = \phi(x, y, \varepsilon_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

$$y_1 = \psi(x, y, \varepsilon_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2).$$

Notamos que $\phi(x, y, \varepsilon_0) = x$, $\psi(x, y, \varepsilon_0) = y$, así los cambios en x y y debido a las transformaciones son

$$x_1 - x \equiv \delta x = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

$$y_1 = y \equiv \delta y = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

en donde, los términos en potencias superiores de $\delta\varepsilon$ están concentrados en $O(\varepsilon^2)$. Como ε_0 es un valor fijo del parámetro, las únicas variables presentes en $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)\big|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$ y $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)\big|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$ son x, y. Escribimos

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \equiv \xi(x, y), \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right)\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \equiv \eta(x, y), \tag{1.5}$$

luego las transformaciones anteriores toman la forma

$$\delta x = \xi(x, y)\delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2), \qquad \delta y = \eta(x, y)\delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2). \tag{1.6}$$

Las potencias mayores del infinitesimal $\delta\varepsilon$ se pueden despreciar siempre que al menos uno de ellos ξ o η no desaparezcan de manera idéntica (es decir, que para todos los valores de x y y ninguno de ellos sea infinito). En este caso la transformación que produce un cambio infinitesimal en las variables x, y y está dada por

$$\delta x = \xi(x, y)\delta\varepsilon, \quad \delta y = \eta(x, y)\delta\varepsilon. \tag{1.7}$$

Esto se conoce como una **transformación infinitesimal**.

Dado que $k\delta\varepsilon$, con k una constante finita distinta de cero, es un infinitesimal cuando $\delta\varepsilon$ lo es, si esto último lo reemplazamos en (1.7), la transformación infinitesimal que tendremos será

$$\delta x = k\xi(x,y)\delta\varepsilon,$$

$$\delta y = k\eta(x,y)\delta\varepsilon.$$

Por otro lado si $f(x,y)$ no es constante

$$\delta x = f(x,y)\cdot\xi(x,y)\delta\varepsilon, \quad \delta y = f(x,y)\cdot\eta(x,y)\delta\varepsilon,$$

son distintas de (1.7).

Observación 2. *En caso de que* $\left(\frac{\partial\phi}{\partial a}\right)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$ *y* $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_0}$ *sean ambos cero o si uno de ellos es infinito, el método para encontrar una transformación infinitesimal del grupo debe ser modificado.*

A continuación estableceremos la existencia de una transformación infinitesimal y un método para encontrarla.

Supongamos los casos cuando $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi(x,y,\varepsilon)$ y $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi(x,y,\varepsilon)$ desaparezcan de manera idéntica para el caso especial de $\varepsilon=\varepsilon_0$ o, si alguno de ellos es infinito para el valor de ε, independientemente de los valores que pueden tomar x y y. Se debe tener en cuenta que no pueden desaparecer de manera idéntica para todos los valores de ε, porque en ese caso ninguna de las funciones ϕ y ψ podrían involucrar a ε y tampoco puede una de ellas volverse infinito para todos los valores de x, y y a, ya que se suponen que ϕ y ψ son generalmente analíticas, lo que implica la existencia de derivadas finitas, excepto quizás por valores especiales de los argumentos.

Sea ε un valor del parámetro para el cual $\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}$ y$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}$ son finitos y al menos uno de ellos distinto de cero. Denotamos a la transformación T_ε determinada por el parámetro ε, esta tiene inversa definida por $T_{\overline{\varepsilon}}$ en el grupo correspondiente al valor $\overline{\varepsilon}$ del parámetro, donde $\overline{\varepsilon}$ es una función que depende de ε y como $T_{\overline{\varepsilon}}T_\varepsilon = T_0$ es la transformación identidad, $T_{\overline{\varepsilon}}T_{\delta+\varepsilon}$ es una transformación infinitesimal. Si $T_{\overline{\varepsilon}}$ es

$$x_1 = \phi(x,y,\overline{\varepsilon}), \quad y_1 = \psi(x,y,\overline{\varepsilon}),$$

la transformación infinitesimal $T_{\overline{\varepsilon}}T_{\delta+\varepsilon}$, cuando se desarrolla en series de Taylor, se puede escribir como

$$x_2 = \phi(x_1, y_1, \varepsilon + \delta\varepsilon) = x + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi(x_1, y_1, \varepsilon)\delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

$$y_2 = \psi(x_1, y_1, \varepsilon + \delta\varepsilon) = x + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi(x_1, y_1, \varepsilon)\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2).$$

Debido a la forma en que se eligió a ε, ninguno de los coeficientes de $\delta\varepsilon$ es infinito para todos los valores de x y y y uno de ellos no es idénticamente cero. Escribiendo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi(x_1, y_1, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi\left[\phi(x, y, \overline{\varepsilon}), \psi(x, y, \overline{\varepsilon})\right] = \xi(x, y, \varepsilon), \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi(x_1, y_1, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi\left[\phi(x, y, \overline{\varepsilon}), \psi(x, y, \overline{\varepsilon})\right] = \eta(x, y, \varepsilon), \end{cases} \tag{1.8}$$

se sigue que una transformación infinitesimal del grupo (1.1) es del tipo (1.7), así

$$\delta x = \xi\delta\varepsilon, \quad \delta y = \eta\delta\varepsilon, \tag{1.9}$$

siempre se puede encontrar.

Las formas para ξ y η encontradas en (1.9) son exactamente las mismas que las anteriores, para la opción especial de $\varepsilon = \overline{\varepsilon} = \varepsilon_0$.

De lo anterior se puede ver que ξ y η en (1.9) depende de ε. Queda mostrar como depende de la elección del parámetro.

Sea

$$\delta x = \Sigma(x, y)\delta\varepsilon, \qquad \delta y = H(x, y)\delta\varepsilon, \tag{1.10}$$

$$x_1 = x + \Sigma(x, y)\delta\varepsilon, \qquad y_1 = y + H(x, y)\delta\varepsilon, \tag{1.11}$$

alguna transformación infinitesimal de el grupo (1.1), donde Σ y H son no ceros y en general ninguno de ellos es infinito. El resultado de buscar sucesivamente cualquier transformación infinitesimal es obtener alguna transformación del grupo cuyo efecto en las variables x, y difieren de T_ε por alguna cantidad infinitesimal. En otras palabras esta es una transformación $T_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$, donde $\Delta\varepsilon$ es un infinitesimal que está en función de ε y $\delta\varepsilon$ por la propiedad de grupo de (1.1).

De la forma (1.11) de esta transformación tenemos

$$x_2 = x_1 + \Sigma(x_1, y_1)\delta\varepsilon = \phi(x, y, \varepsilon) + \Sigma(\phi, \psi)\delta\varepsilon,$$

$$y_2 = y_1 + H(x_1, y_1)\delta\varepsilon = \psi(x, y, \varepsilon) + H(\phi, \psi)\delta\varepsilon,$$

mientras que de la expansión en series de Taylor obtenemos

$$x_2 = \phi(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \phi(x, y, \varepsilon) + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

$$y_2 = \psi(x, y, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \psi(x, y, \varepsilon) + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2),$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} \Sigma(\phi, \psi, \delta)\varepsilon \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2), \\ \\ H(\phi, \psi, \delta)\varepsilon \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2), \end{cases} \tag{1.12}$$

para todos los valores de x, y, ε y $\delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon$ están definiendo una función de ε y $\delta\varepsilon$ y un infinitesimal junto con $\delta\varepsilon$. Por hipótesis Σ y H no desaparecen idénticamente; supongamos que $\Sigma \neq 0$, entonces x no puede estar fijo por todas las transformaciones del grupo (1.1). Por lo tanto, ϕ debe involucrar a ε. Con una elección adecuada de x, y y ε, los coeficientes de $\delta\varepsilon$ y de $\Delta\varepsilon$ en al menos la primera de las relaciones (1.12) son distintas de cero, además por el teorema de la inversión de la serie de potencia, $\Delta\varepsilon$ es desarrollable en las potencias de $\delta\varepsilon$. Por lo tanto, $\Delta\varepsilon = w(\varepsilon)\delta\varepsilon + O((\delta\varepsilon)^2)$, en donde $w(\varepsilon) \neq 0$, así $\Delta\varepsilon$ es del mismo orden que el infinitesimal $\delta\varepsilon$. Poniendo este valor en (1.12), dividiendo por $\delta\varepsilon$ y pasando al limite cuando δ tiende a cero obtenemos

$$\Sigma(\phi, \psi) \equiv w(\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}, \qquad H(\phi, \psi) \equiv w(\varepsilon)\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \tag{1.13}$$

o recordando que $x = \phi(x_1, y_1, \overline{\varepsilon})$, $y = \psi(x_1, y_1, \overline{\varepsilon})$ esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \phi(x_1, y_1, \alpha)}{\partial \varepsilon} \\ &= \frac{\partial}{\delta\varepsilon} = \frac{\partial}{\delta\varepsilon}\phi[\phi(x_1, y_1, \overline{\varepsilon}), \psi(x_1, y_1, \overline{\varepsilon}), \varepsilon] \\ &= \frac{1}{w(\varepsilon)}\Sigma(x_1, y_1), \end{aligned}$$

y $\frac{\delta\psi}{\delta\varepsilon}$ produciendo similarmente

$$\frac{\partial \psi}{\delta\varepsilon} = \frac{1}{w(\varepsilon)}H(x_1, y_1), \tag{1.14}$$

Usando (1.8) y remplazando x_1 y y_1 en las identidades para x y y tenemos

$$\xi(x, y, \varepsilon) \equiv \frac{1}{w(\varepsilon)}\Sigma(x_1, y_1), \tag{1.15}$$

$$\eta(x, y, a) \equiv \frac{1}{w(\varepsilon)}H(x_1, y_1). \tag{1.16}$$

Así, el efecto de usar diferentes valores del parámetro para determinar una transformación infinitesimal mediante el método de la primera parte de esta discusión es obtener pares de coeficientes de $\delta\varepsilon$ en las dos fórmulas que son proporcionales, siendo constantes los factores de proporcionalidad. Por lo tanto, las transformaciones infinitesimales obtenidas son una y la misma a la de nuestra hipótesis. Así hemos llegado al siguiente teorema

Teorema 1. *Cada grupo uniparamétrico de transformaciones*

$$x_1 = \phi(x, y, \varepsilon), \quad y_1 = \psi(x, y, \varepsilon),$$

tiene una y sólo una transformación infinitesimal

$$\delta x = \xi(x, y)\delta\varepsilon, \quad \delta y = \eta(x, y)\delta\varepsilon,$$

en donde,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\phi\left[\phi(x, y, \overline{\varepsilon})\psi(x, y, \overline{\varepsilon}), \varepsilon\right],$$
$$\eta = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\psi\left[\phi(x, y, \overline{\varepsilon})\psi(x, y, \overline{\varepsilon}), \varepsilon\right],$$

y ε es algún valor del parámetro tal que al menos uno de los valores $\frac{\delta\phi}{\delta\varepsilon}$ y $\frac{\delta\psi}{\delta\varepsilon}$ no son cero y ninguno de los términos es infinito para todos los valores de x y y.

Ejemplo 3. *a) En el caso de las traslaciones*

$$\boldsymbol{X} = (\phi, \psi) = (\phi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y\varepsilon))$$

$$x_1 = \phi(x, y, \varepsilon) = x, \quad y \quad y_1 = \psi(x, y\varepsilon) = y + \delta\varepsilon,$$

entonces

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \delta\varepsilon,$$

y

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = 1;$$

así la transformación infinitesimal es

$$\xi = 0, \quad \eta = 1.$$

b) Para el grupo de las rotaciones tenemos

$$x_1 = x\ cos(\delta\varepsilon) - y\ sen(\delta\varepsilon) \qquad y \qquad y_1 = x\ sen(\delta\varepsilon) + y\ cos(\delta\varepsilon),$$

Dado que

$$cos(\delta\varepsilon) = 1 - \frac{(\delta\varepsilon)^2}{2!} + O((\delta\varepsilon)^2),$$

y

$$sen(\delta\varepsilon) = 1 - \frac{(\delta\varepsilon)^3}{3!} + O((\delta\varepsilon)^2),$$

además los infinitesimales de orden superior al primero pueden ser despreciados, entonces $cos(\delta\varepsilon)$ *puede ser reemplazado por* 1 *y* $sen(\delta\varepsilon)$ *por* $\delta\varepsilon$*. Por lo tanto*

$$\delta x = -y\delta\varepsilon, \qquad \delta y = x\delta\varepsilon,$$

es decir, los infinitesimales están dados por

$$\xi = -y, \qquad \eta = x.$$

Nuevamente consideremos el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico paramétrizado por el parámetro ε

$$\mathbf{X}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \tag{1.17}$$

con la transformación identidad cuando $\varepsilon = 0$ y sea φ la ley de composición del parámetro ε. Expandiendo (1.17) al rededor de $\varepsilon = 0$ en alguna vecindad de $\varepsilon = 0$ obtenemos de forma general,

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \varepsilon \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \right) + \cdots = \boldsymbol{x} + \varepsilon \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) + O(\varepsilon^2). \tag{1.18}$$

Sea

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\delta \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{1.19}$$

La transformación $\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ se llama **transformación infinitesimal** del grupo de Lie de transformaciones (1.17). Los componentes de $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ se llaman los **infinitesimales** de (1.17).

Lema 1. *El grupo de Lie de transformaciones uniparamérico*

$$\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \tag{1.20}$$

satisface la relación

$$\boldsymbol{X}(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))). \tag{1.21}$$

Demostración. *Sea* $\boldsymbol{X}(x, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon), \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))) &= (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varphi(\varepsilon, \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)))) \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varphi(\varphi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varphi(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon + \Delta\varepsilon).\end{aligned}$$

□

Teorema 2. ***(Primer Teorema Fundamental de Lie)***
Existe una parametrización $\tau(\varepsilon)$ *tal que el grupo de Lie de transformaciones* $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *es equivalente a la solución de un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden dado por*

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\tau} = \xi(\boldsymbol{x}^*) \quad \textit{con} \quad \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}, \quad \textit{cuando} \quad \tau = 0,$$

en particular

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon',$$

cuando

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}|_{(x,y)=(\varepsilon,\varepsilon^{-1})}$$

y $\quad \Gamma(0) = 1.$

Demostración. *Consideremos el grupo uniparamétrico de transformaciones de Lie (1.3); mostraremos que este grupo conduce a*

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\tau} = \xi(\boldsymbol{x}^*), \qquad \textit{con} \quad \boldsymbol{x}^* = x, \ \textit{cuando} \quad \tau = 0, \tag{1.22}$$

y

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}|_{(x,y)=(\varepsilon,\varepsilon^{-1})}. \tag{1.23}$$

Expandimos el lado izquierdo de la relación (1.21) en una serie de potencias de $\Delta\varepsilon$*, al rededor de* $\Delta\varepsilon = 0$*, obteniendo*

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \boldsymbol{x}^* + \frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2), \tag{1.24}$$

en donde, $\boldsymbol{x}^*$ *está dado por (1.3). Entonces, expandiendo* $\varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ *en una serie de potencias sobre* $\Delta\varepsilon$ *alrededor de* $\Delta\varepsilon = 0$*, resulta que*

$$\varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) = \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2), \tag{1.25}$$

en donde, $\Gamma(\varepsilon)$ se define por (1.23). En consecuencia, después de expandir el lado derecho (1.21) en series de potencia de $\Delta\varepsilon$, al rededor de $\Delta\varepsilon = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \boldsymbol{X}\Big(\boldsymbol{x}^*, \varphi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)\Big) \\
&= \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}^*, \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2)\right) \\
&= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^*, 0) + \Delta\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^*, \delta)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}\right) + O((\Delta\varepsilon)^2) \\
&= \boldsymbol{x}^* + \Gamma(\varepsilon)\xi(\boldsymbol{x}^*)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2). \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Al igualar (1.24) y (1.26) vemos que $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ satisface el problema del valor inicial para el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}^*), \quad \textit{con} \quad \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}, \quad \textit{cuando} \quad \varepsilon = 0. \qquad (1.27)$$

A partir de (1.18) se sigue que $\Gamma(0) = 1$. La parametrización $\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon'$ conduce a (1.22).

Dado que $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ es continua, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces, por el teorema de existencia y unicidad para un problema de valor inicial de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se deduce que la solución, existe y es única. Esta solución debe ser (1.20), completando la prueba del primer teorema fundamental de Lie.

□

Observación 3.

1. *El primer teorema fundamental de Lie muestra que la transformación infinitesimal contiene la información esencial que determina un grupo de Lie de transformaciones uniparaméricas.*

2. *Dado que el sistema de EDO de primer orden es invariante bajo las traslaciones en τ un grupo dado siempre se pueden reparametrizar en términos de un parámetro $\tau = 0$, tal que para valores paramétricos τ_1 y τ_2, se produce la ley de la composición se convierte en $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$.*

3. *El teorema fundamental de Lie también muestra que un grupo de Lie de transformaciones uniparaméricas de la forma (1.17) define un flujo estacionario dado por (1.22) y, además, que cualquier flujo estacionario de la forma (1.22) define un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico.*

Ejemplo 4. *a) Para el grupo de traslaciones*

$$x^* = x + \varepsilon,$$
$$y^* = y, \tag{1.28}$$

la ley de composición está dada por $\varphi(a,b) = a + b$, *además* $s\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$. *Entonces* $\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b} = 1$ *y así* $\Gamma(\varepsilon) = 1$.

Sea escribimos $\boldsymbol{x} = (x, y)$, *entonces el grupo de traslaciones se puede escribir como* $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = (x, y, \varepsilon)$. *Luego*

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = (0, 1).$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (0, 1).$$

Es decir, nuestro problema de valor inicial está dado por

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = 0,$$
$$\frac{dy^*}{d\varepsilon} = 1,$$

con $x^* = x, \quad y^* = y, \quad$ *en* $\varepsilon = 0$. *La solución de este problema de valor inicial da las expresiones* $x^* = x + \varepsilon$ *y* $y^* = y$.

b) Para el caso de las rotaciones tenemos

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (-y, x),$$

así nuestro problema de valor inicial está dado por

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = -y,$$
$$\frac{dy^*}{d\varepsilon} = x,$$

con $x^* = x, \quad y^* = y, \quad$ *en* $\varepsilon = 0$. *Cuya solución da las expresiones* $x^* = xcos(\varepsilon) - ysen(\varepsilon)$ *y* $y^* = xsen(\varepsilon) + ycos(\varepsilon)$.

1.4. Generadores Infinitesimales

En virtud del primer teorema fundamental de Lie, a partir de ahora, sin pérdida de generalidad, supondremos que el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico está parametrizado de tal manera que su ley de composición está dada por $\varphi(a,b) = a+b$, de tal forma que $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ y $\Gamma(\varepsilon) \equiv 1$. Por lo tanto, en términos de sus infinitesimales $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (1.17) se convierte en

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}^*), \quad \text{con} \quad \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} \ \text{en}\, \varepsilon = 0. \tag{1.29}$$

Definición 4. *El **generador infinitesimal** del grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones es el operador*

$$X = X(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.30}$$

en donde, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y ∇ es el operador gradiente definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Para cualquier función diferenciable $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se tiene

$$XF(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla F(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}.$$

Note que $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$.

1.4.1. Método para encontrar el grupo de transformaciones a partir de una transformación infinitesimal

Supongamos que tenemos una transformación infinitesimal

$$XF(\boldsymbol{x}) \equiv \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

aquí $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ y $\boldsymbol{x} = (x, y)$. Sea t nuestro parámetro desconocido en la transformación. La transformación finita del grupo $x_1 = \phi(x,y,t)$, $y_1 = \psi(x,y,t)$ se puede encontrar, como hemos visto de tal forma que

$$\xi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)\bigg|_{t=0}, \qquad \eta = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)\bigg|_{t=0}.$$

en donde ξ, η son los infinitesimales. La transformación finita puede ser obtenida (expandiendo en potencias de t) sin integración por las consideraciones de las secciones anteriores. El efecto de cualquier transformación al reemplazar x, y por x_1, y_1 cambiará cualquier función $F(x,y)$ en $F(x_1,y_1)$. Si asumimos que $F(x,y)$ es generalmente analítica y como $F(x_1,y_1)$ depende de t y puede ser desarrollando en serie de potencias por el teorema de Maclaurin, entonces

$$F_1 = F_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0} + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}\right)\bigg|_{t=0}\frac{t^2}{2!} + \cdots,$$

en donde,

$$F \equiv F(x,y), \qquad F_1 \equiv F(x_1,y_1),$$

escribiendo de la misma manera

$$\xi_1(x,y) = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad \eta_1(x,y) = \frac{\partial y_1}{\partial t}, \qquad \text{y} \qquad XF_1(x_1,y_1) = \xi_1\frac{\partial F_1}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

tal que $(\xi_1(x,y))|_{t=0} = \xi$, $(\eta_1(x,y))|_{t=0} = \eta$ y $(XF_1)|_{t=0} = XF$, se tiene

$$x_1 = x + Xxt + X^2x\frac{t^2}{2!} + \cdots = e^{tX}x, \tag{1.31}$$

$$y_1 = y + Xyt + X^2y\frac{t^2}{2!} + \cdots = e^{tX}y, \tag{1.32}$$

en donde, $XF(x) = \xi$ y $XF(y) = \eta$. El caso general se enuncia a continuación

Teorema 3. *El grupo uniparamétrico de transformaciones de Lie (1.17) es equivalente a*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x} + \varepsilon X\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2X^2\boldsymbol{x} + \cdots \\ &= \left[1 + \varepsilon X + \frac{1}{2}\varepsilon^2X^2 + \ldots\right]\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

en donde, el operador $X = X(\boldsymbol{x})$ está definido por (1.30) y el operador $X^k = X^k(\boldsymbol{x})$ está dado por $X^k = XX^{k-1}$ con $k = 1,2,\ldots$. En particular, $X^kF(\boldsymbol{x})$ es la función obtenida al aplicar el operador X a la función $X^{k-1}F(\boldsymbol{x})$, $k = 1,2,\ldots,$ con $X^0F(\boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{x})$.

Demostración. *Sea*

$$X = X(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.34}$$

y

$$X(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{x}^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*},$$

en donde,

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon),$$

es el grupo de Lie de transformaciones (1.17). A partir del teorema de Taylor expandimos alrededor $\varepsilon = 0$*, obtenemos*

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\frac{\partial^k \boldsymbol{X(x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^k}\bigg|_{\varepsilon=0} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\frac{d^k \boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon^k}\bigg|_{\varepsilon=0} \right). \tag{1.35}$$

Dada cualquier función diferenciable $F(\boldsymbol{x})$ tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{dx_i^*}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{x}^*) \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i^*} = X(\boldsymbol{x}^*) F(\boldsymbol{x}^*); \tag{1.36}$$

por lo tanto, se sigue

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon} = X(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^*,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon^2} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon}\right) = X(\boldsymbol{x}^*)X(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^* = X^2(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^*,$$

y en general

$$\frac{d^k\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon^k} = X^k(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}^*, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Consecuentemente, tenemos

$$\frac{d^k\boldsymbol{x}^*}{d\varepsilon^k} = X^k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = X^k\boldsymbol{x} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y esto es el grupo de transformaciones (1.33).

□

Observación 4. *La expansión en serie Taylor alrededor de* $\varepsilon = 0$ *de una función* $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *que define un grupo de Lie de transformaciones de la forma (1.17), con la ley de composición* $\varphi(a, b) = a + b$*, está determinado por el coeficiente de su término* $O(\varepsilon)$*, el cual es el infinitesimal*

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}).$$

Existen dos formas para encontrar explícitamente un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico a partir de su transformación infinitesimal *(i) Expresar el grupo en términos de una serie de potencia (1.33), llamada* ***serie de Lie****, que es desarrollada en términos del generador infinitesimal (1.30) correspondiente a la transformación infinitesimal; o*

(ii) Resolver el problema del valor inicial (1.29) encontrando explícitamente la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Corolario 1. *Si $F(\boldsymbol{x})$ es una función infinitamente diferenciable, entonces, para un grupo uniparamétrico de transformaciones de Lie (1.17) con generador infinitesimal (1.34) tenemos*

$$F(\boldsymbol{x}^*) = F(e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x}) = e^{\varepsilon X}F(\boldsymbol{x}).$$

Demostración.

$$F(e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\left(\left.\frac{d^kF(\boldsymbol{x}^*)}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}\right).$$

De (1.36) podemos ver que $\frac{d^2F(\boldsymbol{x}^*)}{d\varepsilon^2} = X^2(\boldsymbol{x}^*)F(\boldsymbol{x}^*)$ *y por lo tanto* $\left.\frac{d^kF(\boldsymbol{x}^*)}{d^k}\right|_{\varepsilon=0} = X^k(\boldsymbol{x}^*)F(\boldsymbol{x}^*)$, *con* $k = 1, 2, \ldots$.

Así,

$$\left.\frac{d^kF(\boldsymbol{x}^*)}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = X^k(\boldsymbol{x}^*)F(\boldsymbol{x}).$$

Consecuentemente

$$F(\boldsymbol{x}^*) = F(e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\left.\frac{d^kF(\boldsymbol{x})}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k(\boldsymbol{x})\right)F(\boldsymbol{x}) = e^{\varepsilon X}F(\boldsymbol{x}).$$

□

Ejemplo 5. *Algunos ejemplos son los siguientes*

a) Supongamos que tenemos la transformación

$$XF(\boldsymbol{x}^*) \equiv \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y},$$

con los infinitesimales ξ, η, donde

$$\xi = 0, \quad \eta = 1.$$

entonces

$$XF(\boldsymbol{x}^*) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Así

$$XF(\boldsymbol{x}) = 0, \quad X^2F(\boldsymbol{x}) = 0, \cdots \quad y \quad XF(\boldsymbol{y}) = I, \quad X^2F(\boldsymbol{y}) = 0, \cdots .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= x\,(I - 0 + 0 - \cdots + 0) - y\,(0 - \cdots + 0) = x, \\ y_1 &= x\,(0 - \cdots + 0) - y\,(I - 0 + \cdots - 0) = y, \end{aligned}$$

es decir

$$x_1 = e^{\varepsilon X}x = x \quad y \quad y_1 = e^{\varepsilon X} + \varepsilon = y + \varepsilon.$$

b) Sea la transformación infinitesimal

$$XF(\boldsymbol{x}^*) \equiv -y\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y},$$

en donde, $\xi(x,y) = -y$ *y* $\eta(x,y) = x$*, entonces*

$$XF(x) = -y, \quad X^2F(x) = XF(-y) = -x, \quad X^3F(x) = F(-x) = y, ...$$

y así sucesivamente. De forma análoga se tiene

$$XF(y) = x, \quad X^2F(y) = XF(x) = -y, \quad X^3F(x) = XF(-y) = -x, ...$$

Sustituyendo tenemos que x_1 *y* y_1 *son*

$$\begin{aligned} x_1 &= x\left(I - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \cdots\right) - y\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} \cdots\right) \\ &= x\ cos(\varepsilon) - y\ sen(\varepsilon), \\ \\ y_1 &= x\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \cdots\right) - y\left(I - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} \cdots\right) \\ &= x\ sen(\varepsilon) + y\ cos(\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.37}$$

1.5. Funciones Invariantes

Definición 5. *Una función infinitamente diferenciable* $F(\boldsymbol{x})$ *es una* ***función invariante*** *del grupo de Lie de transformaciones (1.17) si y sólo si, para cualquier grupo de transformaciones (1.17)*

$$F(\boldsymbol{x}^*) \equiv F(\boldsymbol{x}). \tag{1.38}$$

Si $F(\boldsymbol{x})$ es una función invariante de (1.17), entonces $F(\boldsymbol{x})$ se llama un **invariante** de (1.17) y $F(\boldsymbol{x})$ se dice que es invariante bajo (1.17).

Teorema 4. *$F(\boldsymbol{x})$ es invariante bajo un grupo de Lie de transformaciones (1.17) y si sólo si*

$$XF(\boldsymbol{x}) \equiv 0. \tag{1.39}$$

Demostración. $\Rightarrow$) *Supongamos que $F(\boldsymbol{x}^*) \equiv F(\boldsymbol{x})$, por el Teorema 3 tenemos que*

$$F(\boldsymbol{x}^*) \equiv e^{\varepsilon X}F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \varepsilon XF(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 F(\boldsymbol{x}) + \cdots, \tag{1.40}$$

pero como $F(\boldsymbol{x})$ es invariante nos obliga a que

$$\varepsilon XF(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 F(\boldsymbol{x}) + \cdots = 0,$$

es decir $XF(\boldsymbol{x}) = 0$.

$\Leftarrow$) *Ahora, supongamos que $XF(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Entonces $X^n F(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ por (1.40), luego tenemos que $F(\boldsymbol{x}^*) \equiv F(\boldsymbol{x})$, es decir $F(\boldsymbol{x})$ es invariante.*

□

Teorema 5. *Para un grupo de Lie de transformaciones (1.17), la siguiente identidad*

$$F(\boldsymbol{x}^*) \equiv F(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \tag{1.41}$$

se cumple si y sólo sí $F(\boldsymbol{x})$ es tal que

$$XF(\boldsymbol{x}) \equiv 1. \tag{1.42}$$

Demostración. *Supongamos que $F(\boldsymbol{x})$ satisface (1.41), entonces por el Teorema 3*

$$F(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \equiv F(\boldsymbol{x}) + \varepsilon XF(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 F(\boldsymbol{x}) + \cdots$$

Esto implica que $XF(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

Finalmente, supongamos que $F(\boldsymbol{x})$ satisface (1.42), entonces $X^n F(\boldsymbol{x}) = 0$, para $n = 2, 3, \ldots$. Luego

$$F(\boldsymbol{x}^*) \equiv e^{\varepsilon X}F(\boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{x})\varepsilon XF(\boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{x}) + \varepsilon.$$

□

Capítulo 2

Simetrías de ecuaciones diferenciales Ordinarias

2.1. Introducción

Los nuevos modelos matemáticos de las leyes fundamentales de la Naturaleza y de los problemas tecnológicos se formulan constantemente en forma de ecuaciones diferenciales no lineales. El matemático noruego Marius Sophus Lie dedicó la mayor parte de su vida a la teoría de los grupos continuos y su impacto en las ecuaciones diferenciales. Lie descubrió que los métodos de solución estándar utilizan grupos de simetrías de las ecuaciones para obtener las soluciones. En consecuencia, se pueden encontrar soluciones exactas mediante el uso sistemático de simetrías.

En este capítulo estudiamos las simetrías de Lie con enfoque en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Los métodos de simetría son especialmente importantes al encontrar soluciones para este tipo de ecuaciones, ya que la mayoría de los métodos de solución estándar se vuelven insuficientes en estos caso. La idea de los métodos de simetría es básicamente encontrar un nuevo sistema de coordenadas, que haga que la ecuación diferencial resultante sea más fácil de resolver.

2.2. Transformaciones puntuales

Para utilizar el concepto de simetría en una ecuación diferencial, se tiene que especificar la definición de simetría. Pero primero definamos la noción de una transformación puntual.

Definición 6. *Un grupo uniparamétrico de Lie de transformaciones puntuales es de la forma*

$$x^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{2.1}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon), \tag{2.2}$$

actuando sobre el espacio de $n + m$ *variables con*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

que representa n *variables independientes y*

$$u = (u^1, u^2, ..., u^m),$$

representa m *variables dependientes.*

Un grupo de Lie de transformaciones puntuales de la forma (2.1) y (2.2) admitido por P (donde P es un sistema de ecuaciones diferenciales), puede transformar cualquier solución $u = \Theta(x)$ de P en una familia de soluciones uniparamétricas $u = \Phi(x, \varepsilon)$ de P. Equivalentemente, un grupo de Lie de transformaciones puntuales dadas por (2.1) y (2.2) dejan a P invariante, en el sentido de que la forma de P no cambia en términos de las variables transformadas (2.1) y (2.2), para cualquier solución $u = \Theta(x)$ de P.

Denotaremos por ∂u a el conjunto de las nm coordenadas correspondientes a todas las derivadas parciales de primer orden de u con respecto a x

$$\partial u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right). \tag{2.3}$$

En general para $k \geq 1$, sea $\partial^k u$ el símbolo para denotar el conjunto de coordenadas correspondiente a todas las derivadas parciales de orden k de u con respecto a x.

$$u^\mu_{i_1 i_2, \dots i_k} = \frac{\partial^k u^\mu}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}, \quad k = \sum_{r=1}^{k} i_r = |\boldsymbol{i}|, \quad \boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k). \tag{2.4}$$

con $\mu = 1, 2, \dots, m$, $i_j = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, k$.

Resulta que la transformación natural de derivadas parciales de las variables dependientes conduce sucesivamente a extensiones (prolongaciones) de un grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico del tipo (2.1)-(2.2) que actúan del espacio-(x, u) a los grupos de transformaciones de Lie sobre el espacio-$(x, u, \partial u)$, el espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u), \ldots,$ el espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ para cualquier $k > 2$. (Para un sistema dado P de ecuaciones diferenciales, k sería el orden de la derivada más alta que aparece en P.) De esta forma la transformación infinitesimal de (2.1)-(2.2) se extiende naturalmente (se prolonga) sucesivamente a transformaciones infinitesimales actuando sobre el espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^l u)$ $l = 1, 2, \ldots k$.

En las siguientes secciones, debido a la importancia de las ecuaciones diferenciales escalares, consideremos por separado los casos de una variable dependiente $(m = 1)$ y una variable independiente $(n = 1)$; y de una variable dependiente $(m = 1)$ y n variables independientes, para definir las transformaciones infinitesimales extendidas o prolongaciones infinitesimales.

La motivación para introducir transformaciones extendidas es que podemos formular el problema de hallar grupos de transformaciones de Lie uniparamétrico del tipo (2.1)-(2.2), admitidos por un sistema P dado de ecuaciones diferenciales, en términos de generadores infinitesimales admitidos por P.

2.3. Grupo extendido de transformaciones puntuales

Al estudiar las propiedades de invariancia de una EDO de orden k con variable independiente x y variable dependiente y, el objetivo es encontrar grupos de Lie de transformaciones puntuales uniparamétricos admitidos por dicha ecuación diferencial de la forma

$$x^* = X(x, y, \varepsilon), \tag{2.5}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon), \tag{2.6}$$

en donde, $y = y(x)$.

2.3.1. Una variable dependiente y una independiente

Sea

$$y_k = y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k \geq 1. \tag{2.7}$$

Extendemos de forma natural (2.5)-(2.6) al espacio-$(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$, $k \geq 1$ pidiendo que (2.5)-(2.6) conserven las condiciones de contacto o de tangencia relacionadas con los diferenciales dx, dy, $dy_1, \ldots, dy_k$,

$$dy = y_1\, dx, \tag{2.8}$$

y

$$dy_k = y_{k+1} dx \quad k \geq 1. \tag{2.9}$$

En particular, bajo la acción del grupo de transformaciones (2.5)-(2.6), las derivadas transformadas de y_k^*, $k \geq 1$ se definen sucesivamente por

$$\begin{aligned} dy^* &= y_1^*\, dx^*, && (2.10) \\ &\vdots \\ dy_k^* &= y_{k+1}^*\, dx^*, && (2.11) \end{aligned}$$

en donde, x^* está definido por (2.5) y y^* por (2.6). Luego

$$dy^* = dY(x, y, \varepsilon) = \frac{\partial Y(x, y, \varepsilon)}{\partial x} dx + \frac{\partial Y(x, y, \varepsilon)}{\partial y} dy, \tag{2.12}$$

$$dx^* = dX(x, y, \varepsilon) = \frac{\partial X(x, y, \varepsilon)}{\partial x} dx + \frac{\partial X(x, y, \varepsilon)}{\partial y} dy. \tag{2.13}$$

En virtud de (2.10) y (2.12)-(2.13), se sigue que y_1^* satisface

$$\frac{\partial Y(x, y, \varepsilon)}{\partial x} dx + \frac{\partial Y(x, y, \varepsilon)}{\partial y} dy = y_1^* \left[\frac{\partial X(x, y, \varepsilon)}{\partial x} dx + \frac{\partial X(x, y, \varepsilon)}{\partial y} dy \right]. \tag{2.14}$$

Sustituyendo (2.8) en (2.14) y resolviendo para y_1^* obtenemos

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon) = \frac{\frac{\partial Y(x,y,\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y(x,y,\varepsilon)}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial y}}. \tag{2.15}$$

De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6. *El grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparamétrico (2.5)-(2.6) que actúan sobre el espacio-(x, y) se extiende naturalmente al siguiente grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico que actúan sobre el espacio-(x, y, y_1)*

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y, \varepsilon), && (2.16) \\ y^* &= Y(x, y, \varepsilon), && (2.17) \\ y_1^* &= Y_1(x, y, y_1, \varepsilon), && (2.18) \end{aligned}$$

en donde, $Y_1(x, y, y_1, \varepsilon)$ está dado por (2.15).

Demostración. *Mostraremos que la propiedad de cerradura se conserva en esta primera extensión o prolongación de (2.5)-(2.6) al espacio-*(x, y, y_1)*. Las otras propiedades de un grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico se siguen inmediatamente para esta primera extensión. Sea* $\varphi(\varepsilon, \delta)$ *la ley de composición de los parámetros* ε *y* δ*. Sea*

$$(x^{**}, y^{**}) = (X(x^*, y^*, \delta), Y(x^*, y^*, \delta)) \,. \tag{2.19}$$

Entonces, a partir de la propiedad de cerradura del grupo (2.5)-(2.6) se sigue

$$(x^{**}, y^{**}) = (X(x^*, y^*, \varphi(\varepsilon, \delta)), Y(x^*, y^*, \varphi(\varepsilon, \delta))) \,. \tag{2.20}$$

Pero y_1^{**} *satisface* $dy^{**} = y_1^{**} dx^{**}$*. Consecuentemente*

$$y_1^{**} = Y_1(x, y, \varphi(\varepsilon, \delta)) = \frac{\frac{\partial Y(x,y,\varphi(\varepsilon,\delta))}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y(x,y,\varphi(\varepsilon,\delta))}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y,\varphi(\varepsilon,\delta))}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y,\varphi(\varepsilon,\delta))}{\partial y}}.$$

□

La segunda extensión o prolongación está enunciada en el siguiente resultado.

Teorema 7. *La segunda extensión o prolongación del grupo de transformaciones puntuales de Lie uniparamétrico (2.5)-(2.6) es el siguiente grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico actuando en el espacio-*(x, y, y_1, y_2)

$$x^* = X(x, y, \varepsilon), \tag{2.21}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon), \tag{2.22}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon), \tag{2.23}$$

$$y_2^* = Y_2(x, y, y_1, y_2, \varepsilon) = \frac{\frac{\partial Y_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial y}}. \tag{2.24}$$

en donde, $Y_1 = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon)$ *está definido por (2.15).*

Demostración. *La prueba es análoga al Teorema 6.*

□

La prueba del siguiente teorema se sigue por inducción.

Teorema 8. *La extensión o prolongación k-ésima del grupo de Lie de transformaciones puntuales (2.5)-(2.6), $k \geq 2$, es el siguiente grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico que actúan en el espacio-$(x, y, y_1, \ldots, y_k)$*

$$x^* = X(x, y, \varepsilon), \tag{2.25}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon), \tag{2.26}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon), \tag{2.27}$$

$$\vdots$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon) = \frac{\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \cdots + y_k \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial X(x,y,\varepsilon)}{\partial y}}, \tag{2.28}$$

en donde, $Y_1 = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon)$ está definido por (2.15) y $Y_i = Y_i(x, y, y_1, \ldots, y_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots k$.

□

Observemos que podemos extender cualquier conjunto de transformaciones inyectivas (no necesariamente un grupo de transformaciones)

$$x^\dagger = X(x, y), \tag{2.29}$$

$$y^\dagger = Y(x, y), \tag{2.30}$$

de algún dominio D en el espacio-(x, y) a otro dominio $D^\dagger$ en el espacio-$(x^\dagger, y^\dagger)$, en donde las funciones $X(x, y)$ y $Y(x, y)$ son k-veces diferenciables en D. Naturalmente, podemos extender las transformaciones (2.29)-(2.30) al espacio-$(x, y, y_1, \ldots, y_k)$ de tal manera que se conserven las condiciones de contacto (2.10)-(2.11), es decir,

$$dy^\dagger = y_1^\dagger \, dx^\dagger \tag{2.31}$$

$$dy_k^\dagger = y_{k+1}^\dagger \, dx^\dagger, \quad k \geq 1. \tag{2.32}$$

Aquí la k-ésima extensión o prolongación de la transformación del espacio-$(x, y, y_1, \ldots, y_k)$

al espacio- $(x^\dagger, y^\dagger, y_1^\dagger, \ldots, y_k^\dagger)$ está dada por

$$\begin{aligned} x^\dagger &= X(x,y), && (2.33)\\ y^\dagger &= Y(x,y), && (2.34)\\ y_1^\dagger &= Y_1(x,y,y_1), && (2.35)\\ &\vdots \\ y_k^\dagger = Y_k(x,y,y_1,\ldots,y_k) &= \frac{\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \cdots + y_k\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + y_1\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}}, \end{aligned}$$

en donde,

$$Y_i = Y_i(x,y,y_1) = \frac{\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} + y_1\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + y_1\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}}.$$

y

$$Y_i = Y_i(x,y,y_1,\ldots,y_i), \quad i = 1,2,\ldots,k-1.$$

Ejemplo 6. *a) En el grupo de traslaciones*

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y,\varepsilon) = x+\varepsilon, && (2.36)\\ y^* &= Y(x,y,\varepsilon) = y, && (2.37) \end{aligned}$$

tenemos

$$y_1^* = \left(\frac{dy}{dx}\right)^* = \frac{dy^*}{dx^*} = Y_1 = \frac{dy}{dx} = y_1,$$

y, en general,

$$y_k^* = \left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)^* = \frac{d^ky^*}{dx^{*k}} = Y_k = \frac{d^ky}{dx^k} = y_k, \quad k \geq 1.$$

Por lo tanto, para el grupo de traslaciones la extensión o prolongación k-ésima está dada por

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y,\varepsilon) = x+\varepsilon, && (2.38)\\ y^* &= Y(x,y,\varepsilon) = y, && (2.39)\\ y_i^* &= Y(x,y,y_1,\ldots y_i,\varepsilon) = y_i, \quad i = 1,2,\ldots,k. && (2.40) \end{aligned}$$

b) Para el grupo de rotaciones

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y,\varepsilon) = x\, cos\varepsilon + y\, sen\varepsilon, && (2.41)\\ y^* &= Y(x,y,\varepsilon) = -x\, cos\varepsilon + y\, sen\varepsilon, && (2.42) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{\partial X}{\partial x} = cos\varepsilon \quad \frac{\partial X}{\partial y} = sen\varepsilon, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -sen\varepsilon, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = cos\varepsilon.$$

Luego, usando lo anterior tenemos

$$Y_1(x, y, y_1, \varepsilon) = Y_1 = \frac{-sen\varepsilon + y_1 cos\varepsilon}{cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon}.$$

Así

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} = \frac{1}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^2}.$$

Consecuentemente a partir de (2.24)

$$Y_2(x, y, y_1, y_2, \varepsilon) = Y_2 = \frac{y_2}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^3}.$$

Luego, también se tiene

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} = \frac{-3(sen\varepsilon)y_2}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^4}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} = \frac{1}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^3}.$$

Así, para Y_3 *usando (2.28) obtenemos*

$$Y_3(x, y, y_1, y_2, y_3\varepsilon) = Y_3 = \frac{(y_1 sen\varepsilon + cos\varepsilon)y_3 - 3(y_2)^2 sen\varepsilon}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^5}.$$

Por lo tanto, la tercera extensión o prolongación de transformaciones de Lie correspondiente a (2.41)-(2.42) está dado por

$$\begin{aligned} x^* &= X = x\, cos\varepsilon + y\, sen\varepsilon, \\ y^* &= Y = -x\, cos\varepsilon + y\, sen\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$y_1^* = \frac{-sen\varepsilon + y_1 cos\varepsilon}{cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon}, \tag{2.44}$$

$$y_2^* = \frac{y_2}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^3}, \tag{2.45}$$

$$y_3^* = \frac{(y_1 sen\varepsilon + cos\varepsilon)y_3 - 3(y_2)^2 sen\varepsilon}{(cos\varepsilon + y_1 sen\varepsilon)^5}. \tag{2.46}$$

Observación 5. *La tercera extensión o prolongación de (2.41)-(2.42) es un grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico que actúa sobre el espacio-*(x, y, y_1, y_2, y_3)*. Por supuesto, se puede continuar extendiendo este grupo de transformaciones de Lie a el espacio-*$(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k)$*,* $k = 4, 5, \ldots,$ *sin embargo los cálculos se complican cada vez mas cuando* k *va incrementando.*

A partir del Teorema 1, sección 1.3, sabemos que un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones puntuales está caracterizado por su generador infinitesimal. Dado que la k-ésima extensión de un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones puntuales es también un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones, se sigue que el estudio de los grupos de Lie de transformaciones extendidas se reduce al estudio de las transformaciones infinitesimales extendidas o prolongaciones infinitesimales.

En la siguiente sección presentamos un algoritmo explícito para determinar las transformaciones infinitesimales extendidas o prolongaciones infinitesimales (y su correspondiente generador infinitesimal) de una transformación infinitesimal.

Definición 7. *Definimos el operador de derivada total por*

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_n} + \cdots . \tag{2.47}$$

Para una función diferenciable $F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_l)$ su derivada total está dada, usando la definición anterior, por

$$DF(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_l) = F_x + y_1 F_y + y_2 F_{y_1} + \cdots + y_{l+1} F_{y_l},$$

en donde los subíndices denotan la diferenciación con respecto a la coordenada correspondiente $F_{y_l} = \frac{\partial F}{\partial y_l}$.

En términos del operador de derivada total (2.47) la k-ésima extensión o prolongación del grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones puntuales (2.25)-(2.28) está dado por

$$x^* = X(x, y, \varepsilon) \tag{2.48}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon) \tag{2.49}$$

$$y_i^* = Y_i^*(x, y, y_1, \ldots, y_i, \varepsilon) = \frac{DY_{i-1}(x, y, y_1, \ldots, y_{i-1}, \varepsilon)}{DX(x, y, \varepsilon)} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.50}$$

en donde,

$$Y_0 = Y(x, y, \varepsilon). \tag{2.51}$$

2.4. Transformaciones infinitesimales extendidas

El grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones puntuales

$$x^* = X(x, y, \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.52}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.53}$$

actuando sobre el espacio-(x, y), tiene infinitesimales $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ (ver Capitulo 1, sección 1.3) con el generador infinitesimal correspondiente

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.54}$$

La extensión o prolongación $k-$ésima de (2.52)-(2.53) está dada por

$$x^* = X(x, y, \varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.55}$$

$$y^* = Y(x, y, \varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.56}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1, \varepsilon) = y_1 + \varepsilon\eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\varepsilon^2), \tag{2.57}$$

$$\vdots$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k, \varepsilon) = y_k + \varepsilon\eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) + O(\varepsilon^2), \tag{2.58}$$

y tiene los $k-$ésimos infinitesimales extendidos

$$\xi(x, y), \eta(x, y), \eta^{(1)}(x, y, y_1), \dots, \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k),$$

con el correspondiente $k-$ésimos generador infinitesimal

$$X^{(k)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}, \tag{2.59}$$

para $k = 1, 2....$

2.4.1. Una variable dependiente y una variable independiente

Las fórmulas explícitas para los $k-$ésimos infinitesimales extendidos $\eta^{(k)}$ resultan del siguiente resultado

Teorema 9. *Los infinitesimales extendidos $\eta^{(k)}$ que aparecen en (2.59) satisfacen la relación de recurrencia*

$$\eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) = D\eta^{(k-1)}(x, y, y_1, \dots, y_{k-1}) - y_k D\xi, \quad k = 1, 2, ..., \tag{2.60}$$

en donde, $\eta^{(0)} = \eta(x, y)$ y D es como en la Definición 7. En particular,

$$\eta^{(k)} = D^k\eta - \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} y_{k-j+1} D^j\xi, \quad k \geq 1. \tag{2.61}$$

Demostración. *De (2.50), (2.55)-(2.58) y (2.47) tenemos*

$$\begin{aligned} Y_k(x, y, y_1, ..., y_k) &= \frac{DY_{k-1}}{DX} = \frac{D[y_{k-1} + \varepsilon\eta^{(k-1)} + O(\varepsilon^2)]}{D[x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2)]}, \\ &= \frac{y_k + \varepsilon D\eta^{(k-1)}}{1 + \varepsilon D\xi} + O(\varepsilon^2), \\ &= y_k + \varepsilon[D\eta^{(k-1)} - y_k D\xi] + O(\varepsilon^2), \\ &= y_k + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

obteniendo así (2.60). La segunda parte la obtenemos por inducción finita en k.

□

Las fórmulas explícitas para $\eta^{(k)}$ se siguen inmediatamente a partir del Teorema 9. En particular,

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y(y_1)^2, \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y_1)^2 \\ &\quad -\xi_{yy}(y_1)^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_2 - 3\xi_y y_1 y_2, \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_1 + 3(\xi_{xyy} - 2\xi_{xxy})(y_1)^2 \\ &\quad +(\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})(y_1)^3 - \xi_{yyy}(y_1)^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y_2 \\ &\quad +3(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y_1 y_2 - 6\xi_{yy}(y_1)^2 y_2 - 3\xi(y_2)^2 + (\eta_y - 3\xi_x)y_3 - 4\xi_y y_1 y_3. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Concentramos propiedades de los infinitesimales extendidos en el siguiente resultado

Teorema 10. *Las extensiones infinitesimales $\eta^{(k)}$ tienen las siguientes propiedades*

1. *$\eta^{(k)}$ es lineal en y_k para $k \geq 2$.*

2. *$\eta^{(k)}$ es un polinomio en $y_1, y_2, ..., y_k$, cuyos coeficientes son linealmente homogéneos en $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, y sus derivadas parciales hasta el orden k.*

Demostración. *Consultar [14] pág. 61.* □

Ejemplo 7. 1. *Recordemos que en el grupo de traslaciones tenemos que $\xi(x, y) = 0$ y $\eta(x, y) = 1$, entonces el infinitesimal k-ésimo es $\eta^{(k)} = 0$.*

2. *En el grupo de rotaciones tenemos que* $\xi(x,y) = y$, $\eta(x,y) = -x$. *Así,* $\xi_y = 1$, $\eta_x = -1$, $\xi_x = \eta_y = 0$, *entonces, en virtud de (2.62)-(2.64) obtenemos*

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= -(1+(y_1)^2), \\ \eta^{(2)} &= -3y_1y_2, \\ \eta^{(3)} &= -(3(y_2)^2 + 4y_1y_3), \end{aligned}$$

y para $k \geq 4$ *usando (2.60) tenemos que* $\eta^{(k)} = D\eta^{(k-1)} - y_k y_1$, *de tal forma que*

$$\begin{aligned} \eta^{(4)} &= -5[2y_2y_3 + y_1y_4], \\ \eta^{(5)} &= -[10(y_3)^2 + 15y_2y_4 + 6y_1y_5], \ \mathit{etc.} \end{aligned}$$

2.5. Transformaciones extendidas

Al estudiar las propiedades de invariancia de una EDP de orden k con una variable dependiente u y n variables independientes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con $u = u(x)$ nos lleva de forma natural al problema de encontrar las extensiones o prolongaciones de las transformaciones del espacio-(x,u) al espacio-$(x, u, \partial u \ldots, \partial^k u)$, donde nuevamente $\partial^k u$ denota los componentes de todas las derivadas parciales de orden k de u con respecto a x.

2.5.1. Una variable dependiente y n variables independientes

Primero consideramos las transformaciones extendidas de una transformación puntual (ver sección 2.2)

$$x^\dagger = X(x,u), \tag{2.65}$$

$$u^\dagger = U(x,u). \tag{2.66}$$

Supongamos que la transformación (2.65)-(2.66) es uno a uno en algún dominio D en el espacio (x,u), con funciones $X(x,u)$, $U(x,u)$ que son k veces diferenciables en D. La transformación (2.65)-(2.66) preserva las condiciones de contacto, es decir,

$$du = \partial u \, dx, \tag{2.67}$$

$$\vdots$$

$$d\,\partial u^{k-1} = \partial u^k \, dx, \tag{2.68}$$

en algún dominio D en el espacio$-(x, u, \partial u \ldots, \partial^k u)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} du^\dagger &= \partial u^\dagger \, dx^\dagger, && (2.69)\\ &\vdots \\ d\,\partial^{k-1} u^\dagger &= \partial^k u^\dagger dx^\dagger, && (2.70)\end{aligned}$$

en el dominio correspondiente $D^\dagger$ en el espacio-$(x^\dagger, u^\dagger, \partial u^\dagger \ldots, \partial^k u^\dagger)$. Con el fin de expresar las condiciones de contacto de forma explícita, definimos

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_i^\dagger = \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i^\dagger} = \frac{\partial U}{\partial X_i}, \ldots \qquad \text{etc.}$$

De ahora en adelante se asumirá que la suma es sobre los índices que se repiten. Las condiciones (2.67)-(2.68) están dadas por el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} du &= u_j \, dx_j, \\ du_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} &= u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} \, dx_j, \end{aligned}$$

con $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k-1$. Similares representaciones se cumplen para (2.69)-(2.70).

Introducimos, para esta situación el operador de derivada total

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_n}} + \cdots, \quad i = 1, 2 \ldots, n. \tag{2.71}$$

Para una función diferenciable $F(x, u, \partial u, \partial^2 u \ldots, \partial^l u)$ tenemos

$$D_i F(x, u, \partial u \ldots, \partial^l u) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2 \ldots i_l} \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_l}} + \cdots, \quad i = 1, 2 \ldots, n, \tag{2.72}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora determinemos la trasformación extendida o prolongación

$$u_j^\dagger = U_j(x, u, \partial u), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

De (2.65)-(2.66) obtenemos

$$du^\dagger = u_i^\dagger \, dx_i^\dagger = (D_i U) \, dx_i,$$

y

$$dx_j^\dagger = (D_i X_j) \, dx_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

en donde, D_i está definido por (2.71), $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$(D_i X_j) u_j^\dagger = D_i U, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & \cdots & D_1 X_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n X_1 & \cdots & D_n X_n \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

y suponemos que A^{-1} existe. Entonces

$$\begin{bmatrix} u_1^\dagger \\ u_2^\dagger \\ \vdots \\ u_n^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_1 \\ D_2 U_2 \\ \vdots \\ D_n U_n \end{bmatrix}. \tag{2.74}$$

Esto nos conduce a la transformación extendida en el espacio-$(x, u, \partial u)$ dada por

$$x^\dagger = X(x, u), \tag{2.75}$$

$$u^\dagger = U(x, u), \tag{2.76}$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x, u, \partial u). \tag{2.77}$$

De esta forma no es difícil mostrar que la extensión al espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ está dada por

$$x^\dagger = X(x, u), \tag{2.78}$$

$$u^\dagger = U(x, u), \tag{2.79}$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x, u, \partial u), \tag{2.80}$$

$$\vdots$$

$$\partial^k u^\dagger = \partial^k U(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u), \tag{2.81}$$

en donde, las componentes de $\partial^k u^\dagger$ están determinados por

$$\begin{bmatrix} u^\dagger_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ u^\dagger_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ u^\dagger_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ D_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ \vdots \\ \\ D_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix},$$

con $i_l = 1, 2, \ldots, n$, para $l = 1, 2, \ldots, k-1$, con $k \geq 2$; $\partial U(x, u, \partial u)$ está determinado por (2.74) y A es la matriz (2.73).

Ahora en el caso en donde (2.65)-(2.66) define un grupo de Lie de trasformaciones puntuales

$$x^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{2.82}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon), \tag{2.83}$$

actuando sobre el espacio (x, u) se puede demostrar, (siguiendo las demostraciones de los Teoremas 6, 7, 8) que la extensión $k-$ésima al espacio $(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$, dada por

$$x^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{2.84}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon), \tag{2.85}$$

$$\partial u^* = \partial U(x, u, \partial u, \varepsilon), \tag{2.86}$$

$$\vdots$$

$$\partial^k u^* = \partial^k U(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u, \varepsilon), \tag{2.87}$$

define un k-ésimo grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico extendido. En (2.84)-(2.87)

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ \\ u_2^* \\ \\ \vdots \\ \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \\ U_2 \\ \\ \vdots \\ \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_1 \\ \\ D_2 U_2 \\ \\ \vdots \\ \\ D_n U_n \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

$$\begin{bmatrix} u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ D_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ \vdots \\ \\ D_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix}, \tag{2.89}$$

en donde, $u^*_i = U_i$ son los componentes de $\partial u^* = \partial U$ y $u^*_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i} = u_{i_1 i_2 \ldots i_k i}$ son las componentes de $\partial^k u^* = \partial^k U$. En (2.89), $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k-1$ con $k \geq 2$; los operadores D_i están dados por (2.71); y A^{-1} es la inversa de la matriz A dada por (2.73) para X y U dados por (2.84)-(2.85).

2.6. Transformaciones infinitesimales extendidas

El grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparamétrico

$$x^*_i = X_i(x, u, \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.90}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon) = u + \varepsilon \eta(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.91}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ actuando sobre el espacio-(x, u), tiene el generador infinitesimal

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{2.92}$$

2.6.1. Una variable dependiente y n variables independientes

La extensión k-ésima de (2.90)-(2.91) viene dada por

$$x^*_i = X_i(x, u, \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.93}$$

$$u^* = u(x, u, \varepsilon) = u + \varepsilon \eta(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.94}$$

$$u^*_i = U_i(x, u, \partial u, \varepsilon) = u_i + \varepsilon \eta^{(1)}_i(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.95}$$

$$\vdots$$

$$u^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} = U_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u, \varepsilon) = u_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varepsilon \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.96}$$

en donde, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2, \ldots, k$ con $k \geq 1$. Sus k-ésimas extensiones infinitesimales son

$$\xi(x,u), \eta(x,u), \eta^{(1)}(x,u,\partial u), \ldots, \eta^{(k)}(x,u,\partial u, \ldots, \partial^k u), \tag{2.97}$$

con el ***k*-ésimo generador infinitesimal extendido** correspondiente

$$X^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_k}}, \quad k \geq 1. \tag{2.98}$$

Las fórmulas explícitas para los $k-$ésimos infinitesimales extendidos $\eta^{(k)}$ resultan del siguiente teorema

Teorema 11. *Los infinitesimales extendidos $\eta^{(k)}$ satisfacen la relación de recursión*

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - (D_i\xi_j)u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.99}$$

$$\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = D\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} - (D_{i_k}\xi_j)u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j}, \tag{2.100}$$

$i_l = 1, 2, ..., n$ para $l = 1, 2, \ldots, k$ con $k \geq 2$.

Demostración. *De (2.73) y (2.93) tenemos*

$$A = \begin{bmatrix} D_1(x_1+\varepsilon\xi_1) & D_1(x_2+\varepsilon\xi_2) & \cdots & D_1(x_n+\varepsilon\xi_n) \\ \\ D_2(x_2+\varepsilon\xi_2) & D_2(x_2+\varepsilon\xi_2) & \cdots & D_2(x_n+\varepsilon\xi_n) \\ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \\ D_n(x_1+\varepsilon\xi_n) & D_n(x_2+\varepsilon\xi_2) & \cdots & D_n(x_n+\varepsilon\xi_n) \\ \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2) = I + \varepsilon B + O(\varepsilon^2),$$

en donde, I es la matriz identidad $n \times n$ y

$$B = \begin{bmatrix} D_1\xi_1 & D_1\xi_2 & \cdots & D_1\xi_n \\ \\ D_2\xi_1 & D_2\xi_2 & \cdots & D_2\xi_n \\ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \\ D_n\xi_1 & D_n\xi_2 & \cdots & D_n\xi_n \\ \end{bmatrix}. \tag{2.101}$$

Entonces

$$A^{-1} = I + \varepsilon B - O(\varepsilon^2), \tag{2.102}$$

ya que $(I+\varepsilon B)(I-\varepsilon B) = I + O(\varepsilon^2)$. *Ahora de (2.88), (2.94)-(2.95), (2.101) y (2.102) se sigue*

$$\begin{bmatrix} u_1 + \varepsilon\eta_1^{(1)} \\ \\ u_2 + \varepsilon\eta_2^{(1)} \\ \\ \vdots \\ \\ u_n + \varepsilon\eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = [I - \varepsilon B] \begin{bmatrix} u_1 + \varepsilon D_1\eta \\ \\ u_2 + \varepsilon D_2\eta \\ \\ \vdots \\ \\ u_n + \varepsilon D_n\eta \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2), \tag{2.103}$$

y, así

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \\ \eta_2^{(1)} \\ \\ \vdots \\ \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta \\ \\ D_2\eta \\ \\ \vdots \\ \\ D_n\eta \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \\ \\ \vdots \\ \\ u_n \end{bmatrix}, \tag{2.104}$$

la cual conduce a (2.99). Luego, de (2.89), (2.95)-(2.96), (2.101) y (2.102) obtenemos

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} \\ \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = [I - \varepsilon B] \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} + \varepsilon D_1\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} + \varepsilon D_2\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ \\ \vdots \\ \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} + \varepsilon D_n\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \end{bmatrix} + O(\varepsilon)^2 \tag{2.105}$$

y por consiguiente

$$\begin{bmatrix} \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ D_2 \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \\ \vdots \\ \\ D_n \eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ \\ u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \\ \vdots \\ \\ u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix}, \qquad (2.106)$$

$i_l = 1, 2, \ldots, n$ *para* $l = 1, 2, \ldots, k-1$ *con* $k \geq 2$*, así obtenemos (2.100).*

□

Particularizando el Teorema 11 al caso de una variable dependiente u y dos variables independientes x_1 y x_2 el grupo extendido de Lie de transformaciones uniparamétricas

$$x_i^* = X_i(x_1, x_2, u, \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \qquad (2.107)$$

$$u^* = U(x_1, x_2, u, \varepsilon) = u + \varepsilon \eta(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2), \qquad (2.108)$$

$$u_i^* = U(x_1, x_2, u, u_1, u_2, \varepsilon) = u_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \qquad (2.109)$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= U_{ij}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}, \varepsilon) \\ &= u_{ij} + \varepsilon \eta_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) + O(\varepsilon^2) \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \qquad (2.110)$$

etc., tiene sus extensiones infinitesimales dadas por

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_2, \qquad (2.111)$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u}(u_2)^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_2, \qquad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)} = {} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} u_2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{12} \\ & + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u}\right] (u_1)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}(u_1)^3 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2 \\ & -3\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{12}, \end{aligned} \qquad (2.113)$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{12}^{(2)} &= \eta_{21}^{(2)} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial x_2} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right]u_2 + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right]u_1 - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_{22} \\
&\quad + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right]u_{12} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}u_{11} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u}(u_2)^2 \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2\partial u}\right]u_1u_2 - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2\partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2}(u_1)^2u_2 \\
&\quad -2\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_2u_{12} - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_1u_{12} - \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_2u_{11} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_1u_{22}, \qquad (2.114)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2^2}\right]u_2 - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2^2}u_1 + \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right]u_{22} - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}u_{12} \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2\partial u}\right](u_2)^2 - 2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2\partial u}u_1u_2 - \frac{\partial\xi_2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 \\
&\quad -3\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_2u_{22} - 3\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_1u_{22} - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_2u_{12}, \qquad (2.115)
\end{aligned}
$$

etc.

2.7. Transformaciones extendidas y transformaciones infinitesimales extendidas: m variables dependientes y n variables independientes

La situación de m variables dependientes $u = (u^1, u^2, u, \ldots, u^m)$ y n variables independientes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(x)$, con $m \geq 2$, surge al estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales. Esto conduce a considerar transformaciones extendidas del espacio-(x, u) al espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ en donde $\partial^k u$ denota los componentes de todas las derivadas parciales de orden k de u con, respecto a x. Estas transformaciones extendidas o prolongaciones preservan las condiciones de contacto correspondientes.

Consideramos una transformación puntual

$$
\begin{aligned}
x^\dagger &= X(x, u), & (2.116) \\
u^\dagger &= U(x, u). & (2.117)
\end{aligned}
$$

Sean

$$u_i^\rho = \frac{\partial u^\rho}{\partial x_i}, \quad (u_i^\rho)^\dagger = \frac{\partial (u_i^\rho)^\dagger}{\partial x_i^\dagger} = \frac{\partial U^\rho}{\partial X_1}, \quad etc. \tag{2.118}$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + u_{ijk}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{jk}^\mu} + \cdots + u_{ii_1 i_2,\dots i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2,\dots i_n}^\mu} + \cdots \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.119}$$

con la suma sobre índices repetidos. La extensión k-ésima de la transformación (2.116)-(2.117) está dada por

$$x^\dagger = X(x,u), \tag{2.120}$$

$$u^\dagger = U(x,u), \tag{2.121}$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x,u,\partial u), \tag{2.122}$$

$$\vdots$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u), \tag{2.123}$$

$$\tag{2.124}$$

en donde, los componentes $(u_i^\mu)^\dagger$ de $\partial u^\dagger$ están determinadas por

$$\begin{bmatrix} (u_1^\mu)^\dagger \\ (u_2^\mu)^\dagger \\ \vdots \\ (u_n^\mu)^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^\mu \\ U_2^\mu \\ \vdots \\ U_n^\mu \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U^\mu \\ D_2 U^\mu \\ \vdots \\ D_n U^\mu \end{bmatrix}, \tag{2.125}$$

A^{-1} es la inversa (asumiendo que existe) de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} D_1X_1 & D_1X_2 & \cdots & D_1X_n \\ D_2X_1 & D_1X_2 & \cdots & D_2X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_nX_1 & D_1X_2 & \cdots & D_nX_n \end{bmatrix}, \tag{2.126}$$

y los componentes $(u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}})^{\dagger}$ de $\partial^k u^{\dagger}$ están determinados por

$$\begin{bmatrix} (u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1})^{\dagger} \\ (u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2})^{\dagger} \\ \vdots \\ (u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n})^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1} \\ U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ D_2 U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} \end{bmatrix} \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{2.127}$$

Ahora nos especializamos en la transformación puntual (2.116)-(2.117) a el caso de un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones puntuales

$$X^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{2.128}$$

$$U^* = U(x, u, \varepsilon). \tag{2.129}$$

Aquí, la transformación k-ésima extendida (2.120)-(2.127), con $\dagger$ reemplazado por $*$, es un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico que actúa sobre el espacio-$(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u)$. Tenemos así

$$x_i^* = X_i(x, u, \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x_1, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.130}$$

$$(u^{\mu})^* = U^{\mu}(x, u, \varepsilon) = u^{\mu} + \varepsilon \eta^{\mu}(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.131}$$

$$(u_i^{\mu})^* = U_i^{\mu}(x, u, \partial u, \varepsilon) = u_i^{\mu} + \varepsilon \eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.132}$$

$$\vdots$$

$$(u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k})^* = U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u, \varepsilon) = u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varepsilon \eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.133}$$

con las extensiones infinitesimales $\eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ dadas por

$$\eta_i^{(1)\mu} = D_i \eta^{\mu} - (D_i \xi_j) u_j^{\mu}, \tag{2.134}$$

y

$$\eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = D_{i_k} \eta^{(k-1)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} - (D_{i_k} \xi_j) u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j}, \tag{2.135}$$

con $i_l = 1, 2, \ldots, n$ para $l = 1, 2 \ldots, k$ con $k \geq 2$. Aquí la extensión k-ésima del generador infinitesimal está dada por

$$X^{(k)} = \xi_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\mu}} + \eta_i^{(1)\mu}(x,y,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i^{\mu}} + \cdots \tag{2.136}$$

$$+\eta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{(k)\mu}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\ldots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{\mu}}, \quad k \geq 1. \tag{2.137}$$

2.8. Grupos de Lie de transformaciones r-paraméricas

Hasta ahora, solo hemos considerado grupos de Lie de un parámetro, pero no es difícil generalizar los resultados anteriores a grupos de Lie r-paramétricos. En este caso, las transformaciones continuas simplemente dependen de los r-parámetros ε_i. Cada parámetro de un grupo de Lie de transformaciones r-paramétricas conduce a un generador infinitesimal. Los generadores infinitesimales pertenecen a un espacio vectorial de dimensión r en el cual existe una estructura adicional, llamada el conmutador. Este espacio vectorial especial se conoce con el nombre de álgebra de Lie r-dimensional.

Para nuestros propósitos, el estudio de un grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico es equivalente al estudio de sus generadores infinitesimales y la estructura de las correspondientes álgebra de Lie. La exponencial de cualquier generador infinitesimal es un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico que es un subgrupo del grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico.

Consideremos un **grupo r-paramétrico** de transformación de Lie puntuales

$$\boldsymbol{x}^* = \mathbf{X}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{2.138}$$

con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y parámetros $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$, además de una ley de composición de los parámetros denotada por

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) = (\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}), \varphi_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}), ..., \varphi_r(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})),$$

con $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r)$, en donde $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})$ satisface los axiomas de grupo, con $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, correspondiendo a la identidad, es decir, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_r = 0$ y supongamos que $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})$ es analítica en el dominio que sea definido.

Sea **$\Xi(\boldsymbol{x})$ la matriz infinitesimal**, una matriz de tamaño $r \times n$ con entradas

$$\xi_{\alpha j}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial x_j^*}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = \left.\frac{\partial X_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}}, \quad \alpha = 1, 2, ..., r, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{2.139}$$

Sea $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ una matriz de tamaño $r \times r$ con entradas

$$\boldsymbol{\Theta}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \left.\frac{\partial \varphi_\beta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_\alpha}\right|_{\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}}, \tag{2.140}$$

y denotemos a la inversa de la matriz $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ por

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Theta}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{2.141}$$

Con estas definiciones el **Primer teorema fundamental de Lie** para un grupo de transformaciones r-paramétrico afirma que en alguna vecindad de $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, (2.138) es equivalente a la solución del problema del valor inicial para el sistema de nr EDPs de primer orden dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_3} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_1} \\ \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_2} \\ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial \varepsilon_r} & \frac{\partial x_2^*}{\partial \varepsilon_3} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \varepsilon_r} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{x}^*), \tag{2.142}$$

con

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} \qquad \text{en} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \tag{2.143}$$

Definición 8. *El* ***generador infinitesimal*** X_α *correspondiente al parámetro* ε_α *del grupo de Lie de transformaciones* $r-$*paramétrico (2.138), está dado por*

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_{\alpha j}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \textit{con} \qquad \alpha = 1, 2..., r. \tag{2.144}$$

Se puede demostrar que el grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico (2.138) es equivalente a

$$\boldsymbol{x}^* = \prod_{\alpha=1}^{r} e^{\mu_\alpha X_\alpha} \boldsymbol{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} \cdots e^{\mu_r X_r} \boldsymbol{x}, \tag{2.145}$$

en donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ son constantes reales arbitrarias. [El orden de las operaciones en (2.145) se puede reorganizar renumerando los generadores infinitesimales aunque no sea necesariamente cierto que $e^{\mu_\alpha X_\alpha} e^{\mu_\beta X_\beta} = e^{\mu_\beta X_\beta} e^{\mu_\alpha X_\alpha}$ para $\alpha \neq \beta$. Un reordenamiento correspondería a una parametrización diferente, es decir, $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon})$ cambiaría. Un grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico es equivalente a (2.138) si este puede expresarse en la forma (2.142)-(2.143) con la misma $\boldsymbol{\Xi(x)}$.]

También se puede demostrar que el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico

$$\boldsymbol{x^*} = e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x} = e^{\varepsilon \sum\limits_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha X_\alpha}\boldsymbol{x}, \tag{2.146}$$

el cual se obtiene aplicando la exponencial al generador infinitesimal

$$X = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \zeta_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{2.147}$$

en donde,

$$\zeta_i(\boldsymbol{x})\sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi_{\alpha j}(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.148}$$

en términos de cualesquiera constantes reales fijas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_r$, define un $\boldsymbol{\varepsilon}$-subgrupo uniparamétrico del grupo de Lie de transformaciones r-paramético (2.138).

Ejemplo 8. *Consideremos el grupo de Lie de transformaciones* $(x_1, x_2) = (x, y)$ $2-$*paramétrico* $\Big(\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\Big)$ *dado por*

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\varepsilon_1}x + \varepsilon_2, & (2.149)\\ y^* &= e^{2\varepsilon_1}y. & (2.150) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^{**} &= e^{\delta_1}x^* + \delta_2 = e^{\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta})}x + \varphi_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}),\\ y^{**} &= e^{2\delta_1}y^* \qquad = e^{2\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta})}y, \end{aligned}$$

con la ley de composición dada por

$$\boldsymbol{\varphi(\varepsilon,\delta)} = (\varphi_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}), \varphi_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta})) = (\varepsilon_1 + \delta_1, e^{\delta_1}\varepsilon_2 + \delta_2).$$

La familia de transformaciones (2.149)-(2.150) 2*-paramétrico, con la anterior ley de composición es un grupo de Lie de transformaciones* 2*-paramétrico con* $x^* = x$*,* $y^* = y$ *cuando* $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbf{0}$.

Notemos que

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1} = e^{\varepsilon_1}x = x^* - \varepsilon_2, \qquad \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1} = 2e^{\varepsilon_1}y = 2y^* \qquad \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2} = 1, \qquad \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2} = 0.$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* - \varepsilon_2 & 2y^* \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.151}$$

Entonces

$$\xi_{11}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = x, \qquad \xi_{12}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = 2y,$$
$$\xi_{21}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = 1, \qquad \xi_{22}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = 0.$$

De esta manera la matriz infinitesimal está dada por

$$\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para determinar $\boldsymbol{\Psi(x)}$ *tenemos*

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_1} = 1, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta_1} = e^{\delta_1}\varepsilon_2, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_2} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta_2} = 1,$$

y así

$$\Theta_{11} = \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_1}\right|_{\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}} = 1, \qquad \Theta_{12} = \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta_1}\right|_{\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}} = \varepsilon_2,$$
$$\Theta_{21} = \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_2}\right|_{\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}} = 0, \qquad \Theta_{22} = \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta_2}\right|_{\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0}} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego es fácil notar

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} x^* - \varepsilon_2 & 2y^* \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La cual es la matriz (2.151) cumpliendose así (2.142)-(2.143). Por lo tanto, el ***problema de valor inicial*** *está dado por el sistema de EDP de primer orden*

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1} &= x^* - \varepsilon_2, \\ \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1} &= 2y^*, \\ \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2} &= 1, \\ \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2} &= 0, \end{aligned}$$

con $x = x^*$, $y = y^*$, *cuando* $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$. *Cuya solución nos lleva a la transformación (2.149)-(2.150).*

Para el grupo de Lie de transformaciones 2-paramétrico (2.149)-(2.150), los generadores infinitesimales correspondientes son

$$\begin{aligned} X_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}, && (2.152)\\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}. && (2.153) \end{aligned}$$

Para alguna función diferenciable $F(x, y)$ *tenemos*

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon X_1}F(x,y) &= F(e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}y), && (2.154)\\ e^{\varepsilon X_2}F(x,y) &= F(x+\varepsilon, y). && (2.155) \end{aligned}$$

Ahora verificamos que las representaciones (2.145) y (2.146) conducen a (2.149)-(2.150). De (2.154)-(2.155), se deduce que para cualesquier constantes reales μ_1, μ_2 *tenemos*

$$e^{\mu_1 X_1}e^{\mu_2 X_2}(x,y) = e^{\mu_1 X_1}(x+\mu_2, y) = (e^{\mu_1}x + \mu_2, e^{2\mu_1}y), \tag{2.156}$$

y

$$e^{\mu_2 X_2}e^{\mu_1 X_1}(x,y) = e^{\mu_2 X_2}(e^{\mu_1}x, e^{2\mu_1}y) = (e^{\mu_1}(x+\mu_2), e^{2\mu_1}y). \tag{2.157}$$

Sea $\tilde{x} = \lambda_1 x + \lambda_2$. *Entonces*

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)}(x,y) &= e^{\varepsilon\lambda_1\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + 2\varepsilon\lambda_1 y\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{\tilde{x}-\lambda_2}{\lambda_1}, y\right) = \left(\frac{e^{\varepsilon\lambda_1}\tilde{x}-\lambda_2}{\lambda_1}, e^{2\varepsilon\lambda_1}y\right)\\ &= \left(e^{\varepsilon\lambda_1}x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(e^{\varepsilon\lambda_1}-1\right), e^{2\varepsilon\lambda_1}y\right). && (2.158) \end{aligned}$$

Así, (2.156) es idéntica a (2.149)-(2.150), con la misma ley de composición $\boldsymbol{\varphi(\varepsilon,\delta)} = (\varepsilon_1 + \delta_1, \varepsilon_2 + e^{-\delta_1}\delta_2)$; *y (2.158) es equivalente a (2.149)-(2.150) con la ley de composición*

$$\boldsymbol{\varphi(\varepsilon,\delta)} = \left(\varepsilon_1 + \delta_1, \frac{\varepsilon_1+\delta_1}{e^{\varepsilon_1+\delta_1}-1}\left(e^{\delta_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(e^{\varepsilon_1}-1) + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\right).$$

2.9. Álgebras de Lie

Definición 9. *Consideremos el grupo de Lie de transformaciones* r*-parámetrico (2.138) con generadores infinitesimales* X_α, $\alpha = 1, 2, ..., r$, *definidos por (2.139) y (2.144). El conmutador* *(corchete de Lie) de X_α y X_β es un operador de primer orden*

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, X_\beta] &:= X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\xi_{\alpha i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\xi_{\beta j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \left(\xi_{\beta i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\xi_{\alpha j}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad (2.159)
\end{aligned}$$

en donde,

$$\eta_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{\alpha i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial \xi_{\beta j}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(\boldsymbol{x})\frac{\partial \xi_{\alpha j}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right). \qquad (2.160)$$

Se sigue de inmediato de la definición que

$$[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]. \qquad (2.161)$$

Teorema 12. *(**Segundo teorema fundamental de Lie**). El conmutador de dos generadores infinitesimales de un grupo de transformaciones de Lie r-paramétrico también es un generador infinitesimal. En particular,*

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C^{\gamma}_{\alpha\beta} X_\gamma, \qquad (2.162)$$

en donde, los coeficientes $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ son llamadas constantes estructurales, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, r$.

Demostración. *La prueba de este teorema depende esencialmente de las condiciones de integrabilidad*

$$\frac{\partial^2 x_i^*}{\partial\varepsilon_\alpha \partial\varepsilon_\beta} = \frac{\partial^2 x_i^*}{\partial\varepsilon_\beta \partial\varepsilon_\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r, \qquad (2.163)$$

aplicadas a (2.142). Para consultar detalles ver [62] - [64].

□

Definición 10. *Las ecuaciones (2.162) se denominan relaciones de conmutación del grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico (2.138) con los generadores infinitesimales (2.144).*

Para cualquiera tres generadores infinitesimales $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$, por cálculo directo se puede demostrar que se cumple la identidad de Jacobi, es decir

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0. \qquad (2.164)$$

A partir de (2.161), (2.162) y (2.164), se demuestra fácilmente el siguiente teorema que relaciona las constantes estructurales

Teorema 13. *(**Tercer teorema fundamental de Lie**). Las constantes estructurares definidas por las relaciones de conmutación (2.162) satisfacen las relaciones*

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}_{\beta\alpha}, \tag{2.165}$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \left[C^{\rho}_{\alpha\beta}C^{\delta}_{\rho\gamma} + C^{\rho}_{\beta\gamma}C^{\delta}_{\rho\alpha} + C^{\rho}_{\gamma\alpha}C^{\delta}_{\rho\beta}\right] = 0. \tag{2.166}$$

En particular, (2.165) es equivalente a la propiedad antisimetrica del conmutador (2.161), y (2.166) es equivalente a la identidad de Jacobi (2.164).

Definición 11. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con una operación corchete bilineal (el conmutador) que satisface las propiedades (2.161), (2.164) y, lo más importante, (2.162). En particular, el conjunto de generadores infinitesimales $\{X_\alpha\}, = 1, 2, ..., r$, de un grupo de Lie de transformaciones r-paramétrico (2.138) forma un álgebra de Lie r-dimensional sobre $\mathbb{R}$.*

Uno puede motivar la definición del conmutador $[X_\alpha, X_\beta]$ por el siguiente argumento. Sea G^r que denota el grupo de transformaciones de Lie r-paramétroico (2.138). Cualquier (ε)-subgrupo uniparamétrico de G^r tiene un correspondiente generador infinitesimal en $\mathfrak{L}^r$. Por ejemplo, $X_\alpha \in \mathfrak{L}^r$ corresponde a $e^{\varepsilon X_\alpha}\boldsymbol{x} \in G^r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$; $aX_\alpha + bX_\beta \in \mathfrak{L}^r$ corresponde tanto a $e^{\varepsilon(aX_\alpha + bX_\beta)}\boldsymbol{x} \in G^r$ como a $e^{\varepsilon aX_\alpha}e^{\varepsilon bX_\beta}\boldsymbol{x} \in G^r$. Si $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{L}^r$ entonces ambos $e^{\varepsilon X_\alpha}\boldsymbol{x}$ y $e^{\varepsilon X_\beta}\boldsymbol{x}$ pertenecen a G^r para cualquier real ε. Consideremos el ε-grupo de transformaciones conmutador uniparamétrico

$$e^{-\varepsilon X_\alpha}e^{-\varepsilon X_\beta}e^{\varepsilon X_\alpha}e^{\varepsilon X_\beta}\boldsymbol{x} = \left[e^{\varepsilon X_\alpha}\right]^{-1}\left[e^{\varepsilon X_\beta}\right]^{-1}e^{\varepsilon X_\alpha}e^{\varepsilon X_\beta}\boldsymbol{x} \in G^r.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^{-\varepsilon X_\alpha}e^{-\varepsilon X_\beta}e^{\varepsilon X_\alpha}e^{\varepsilon X_\beta} &= \left(1 - \varepsilon X_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\alpha)^2\right)\left(1 - \varepsilon X_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\beta)^2\right) \\
&\quad \times \left(1 + \varepsilon X_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\alpha)^2\right)\left(1 + \varepsilon X_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\beta)^2\right) + O(\varepsilon^3) \\
&= \left(1 - \varepsilon(X_\alpha + X_\beta) + \varepsilon^2\left(X_\alpha X_\beta + \frac{1}{2}(X_\alpha)^2 + \frac{1}{2}(X_\beta)^2\right)\right) \\
&\quad \times \left(1 + \varepsilon(X_\alpha + X_\beta) + \varepsilon^2\left(X_\alpha X_\beta + \frac{1}{2}(X_\alpha)^2 + \frac{1}{2}(X_\beta)^2\right)\right) + O(\varepsilon^3) \\
&= 1 + \varepsilon^2\Big(2X_\alpha X_\beta + (X_\alpha)^2 + (X_\beta)^2 - (X_\alpha + X_\beta)^2\Big) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\varepsilon^2\Big(X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha\Big) + O(\varepsilon^3)\\
&= 1+\varepsilon^2[X_\alpha, X_\beta] + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{L}^r$.

Se puede mostrar de forma directa que $e^{\varepsilon X_\alpha}e^{\delta X_\beta} = e^{\delta X_\beta}e^{\varepsilon X_\alpha} = e^{\varepsilon X_\alpha + \delta X_\beta}$ si y sólo si $[X_\alpha, X_\beta] = 0$.

Teorema 14. *Sean $X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}$ los generadores infinitesimales k-extendidos de los generadores infinitesimales X_α, X_β, y sean $[X_\alpha, X_\beta]^{(k)}$ el generador infinitesimal k-extendido del conmutador $[X_\alpha, X_\beta]$. Entonces $[X_\alpha, X_\beta]^{(k)} = [X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}]$, $k \geq 1$. Por lo tanto, si $[X_\alpha, X_\beta] = X_\gamma$, entonces $[X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}] = X_\gamma^{(k)}$, $k \geq 1$.*

Demostración. *Ver en [11], pág. 79.*

□

Definición 12. *Un subespacio $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{L}$ se llama subalgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ si $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{J}$ para todos los $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{J}$.*

Ejemplo 9. *(Grupo de Lie de ocho parámetros de transformaciones proyectivas en $\mathbb{R}^2$) Las transformaciones proyectivas en $\mathbb{R}^2$ asignan líneas rectas a líneas rectas. En particular, se definen por el grupo de Lie de transformaciones de ocho parámetros*

$$x^* = \frac{(1+\varepsilon_3)x + \varepsilon_4 y + \varepsilon_5}{\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + 1}, \tag{2.167}$$

$$y^* = \frac{\varepsilon_6 x + (1+\varepsilon_7)y + \varepsilon_8}{\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + 1}, \tag{2.168}$$

con parámetros $\varepsilon_l \in \mathbb{R}$, para $l = 1, 2, \ldots, 8$. El generador infinitesimal de la correspondiente álgebra de Lie $\mathfrak{L}^8$ está dada por

$$
\begin{aligned}
&X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x},\\
&X_4 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_7 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_8 = \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.169}
$$

Es conveniente mostrar los conmutadores de un álgebra de Lie a través de su tabla de conmutadores cuya entrada (i, j) es $[X_i, X_j]$. De (2.161), se deduce que la tabla es antisimétrica con sus elementos diagonales todos cero. Las constantes estructurales se leen fácilmente de la tabla de conmutadores.

Para los generadores infinitesimales (2.169), tenemos la siguiente tabla de conmutadores

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	$-X_1$	$-X_2$	$-2X_3 - X_7$	0	0	$-X_6$
X_2	0	0	0	0	$-X_4$	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3 - 2X_7$
X_3	X_1	0	0	$-X_4$	$-X_5$	X_6	0	0
X_4	X_2	0	X_4	0	0	$X_7 - X_3$	$-X_4$	$-X_5$
X_5	$2X_3 + X_7$	X_4	X_5	0	0	X_8	0	0
X_6	0	X_1	$-X_6$	$X_3 - X_7$	$-X_8$	0	X_6	0
X_7	0	X_2	0	X_4	0	$-X_6$	0	$-X_8$
X_8	X_6	$X_3 + 2X_7$	0	X_5	0	0	X_8	0

Ejemplo 10. *(Grupo de movimientos rígidos en $\mathbb{R}^2$)*
El grupo de movimientos rígidos en $\mathbb{R}^2$ conserva las distancias entre dos puntos en$\mathbb{R}^2$. Este grupo es el grupo de Lie de transformaciones tres-paramétrico de rotaciones y traslaciones en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$x^* = xcos\varepsilon_1 - ysen\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{2.170}$$

$$y^* = xsen\varepsilon_1 + ycos\varepsilon_1 + \varepsilon_3. \tag{2.171}$$

El correspondiente generador infinitesimal está dado por

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.172}$$

La tabla del conmutador de su álgebra de Lie es

	X_1	X_2	X_3
X_1	*0*	$-X_3$	X_2
X_2	X_3	*0*	*0*
X_3	$-X_2$	*0*	*0*

2.10. Superficies y curvas invariantes

Bajo la acción de un grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparamétrico admitido por una EDO, cada curva solución es transformada en una familia de curvas solución uniparamétricas de la misma ecuación diferencial o es invariante bajo la acción de grupo. Comentarios análogos se aplican para las superficie solución de las EDPs.

Definición 13. *Una superficie* $F(\boldsymbol{x}) = 0$ *es una* ***superficie invariante*** *para un grupo de transformaciones uniparamétrico dadas por* $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$*, si y sólo si* $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *cuando* $F(\boldsymbol{x}) = 0$.

Definición 14. *Una curva* $F(x, y) = 0$ *es una* ***curva invariante*** *para un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (2.52)-(2.53) si y sólo si* $F(x^*, y^*) = 0$ *cuando* $F(x, y) = 0$.

Teorema 15.
1. *Una superficie* $F(\boldsymbol{x}) = 0$ *es una superficie invariante para un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico dado por* $\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$*, si y sólo si*

$$XF(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \textit{cuando} \qquad F(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{2.173}$$

   en donde, X *es el generador infinitesimal dado por (1.30).*

2. *Una curva* $F(x, y) = 0$ *es una curva invariante para un grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico (2.52)-(2.53) si y sólo si*

$$XF(x, y) = 0, \qquad \textit{cuando} \qquad F(x, y) = 0,$$

en donde, X *es el generador infinitesimal dado por (2.54).*

Demostración. *Ver [11] pág 87.* □

El teorema anterior da un significado a la búsqueda de superficies invariantes de un grupo de Lie de transformaciones dado, es decir, resolviendo (2.173). Una curva escrita en forma de ecuación, $F(x, y) = y - f(x) = 0$, es una curva invariante para (2.52)-(2.53) si y sólo si

$$XF(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y)f'(x) = 0$$

cuando $F(x, y) = y - f(x) = 0$, es decir, si y sólo si

$$\eta(x, f(x)) - \xi(x, f(x))f'(x) = 0.$$

Como ejemplo, consideremos el grupo de escalamiento, que escribimos a continuación.

Ejemplo 11.

$$x^* = e^{\varepsilon}x, \tag{2.174}$$

$$y^* = e^{\varepsilon}y. \tag{2.175}$$

El generador infinitesimal correspondiente está dado por

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.176}$$

Un rayo $y - \lambda x = 0$ $x > 0$, $\lambda =$*const., es una curva invariante para (2.174)-(2.175) ya que* $X(y - \lambda x) = y - \lambda x = 0$ *cuando* $y - \lambda x = 0$*; una parábola* $y - \lambda x^2 = 0$*, con* $\lambda =$ *const., no es una curva invariante para (2.174)-(2.175) ya que* $X(y - \lambda x^2) = y - 2\lambda x^2 \neq 0$ *cuando* $y - \lambda x^2 = 0$.

Para encontrar todas las curvas invariantes $y - f(x) = 0$ *para (2.174)-(2.175), primero encontramos la solución general* $u(x, y)$ *de la EDP*

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

la cual es

$$u(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

en donde, F *es una función arbitraria de* y/x*. Las curvas invariantes entonces incluyen las curvas*

$$y - \lambda x = 0, \quad \lambda = const., \quad x > 0, \ o \ x < 0.$$

Definición 15. *Un punto* $\boldsymbol{x}$ *es un* ***punto invariante*** *para el grupo de Lie de transformaciones (1.4) si y sólo si* $\boldsymbol{x}^* \equiv \boldsymbol{x}$ *bajo (1.4).*

Teorema 16. *Un punto* $\boldsymbol{x}$ *es un punto invariante para el grupo de transformaciones (1.4) si y sólo si*

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Demostración. *Ver [11] pág 90.* □

Ejemplo 12. *Definimos el grupo escalar como*

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\varepsilon}x, \\ y^* &= e^{\varepsilon}y, \end{aligned} \tag{2.177}$$

note que en este grupo $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y = 0$*. Así, el único punto invariante es el origen* $(0, 0)$.

Definición 16. *La familia de superficies*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = c, \quad \textit{con} \quad c \quad \textit{constante},$$

*es una **familia de superficies invariante** para el grupo de transformaciones de Lie (1.4) si y sólo si*

$$\omega(\boldsymbol{x}^*) = c^*, \quad \textit{con} \quad c^* \textit{ constante, cuando} \quad \omega(\boldsymbol{x}) = c.$$

Definición 17. *La familia de curvas*

$$\omega(x, y) = c, \quad \textit{con } c \textit{ constante}$$

*es una **familia de curvas invariante** para el grupo de transformaciones de Lie (2.52)-(2.53) si y sólo si*

$$\omega(x^*, y^*) = c^*, \quad \textit{con} \quad c^* \quad \textit{constante, cuando} \quad \omega(x, y) = c.$$

Para las definiciones anteriores se sigue $c^* = C(c, \varepsilon)$, para alguna función C de la constante c y el parametro ε del grupo.

Ejemplo 13. *Para el grupo de escalamiento*

$$\begin{aligned} x^* &= X = e^{\varepsilon} x, \\ y^* &= Y = e^{2\varepsilon} y, \end{aligned} \tag{2.178}$$

tenemos

$$y^* = Y = e^{2\varepsilon}\Theta(x) = e^{2\varepsilon}\Theta(e^{-\varepsilon}x^*),$$

y por lo tanto, $y = \Theta(x)$ se transforma en la familia de curvas

$$y = e^{2\varepsilon}\Theta(e^{-\varepsilon}x) = \phi(x, \varepsilon).$$

Capítulo 3

Simetrías e invariancia en Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

3.1. Introducción

Cuando hablamos de un grupo de simetría clásico con un sistema de ecuaciones diferenciales parciales nos referimos a un grupo continuo de transformaciones que actúan en el espacio de variables independientes y dependientes que transforman las soluciones del sistema en otras soluciones. Como es sabido, las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que son invariantes bajo un grupo de simetría continuo se encuentran resolviendo un sistema reducido de ecuaciones diferenciales que implican menos variables independientes. Entre estas soluciones se incluyen las clases importantes de soluciones de onda viajera y soluciones de similaridad, así como muchas otras soluciones explícitas de importancia física directa. Lo que no se sabe bien es que el método de reducción básico se originó con el propio Sophus Lie.

Lie estaba interesado en soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales invariantes bajo grupos de transformaciones de contacto (o transformaciones tangentes), pero sus resultados incluyen las versiones locales del teorema de reducción actual. En [30], Lie demuestra que las soluciones a una ecuación diferencial parcial en dos variables independientes, que son invariantes bajo un grupo de simetría de un parámetro, se pueden encontrar resolviendo una ecuación diferencial ordinaria “reducida”. La generalización a los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en grupos multiparamétricos, se establece y se prueba en el mismo documento, pero, hasta donde sabemos, nunca antes se había remitido.

En [31], Bluman y Cole propusieron una generalización del método de Lie para encontrar soluciones invariantes bajo el grupo, que llamaron el método no "clásico". Mediante esta maquinaria, una clase mucho más amplia de grupos está potencialmente disponible y, por lo tanto, existe la posibilidad de encontrar más tipos de soluciones explícitas mediante las mismas técnicas de reducción. En la práctica, sin embargo, las ecuaciones determinantes para un grupo de simetría no clásico de tipo Bluman y Cole pueden ser demasiado difíciles de resolver explícitamente; sin embargo, como se muestra aquí, incluso encontrar grupos no clásicos particulares puede conducir a nuevas soluciones explícitas del sistema. (Es cierto a primera vista, el hecho de que se puede ampliar el rango de posibles grupos de simetría al agregar más ecuaciones).

En este capítulo discutiremos cómo se puede usar la invariancia bajo los grupos de Lie de transformaciones puntuales para construir soluciones de EDP.

3.2. Invariancia de una EDP

Consideremos una EDP escalar escrita como

$$F\Big(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u\Big) = 0, \tag{3.1}$$

en donde, $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denota las coordenadas correspondientes a las n variables independientes, u denota la coordenada correspondiente a la variable dependiente, y $\partial^j u$ denota las coordenadas con componentes $\partial^j u/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j} \equiv u_{i_1,i_2,\ldots i_j}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, correspondiendo a todas las $j-$ésimas derivadas parciales de u con respecto a x.

Definición 18. *Una función localmente analítica $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ de un número finito de variables $x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ es llamada **función diferencial**. Denotamos con $\mathcal{A}$ a el conjunto de todas las funciones diferenciales.*

El Anexo 2, en el Apéndice, colecta algunas propiedades de $\mathcal{A}$.

En términos de las coordenadas $x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$ la ecuación diferencial parcial (3.1) se convierte en una ecuación algebraica que define una hipersuperficie en el espacio- $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \ldots, \partial^k u)$. (Aquí el espacio-$(x, u, \partial u)$ es de dimensión $2n+1$, el espacio-$(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ es de dimensión $\frac{1}{2}(n^2+5n+2)$, etc).

Para cualquier solución $u = \Theta(x)$ de la EDP (3.1), la ecuación

$$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = (x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \ldots, \partial^k\Theta(x)),$$

define una superficie solución que se encuentra en la superficie

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0.$$

Supongamos que de la EDP (3.1) es posible extraer alguna componente específica de las derivadas parciales de u de orden l

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = u_{i_1,i_2,\ldots i_l} - f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0, \quad k \geq 2,\ l \leq k,$$

cuando $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ no dependa explícitamente de $u_{i_1,i_2,\ldots i_l}$.

Definición 19. *El grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico*

$$x^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{3.2}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon), \tag{3.3}$$

deja invariante la EDP (3.1), es decir, es una ***simetría puntual admitida por EDP (3.1)****, si y sólo si su extensión $k-$ésima, definida por (2.84)-(2.87) y (2.88)-(2.89), deja la superficie (3.1) invariante bajo el grupo de transformaciones (3.2)-(3.3).*

Observación 6.

1. *Una solución $u = \Theta(x)$ de la EDP (3.1) esta sobre la superficie (3.1) con*

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_j} = \partial^j\Theta(x)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_j}, \qquad i_j = 1, 2, \ldots n, \quad \textit{para} \quad j = 1, 2\ldots, k.$$

2. *La invariancia de la superficie (3.1) bajo la extención $k-$ésima de (3.2)-(3.3) significa que cualquier solución $u = \Theta(x)$ de (3.1) la transforma bajo la acción de grupo uniparamétrico (3.2)-(3.3) en otra solución $u = \Phi(x, \varepsilon)$ para algún ε.*

3. *Más aún, si una transformación de la forma (3.2)-(3.3) transforma cualquier solución* $u = \Theta(x, \varepsilon)$ *de (3.1) en otra solución* $u = \Phi(x, \varepsilon)$ *de (3.1), entonces la superficie (3.1), es invariante bajo (3.2)-(3.3) con* $u_{i_1 i_2 \ldots i_j} = \partial^j \Phi(x)/\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_j}$, $i_j = 1, 2, \ldots n$ *para* $j = 1, 2 \ldots, k$. *Consecuentemente el conjunto de todas las soluciones de la EDP (3.1) es invariante bajo el grupo de Lie de trasformaciones puntuales uniparamétrico (3.2)-(3.3) si y sólo si (3.1) admite (3.2)-(3.3).*

El siguiente teorema surge de la Definición 19, el Teorema 15 sobre el criterio para una superficie invariante en términos de un generador infinitesimal, y el Teorema 11 sobre los infinitesimales extendidos.

Teorema 17. ***(Criterio infinitesimal para la invariancia de una EDP)***
Sea

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.4}$$

el generador infinitesimal del grupo de Lie de simetrías puntuales (3.2)-(3.3). Sea

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots \\ &+ \eta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{(k)}(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_k}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

la extensión o prolongación k-ésima del generador infinitesimal de (3.4), en donde $\eta_i^{(1)}$ *está dado por (2.99) y* $\eta_{i_1, i_2, \ldots, i_j}^{(j)}$ *por (2.100),* $i_j = 1, 2, \ldots, n$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k$, *en términos de* $\xi(x, u) = \big(\xi_1(x, u), \xi_2(x, u), \ldots, \xi_n(x, u)\big), \eta(x, u)$. *Entonces, el grupo de Lie de transformaciones puntuales (3.2)-(3.3) es admitido por la EDP (3.1), es decir, es una simetría puntual de la EDP (3.1), si y sólo si*

$$X^{(k)} F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0, \qquad \textit{cuando} \quad F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0. \tag{3.6}$$

Esta última ecuación determina todas las simetrías infinitesimales de la EDP (3.1) y es común nombrarla **ecuación determinante**.

3.2.1. Invarianza para EDPs escalares

Soluciones invariantes

Consideremos una EDP de orden k (3.1) ($k \geq 2$) que admite un grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparaméticas con el generador infinitesimal (3.4). Supongamos que

$\xi(x,u) \not\equiv 0$.

Definición 20. *$u = \Theta(x)$ es una solución invariable de la EDP (3.1) que resulta de la simetría puntual admitida con el generador infinitesimal (3.4) si y sólo si*

i) $u = \Theta(x)$ es una superficie invariante de (3.4); y

i) $u = \Theta(x)$ resuelve (3.1).

Se deduce que $u = \Theta(x)$ es una solución invariable de la EDP (3.1) que resulta de la invariancia bajo la simetría puntual (3.4) si y sólo si $u = \Theta(x)$ satisface

i) $X(u - \Theta(x))$ cuando $u = \Theta(x)$, es decir,

$$\xi_i(x, \Theta(x)) \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} = \eta(x, \Theta(x)); \tag{3.7}$$

y

ii) $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u) = 0$, cuando $u = \Theta(x)$, es decir,

$$F(x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \ldots, \partial^k\Theta(x)) = 0. \tag{3.8}$$

Observación 7. *La ecuación (3.7) se llama* ***condición de la superficie invariante*** *para las soluciones invariantes que resultan de la invariancia de la simetría puntual (3.4). Lie (1881) consideró por primera vez las soluciones invariables para las EDP y estas se pueden determinar a través de dos procedimientos*

1. *Método de la forma invariante;*

2. *Método de solución directa;*

para más detalles consultar [31] pág, 304.

Ejemplo 14. *En el grupo de traslaciones tenemos la EDP de segundo orden*

$$u_{xx} = f(u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t, u, x), \tag{3.9}$$

la cual admite el grupo uniparamétrico de transformaciones de Lie (con parámetro ε) dado por

$$x^* = x, \tag{3.10}$$

$$t^* = t + \varepsilon, \tag{3.11}$$

$$u^* = u, \tag{3.12}$$

ya que por (3.10)-(3.12) tenemos

$$u_{x^*x^*} = u_{xx}, \quad u^*_{x^*t^*} = u_{xt}, \quad u^*_{t^*t^*} = u_{tt}, \quad u^*_{x^*} = u_x, \quad u^*_{t^*} = u_t,$$

es decir, la superficie definida por (3.9) es invariante en el espacio $(x, u, \partial u, \partial^2 u)$*, con* $x_1 = x$*,* $x_2 = t$*. Entonces*

$$u = \phi(x), \tag{3.13}$$

es invariante bajo (3.10)-(3.12) y define una solución (invariante) de la EDP (3.9) siempre que ϕ *resuelva la EDO de segundo orden*

$$\phi''(x) = f(0, 0, \phi'(x), 0, \phi(x), x).$$

Notemos que

$$u = \Theta(x, t),$$

define una superficie invariante de (3.10)-(3.12) si y sólo si

$$X(u - \Theta(x, t)) = \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \textit{cuando} \quad u = \Theta(x, t),$$

en donde, $X = \frac{\partial}{\partial t}$ *es el generador infinitesimal del grupo de traslaciones de Lie (3.10)-(3.12). Esto conduce a la* ***forma invariante (forma de similitud)*** *(3.13) para una solución invariante que resulta de la invariancia de la EDP (3.9) bajo (3.10)-(3.12).*
Bajo la acción del grupo de Lie de traslaciones (3.10)-(3.12), una solución $u = \Theta(x, t)$ *de la EDP (3.9) se transforma en una familia de soluciones uniparamétricas* $u = \Phi(x, t; \varepsilon) = \Theta(x, t + \varepsilon)$ *siempre que* $u = \Theta(x, t)$ *no sea una solución invariante de la EDP (3.9) que resulta de la invariancia bajo (3.10)-(3.12), es decir,* $u = \Theta(x, t)$ *depende esencialmente de* t*.*

Ejemplo 15. *(Superposición de soluciones invariantes para EDP lineales) La ecuación de onda*

$$u_{xx} = u_{tt}, \tag{3.14}$$

admite un ε*-grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparamétrico*

$$x^* = x, \tag{3.15}$$

$$t^* = t + \varepsilon, \tag{3.16}$$

$$u^* = e^{\varepsilon\lambda} u, \tag{3.17}$$

para cualquier constante $\lambda \in \mathbb{C}$. El generador infinitesimal de (3.15)-(3.17) viene dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial}{\partial u}.$$

En realidad, el grupo de Lie de transformaciones puntuales (3.15)-(3.17) define un grupo de Lie de transformaciones dos-paramétrico (ε, λ) que corresponde a la invariancia de la ecuación de onda bajo traslaciones en t y escalamientos en u. Las soluciones invariantes resultantes $u = \Theta(x,t)$ deben satisfacer la condición de superficie invariante

$$X(u - \Theta(x,y)) = \lambda u - \Theta_t = 0, \quad \textit{cuando} \quad u = \Theta(x,t),$$

es decir,

$$u_t = \lambda u. \tag{3.18}$$

Como en la situación para las EDO (ver Observación 7) podemos encontrar soluciones invariables a través de dos procedimientos

Método (I) *(Método de forma invariable). La solución de la condición de superficie invariante (3.18) viene dada por la forma invariante*

$$u = \phi(x)e^{\lambda t}, \tag{3.19}$$

para una función arbitraria $\phi(x)$. Luego, la sustitución de (3.19) en la ecuación de onda (3.14) produce la EDO

$$\phi''(x) = \lambda^2 \phi(x). \tag{3.20}$$

Por lo tanto, después de resolver esta simple ODE, obtenemos soluciones invariables

$$u = \Theta(x,t) = Ce^{\lambda(t \pm x)}, \tag{3.21}$$

de la EDP (3.14), en donde C es una constante arbitraria.

Método (II) *(Método de sustitución directa). Aquí sustituimos directamente la condición de superficie invariante (3.18) en la EDP (3.14) y evitamos resolver explícitamente (3.18). Entonces, $u_{tt} = \lambda u_t = \lambda^2 u$. Por lo tanto, $u_{xx} = \lambda^2 u$ de tal forma que*

$$u = \psi(t)e^{\pm \lambda x}, \tag{3.22}$$

para una función arbitraria $\psi(t)$. Luego, la sustitución de (3.22) en la condición de superficie invariante (3.18) conduce a que $\psi(t)$ satisfaga la EDO $\psi'(t) = \lambda \psi(t)$ y, por lo tanto, a las *soluciones invariantes (3.21).*

Dado que la ecuación de onda (3.14) es una EDP lineal homogénea, se deduce que las superposiciones de soluciones invariantes

$$\sum_{\lambda} C(\lambda)e^{\lambda(t\pm x)}, \quad \sum_{\lambda}\left[C_1(\lambda)e^{\lambda(t-x)} + C_2(\lambda)e^{\lambda(t+x)}\right], \int_{\gamma} C(\lambda)e^{\lambda(t\pm x)}d\lambda, \ etc.,$$

define soluciones de (3.14), en donde $\lambda \in \mathbb{C}$ es un"valor propio", y γ define una trayectoria en el plano complejo λ. Las superposiciones especiales corresponden a representaciones de soluciones en series de Fourier, la transformada de Laplace y la transformada de Fourier.

Como observación general, notemos que el método de forma invariante es útil si uno puede encontrar la solución general de la condición de superficie invariante, mientras que el método de sustitución directa debe usarse si uno no puede resolver explícitamente la condición de superficie invariante.

3.2.2. Ecuaciones determinantes para simetrías de una EDP de orden k

Consideremos una EDP de orden k $(k \geq 2,\ k \geq l)$

$$u_{i_1,i_2,\dots i_l} = f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\dots,\partial^k), \tag{3.23}$$

en donde, $f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\dots,\partial^k u)$ no depende explícitamente de $u_{i_1,i_2,\dots i_l}$. Del Teorema 17 vemos que la EDP (3.23) admite el grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparamétricas con el generador infinitesimal

$$X = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.24}$$

y con su extensión o prolongación k-ésima dada por (3.5), si y sólo si $\xi(x,u)$ y $\eta(x,u)$ satisfacen la ecuación determinante de simetría

$$\eta^{(l)}_{i_1 i_2\dots i_l} = \xi_i\frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial f}{\partial u} + \eta^{(1)}_j\frac{\partial f}{\partial u_j} + \cdots \eta^{(k)}_{j_1 j_2\dots j_k}\frac{\partial f}{\partial u_{j_1 j_2,\cdots j_k}}, \tag{3.25}$$

cuando u satisface (3.23).

Observación 8. *Es fácil mostrar que*

(i) $\eta^{(p)}_{j_1 j_2\dots j_p}$ es lineal en los componentes de las coordenadas $\partial^p u$ si $p \geq 2$; y

(ii) $\eta^{(p)}_{j_1 j_2 \cdots j_p}$ *es un polinomio en las componentes de las coordenadas* $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$ *con coeficientes que son lineales y homogéneos en* $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ *y sus derivadas con respecto a* x *y* u *de orden* p.

De (i) y (ii), se deduce que si $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ es un polinomio en las componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$, entonces la ecuación determinante de simetría (3.25) es una ecuación polinomial de las componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, con coeficientes que son lineales y homogéneos en $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ y sus derivadas de orden k. Observemos que en cualquier punto x, podemos asignar valores arbitrarios a cada componente de $u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, siempre que se satisfaga la EDP (3.23). En particular, después de que $u_{i_1, i_2, \ldots, i_l}$ se reemplaza por $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ en la ecuación determinante de simetría (3.25), la expresión resultante debe ser válida para valores arbitrarios de los componentes restantes de las coordenadas $x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$. Además, la expresión resultante es una ecuación polinomial en las componentes restantes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$. Consecuentemente, los coeficientes de esta ecuación polinomial deben anularse por separado. Esto produce un sistema de EDPs lineales homogéneas para las $n+1$ funciones $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$. Este sistema de EDP lineales se denomina conjunto de **ecuaciones determinantes** para los generadores infinitesimales (3.24) admitidos por la EDP (3.23). El conjunto de ecuaciones determinantes es un sistema sobredeterminado de EDPs para $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$, ya que en general, hay más de $n+1$ ecuaciones determinantes.

Cuando la solución general del conjunto de ecuaciones determinantes no es trivial, surgen dos casos:

a) Si la solución general contiene como máximo un número finito r de constantes arbitrarias esenciales, entonces produce un Grupo de Lie de transformaciones puntuales r-paramétrico admitidas por la EDP (3.23);

b) Si la solución general no puede expresarse en términos de un número finito de constantes esenciales (por ejemplo, cuando contiene un número infinito de constantes esenciales o involucra funciones arbitrarias que dependen de las componentes de x, u), entonces produce un grupo de Lie de transformaciones puntuales infinito-paramétrico admitido por la EDP (3.23).

Se puede verificar que cualquier EDP lineal no homogénea, definida por un operador lineal

L,

$$Lu = g(x), \tag{3.26}$$

admite un grupo de Lie de transformaciones puntuales trivial infinito-paramétrico

$$\begin{aligned} x^* &= x, && (3.27) \\ u^* &= u + \varepsilon\omega(x), && (3.28) \end{aligned}$$

en donde, $\omega(x)$ es cualquier solución de la EDP lineal homogénea asociada

$$L\omega = 0. \tag{3.29}$$

Dentro de este grupo de Lie de transformaciones puntuales trivial infinitos-paramétrico, el grupo Lie de transformaciones puntuales admitidas por una EDP lineal generalmente tiene como máximo un número infinitos-paramétrico.

A continuación enunciamos algunos resultados sobre algunas formas de simetrías puntuales admitidas por algunos tipos de EPD de la forma (3.1).

Teorema 18. *Supongamos que una EDP de segundo orden del tipo (3.23) tiene la forma*

$$A_{ij}(x,u)u_{ij} = C_k(x,u)u_k + h(x,u),$$

y admite un grupo de Lie de transformaciones puntuales con el generador infinitesimal (3.24) de modo que

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

Teorema 19. *Supongamos una EDP de la forma (3.23), de orden $k \geq 2$, es una EDP lineal que admite un grupo de Lie de transformaciones puntuales con el generador infinitesimal (3.24). Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Para $n = 2$, introducimos las notaciones

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad \xi_1(x_1, x_2) = \xi(x,t), \quad \xi_2(x_1, x_2) = \tau(x,t),$$

y

$$u_1 = u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_2 = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \eta_1^{(1)} = \eta_x^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = \eta_t^{(1)}, \ etc.$$

Si $\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0$, entonces un generador infinitesimal admitido para una simetría puntual es de la forma

$$X = \xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + [f(x,t)u + g(x,t)]\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.30}$$

Se sigue que para un generador infinitesimal de la forma (3.30), tenemos

$$\eta = fu + g, \tag{3.31}$$

$$\eta_x^{(1)} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}u + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_t, \tag{3.32}$$

$$\eta_t^{(1)} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}u + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial t}\right]u_x - \frac{\partial \tau}{\partial t}u_t, \tag{3.33}$$

$$\eta_{xx}^{(2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u + \left[2\frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right]u_x - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}u_t + \left[f - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_{xx} - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}u_{xt}, \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \eta_{xt}^{(2)} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x \partial t}u + \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}\right]u_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t}\right]u_t \\ &- \frac{\partial \xi}{\partial t}u_{xx} + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right]u_{xt} - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_{tt}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\eta_{tt}^{(2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}u_x + \left[2\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}\right]u_t - 2\frac{\partial \xi}{\partial t}u_{xt} + \left[f - 2\frac{\partial \xi \tau}{\partial t}\right]u_{tt}. \tag{3.36}$$

Comparense con (2.111)-(2.115) del Capítulo 2, sección 2.6.

Ejemplos

a) Ecuación de calor

Consideremos la ecuación de calor

$$u_{xx} = u_t. \tag{3.37}$$

Del Teorema 19, se deduce inmediatamente que el generador infinitesimal de una simetría puntual

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.38}$$

admitido por la EDP (3.37) debe ser de la forma (3.30). Ahora encontramos todos los generadores infinitesimales de las simetrías puntuales (3.30) admitidas por la ecuación de calor (3.37) . Para la EDP (3.37), la ecuación determinante de simetría (3.25) se convierte en

$$\eta_{xx}^{(2)} = \eta_t^{(1)} \quad \text{cuando} \quad u_{xx} = u_t. \tag{3.39}$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en (3.39), y luego eliminando u_{xx} a través de (3.37) obtenemos

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} - \frac{\partial g}{\partial t}\right] &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right]u + \left[2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi}{\partial t}\right]u_x \\ &+ \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial x} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_t - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}u_{xt} = 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

La ecuación determinante de la simetría (3.40) debe ser válida para todos los valores de $x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}$. Por lo tanto, al hacer cero los coeficientes de u_{xt}, u_t, u_x, u y el primer término entre paréntesis cuadrados de (3.40), obtenemos el siguiente conjunto de cinco ecuaciones determinantes para $\xi(x,t), \tau(x,t), f(x,t), g(x,t)$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \tag{3.42}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0. \tag{3.45}$$

La solución de la EDP (3.45) corresponde al grupo de Lie de simetrias puntuales trivial infinito-paramétrico (3.27)-(3.28) con $\omega(x) = g(x,t)$. Las simetrías puntuales no triviales surgen de resolver el sistema de EDPs lineales (3.41)-(3.44). La solución de las ecuaciones determinantes (3.41)-(3.44) están dadas por

$$\xi(x,t) = \kappa + \beta x + \gamma x t + \delta t, \tag{3.46}$$

$$\tau(x,t) = \tau(t) = \alpha + 2\beta t + \gamma t^2, \tag{3.47}$$

$$f(x,t) = -\gamma\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\delta x + \lambda, \tag{3.48}$$

en donde, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda$ son seis parámetros arbitrarios. Por lo tanto, los generadores de simetría puntuales admitidos por la ecuación de calor (3.37) están dados por

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)u\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Los generadores infinitesimales (3.49) corresponden a un grupo de Lie de transformaciones puntuales de seis parámetros no triviales que actúan en el espacio-(x, t, u). La tabla de conmutadores para el álgebra de Lie que surge de los generadores infinitesimales (3.49) está dada por

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	X_1	X_5	$-\frac{1}{2}X_6$	0
X_2	0	0	$2X_2$	$X_3 - \frac{1}{2}X_6$	X_1	0
X_3	$-X_1$	$-2X_2$	0	$2X_4$	X_5	0
X_4	$-X_5$	$-X_3 + \frac{1}{2}X_6$	$-2X_4$	0	0	0
X_5	$\frac{1}{2}X_6$	$-X_1$	$-X_5$	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

A partir de la forma de los infinitesimales (3.46)-(3.47), vemos que los generadores infinitesimales (3.49) inducen un grupo de Lie de transformaciones puntuales de cinco parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda)$ que actúan sobre el espacio$-(x, t)$

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_4 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.50}$$

$$Y_5 = t\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.51}$$

Este grupo de Lie de cinco parámetros es un subgrupo del grupo de Lie de transformaciones proyectivas en $\mathbb{R}^2$ de ocho parámetros definidas por (2.167)-(2.168) con generadores infinitesimales dados por (2.169).

Consideremos el generador infinitesimal X_4 (parámetro γ) en (3.49). El correspondiente grupo de Lie de transformaciones de simetrías puntuales es obtenido resolviendo el problema de valor inicial para el sistema de EDOs de primer orden,

$$\begin{aligned}
\frac{dx^*}{d\varepsilon} &= x^*t^*, \\
\frac{dt^*}{d\varepsilon} &= (t^*)^2, \\
\frac{du^*}{d\varepsilon} &= -\left[\frac{1}{4}(x^*)^2 + \frac{1}{2}t^*\right] u^*,
\end{aligned}$$

con $u^* = u$, $x^* = x$, $t^* = t$, en $\varepsilon = 0$. La solución a tal sistema es

$$\begin{aligned}
x^* &= X(x,t,u,\varepsilon) = \frac{x}{1-\varepsilon t}, \\
t^* &= T(x,t,u,\varepsilon) = \frac{t}{1-\varepsilon t}, \\
u^* &= U(x,t,u,\varepsilon) = \sqrt{1-\varepsilon t}\, exp\left[-\frac{\varepsilon x^2}{4(1-\varepsilon t)}\right] u.
\end{aligned}$$

Se pueden encontrar soluciones invariantes $u = \Theta(x,t)$ de la ecuación (3.37) que resultan de la invariancia bajo X_4 usando los métodos mencionados en la Observación 7; para más detalles consultar [36], pag 312.

Ejemplo 16. *[52] Consideremos la ecuación de difusión*

$$u_t = B(u_{xx} + u_{yy}) - w_x u_x - w_y u_y, \tag{3.52}$$

en donde w_x y w_y son velocidades de convección, y B la constante de difusión que mide la tasa de dispersión.

El generador infinitesimal del grupo de Lie de simetrías puntuales está dado

$$X = \xi_1 \partial t + \xi_2 \partial x + \xi_3 \partial y + \eta \partial u.$$

La condición de simetría puntual de Lie (3.6) (Teorema 17) se resuelve y proporcionar las ecuaciones determinantes

$$\begin{aligned}
(\xi_1)_u = (\xi_2)_u = (\xi_3)_u = (\xi_1)_y = (\xi_1)_x &= 0, \\
2B(\xi_2)_y + 2B(\xi_3)_x = 0, \quad -2(\xi_2)_y - 2(\xi_3)_x &= 0, \quad -B\eta_{yy} - B\eta_{xx} + \eta_t = 0, \\
\eta_u - B\eta_{uu} - 2(\xi_3)_y + (\xi_1)_t &= 0, \quad \eta_y - B\eta_{uu} - 2(\xi_2)_x + (\xi_1)_t = 0, \\
2B(\xi_3)_y - B(\xi_1)_t &= 0, \quad 2B(\xi_2)_x - B(\xi_1)_t = 0, \\
B(\xi_2)_{yy} + 2\eta_x - 2B\eta_{xu} + B(\xi_2)_{xx} - B(\xi_2)_t &= 0, \\
2\eta_y - 2B\eta_{yu} + B(\xi_3)_{yy} + B(\xi_3)_{xx} - (\xi_3)_t &= 0.
\end{aligned}$$

Las simetrías puntuales de Lie de (3.52) se obtienen resolviendo el sistema anterior, el cual genera un álgebra de 10 dimensiones

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial y, \quad X_2 = \partial x, \quad X_3 = \partial t, \quad X_4 = u\partial u,\\
X_5 &= t\partial x + \frac{1}{2}\frac{u(tw_y - x)}{B}\partial u, \quad X_6 = t\partial y + \frac{1}{2}\frac{u(tw_x - y)}{B}\partial u,\\
X_7 &= y\partial x - x\partial y - \frac{1}{2}\frac{u\Big(w_x x - w_y y\Big)}{B}\partial u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_8 &= \frac{1}{2}x\partial x + \frac{1}{2}y\partial y + t\partial t - \frac{1}{4}\frac{u\Big(\big((w_x)^2 + (w_y)^2\big)t - w_x y - w_y x\Big)}{B}\partial u,\\
X_9 &= \frac{1}{2}tx\partial x + \frac{1}{2}ty\partial y + \frac{1}{2}t^2\partial t,\\
&\quad -\frac{1}{8}\frac{u\Big(t^2(w_x)^2 + t^2(w_y)^2 - 2tw_x y - 2tw_y x + 4Bt + x^2 + y^2\Big)}{B}\partial u,\\
X_{10} &= F(x,y,t)\partial u,
\end{aligned}$$

en donde, $F(t,x,y)$ una solución a la ecuación original da lugar a una simetría de dimensión infinita.

3.3. Invariancia para un sistema de EDPs

Consideremos ahora un sistema de N EDP ($N \geq 1$) con n variables independientes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y m variables dependientes $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, dada por

$$F^\mu(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) = 0, \qquad \text{con} \quad \mu = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.53}$$

Definición 21. *El grupo uniparamétrico de transformaciones puntuales de Lie*

$$x^* = X(x, u, \varepsilon), \tag{3.54}$$

$$u^* = U(x, u, \varepsilon), \tag{3.55}$$

deja invariante el sistema de EDPs (3.53), es decir, es una ***simetría puntual*** *admitida por (3.53), si y sólo si su extensión $k-$ésima, definida por (2.130)-(2.133), (2.125)- (2.127) deja invariantes las N superficies en el espacio $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ definido en (3.53).*

En anología a la situación para una EDP escalar se tiene el siguiente resultado.

Teorema 20. ***(Criterio Infinitesimal para la Invariancia de un Sistema de EDP)***. *Sea*

$$X = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}, \quad i = 1,\ldots,n \quad \nu = 1,\ldots,m \tag{3.56}$$

el generador infinitesimal del grupo de Lie de transformaciones puntuales (3.54)-(3.55). Sea

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}} + \eta_i^{(1)\nu}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i^{\nu}} + \cdots \\ &\quad + \eta_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{(k)\nu}(x,u,\partial u,\partial^2 u\ldots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2\ldots i_k}^{\nu}}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

el $k-$ésimo generador infinitesimal extendido de (3.56), en donde $\eta^{(1)\nu}$ viene dado por (2.134) y $\eta_{i_1 i_2\ldots i_k}^{(j)\nu}$ por (2.135), con $\nu = 1,2,\ldots m$, y $i_j = 1,2,\ldots,n$ para $j = 1,2,\ldots,k$, en términos de $\xi(x,u) = (\xi_1(x,u),\xi_2(x,u),\ldots\xi_n(x,u))$, $\eta(x,y) = (\eta^1(x,y),\eta^2(x,y),\ldots,\eta^m(x,y))$. Entonces, el grupo de Lie de transformaciones puntuales uniparámetrico (3.54)-(3.55) es admitido por el sistema de EDP (3.53), si y sólo si

$$X^{(k)}F^{\sigma}(x,u,\partial u,\partial^2 u\ldots,\partial^k u) = 0, \qquad \textit{cuando } u \textit{ satisface (3.53)}, \tag{3.58}$$

para cada $\sigma = 1,2,\ldots,N$.

Demostración. *Ver en [14] pág 330.* □

Observación 9. *Tenga en cuenta que el criterio de invariancia (sistemas de ecuaciones determinantes de simetría (3.58)) implica la sustitución de las N EDPs (3.53) y sus respectivos diferenciales en cada una de las N ecuaciones determinantes dadas por (3.58).*

La ecuación (3.58) es llamada la ecuación determinante de (3.53) porque esta determina todas las simetrías infinitesimales de (3.53).

Definición 22. *Diremos que $u = \Theta(x)$, con componentes $u^{\nu} = \Theta^{\nu}(x)$, $\nu = 1,2,\ldots,m$, es una* ***solución invariante*** *del sistema de EDP (3.53) que resulta a partir de una simetría puntual admitida con generador infinitesimal (3.56) si y sólo si*

i) $u^{\nu} = \Theta^{\nu}(x)$ es una superficie invariante de (3.56) para cada $\nu = 1,2,\ldots,m$;

ii) $u = \Theta(x)$ resuelve (3.53).

De esto se deduce que $u = \Theta(x)$ es una solución invariante del sistema de EDP (3.53), que resulta de su invariancia bajo el grupo de Lie de transformaciones puntuales (3.54)-(3.55), si y sólo sí $u = \Theta(x)$ satisface

i) $X(u^\nu - \Theta^\nu(x)) = 0$ cuando $u = \Theta(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, es decir,

$$\xi_i(x, \Theta(x))\frac{\partial \Theta^\nu(x)}{\partial x_i} = \eta^\nu(x, \Theta(x)), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.59}$$

ii) $F^\mu(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) = 0$ cuando $u = \Theta(x)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$, es decir,

$$F^\mu(x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \ldots, \partial^k\Theta(x)) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.60}$$

en donde, $\partial^j\Theta(x)$ denota la $\partial^j\Theta(x)^\nu(x)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_j}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ y $i_j = 1, 2, \ldots, n$ para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Las ecuaciones (3.59) son las **condiciones de superficie invariantes** para las soluciones invariantes del sistema de EDPs (3.53) que resulta de la invariancia bajo la simetría puntual (3.56). Como en la situación escalar, las soluciones invariantes se pueden determinar por los dos métodos mencionados en la Observación 7, ver [36] pág. 332, para más detalles.

3.3.1. Ecuaciones determinantes para simetrías de un sistema de EDPs

Consideremos nuevamente el sistema de EDPs (3.53) con cada una de sus EDP dadas en forma

$$u^{\nu_\mu}_{i_1 i_2,\ldots,i_l\mu} = f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u), \tag{3.61}$$

en términos de alguna derivada parcial específica de orden l_μ de u^{ν_μ} para algún $\nu_\mu = 1, 2, \ldots m$, en donde, $f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$ no depende explícitamente de ninguno de las componentes $u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2,\ldots,i_{l_\mu}}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, N$, para cada $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Del Teorema 20, vemos que el sistema de EDPs (3.61) admite la simetría puntual

$$X = \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\nu(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \tag{3.62}$$

con la $k-$ésima extensión de (3.62) dada por (3.57) si y sólo si

$$\eta^{(l_\mu)\nu_\mu}_{i_1 i_2,\ldots,i_{l_\mu}} = \xi_j\frac{\partial f^\mu}{\partial x_j} + \eta^\nu\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu} + \eta^{(1)\nu}_j\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu_j} + \cdots + \eta^{(k)\nu}_{j_1 j_2\ldots,j_k}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu_{j_1 j_2\ldots,j_k}}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.63}$$

con

$$u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2\ldots,i_{j\sigma}} = f^\sigma(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u), \quad \sigma = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.64}$$

Es fácil ver que $\eta^{(\sigma)\nu}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ es un polinomio en las componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$, con coeficientes que son lineales y homogéneos en las componentes de $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ y de sus derivadas de orden p. Por lo tanto, ξ y η aparecen linealmente en (3.63). Como es la situación para una EDP escalar dada, el sistema de ecuaciones determinantes de simetría (3.63)-(3.64) conduce a un **sistema de EDP lineales homogéneas para ξ y η**. Primero, eliminamos los componentes $u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2 \ldots, i_{l_\sigma}}$ y sus correspondientes diferenciales a partir de (3.63) sustituyendo (3.64) y los diferenciales correspondientes de (3.64), $\sigma = 1, 2, \ldots, N$. Consecuentemente, los componentes de x, u y las componentes restantes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^p u$ que aparecen en el sistema resultante de las ecuaciones determinantes de simetría (3.63) son ya variables independientes, es decir, toman valores arbitrarios. Como la expresión que resulta para (3.63) se cumple para cualquier valor de estas variables independientes, se obtiene un sistema de EDPs lineales homogéneas para ξ y η que constituye un conjunto de **ecuaciones determinantes** para los generadores infinitesimales X admitidos por el sistema de EDPs dado (3.53).

En particular, si cada $f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N$ es un polinomio en las componentes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$, entonces el sistema ecuaciones determinantes de simetría (3.63) produce ecuaciones polinomiales en las componentes independientes de $\partial u, \partial^2 u, \ldots, \partial^k u$. Esto implica que los coeficientes de estas ecuaciones polinomiales deben anularse por separado. Esto produce el conjunto de ecuaciones determinantes lineales para ξ y η. Típicamente, el número de ecuaciones determinantes es mucho mayor que $n + m$, de modo que el conjunto de ecuaciones determinantes está muy sobredeterminado.

Un sistema lineal no homogéneo de EDPs

$$Lu = g(x), \tag{3.65}$$

admite un grupo de Lie de transformaciones puntuales trivial infinito-paramétrico

$$\begin{aligned} x^* &= x, && (3.66)\\ u^* &= u + \varepsilon\omega(x), && (3.67) \end{aligned}$$

en donde, $\omega(x)$ es cualquier solución del sistema lineal homogéneo de EDPs

$$Lu = 0.$$

Dentro de este grupo de Lie de transformaciones puntuales trivial infinito-paramétrico, el grupo de Lie de transformaciones puntuales admitido por un sistema lineal de EDPs generalmente tiene como máximo un número finito de parámetros.

A diferencia del caso de las EDPs escalares, todavía parece que se conoce muy poco sobre las formas de simetrías puntuales admitidas para los sistemas de EDPs. Se conjetura que para un sistema lineal de PDE (3.65), un generador infinitesimal admitido por una simetría puntual (módulo el grupo de Lie admitido de transformaciones puntuales infinito-paramétrico (3.66)-(3.67)) es tal que ξ no depende de u, y η es lineal en u, es decir,

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, && (3.68)\\ \eta^\nu &= k^\nu_\sigma(x) u^\sigma, && (3.69) \end{aligned}$$

para algunas funciones $k^\nu_\sigma(x)$ para, $\sigma, \nu = 1, 2, \ldots, m$. Supongamos que las condiciones (3.68)-(3.69) se cumplen para un grupo de Lie de transformaciones puntuales admitidas por un sistema lineal de EDPs.

Para un sistema lineal con $n = 2$ y $m = 2$, escribimos $x_1 = x$, $x_2 = t$, $\xi_1 = \xi(x, t)$, $\xi_2 = \tau(x, t)$, $u^1 = u$, $u^2 = \nu$, $\eta^1 = \eta^u = f(x, t)u + g(x, t)\nu$, $\eta^2 = \eta^\nu = k(x, y)\nu + l(x, t)u$. Aquí un generador infinitesimal admitido para una simetría puntual es de la forma

$$X = \xi(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t)\frac{\partial}{\partial t} + [f(x, t)u + g(x, t)\nu]\frac{\partial}{\partial u} + [k(x, t)\nu + l(x, y)u]\frac{\partial}{\partial \nu}, \tag{3.70}$$

y una vez mas la extensión de los infinitesimales están dadas por

$$\begin{aligned} \eta^{(1)u}_x &= \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial x}\nu + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_t + g\nu_x, && (3.71)\\ \eta^{(1)\nu}_x &= \frac{\partial l}{\partial x}u + \frac{\partial k}{\partial x}\nu + lu_x + \left[k - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\nu_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}\nu_t, && (3.72)\\ \eta^{(1)u}_t &= \frac{\partial f}{\partial t}u + \frac{\partial g}{\partial t}\nu - \frac{\partial \xi}{\partial t}u_x + \left[f - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right]u_t + g\nu_t, && (3.73)\\ \eta^{(1)\nu}_x &= \frac{\partial l}{\partial t}u + \frac{\partial k}{\partial t}\nu + lu_t - \frac{\partial \xi}{\partial t}\nu_x + \left[k - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right]\nu_t. && (3.74) \end{aligned}$$

Ejemplo 17. *[58] Consideremos las ecuaciones capa límite de la mecánica de fluidos dadas por*

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0, && (3.75)\\ uu_x + vu_y &= u_{yy}. && (3.76) \end{aligned}$$

La condición de invariancia para cada ecuación viene dada por

$$\xi_x + \eta_y = 0, \tag{3.77}$$

$$u\xi_x + v\xi_y + \xi u_x + \eta u_y = \xi_{yy}. \tag{3.78}$$

Sustituyendo las transformaciones extendidas en ambas condiciones de invariancia (3.77)-(3.78) obtenemos

$$\xi_x + \eta_y = 0, \quad \xi_v - X_y = 0, \tag{3.79}$$

$$X_u + Y_v = 0, \quad \eta_u - Y_x = 0, \tag{3.80}$$

$$\xi_u - \eta_v + Y_y - X_x = 0, \tag{3.81}$$

y

$$X_v = 0, \quad Y_v = 0, \quad \xi_v = 0, \quad Y_{uu} = 0, \tag{3.82}$$

$$2X_u - Y_v = 0, \quad \xi_v + 2X_y = 0, \quad X_{uu} - 2Y_{uv} = 0, \tag{3.83}$$

$$u\xi_x + v\xi_y - \xi_{yy} = 0, \quad 2vY_u + 2Y_{yu} - \xi_{uu} = 0, \tag{3.84}$$

$$-2uY_v + vX_v - \xi_{vv} - 2X_{yv} = 0, \tag{3.85}$$

$$Y_{yy} - 2\xi_{yu} - uY_x + vY_y + \eta = 0, \tag{3.86}$$

$$2uY_u + 2X_{yu} + 2\xi_{uv} - 2Y_{yu} - vY_v = 0, \tag{3.87}$$

$$X_{yy} - vX_y - v\xi_v - uX_x + \xi + 2uY_y + 2\xi_{yv} = 0. \tag{3.88}$$

De (3.82), (3.83) y (3.87) tenemos

$$X_u = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_u = 0,$$

que reduce (3.82)-(3.88) a

$$u\xi_x + v\xi_y - \xi_y y = 0, \tag{3.89}$$

$$-uY_x - \xi_y u + Y_{yy} + \eta + vY_y = 0, \tag{3.90}$$

$$\xi + 2uY_y - uX_x = 0. \tag{3.91}$$

De (3.90) y (3.91) obtenemos

$$\xi = (X_x - 2Y_y)u, \qquad \eta = uY_x - vY_y - 5Y_{yy}. \tag{3.92}$$

De (3.79) y (3.89)

$$X_{xx} = 0, \quad Y_{xy} = 0, \quad Y_{yy} = 0,$$

lo que nos lleva a

$$X = c_1 x + c_2, \qquad Y = c_3 y + a(x),$$

en donde, $a(x)$ es una función arbitraria. Esto a su vez da

$$\xi = (c_1 - 2c_3)u, \qquad \eta = a'(x)u - c_3 v.$$

en donde, las c_i son constantes arbitrarias.

Ejemplo 18. *[9]* ***Simetrías para ecuaciones de evolución***

Consideremos ecuaciones diferenciales parciales de evolución de segundo orden con una variable espacial x

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}), \qquad \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \neq 0. \tag{3.93}$$

Definimos el grupo uniparamétrico G de transformaciones en las variables t, x, u

$$\bar{x} = g(x, t, u, a), \quad \bar{t} = f(x, t, u, a), \quad \bar{u} = h(x, t, u, a). \tag{3.94}$$

Como sabemos si (3.93) tiene la misma forma en las nuevas variables $\bar{x}$, $\bar{t}$, $\bar{u}$

$$\bar{u}_{\bar{t}} = F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}). \tag{3.95}$$

entonces G es el grupo admitido por (3.93), o un grupo de simetría de (3.93). La función F tiene la misma forma en (3.93) y (3.95). Esto implica que las transformaciones (3.94) del grupo G transforma cada solución $u = u(x, t)$ de (3.93) en una solución $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, \bar{x})$ de (3.95).

Así las transformaciones infinitesimales del grupo de transformaciones G (3.94) se escriben como

$$\bar{x} \approx x + a\xi(x, t, u), \quad \bar{t} \approx t + a\tau(x, t, u), \quad \bar{u} \approx u + a\eta(x, t, u), \tag{3.96}$$

y proporciona el generador del grupo G

$$X = \xi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.97}$$

El generador (3.97) del grupo G admitido por (3.93) es la simetría infinitesimal de una ecuación de evolución. Las transformaciones (3.95) del grupo con el generador (3.97) se encuentran resolviendo las ecuaciones de Lie, en virtud del Teorema 2

$$\frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), \quad \frac{d\bar{t}}{da} = \tau(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), \quad \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), \tag{3.98}$$

con las condiciones iniciales

$$\bar{x}|_{a=0} = x, \quad \bar{t}|_{a=0} = t, \quad \bar{u}|_{a=0} = u.$$

La forma infinitesimal de estas expresiones $\bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{t}}$ *y* $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ *son*

$$\bar{u}_{\bar{x}} \approx u_t + a\zeta_0(x,t,u,u_x,u_t), \tag{3.99}$$

$$\bar{u}_{\bar{t}} \approx u_t + a\zeta_1(x,t,u,u_x,u_t), \tag{3.100}$$

$$\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} \approx u_{xx} + a\zeta_2(x,t,u,u_x,u_t,u_{tx},u_{xx}), \tag{3.101}$$

en donde, ζ_0, ζ_1 *y* ζ_2 *están dados por las siguientes formulas de extensión (ver Teorema 11)*

$$\zeta_0 = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),$$

$$\zeta_1 = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),$$

$$\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{xt} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi).$$

en donde, D_x *y* D_t *son los operadores de derivación total con respecto a* x *y a* t*, es decir, usando (2.71) para nuestro caso tiene la forma*

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}, \tag{3.102}$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x}. \tag{3.103}$$

$$\tag{3.104}$$

Sustituyendo (3.96) y (3.99)-(3.101) en (3.95) tenemos

$$\bar{u}_{\bar{t}} - F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}})$$
$$\approx u_t - F(x,t,u,u_x,u_{xx}) + a\left(\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau\right).$$

Por lo tanto, la ecuación (3.95) produce

$$\zeta_0 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau = 0, \tag{3.105}$$

en donde, reemplazamos u_t *por* $F(t,x,u,u_x,u_{xx})$ *en* ζ_0, ζ_1, ζ_2*. La ecuación (3.105) determina todas las simetrías infinitesimales de (3.93). En forma compacta se escribe*

$$X\ (u_t - F(x,t,u,u_x,u_{xx}))|_{u_t=F} = 0.$$

en donde, la extensión del operador X *(3.97) al espacio* $(x,t,u,\partial u,\partial^2 u)$ *se entiende como* $X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$.

Capítulo 4

Leyes de Conservación en ecuaciones en derivadas parciales

4.1. Introducción

Las leyes de conservación describen las propiedades físicas de los fenómenos que son modelados por EDPs. Estas leyes son una de las características más importantes de un proceso físico real, el cual se describe por ecuaciones diferenciales o sistemas de estos. Al principio, la prerrogativa del descubrimiento de las leyes de conservación ha estado en las manos de los experimentadores, pero poco a poco la iniciativa ha pasado a los teóricos. El boom de dichas leyes comenzó después de los trabajos fundamentales de Emmy Noether [20], quien estableció la relación entre las leyes de conservación y las simetrías de las ecuaciones diferenciales. La segunda ola, la cual es actual todavía, ha surgido en relación con el estudio de las ecuaciones del tipo Korteweg de Vries. La mayoría de los investigadores han seguido por el camino indicado por E. Noether, tratando de generalizar su teoría a nuevas clases de las simetrías y nuevos tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elípticas, parabólicas, etc.

En este capítulo, la atención principal será concedida a la técnica de construcción de las leyes de conservación para cierta clase de EDP, usando un teorema nuevo descubierto por Ibragimov [5].

Es bien sabido que el teorema de Noether estableció una estrecha conexión entre las simetrías y las leyes de conservación para las EDPs que poseen una estructura variacional. Sin embargo, la aplicación del enfoque de Noether se basa en las siguientes dos condiciones que influyen fuertemente en la construcción de las leyes de conservación de esta manera

1. Las EDPs bajo consideración deben derivarse de un principio variacional, es decir, estas ecuaciones pueden resolverse como ecuaciones de Euler-Lagrange.

2. Las simetrías utilizadas deben dejar el operador de Euler-Lagrange invariante, lo que significa que no cada simetría de las EDPs puede generar una ley de conservación a través del teorema de Noether.

Buscaremos leyes de conservación asociadas a ciertas EDPs no lineales de interés en la física-matemática. Para tal fin requerimos un poco de teoría y maquinaria matemática.

4.2. Preliminares y denotaciones

Nuevamente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son n variables independientes y $u = (u^1, u^2 \ldots, u^m)$ son m variables dependientes. Usaremos la notación, para $\alpha = 1, 2, \ldots, m$

$$u_{(1)} = \{u_1^\alpha\}, \quad u_{(2)} = \{u_{ij}^\alpha\}, \quad u_{(3)} = \{u_{ijk}^\alpha\}, \ \ldots, \ u_{(5)} = \{u_{i_1,\ldots,i_5}^\alpha\}, \tag{4.1}$$

con

$$u_i^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \ u_{i_1,\ldots,i_s}^\alpha = \frac{\partial^{|\boldsymbol{i}|}}{\partial x_{i_1}, \cdots, \partial x_{is}}, \quad \boldsymbol{i} = (i_1, \ldots i_s),$$

$|\boldsymbol{i}| = \sum_{r=1}^{s} i_r$ y $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, en donde

$$\begin{aligned} u_{ij}^\alpha &= D_i(u_j^\alpha) = D_i D_j(u^\alpha), && (4.2)\\ u_{ijk}^\alpha &= D_i(u_{jk}^\alpha) = D_i D_j(u_k^\alpha) = D_i D_j D_k(u^\alpha), &&\\ &\vdots &&\\ u_{i_1\ldots,i_s}^\alpha &= D_{i_1} D_{1_2}, \cdots, D_{i_s}(u^\alpha) \ldots. && (4.3)\end{aligned}$$

D_i denota la diferenciación total con respecto a x_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + u_{ijk}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{jk}^\alpha} + \cdots, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Las variables u^α $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ se conocen como **variables diferenciales**.

Observación 10. 1. *Aclaramos que $u_{(1)}$ denota la colección de todas la derivadas de primer orden, u_1^α (la α-ésima componente de u con respecto a la i-ésima variable de x). De forma análoga, las colecciones de todas las derivadas de orden superior serán denotadas por $u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots$.*

2. *Dado que $u_{ij}^\alpha = u_{ji}^\alpha$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, $u_{(2)}$ contiene solo a u_{ij}^α para $i \leq j$. De la misma manera $u_{(3)}$ contiene solo términos u_{ijk}^α para $i \leq j \leq k$, y así sucesivamente para cada término mayor.*

Definición 23. *Una función $f(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots)$ de un número finito de variables $x, u, u_{(1)}$, $u_{(2)}, \ldots$ se dice que es una **función diferencial** si esta es localmente analítica, i.e. es localmente expandible en una serie de Taylor con respecto a todos sus argumentos. La derivada de orden más alto que aparece en la función diferencial se conoce como el orden de esta función.*

El conjunto de todas las funciones diferenciales de todos los ordenes finitos se denotará por $\mathcal{A}$. Los siguientes resultados son verdaderos, (ver Anexo 2, del Apéndice).

Proposición 1. *El conjunto $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial con respecto a la suma usual de funciones y se convierte en una álgebra asociativa si identificamos la multiplicación como la multiplicación usual de funciones.*

Proposición 2. *El espacio $\mathcal{A}$ es cerrado bajo las diferenciaciones totales, es decir, si $f \in \mathcal{A}$, entonces $D_i(f) \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Definición 24. *Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ al menos de clase C^1. Se define la **divergencia** de $F = (F_1, F_2, F_3 \ldots F_n)$ como el campo escalar*

$$Div(F) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dado por

$$div(F(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x^i}.$$

4.3. Operadores diferenciales lineales adjuntos

Para dar una idea clara y sencilla del concepto de ecuaciones adjuntas empezaremos considerando ecuaciones adjuntas lineales. Consideremos el caso escalar ($m = 1$) de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

$$L[u] \equiv a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u = f(x), \tag{4.5}$$

en donde, L es el siguiente operador diferencial lineal

$$L = a^{ij}(x)D_iD_j + b^i(x)D_i + c(x), \tag{4.6}$$

Aquí la suma es sobre $i, j = 1, 2, \ldots, n$ y los coeficientes $a^{ij}(x)$ son simétricos, es decir, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ y $b^i(x)$ y $c(x)$ son funciones. El **operador adjunto** a L es un operador diferencial lineal de segundo orden L^* que cumple

$$vL^*[u] - uL^*[v] = D_i(p^i) \equiv divP(x), \tag{4.7}$$

para todas las funciones u y v, donde $P(x) = (p^1(x), \ldots, p^n(x))$ es cualquier vector. El operador adjunto L^* es determinado de forma única y tiene la forma

$$L^*[v] = D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^iv) + cv, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

El operador L es llamado **auto adjunto** si $L[u] = L^*[u]$ para cualquier función $u(x)$. Recordemos que el operador (4.6) es autoadjunto si y sólo si

$$b^i(x) = D_j(a^{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.9}$$

La ecuación lineal homogénea

$$L^*[v] \equiv D_iD_j(a^{ij}v) - D_i(b^iv) + cv = 0, \tag{4.10}$$

es llamada la **ecuación adjunta** para la ecuación diferencial (4.5), $L[u] = f(x)$.

Observación 11. *La definición del operador adjunto y la ecuación adjunta son las mismas para sistemas de ecuaciones de segundo orden. Se obtienen asumiendo en (4.5) que u es un vector funcional m-dimensional y que los coeficientes $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ y $c(x)$ del operador (4.6) son matrices del tamaño $m \times m$.*

Si $n = m = 1$ tenemos la definición del operador adjunto para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Sea $u = y$ y consideremos las ecuación diferencial de primer orden

$$L[y] \equiv a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x).$$

El operador adjunto $L^*[z]$ a $L[y]$ tiene la forma

$$L^*[z] = -(a_0 z)' + a_1 z.$$

La definición del operador adjunto para las ecuaciones de orden superior es similar. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones de segundo orden tenemos

$$L^*[y] = a_0 y'' + a_1 y + a_2 y = f(x),$$

con coeficientes variables $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$, el operador adjunto $L^*[z]$ a $L[y]$ es

$$L^*[z] = (a_0 z)'' - (a_1 z)' + a_2 z.$$

Igualmente en el caso de la ecuación de tercer orden

$$L^*[y] = a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x),$$

el operador adjunto $L^*[z]$ a $L[y]$ está dado por

$$L^*[z] = (a_0 z)''' - (a_1 z)'' - (a_2 z)' + a_3 z.$$

La ecuación homogénea $L^*[z] = 0$ es llamada la ecuación adjunta a $L[y] = f(x)$.

De manera mas general, el **operador adjunto** F^* para un operador lineal F en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ donotado con un producto escalar (u, v) se define por

$$(Fu, v) = (u, F^* v), \quad u, v \in \mathcal{H}. \tag{4.11}$$

Consideremos, el caso de una variable dependiente u y denotamos por $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert de las funciones de valor real $u(x)$, de modo que $u^2(x)$ es integrable. El producto escalar está dado por $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$. Sea F un operador diferencial lineal en $\mathcal{H}$. Su acción sobre la variable dependiente u se denota por $F[u]$. La definición (4.11) del operador adjunto F^* a F,

$$(F[u], v) = (u, F^*[v]),$$

se puede escribir, usando el teorema de la divergencia, en la forma simple

$$vF[u] - uF^*[v] = D_i(p_i), \tag{4.12}$$

en donde, v es una nueva variable dependiente, y p^i son algunas funciones de $x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)} \ldots$. Aquí $v_{(i)}$, son funciones diferenciales [ver Definición 23]. Se puede ver a partir de (4.12) que los operadores F y F^* son mutuamente adjuntos,

$$(F^*)^* = F. \tag{4.13}$$

En otras palabras, el que se aproximen los operadores lineales F^* y F se convierte en una relación simétrica. Se dice que el operador lineal F es **autoadjunto** si $F^* = F$. En este caso, decimos que la ecuación $F[u] = 0$ es autoadjunta. Por lo tanto, la auto-adjunta de una ecuación lineal $F[u] = 0$ se puede expresar mediante la ecuación

$$F^*[v]|_{v=u} = F[u]. \tag{4.14}$$

Teorema 21. *El operador adjunto L^* a L dado por (4.6) está determinado de forma única y tiene la forma*

$$L^*[v] = D_i D_j (a^{ij} v) - D_i(b^i v) + cv. \tag{4.15}$$

Demostración. *Sean u, v dos funciones diferenciales. Entonces*

$$\begin{aligned} vL[u] &= \underbrace{va^{ij}(x)D_iD_ju}_{1} + \underbrace{vb^i(x)D_iu}_{2} + \underbrace{vc(x)u}_{3} \\ &= \underbrace{D_i(va^{ij}(x)D_ju) - D_i(va^{ij}(x))D_ju}_{1} \\ &+ \underbrace{D_i(vb^i(x)u) - uD_i(vb^i(x))}_{2} + \underbrace{vc(x)u}_{3}. \end{aligned}$$

El segundo término en 1 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} D_i(va^{ij}(x))D_ju &= -D_j\left(uD_i(va^{ij}(x))\right) + uD_iD_j(a^{ij}(x)v) \\ &= -D_i(uD_j(va^{ij}(x))) + uD_iD_j(a^{ij}(x)v). \end{aligned}$$

En el último paso cambiamos el índice i, j y utilizamos el hecho de que los coeficientes son simétricos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} vL[u] &= D_i\left(va^{ij}(x)D_ju) - D_i(uD_j(va^{ij}(x))\right) + uD_iD_j(a^{ij}(x)v) \\ &+ D_i(vb^i(x)u) - uD_i(vb^i(x)) + vc(x)u \\ &= u\left[D_iD_j(a^{ij}(x)v) - D_i(vb^i(x)) + c(x)v\right] \\ &+ D_i\left[va^{ij}(x)u_j - uD_j(va^{ij}(x)) + vb^i(x)u\right] \end{aligned}$$

es decir,

$$vL[u] - u\left[D_iD_j(a^{ij}(x)v) - D_i(vb^i(x) + c(x)v)\right] \tag{4.16}$$

$$= D_i\left[va^{ij}(x)u_j - uD_j(va^{ij}(x)) + vb^i(x)u\right]. \tag{4.17}$$

Comparando lo anterior con (4.8) vemos que el operador adjunto L^* tiene la forma (4.15) y se sigue que $p^i(x) = va^{ij}(x)u - uD_j(va^{ij}(x)) + vb^i(xu)$.

□

Teorema 22. *El operador $L = a^{ij}(x)D_jD_j + b^i(x)D_i + c(x)$ es autoadjunto si y sólo si*

$$b^i(x) = D_j(a^{ij}). \tag{4.18}$$

Demostración. *Primero sabemos que si L^* es autoadjunta, es decir, de acuerdo con la definición $L[u] = L^*[v]$ cuando tomamos $v = u$, debemos hacer que $D_i(P^i)$ desaparezca. Por lo tanto, para $v = u$ tenemos*

$$\begin{aligned} D_i(P^i) &\equiv D_i(ua^{ij}(x)u_j - uD_j(ua^{ij}(x) + ub^i(x)u) && (4.19)\\ &= D_iu[a^{ij}D_ju - D_j(ua^{ij}) + b^iu] && (4.20)\\ &= D_iu[a^{ij}D_ju - a^{ij}D_ju - uD_ja^{ij} + b^iu] && (4.21)\\ &= D_iu[u(b^i - D_ja^{ij})] = 0, && (4.22)\end{aligned}$$

tiene que ser cierto para cualquier u, y la ecuación (4.18) sigue.

□

4.4. Ecuaciones adjuntas a ecuaciones diferenciales no lineales.

Ahora consideremos ecuaciones adjuntas para ecuaciones diferenciales arbitrarias, las cuales serán usadas en la construcción de lagrangianos clásicos, seguimos las ideas de [5] y [6]. Empezamos definiendo el operador de Euler-Lagrange en el espacio $\mathcal{A}$.

Definición 25. *El operador de **Euler-Lagrange** se define por la suma formal*

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1,\ldots i_s}}, \quad \alpha = 1,\ldots,m, \tag{4.23}$$

en donde, la suma es sobre todos los términos con indices repetidos $i_1,\ldots,i_s$ para cada s.

Ejemplo 19. *En el caso de una variable independiente x y una variable dependiente y, el operador de Euler-Lagrange es*

$$\frac{\delta}{\delta y} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s D_x^s \frac{\partial}{\delta y} = -\frac{\partial}{\partial y} D_x \frac{\partial}{\partial y_{(s)}} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial y''} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial y'''} + \cdots , \tag{4.24}$$

en donde D_x es la diferenciación total con respecto a x, que para este caso es

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots .$$

Ejemplo 20. *Consideremos el operador de Euler-Lagrange que actúa sobre una función $f = f(x, u, u_{(1)}, u_{(2)})$ donde $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ son las variables independientes y u es la única variable diferencial.*

Es decir, en esta situación tenemos

$$\alpha = 1, \qquad n = 3, \qquad y \qquad s = 2,$$

entonces, el operador Euler-Lagrange toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} + (-1)\left[D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_z \frac{\partial}{\partial u_z}\right] \\ &+ (-1)^2 \left[D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_z^2 \frac{\partial}{\partial u_{zz}}\right. \\ &+ \left. D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + D_y D_z \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + D_y D_z \frac{\partial}{\partial u_{yz}}\right]. \end{aligned}$$

Lema 2. *El operador de derivada total D_i y $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ conmuta, es decir,*

$$\left[D_i, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right] \equiv D_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} D_i = 0. \tag{4.25}$$

Demostración. *Esto se verifica por cálculo directo*

$$\begin{aligned} D_i \frac{\partial}{\partial^\alpha} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \cdots\right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial^2 u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u_j^\alpha \partial u^\alpha} + \cdots \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} D_i &\equiv \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \cdots\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u^\alpha}}_{0} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial^2 u^\alpha} + \underbrace{\frac{\partial u_{ij}^\alpha}{\partial u^\alpha}}_{0} \frac{\partial}{\partial^2 u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u_j^\alpha} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial^2 u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u_j^\alpha \partial u^\alpha} + \cdots \tag{4.27}$$

y se sigue de (4.26)-(4.27) la ecuación (4.25) es verdadera.

□

Lema 3. $\frac{\delta}{\delta u^\alpha} D_i = 0, \quad \forall \alpha = 1, \ldots, m.$

Demostración. *Se verifica por cálculo directo.*

□

El siguiente teorema es una consecuencia directa de Lema 3.

Teorema 23. *Una función $f(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}) \in \mathcal{A}$ con variables independientes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y las variables diferenciales $u = (u^1, \ldots, u^m)$ es la divergencia de un campo vectorial $H = (h^1, \ldots, h^n)$, donde $h_i = h_i(x, u, u_{(1)} \ldots, u_{(s-1)}) \in \mathcal{A}$, es decir,*

$$f = div(H) \equiv D_i(h^i), \tag{4.28}$$

si y sólo si

$$\frac{\delta f}{\delta u^\alpha} = 0. \tag{4.29}$$

□

Ahora, consideremos un sistema de m ecuaciones diferenciales (lineales o no lineales)

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.30}$$

con m variables dependientes $u = (u^1, \ldots, u^m)$. El sistema (4.30) involucra las derivadas parciales $u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}$ el orden s.

Definición 26. *Las ecuaciones adjuntas a las ecuaciones (4.30) están dadas por*

$$F_\alpha^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)} v_{(s)}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.31}$$

con

$$F_\alpha^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)}, v_{(s)}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\alpha}, \tag{4.32}$$

*en donde, $\mathcal{L}$ es el **lagrangiano formal** para las ecuaciones (4.30) definido por*

$$\mathcal{L} = v^\beta F_\beta \equiv \sum_{\beta=1}^{m} v^\beta F_\beta(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}), \tag{4.33}$$

y $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ es la derivada variacional u operador de Euler-Lagrange dado por (4.23).

Aquí $v = (v^1, \ldots, v^m)$ son las nuevas variables dependientes y $v_{(1)}, \ldots v_{(s)}$ son sus derivadas es decir, pertenecen a $\mathcal{A}$.

Usando la definición de operador Euler -Lagrange (4.23), aplicado a (4.33) se tiene

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial(v^\beta F_\beta)}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial(v^\beta F_\beta)}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k\left(\frac{\partial(v^\beta F_\beta)}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) - \cdots .$$

El operador de diferenciación total (4.4) se puede extender a nuevas variables dependientes

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + v_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial v_j^\alpha} + \cdots . \tag{4.34}$$

En el caso de una sóla variable dependiente, se tiene la ecuación diferencial

$$F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}) = 0, \tag{4.35}$$

con cualquier número de variables independientes. En este caso la Definición 26 de ecuación adjunta se escribe como

$$F^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)}, v_{(s)}) = 0, \tag{4.36}$$

en donde,

$$F^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)}, v_{(s)}) = \frac{\delta(vF)}{\delta u}, \tag{4.37}$$

La adjunta de las ecuaciones no lineales no es una relación simétrica. En otras palabras, las ecuaciones no lineales, a diferencia de las lineales, no obedecen la condición (4.13). En efecto la siguiente igualdad se cumple

$$(F^*)^* = \hat{F}, \tag{4.38}$$

en donde, $\hat{F}$ es la aproximación lineal a F como sigue. Consideremos el caso de una sola ecuación diferencial de la forma (4.35) tomamos a $F[u+w]$ considerando que $w \ll 1$. Luego, ignorando los términos no lineales en w definimos $\hat{F}$ a través de la ecuación

$$F[u+w] \approx F[u] + \hat{F}[w]. \tag{4.39}$$

Notemos que para las ecuaciones lineales $\hat{F} = F$, y por consiguiente la ecuación (4.38) es idéntica a (4.13).

Ilustremos esta situación en el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación

$$F \equiv u_{xy} - senu = 0. \tag{4.40}$$

Usando (4.37) obtenemos

$$F^* \equiv \frac{\delta}{\delta u}(v(u_{xy} - senu)) = v_{xy} - vcosu,$$

y

$$(F^*)^* \equiv \frac{\delta}{\delta u}(w(v_{xy} - vcosu)) = w_{xy} - wcosu. \tag{4.41}$$

Ahora encontremos a $\hat{F}$ usando la ecuación (4.39). Dado que $senw \approx w$ y $cosw \approx 1$, cuando $w \ll 1$, tenemos

$$\begin{aligned} F[u+w] &\equiv (u+w)_{xy} - sen(u+w) \\ &= u_{xy} + w_{xy} - senucosw - senwcosu \\ &\approx u_{xy} - senu + w_{xy} - wcosu \\ &= F[u] + w_{xy} - wcosu. \end{aligned}$$

Luego por (4.39) y (4.41) se tiene

$$\hat{F}[w] = w_{xy} - wcosu = (F^*)^*,$$

la cual coincide con (4.38).

4.5. Construcción de ecuaciones adjuntas a ecuaciones lineales.

Proposición 3. *[7] En el caso de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, las ecuaciones adjuntas (4.32) y (4.12) coinciden.*

Demostración. *La prueba se basa en que una función $Q(u, v)$ es una divergencia, es decir, $Q = D_i(h^i)$, si y sólo si*

$$\frac{\delta Q}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \frac{\delta Q}{\delta v^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{4.42}$$

Sea F^* el operador adjunto construido de acuerdo con (4.12). Consideremos el caso de muchas variables dependientes y escribamos la ecuación (4.12) como

$$v^\beta F_\beta[u] = u^\beta F^*_\beta[v] + D_i(p^i). \tag{4.43}$$

Aplicando a (4.43) las diferenciaciones variacionales y utilizando las ecuaciones (4.42) obtenemos

$$\frac{\delta(v^\beta F_\beta[u])}{\delta u^\alpha} = \delta_\alpha^\beta F_\beta^*[v] \equiv F_\alpha^*[v].$$

Por lo tanto, (4.32) coincide con $F_\alpha^*[v]$ dado por (4.12).

Ahora supongamos que $F^*[v]$ está dado por (4.32)

$$F_\beta^*[v] = \frac{\delta(v^\gamma F_\gamma[u])}{\delta u^\beta}.$$

Consideremos la expresión Q definida por

$$Q = v^\beta F_\beta[v] - u^\beta F_\beta^*[v] \equiv v^\beta F_\beta[v] - u^\beta \frac{\delta(v^\gamma F_\gamma[u])}{\delta u^\alpha}.$$

Aplicando a la primera expresión de Q las diferenciaciones variacionales (4.42) obtenemos

$$\frac{\delta Q}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta(v^\beta F_\beta[u])}{\delta u^\alpha} - \delta_\alpha^\beta F^*[v] \equiv F_\alpha^*[v] - \delta_\alpha^\beta F_\alpha^*[v] = 0.$$

Y al aplicar $\delta/\delta v^\alpha$ a la segunda expresión para Q se tiene

$$\frac{\delta Q}{\delta v^\alpha} = \delta_\alpha^\beta F_\beta[u] - \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left[u^\beta \frac{\delta(v^\gamma F_\gamma[u])}{\delta u^\beta}\right] \equiv F_\alpha[u] - \frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left[u^\beta \frac{\delta(v^\gamma F_\gamma[u])}{\delta u^\beta}\right].$$

El cálculo muestra que

$$\frac{\delta}{\delta v^\alpha}\left[u^\beta \frac{\delta(v^\gamma F_\gamma[u])}{\delta u^\alpha}\right] = F_\alpha[u]. \tag{4.44}$$

Por lo tanto Q, resuelve la ecuación (4.42) y, así, la ecuación (4.43) se cumple.

□

Observación 12. *Consideremos el caso del operador lineal de segundo orden para una variable dependiente.*

$$F[u] = a^{ij}(x)u_{ij} + b^i(x)u_i + c(x)u.$$

Entonces (4.44) implica

$$u\frac{\delta(vF[u])}{\delta u} = u\left[cv - vD_i(b^i) + vD_iD_j(a^{ij}) - b^iv_i + 2v_iD_j(a^{ij}) + a^{ij}\right].$$

De donde, después de algunos cálculos obtenemos

$$\frac{\delta}{\delta v}\left[u\frac{\delta(vF[u])}{\delta y}\right] = \left[cu + b^iu_i + a^{ij}u_{ij}\right] + \{D_iD_j(a^{ij}u) - D_i(a^{ij}u_j) - D_i\left[uD_j(a^{ij})\right]\},$$

y, notando que la expresión entre llaves desaparece, se obtiene a la ecuación (4.44).

Ejemplo 21. *Consideremos la ecuación de calor*

$$F[v] \equiv u_t - u_{xx} = 0, \tag{4.45}$$

y construyamos el operador adjunto para el operador lineal

$$F = D_t - D_x^2, \tag{4.46}$$

usando (4.12). Observamos que

$$\begin{aligned} vu_t &= D_t(uv) - uv_t, \\ vu_{xx} &= D_x(vu_x) - v_x u_x = D_x(vu_x - uv_x) + uv_{xx}, \end{aligned}$$

luego, usando lo anterior

$$vF[u] \equiv v(u_t - u_{xx}) = u(-v_t - v_{xx}) + D_t(uv) + D_x(uv_x - vu_x),$$

es decir,

$$vF[u] - u(-v_t - v_{xx}) = D_t(uv) + D_x(uv_x - vu_x).$$

Por lo tanto, denotando por $t = x_1$ y $x = x_2$, obtenemos la ecuación (4.12) con $F^*[v] = -v_t - v_{xx}$ y $p^1 = uv$, $p^2 = uv_x - vu_x$. Así el operador lineal adjunto asociado (4.46) es

$$F^* = -D_t - D_x^2, \tag{4.47}$$

y la ecuación adjunta para la ecuación de calor (4.45) se escribe $-v_t - v_{xx} = 0$ o

$$v_t + v_{xx} = 0. \tag{4.48}$$

Otra forma de obtener la ecuación adjunta (4.48) y el operador adjunto (4.47) es usar (4.37), lo cual es mucho más simple. En efecto

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}(vu_t - vu_{xx}) = -D_t(v) - D_x^2 = -(v_t + v_{xx}).$$

4.6. Autoadjuntas y cuasi autoadjuntas

Recordemos que un operador diferencial lineal F se llama operador autoadjunto si es idéntico a su operador adjunto $F = F^*$. Entonces, la ecuación $F[u] = 0$ también se dice que es autoadjunta. Por lo tanto, la autoadjuntes de una ecuación diferencial lineal $F[u] = 0$

significa que la ecuación adjunta $F^*[u] = 0$ coincide con $F[u] = 0$ cuando llevamos a cabo la sustitución $v = u$. Esta propiedad se ha extendido a ecuaciones no lineales en [5]. Se llamará aquí la **autoadjuntes estricta** y se define de la siguiente manera.

Definición 27. *Decimos que la ecuación diferencial (4.35) es* ***estrictamente autoadjunta*** *si la ecuación adjunta (4.36) se vuelve equivalente a la ecuación original (4.35) tras la sustitución*

$$v = u. \tag{4.49}$$

La definición significa que la ecuación

$$F^*(x, u, u, \dots, u_{(s)}, u_{(s)}) = \lambda F(x, u, \dots, u_{(s)}), \tag{4.50}$$

se mantiene salvo cierto coeficiente λ (que en general, es variable).

Ejemplo 22. *La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) dada por*

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \tag{4.51}$$

es estrictamente autoadjunta. En este caso $F[u] = u_t - u_{xxx} - uu_x$ y por (4.37)

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}\left(v[u_t - u_{xxx} - uu_x]\right) = -v_t + v_{xxx} - vu_x + D_x(uv) = -v_t + v_{xxx} + uv_x.$$

Es decir, la ecuación adjunta asociada la ecuación KdV tiene la forma

$$v_t = v_{xxx} + uv_x,$$

que coincide con la ecuación de KdV al cambiar $v = u$, es decir, por la Definición 27 la ecuación KdV es estrictamente auto-adjunta.

En el caso de sistemas de ecuaciones con varias variables dependientes $u = (u_1, \dots, u_m)$ no es tan directo porque la ecuación (4.49) no se determina de forma exclusiva, como queda claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 23. *Consideremos el sistema de dos ecuaciones*

$$u^1_y + u^2 u^2_x - u^2_t = 0, \tag{4.52}$$

$$u^2_y - u^1_x = 0, \tag{4.53}$$

con dos variables dependientes, $u = (u^1, u^2)$*, y tres variables independientes* (t, x, y)*. Usando el lagrangiano formal (4.33) obtenemos*

$$\mathcal{L} = v^1(u^1_y + u^2 u_x - u^2_t -) + v^2(u - y^2 - u^1_x),$$

luego, usando (4.32) escribimos las ecuaciones adjuntas (4.31), con $\alpha = 2$ *cambiando su signo, en la forma*

$$\begin{aligned} v^2_y + u^2 v^1_x - v^1_t &= 0, \\ v^1_y - v^2_x &= 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Si aquí usamos la sustitución (4.49), $v = u$ *con* $v = (v^1, v^2)$ *es decir,*

$$v^1 = u^1, \quad v^2 = u^2,$$

entonces el sistema adjunto (4.54) se convierte

$$\begin{aligned} u^2_y + u^2 u^1_x - u^1_t &= 0, \\ u^1_y - u^2_x &= 0, \end{aligned} \tag{4.55}$$

que no está relacionado con el sistema (4.52)-(4.53) por la relación de equivalencia (4.50). Pero si establecemos

$$v^1 = u^2, \quad v^2 = u^1,$$

el sistema adjunto (4.54) coincide con el sistema original (4.52).

4.6.1. Cuasi-autoadjuntes

El concepto de cuasi-autoadjuntes generaliza la Definición 27 y es más conveniente para tratar con sistemas de la forma (4.30). Este concepto fue formulado en [6] de la siguiente manera. El sistema (4.30) es cuasi-autoadjunto si el sistema adjunto (4.30) se vuelve equivalente al sistema original (4.30) después de la sustitución

$$v = \varphi(u), \tag{4.56}$$

con φ tal que su derivada no desaparezca en un cierto dominio de u, es decir

$$\varphi'(u) \neq 0, \quad \text{en donde} \quad \varphi'(u) = \left(\frac{\partial \varphi^\alpha(u)}{\partial u^\beta}\right). \tag{4.57}$$

Observación 13. *La sustitución (4.56) define una transformación*

$$v^\alpha = \varphi^\alpha = \varphi^\alpha(u), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

desde el espacio m*-dimensional de las variables* $u = (u^1, ..., u^m)$ *al espacio* m*-dimensional de las variables* $v = (v^1, \ldots, v^m)$*. Se supone que esta transformación es continuamente diferenciable. La condición (4.57) garantiza que es invertible y, por lo tanto, las ecuaciones (4.31) y (4.30) son equivalentes. La equivalencia significa que las siguientes ecuaciones se mantienen salvo ciertos coeficientes* λ_α^β

$$F_\alpha^*(x, u, \varphi, \ldots, u_{(s)}, \varphi_{(s)}) = \lambda_\alpha^\beta F_\beta(x, u, \ldots, u_{(s)}), \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.58}$$

en donde,

$$\varphi = \{\varphi^\alpha(u)\}, \quad \varphi_{(\sigma)} = \{D_{i_1} \cdots D_{i_\sigma}(\varphi^\sigma(u))\}, \quad \sigma = 1, \ldots, s \tag{4.59}$$

Se puede demostrar que la matriz $\left(\lambda_\alpha^\beta\right)$ *es invertible debido a la condición (4.57).*

Ejemplo 24. *La cuasi auto-adjunta de las ecuaciones de onda no lineales de la forma*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \tag{4.60}$$

fue investigada en [8]. Los resultados de este artículo muestran que, por ejemplo la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t^2 - u_x^2 = 0, \tag{4.61}$$

es cuasi-autoadjunta y en este caso la sustitución (4.56) tiene la forma

$$v = e^u. \tag{4.62}$$

De hecho, la ecuación adjunta a la ecuación (4.61) está escrita como

$$v_{tt} - v_{xx} - 2vu_{tt} - 2u_t v_t + 2vu_{xx} + 2u_x v_x = 0. \tag{4.63}$$

Después de la sustitución (4.62), el lado izquierdo de la ecuación (4.63) toma la forma (4.58)

$$v_{tt} - v_{xx} - 2vu_{tt} - 2u_t v_t + 2vu_{xx} + 2u_x v_x = -e^u\left[u_{tt} - u_{xx} + u_t^2 - u_x^2\right]. \tag{4.64}$$

Se manifiesta a partir de la ecuación. (4.64) que v *dada por (4.62) resuelve la ecuación adjunta (4.63) si se reemplaza* u *por cualquier solución de la ecuación. (4.61).*

Al construir leyes de conservación, uno puede relajar la condición (4.57). Por lo tanto, una generalización de la definición previa de cuasi auto-adjuntes es como se sigue

Definición 28. *Se dice que el sistema (4.30) es* ***cuasi-autoadjunto*** *si las ecuaciones adjuntas (4.31) se satisfacen para todas las soluciones u del sistema original (4.30) después de sustituir*

$$v^\alpha = \varphi^\alpha(u), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.65}$$

en donde, φ es tal que

$$\varphi(u) \neq 0. \tag{4.66}$$

En el ejemplo 23, las ecuaciones (4.55) se mantienen después de la sustitución (4.65), en donde no todas las $\varphi^\alpha(u)$ desaparecen simultáneamente.

Observación 14. *La condición (4.66), a diferencia de (4.57), no garantiza la equivalencia de las ecuaciones (4.31) y (4.30) ya que la matriz $\left(\lambda_\alpha^\beta\right)$ puede ser singular.*

Ejemplo 25. *Es bien sabido que la ecuación de calor (4.45) lineal no es autoadjunta (no es estrictamente autoadjunta en el sentido de la Definición 27). Esto es claro a partir de las las ecuaciones (4.45) y (4.48). Veamos si la ecuación (4.45) es cuasi auto-adjunta. Sea $v = \varphi(u)$, obtenemos*

$$v_t = \varphi' u_t,\ v_x = \varphi' u_x,\ v_{xx} = \varphi' u_{xx} + \varphi'' u_x^2, \tag{4.67}$$

y la condición (4.50) toma la forma

$$\varphi'(u)[u_t + u_{xx}] + \varphi''(u)u_x^2 = \varphi'(u)[u_t - u_{xx}]. \tag{4.68}$$

De donde, comparando los coeficientes de u_t en ambos lados de (4.68) obtenemos que $\lambda = \varphi'(u)$. Entonces las ecuaciones anteriores toma la forma

$$\varphi'(u)[u_t + u_{xx}] + \varphi''(u)u_x^2 = \varphi'(u)[u_t - u_{xx}]. \tag{4.69}$$

Estas ecuaciones dan que $\varphi'(u) = 0$. Por lo tanto, la ecuación (4.45) es cuasi-autoadjunta con la sustitución $v = C$, en donde C es cualquier constante no nula. Notemos que la sustitución no satisface la condición (4.57).

4.7. Autoadjuntes estricta a través de multiplicadores

Se sabe comúnmente que numerosas EDP lineales que se usan en la práctica, por ejemplo, las ecuaciones de evolución lineal no son autoadjuntas en el sentido clásico de la autoadjuntes. Del mismo modo, las ecuaciones no lineales útiles como la ecuación de calor no lineal, la ecuación de Burgers, etc., no son estrictamente autoadjuntas. Veremos aquí a través de algunos ejemplos que estas y muchas otras ecuaciones pueden reescribirse en una forma equivalente que las hace estrictamente autoadjunta mediante el uso de multiplicadores.

Ejemplo 26. *La ecuación de Kompaneets*

$$u_t = \frac{1}{2}D_x[x^4(u_x + u + u^2)], \tag{4.70}$$

proporciona un ejemplo de una ecuación que no es cuasi autoadjunta. En efecto, la ecuación (4.70) tiene el lagrangiano formal

$$\mathcal{L} = v[-u_t + x^2u_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x + 4x(u + u^2)].$$

El cálculo arroja la siguiente ecuación adjunta a (4.70)

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} \equiv v_t + x^2v_{xx} - x^2(1 + 2u)v_x + 2(x + 2xu - 1)v = 0. \tag{4.71}$$

Definiendo $v = \varphi(u)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right|_{v=\varphi(u)} &= \varphi'(u)[u_t + x^2u_{xx} - x^2(1 + 2u)u_x] \\ &+ \varphi''(u)x^2u_x^2 + 2(x + 2xu - 1)\varphi(u). \end{aligned} \tag{4.72}$$

Escribiendo la condición de cuasi autoadjuntes (4.58) en la forma

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right|_{v=\varphi(u)} = \lambda[-u_t + x^2u_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x + 4x(u + u^2)], \tag{4.73}$$

y comparando los coeficientes para u_t en ambos lados obtenemos que $\lambda = -\varphi'(u)$, así la condición de cuasi adjuntes, en este caso, toma la forma

$$\begin{aligned} &\varphi'(u)[u_t + x^2u_{xx} - x^2(1 + 2u)u_x] + \varphi''(u)x^2u_x^2 + 2(x + 2xu - 1)\varphi(u) \\ &= \varphi'(u)[u_t - x^2u_{xx} - (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x - 4x(u + u^2)]. \end{aligned} \tag{4.74}$$

La comparación de los coeficientes para u_{xx} en ambos lados de la ecuación anterior implica que $\varphi'(u) = 0$. Entonces se obtiene que (4.74) se convierte en $(x + 2xu - 1)\varphi(u) = 0$, lo cual implica que $\varphi(u) = 0$. Por lo tanto, la ecuación de Kompaneets no es casi auto-adjunta porque la condición (4.66) no se cumple.

Sin embargo, podemos reescribir la ecuación (4.70) en la forma estrictamente autoadjunta mediante el uso de un multiplicador más general que el anterior, a saber, el multiplicador

$$\mu = \frac{x^2}{u}. \tag{4.75}$$

En efecto, al multiplicar por este μ a (4.70) se obtiene

$$\frac{x^2}{u}u_t = \frac{1}{u}D_x[x^4(u_x + u + u^2)]. \tag{4.76}$$

Su lagrangino formal

$$\mathcal{L} = \frac{v}{u}\{-x^2u_t + D_x[x^4(u_x + u + u^2)]\}, \tag{4.77}$$

satisface la condición de auto-adjuntes estricta (4.50) con $\lambda = -1$

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right|_{v=u} = -\frac{1}{u}\{-x^2u_t + D_x[x^4(u_x + u + u^2)]\}. \tag{4.78}$$

Observación 15. *Notemos que $v = x^2$ resuelve la ecuación (4.71) para cualquier u.*

4.7.1. Concepto general de auto-adjuntes no lineal

El concepto general de auto-adjuntes no lineal para sistemas de EDP's que consisten de cualquier número de ecuaciones con m variables dependientes abarca la Definición 27 de auto-adjuntes estricta y la Definición 28 de cuasi auto-adjuntes.

Definición 29. *El sistema de $\overline{m}$ ecuaciones diferenciales (compárese con las ecuaciones (4.30)*

$$F_{\bar{\alpha}}(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}) = 0, \quad \bar{\alpha} = 1, \ldots, \overline{m}, \tag{4.79}$$

*con m variables dependientes $u = (u^1, \ldots, u^m)$ se dice que es **no lineal auto-adjunto** si la ecuaciones adjuntas*

$$F^*_\alpha(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)}, v_{(s)}) \equiv \frac{\delta(v^{\bar{\beta}}F_{\bar{\beta}})}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.80}$$

se satisfacen para todas las soluciones u del sistema original (4.79) tras una sustitución

$$v^{\bar{\alpha}} = \varphi^{\bar{\alpha}}(x, u), \quad \bar{\alpha} = 1, \ldots, \overline{m}, \tag{4.81}$$

tal que

$$\varphi(x,u) \neq 0. \tag{4.82}$$

En otras palabras, que se cumpla la siguiente ecuación

$$F^*_\alpha(x,u,\varphi(x,u),\ldots,u_{(s)},\varphi_{(s)}(x,u)) = \lambda^{\bar\beta}_\alpha F_{\bar\beta}(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(s)}), \quad \alpha = 1,2,\ldots,m, \tag{4.83}$$

en donde, $\lambda^{\bar\beta}_\alpha$ *son coeficientes indeterminados y* $\varphi_{(\sigma)}(x,u)$ *son las derivadas de (4.81)*

$$\varphi_{(\sigma)}(x,u) = \{D_{i_1}\cdots D_{i_\sigma}(\varphi^{\bar\alpha}(x,u))\}, \quad \sigma = 1,2,\ldots,s. \tag{4.84}$$

Aquí v *y* φ *son los vectores* $\overline{m}$*-dimensionales*

$$v = (v^1,\ldots,v^{\overline{m}}), \quad \varphi = (\varphi^1,\ldots,\varphi^{\overline{m}}),$$

y la ecuación (4.82) significa que no todos los componentes $\varphi^{\bar\alpha}(x,u)$ *de* φ *desaparecen simultáneamente.*

Observación 16.

1. *Si el sistema (4.79) es sobredeterminado, es decir,* $\overline{m} > m$*, entonces el sistema adjunto (4.80) es subdefinido ya que contiene* $m < \overline{m}$ *ecuaciones para* $\overline{m}$ *nuevas variables dependientes* v*. Y viceversa, si* $\overline{m} < m$*, entonces el sistema (4.79) es subdefinido y el sistema adjunto (4.80) es sobredeterminado.*

2. *El sistema adjunto (4.80), al sustituir cualquier solución* $u(x)$ *de las ecuaciones (4.79), se convierte en un sistema lineal homogéneo para las nuevas variables dependientes* $v^{\bar\alpha}$*. La esencia de las ecuaciones (4.83) es que para el sistema autoadjunto (4.79) existen funciones que proporcionan una solución no trivial (no idénticamente cero) al sistema adjunto (4.80) para todas las soluciones del sistema original (4.79). Esta propiedad se puede tomar como una definición alternativa de la auto-adjuntes no lineal.*

Definición 30. *El sistema (4.79) es autoadjunto no lineal si existen funciones* $v^{\bar\alpha}$ *dadas por (4.81) que resuelven el sistema adjunto (4.80) para todas las soluciones* $u(x)$ *de las ecuaciones (4.79) y satisfacen la condición (4.82) .*

Proposición 4. *Las definiciones 29 y 30 anteriores son equivalentes.*

Demostración. *Sea el sistema (4.79) autoadjunto no lineal según la Definición 29. Luego, de acuerdo al punto 2. de la Observación 16, el sistema (4.79) cumple la condición de la*

Definición 30.

Inversamente, sea el sistema (4.79) autoadjunto no lineal según la Definición 30. Es decir, las funciones $v^{\bar{\alpha}}$ dadas por (4.81) que satisfacen la condición (4.82) resuelven el sistema adjunto (4.80) para todas las soluciones $u(x)$ de las ecuaciones (4.79). Esto es posible si y sólo si las ecuaciones (4.83) se cumplen. Entonces, el sistema (4.79) es autoadjunto no lineal por la Definición 29.

□

Ejemplo 27. *Sea*

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \tag{4.85}$$

la ecuación KdV, esta es estrictamente autoadjunta (Ver Ejemplo 22). En términos de la Definición 30, esto significa que $v = u$ resuelve la ecuación adjunta

$$v_t = v_{xxx} + uv_x, \tag{4.86}$$

para todas las soluciones de la ecuación de KdV (4.85). Se puede verificar que en general la sustitución de la forma (4.81), $v = \varphi(t, x, u)$, que satisface la ecuación (4.83), está dada por

$$v = A_1 + A_2 u + A_3(x + tu), \tag{4.87}$$

en donde, A_1, A_2, A_3 son constantes arbitrarias. También se puede verificar que v dada por la ecuación (4.87) resuelve la ecuación adjunta (4.86) para todas las soluciones u de la ecuación KdV. La solución $v = x + tu$ es invariante bajo la transformación Galileana de la ecuación KdV y aparece en diferentes enfoques (ver [9], Sección 22.5). Por lo tanto, la ecuación de KdV es autoadjunta no lineal con la sustitución (4.87).

Proposición 5. *Cualquier ecuación lineal es auto-adjunta no lineal.*

Demostración. *Esta propiedad es la consecuencia directa de la Definición 30, ya que la ecuación adjunta $F^*[v] = 0$ a una ecuación lineal $F[u] = 0$ no involucra la variable u.*

□

4.7.2. Autoadjuntes no lineal vía multiplicadores

Teorema 24. *La ecuación diferencial*

$$F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(s)}) = 0, \tag{4.88}$$

es autoadjunta no lineal ver (Definición 29) si y sólo si se vuelve estrictamente auto-adjunta (ver Definición 27) al reescribirla en la forma equivalente

$$\mu(x,u)F(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(s)}) = 0, \quad \mu(x,u) \neq 0, \tag{4.89}$$

con un multiplicador $\mu(x,u)$ apropiado.

Demostración. *Escribiremos la condición (4.83) para la auto-adjuntes no lineal de la ecuación (4.88) en la forma*

$$\left.\frac{\delta(vF)}{\delta u}\right|_{v=\varphi(x,u)} = \lambda(x,u)F(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(s)}). \tag{4.90}$$

Además, usando que las ecuaciones (4.89) y (4.88) son equivalentes, escribiremos la condición (4.50) para la auto-adjuntes-estricta de la ecuación (4.89) en la forma

$$\left.\frac{\delta(w\mu F)}{\delta u}\right|_{w=u} = \tilde{\lambda}(x,u)F(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(s)}). \tag{4.91}$$

Como w es una variable dependiente y $\mu = \mu(x,u)$ es cierta función de x, u, la derivada variacional en el lado izquierdo de (4.91) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\delta(w\mu F)}{\delta u} &= w\frac{\partial\mu}{\partial u}F + \mu w\frac{\partial F}{\partial u} - D_i\left(\mu w\frac{\partial F}{\partial u_i}\right) + D_iD_j\left(\mu w\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right) - \cdots \\ &= w\frac{\partial\mu}{\partial u}F + \frac{\delta(vF)}{\delta u},\end{aligned} \tag{4.92}$$

en donde, v es la nueva variable dependiente definida por

$$v = \mu(x,u)w. \tag{4.93}$$

La expresión (4.93) es la nueva variable dependiente en lugar de w. Ahora el lado izquierdo de la ecuación (4.91) es escrito en la forma

$$\left.\frac{\delta(w\mu F)}{\delta u}\right|_{w=u} = u\frac{\partial\mu}{\partial u}F + \left.\frac{\delta(vF)}{\delta u}\right|_{v=u\mu(x,u)}. \tag{4.94}$$

Supongamos que la ecuación (4.88) no es linealmente autoadjunta. Entonces la ecuación (4.90) se cumple para cierta función dada $\varphi(x,u)$. Por lo tanto, tomamos el multiplicador

$$\mu(x,u) = \frac{\varphi(x,u)}{u}, \tag{4.95}$$

y reducimos la ecuación (4.94) a la siguiente forma

$$\left.\frac{\delta(w\mu F)}{\delta u}\right|_{w=u} = \left(\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\varphi}{u}\right)F. \tag{4.96}$$

Esto demuestra que la ecuación (4.91) se mantiene con

$$\tilde{\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\varphi}{u} + \lambda. \tag{4.97}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.89) con el multiplicador μ *dado por (4.95) es estrictamente autoadjunta.*

Supongamos ahora que la ecuación (4.89) con un cierto multiplicador $\mu(x,u)$*, es estrictamente autoadjunta. Entonces (4.91) se cumple. Por lo tanto, si tomamos la función* φ *definida por (ver (4.95))*

$$\varphi(x,u) = u\mu(x,u), \tag{4.98}$$

la expresión (4.94) da

$$\left.\frac{\delta(vF)}{\delta u}\right|_{v=\varphi(x,u)} = \left(\tilde{\lambda} - u\frac{\partial \mu}{\partial u}\right) F. \tag{4.99}$$

Se sigue que la ecuación (4.90) se satisface con

$$\lambda = \tilde{\lambda} - u\frac{\partial \mu}{\partial u}. \tag{4.100}$$

Concluimos que la ecuación. (4.89) es autoadjunta no lineal, completando así la prueba.

□

Ejemplo 28. *El multiplicador (4.75) utilizado en el Ejemplo 26 y la función* $\varphi = x^2$ *que proporciona una solución de la ecuación adjunta (4.70) a la ecuación de Kompaneets están relacionadas por la ecuación (4.100).*

4.8. Identidades que conectan a los operadores de Euler-Lagrange, Lie Bäcklund y Noether

Los operadores de Euler-Lagrange, Lie Bäcklund y de Noether juegan un papel muy importante en el estudio de simetrías y leyes de conservación.

Definición 31. *Sean* ξ^i, $\eta^\alpha \in \mathcal{A}$ *funciones diferenciales que dependen de cualquier número finito de variables* $x, u, u_{(1)}, u_{(2)} \ldots$*. Un operador diferencial de primer orden*

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}} + \ldots, \tag{4.101}$$

en donde, los coeficientes son determinados de forma única a través de las fórmulas de extensión (ver Teorema 11 para todas las fórmulas)

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i(\eta^\alpha - \xi_j u_j^\alpha) + \xi_j u_{ij}^\alpha, \\ \zeta_{i_1 i_2}^\alpha &= D_{i_1} D_{i_2}(\eta^\alpha - \xi_j u_j^\alpha) + \xi_j u_{j i_1 i_2,}^\alpha, \end{aligned} \tag{4.102}$$

es llamado ***operador de Lie-****Bäcklud.*

Observación 17. *El operador (4.102) es formalmente una suma infinita, pero se trunca al actuar sobre cualquier función diferencial. Por lo tanto, la acción de los operadores Lie-Bäcklund está bien definida en el espacio $\mathcal{A}$.*

Proposición 6. *[6] El conmutador $[X_1, X_2]$ para cualesquiera dos operadores de Lie Bäcklud,*

$$X_\nu = \xi_y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_y^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots \quad (\nu = 1, 2),$$

es idéntico con el operador Lie-Bäcklud dado por

$$[X_1, X_2] = (X_1(\xi_2^i) - X_2(\xi_1^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} + (X_1(\eta_2^\alpha) - X_2(\eta_1^\alpha)) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots, \tag{4.103}$$

en donde, los términos denotados por los puntos suspensivos se obtienen extendiendo o prolongando los coeficientes de $\partial/\partial x^i$ y $\partial/\partial u^\alpha$ de acuerdo con las ecuaciones (4.102).

Proposición 7. *[16] El conjunto de todos los operadores de Lie-Bäcklund es un álgebra de Lie de dimension infinita con respecto al conmutador (4.103). Esta se denomina álgebra de Lie-Bäcklund y se denota por $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. El álgebra $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ está dotada de las siguientes propiedades*

1. *$D_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. En otras palabras, la diferenciación total (4.4) es un operador Lie-Bäcklund. Además,*

   $$X_* = \xi_*^i D_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}, \tag{4.104}$$

   para cualquier $\xi_*^i \in \mathcal{A}$

2. *Sea $\mathcal{L}_*$ el conjunto de todos los operadores de Lie-Bäcklund de la forma (4.104). Entonces $\mathcal{L}_*$ es un ideal de $\mathcal{L}_*$, es decir,*

   $$[X, X_*] = \left(X(\xi_*^i) - X_*(\xi^i)\right) D_i \in \mathcal{L}_*,$$

3. De acuerdo con la propiedad anterior, 2., se dice que dos operadores $X_1, X_2 \in \mathcal{L}_*$ son equivalentes ($X_1 \sim X_2$) si $X_1 - X_2 \in \mathcal{L}_*$. En particular, cada operador $X \in \mathcal{L}_\mathcal{B}$ es equivalente a un operador (4.101) con $\xi^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, $X \sim \tilde{X}$ en donde,

$$\tilde{X} = X - \xi^i D_i = (\eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots . \tag{4.105}$$

Los operadores de la forma

$$X = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots , \eta^\alpha \in \mathcal{A}, \tag{4.106}$$

*son llamados **operadores canónicos de Lie-Bäcklund**. Por lo tanto, la propiedad 3. significa que cualquier operador $X \in \mathcal{L}_\mathcal{B}$ es equivalente a un operador canónico de Lie-Bäcklund.*

4. Los generadores de los grupos de Lie de transformaciones puntuales son los operadores

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial} + \cdots , \tag{4.107}$$

con los coeficientes ξ_i y η^α dependiendo sólo de x y u, es decir,

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{4.108}$$

El operador de Lie-Bäcklund (4.101) es equivalente a un generador (4.108) de un grupo de transformación puntual si y sólo si sus coordenadas tienen la forma

$$\xi^i = \xi_1^i(x,u) + \xi_*^i, \quad \eta^\alpha = \eta_1^\alpha(x,u) + (\xi_2^i(x,u) + \xi_*^i)u_i^\alpha,$$

en donde, $\xi_*^i \in \mathcal{A}$ son funciones diferenciales arbitrarias y ξ_1^i, ξ_2^i, η_1^α son funciones arbitrarias de x y u.

Ejemplo 29. *Sean t, x las variables independientes. El generador de la transformación Galileana, y de la forma canónica de Lie-Bäcklund (4.105) se escriben como*

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial x} \sim \tilde{X} = (1 + tu_x)\frac{\partial}{\partial u} + \cdots .$$

Definición 32. *Sea $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ cualquier operador de Lie-Bäcklund (4.107). Asociamos con X los siguientes n operadores $\mathcal{N}^i (i = 1, \ldots, n)$ conocidos como **operadores de Noether** a través de las sumas formales*

$$\mathcal{N}^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{i_s}(W^\alpha)\frac{\delta}{\delta u_{ii_1,\ldots i_s}^\alpha}, \tag{4.109}$$

en donde,

$$W^\alpha := \eta^\alpha - \xi^j u^\alpha_j, \quad \alpha = 1, \dots, m, \tag{4.110}$$

y los operadores de Euler-Lagrange con respecto a las derivadas de u^α *se obtienen de (4.23) remmplazando* u^α *por las derivadas correspondientes, por ejemplo*

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha_i} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{j_1} \cdots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij_1,\dots j_s}}, \quad i = 1, \dots n, \quad \alpha = 1, \dots, m. \tag{4.111}$$

Proposición 8. *[1] El operador de Euler-Lagrange (4.23), el operador de Lie-Bäcklund y los operadores asociados (4.111) están conectados por la siguiente identidad fundamental*

$$X + D_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i \mathcal{N}^i. \tag{4.112}$$

Observación 18. *Recordemos que el Teorema de Noether [18] que relaciona las simetrías y las leyes de conservación para ecuaciones de Euler-Lagrange es una consecuencia directa de la identidad (4.112) (ver [9]).*

4.9. Leyes de conservación, un nuevo enfoque

Las leyes de conservación y simetrías siempre han sido de considerable interés en la ciencia. Son importantes en la formulación e investigación de muchos modelos matemáticos. Fueron utilizados, por ejemplo para probar teoremas de existencia global [69]- [71], en problemas de estabilidad [72], [73], en elasticidad para estudiar grietas y dislocaciones [74], [75], en astrofísica [76] - [78], en el diseño de nuevas antenas de radio [79] y así sucesivamente (ver también [80]). Concentrémonos el uso de simetrías y leyes de conservación, por ejemplo en mecánica celeste. En 1609, J. Kepler formuló dos leyes importantes conocidas como la primera y segunda ley de Kepler. Su primera ley establece que la órbita de un planeta es una elipse con el Sol colocado en un foco. La segunda ley dice que si unimos al Sol y al planeta por una línea recta, la línea barrerá áreas iguales en momentos iguales. Lo importante en estos descubrimientos es que Kepler explicó cómo se movían los planetas. El siguiente paso, la explicación de por qué se movieron de esa manera, fue dado por I. Newton [81] en 1687. Formuló su ley de gravitación universal

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4.113}$$

en donde, F es la fuerza de gravedad entre dos partículas, G es una constante gravitacional, m_1 y m_2 son las masas de las partículas y r es la distancia entre ellas. Al principio Newton trató de usar una fórmula con r^3 en lugar de r^2. Sin embargo, descubrió que no era fructífero. Cuando Newton usó la fuerza de gravedad (4.113) en su segunda ley de movimiento, obtuvo que los planetas se movían en elipses. Esto le demostró que estaba en el camino correcto. Por lo tanto, la forma de como obtuvo su descubrimiento fue por ensayo y error.

P.S. Laplace demostró que el movimiento de los planetas a lo largo de las elipses se seguía a partir de la ley de conservación calculada por él, es decir, la ley de conservación para el vector (véase [82], Vol.1, Libro II, Capítulo III, Sección 18):

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M} + \mu \frac{\boldsymbol{x}}{r}, \tag{4.114}$$

en donde, $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de un planeta, $\boldsymbol{M} = m(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})$ es el momento angular, m es la masa del planeta, $\boldsymbol{x}$ es un vector posición del planeta y r es la magnitud de $\boldsymbol{x}$. Laplace utilizó la definición formal de una ley de conservación para el cálculo de este vector conservado.

En 1983, N. H. Ibragimov [83] demostró que era posible calcular el vector (4.114) utilizando una cierta simetría del campo gravitacional de Newton, una simetría de Lie-Bäcklund. Esta simetría es más complicada que, por ejemplo las rotaciones, depende no solo del vector posición $\boldsymbol{x}$ sino también de la velocidad $\boldsymbol{v}$. Por lo tanto, la idea de simetría y la ley de conservación correspondiente ayuda a explicar el movimiento de los planetas en torno a elipses.

La segunda ley de Kepler, la conservación de áreas, se deriva de la conservación del momento angular. Esto fue establecido en [84] independientemente por L. Euler y D. Bernoulli. El momento angular corresponde a la simetría central del campo gravitacional de Newton.

Hay varias ideas para construir leyes de conservación. Una de ellas es utilizar el método directo, cuando se deriva una ley de conservación para una ecuación diferencial utilizando su definición. Como se mencionó anteriormente, Laplace fue el primero en utilizar esta idea en 1798. Otra idea, es que ciertas leyes de conservación para ecuaciones diferenciales obtenidas de un principio variacional podrían surgir a partir de sus simetrías, idea que se basa en los trabajos de Jacobi, Klein y Noether. En 1884, Jacobi [85] mostró una conexión entre las cantidades conservadas y las simetrías de las ecuaciones del movimiento de una partícula en la mecánica clásica. Klein [86] obtuvo un resultado similar para las ecuaciones de la relatividad general. Él predijo que podría encontrarse una conexión entre las leyes de conservación y las simetrías para cualquier ecuación diferencial obtenida de un principio variacional y le sugirió a Emmy Noether que investigara la posibilidad. Ella mostró [87] en 1918 que las leyes de conservación estaban asociadas con la invariancia de integrales variacionales con respecto a los grupos de transformación continua. Noether obtuvo la condición suficiente para la existencia de leyes de conservación. Sin embargo, no hay expresiones explícitas para dichas leyes resultantes en el trabajo de Noether. En 1921, siguiendo la observación oral de Noether, Bessel-Hagen [88] aplicó el teorema de Noether con la llamada condición de "divergencia" a las ecuaciones de Maxwell y calculó sus leyes de conservación.

En 1951, Hill escribió un notable artículo de revisión [89] en donde discutió el teorema de Noether y presentó la fórmula explícita para las leyes de conservación en el caso de un lagrangiano de primer orden. La fórmula está escrita en términos de variaciones (ver [89], ecuación (43)). En 1969, inspirado en el artículo de Hill, Ibragimov [90] demostró la versión generalizada del teorema de Noether. En este teorema, las leyes de conservación están relacionadas con la invariancia de los valores extremos de las integrales variacionales. Él derivó la condición necesaria y suficiente para la existencia de leyes de conservación. También presentó las expresiones explícitas para calcular dichas leyes en el caso de un lagrangiano de cualquier orden. Sobre la base de estos teoremas, se calcularon muchas leyes de conservación para ecuaciones diferenciales que tienen un Lagrangiano (ver ejemplos recopilados en [91]-[93]).

Definición 33. *Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales.*

$$F_1(x, u, u', ...) = 0, ..., F_N(x, u, u', ...) = 0, \tag{4.115}$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$*,* $u = (u^1, ..., u^m)$ *y* u' *es la colección de las derivadas parciales de primer orden*

$$u_i^k \equiv \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \qquad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, m.$$

Se dice que el sistema de ecuaciones diferenciales (4.115) tiene una ***ley de conservación*** *si existe un vector* n*-dimensional* $A = (A^1, ..., A^n)$ *con las componentes*

$$A^i = A^i(x, u, u', \dots), \quad i = 1, ..., n,$$

que satisface la condición

$$divA \equiv D_i(A^i) = 0, \tag{4.116}$$

para alguna solución $u(x)$ de (4.115). El vector n-dimensional

$$A = (A^1, \dots, A^n), \tag{4.117}$$

definido por

$$A^i := \xi^i \mathcal{L} + (\eta^\alpha - \xi^i u_j^\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4.118}$$

o de una manera mas general

$$\begin{aligned} A^i &= \xi_i \mathcal{L} + W^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \cdots\right] \\ &+ D_i(W^\alpha)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} + \cdots\right] + D_j D_k(W^\alpha)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \dots\right], \end{aligned} \tag{4.119}$$

*en donde, W^α es como (4.110)es llamado un **vector conservado** para el sistema que satisface (4.116).*

Teorema 25. *[6](**Ibragimov**)*
Cada simetría puntual de Lie o simetría de Lie-Backlund

$$X = \xi_i(x, u, u_{(1)}, \dots)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha(x, u, u_{(1)} \dots), \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{4.120}$$

así como la simetría no local, de ecuaciones diferenciales

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(s)}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \tag{4.121}$$

proporcionan una ley de conservación no local para las ecuaciones (4.121). La cantidad conservada correspondiente involucra las variables adjuntas v (es decir, no locales) dadas por las ecuaciones adjuntas (4.32) y, por lo tanto, las leyes de conservación resultantes son, en general, no locales.

Observación 19. *Note que la ley de conservación (4.116) se puede escribir de la forma*

$$D_i(A^i) = \nu^{\bar{\alpha}} F_{\bar{\alpha}}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^s u), \tag{4.122}$$

con

$$\nu^{\bar{\alpha}} = \nu^{\bar{\alpha}}(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^s u).$$

Definición 34. *Diremos que los vectores conservados son triviales si*

1. *La divergencia es igual a cero.*

2. *Las componentes del vector se anula en la solución de la ecuación requerida.*

4.9.1. Concepto de ley de conservación

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria

$$F(t, u, u', u'') = 0, \tag{4.123}$$

describiendo un movimiento de un sistema dinámico. Aquí t es tiempo, $u = (u^1, ..., u^s)$ son las coordenadas de posición, $u = u(t)$, y $v = u' \equiv \frac{du}{dt}$ es la velocidad, $u'' = \frac{d^2u}{dt^2}$.

Definición 35. *Una función $A = A(t, u, v)$ es llamada una cantidad conservada de la ecuación (4.123) si*

$$\frac{dA}{dt} = 0, \tag{4.124}$$

sobre cada solución de la ecuación (4.123).

En otras palabras, la cantidad conservada $A(t, u, v)$ es constante sobre cada trayectoria $u = u(t)$ y, por lo tanto, se denomina **constante de movimiento**.
En mecánica clásica, la ecuación (4.123) tiene la forma

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0, \tag{4.125}$$

y describe el movimiento de una partícula libre con la masa m y un vector posición $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. La ecuación tiene varias cantidades conservadas, por ejemplo la energía $E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ y el momento lineal $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.
Consideremos ahora una ecuación diferencial parcial de orden p

$$F(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, ..., u_{(p)}) = 0, \tag{4.126}$$

en donde la función F depende de n variables independientes x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, m variables dependientes u, $u = (u^1, ..., u^m)$, y la primera, segunda, ..., p-ésima derivada de u con respecto a x denotadas como $u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, u_{(2)} = \{u\alpha_{ij}\}, ..., u_{(p)} = u^\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ respectivamente, $\alpha = 1, \ldots m$ y otros índices cambian de 1 a n (ver Sección 4.2 para mas detalles).

Una ley de conservación para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales se define como en la Definición 33.

En lugar de tratar con las funciones $u^{\alpha} = u^{\alpha}(x)$ y sus derivadas, que también son funciones de x, se pueden tratar todas las variables, x, u y derivadas de u, como variables independientes, llamadas variables diferenciales (ver Definición 23). Usando la idea de variables diferenciales [94], se puede reformular la definición de una ley de conservación usando el operador de diferenciación total con respecto a ξ dado en (4.4). Por lo tanto

$$divA\Big|_{(4.126)} \equiv D_i(A^i)\mid_{(4.126)} = 0, \tag{4.127}$$

en donde la notación $|_{(4.126)}$ significa que la relación se mantiene sobre cualquier solución de la ecuación (4.126). Si una de las variables, por ejemplo x_1, es el tiempo t, entonces la componente A^1 se denomina densidad de la ley de conservación.

Observación 20. *En los cálculos prácticos, la ley de conservación (4.127) puede reescribirse en una forma equivalente. Si*

$$A^1\mid_{4.126} = \tilde{A}^1 + D_2(h^2) + \cdots + D_n(h^n).$$

entonces, uno obtiene la siguiente ley de conservación

$$D_t(\tilde{A}^1) + D_2(\tilde{A}^2) + \cdots + D_n(\tilde{A}^n) = 0.$$

en donde,

$$\tilde{A}^2 = A^2 + D_t(h^2), \ldots, \tilde{A}^n = A^n + D_t(h^n), \tag{4.128}$$

porque $D_tD_i(h^i) = D_iD_t(h^i)$.

Al emplear variables diferenciales también se puede reescribir (4.124) en la siguiente forma

$$\frac{dA}{dt}\Big|_{(4.123)} \equiv D_t(A)\mid_{(4.123)} = 0, \tag{4.129}$$

Por lo tanto, las cantidades conservadas y los vectores conservados se pueden calcular con la ayuda de la ecuación (4.129) y la ecuación. (4.127), respectivamente (ver, por ejemplo, [95]-[99]).

4.9.2. El principio de Hamilton y las ecuaciones de Euler-Lagrange

Considere nuevamente el movimiento de un sistema dinámico con una energía cinética $T(t,q,\dot{q})$ y una energía potencial $U(t,q)$. La función

$$\mathcal{L}(t,q,v) = T(t,q,\dot{q}) - U(t,q),$$

es el lagrangiano del sistema.

El principio de Hamilton, o el principio de mínima acción, establece que el verdadero movimiento del sistema entre dos tiempos elegidos t_1 y t_2 se describe por el hecho de que las trayectorias de las partículas proporcionan un extremo del funcional acción

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t,q,v)dx, \tag{4.130}$$

Este requisito es equivalente a la afirmación de que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} - D_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^\alpha}\right) = 0,\ \alpha = 1,2,\ldots,s$. Esto da una condición necesaria para que $q(t)$ proporcione un extremo de la integral (4.130).

En el caso de varias variables independientes $x = (x_1, ..., x_n)$ y variables dependientes $u = (u^1, ..., u^m)$, una integral de acción tiene la forma

$$\int_V \mathcal{L}(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(p)})dx, \tag{4.131}$$

en donde, V es un volumen n-dimensional arbitrario en el espacio de las variables x y el lagrangiano $\mathcal{L}$ es una función que depende de un número finito de variables diferenciales. Las ecuaciones correspondientes de Euler-Lagrange tienen la forma

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\alpha}, \quad \alpha = 1,\ldots,m \tag{4.132}$$

Noether demostró su teorema mediante la aplicación del procedimiento variacional a la integral de la acción.

Supongamos que las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.132) admiten un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico G

$$\bar{x} = \phi(x,u,a), \quad \bar{u} = \psi(x,u,a), \tag{4.133}$$

en donde $\phi = (\phi^1,\ldots,\phi^n)$, $\psi = (\psi^1\ldots\phi^n)$ y $\phi(x,u,0) = x$, $\psi(x,u,0) = u$. El generador infinitesimal del grupo G tiene la forma

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{4.134}$$

Definición 36. *Se dice que el funcional (4.131) es invariante bajo el grupo G si la siguiente ecuación se cumple para cualquier dominio V y cualquier función $u(x)$*

$$\int_{\bar{V}} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{(1)} \ldots, \bar{u}_{(p)}) d\bar{x}, = \int_{V} L(x, u, u_{(1)} \ldots, u_{(p)}) dx, \tag{4.135}$$

Aquí $\bar{V}$ es el dominio obtenido de V por la transformación (4.133).

Lema 4. *[15] El funcional (4.131) es invariante bajo el grupo G con el generador (4.134) si y sólo si*

$$X^{(1)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i(\xi^i) = 0, \tag{4.136}$$

aquí $X^{(1)}$ es la primera extensión o prolongación del generador X, la cual está dada por

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \zeta_{i_1 \ldots, i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots, i_s}} + \ldots, \tag{4.137}$$

en donde

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i(\eta^\alpha - \xi_j u_j^\alpha) + \xi_j u_{ij}^\alpha, \\ \zeta_{i_1 \ldots, i_s}^\alpha &= D_{i_1} \ldots D_{i_s}(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) + \xi_j u_{j i_1 \ldots, i_s}^\alpha. \end{aligned} \tag{4.138}$$

Distingamos los lagrangianos de los funcionales invariantes por la siguiente definición.

Definición 37. *El funcional $\mathcal{L}(x, u, u_{(1)} \ldots, u_{(p)})$ que satisface la ecuación (4.136) se denomina un lagrangiano invariante para el grupo G con el generador dado en (4.134).*

Observación 21. *Para $p = 1$ los lagrangianos invariantes son, en general, invariantes diferenciales de primer orden $F(x, u, u_{(1)})$ definidos por la ecuación*

$$X^{(1)}(F) = 0,$$

en lugar de la ecuación (4.136).

El teorema de Noether [18] establece, por ejemplo que en el caso de los Lagrangianos de primer orden $\mathcal{L}$ y los grupos de transformación puntuales (4.133), si la integral (4.131) con $p = 1$ es invariante bajo el grupo G con el generador (4.134) entonces las cantidades

$$A^i(x, u, u_{(1)}) = \mathcal{L}\xi^i + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.139}$$

definen un vector conservado

$$A = (A^1, \ldots, A^n),$$

para las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha = i, \ldots, m. \tag{4.140}$$

En otras palabras, la ecuación conservada

$$D_i(A^i) = 0, \tag{4.141}$$

se aferra a las soluciones de las ecuaciones (4.140).

Si la integral (4.131) es invariante bajo r operadores linealmente independientes $X_1, \ldots, X_r$ de la forma (4.134), entonces la fórmula (4.139) proporciona r vectores conservados linealmente independientes $A_1, ...A_r$. La prueba original de Noether se basó en cálculos que implican integrales variacionales $\int Ldx$. Una prueba alternativa del teorema de Noether se dió en [2] (ver también [9] o [1] para una presentación más detallada). El nuevo enfoque permitió no solo simplificar la prueba del teorema de Noether, sino también obtener un nuevo teorema más general que establece que las fórmulas (4.139) proporcionan una ley de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.140) si y sólo si i y sólo si los lagrangianao que definen las integrales variacionales son invariantes bajo el grupo con el generador (4.134).

Teorema 26. *Sea la integral variacional (4.131) invariable con respecto a un grupo G con generadores (4.134). Entonces un vector A con componentes*

$$A^i = \mathcal{N}^i(\mathcal{L}), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.142}$$

es un vector conservado para la ecuación de Euler-Lagrange (4.132), es decir

$$D_i(A^i) \mid_{(4.132)} = 0. \tag{4.143}$$

Aquí $\mathcal{N}^i$ son los operadores de Noether-Ibragimov dadas por (4.109).

Demostración. *Ver [2].*

□

Corolario 2. *Las leyes de conservación se obtienen incluso cuando la condición de invariancia (4.136) se reemplaza por la condición de "divergencia"*

$$X^{(1)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i(\xi^i) = D_i(B^i), \tag{4.144}$$

en donde los $B^i = B^i(x, u, u_1, \ldots, u_{(p)})$ con $B^i \in \mathcal{A}$. Entonces las componentes del vector conservado (4.139) son reemplazadas por

$$A^i = \mathcal{L}\xi^i + (\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - B^i = \mathcal{N}^i(\mathcal{L}) - B^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.145}$$

Ejemplo 30. *El generador de traslaciones de tiempo*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

satisface la condición de invariancia

$$A^0 = \mathcal{L}\xi^0 + W\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_t}, \quad A^i = \mathcal{L}\xi^1 + W\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i}, \tag{4.146}$$

La cantidad

$$W = \eta - \xi^0\Phi_t - \xi^j\Phi_j, \tag{4.147}$$

es igual a

$$W = -\Phi_t,$$

y la ecuación (4.146)

$$A^0 = L - \Phi_t = \frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2, \quad A^i = -\Phi_t\Phi_i.$$

Por lo tanto,

$$A^0 = \frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^2, \quad \boldsymbol{A} = -\Phi_t\nabla\Phi.$$

Ahora eliminamos $\nabla\Phi$ obtenemos el vector conservado

$$A^0 = \frac{1}{2}\left|v\right|^2, \quad \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2 + p\right)\boldsymbol{v}.$$

La ecuación de conservación correspondiente

$$D_t(A^0) + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0. \tag{4.148}$$

tiene la forma

$$D_t(\tau) + div(\tau\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda}) = 0. \tag{4.149}$$

con

$$\tau = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2, \quad \boldsymbol{\lambda} = p\boldsymbol{v}.$$

Escribiendo la ley de conservación en forma integral

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\tau d\omega = -\int_{S(t)}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})dS, \tag{4.150}$$

obtenemos la conservación de energía

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{v}\right|^2 d\omega = -\int_{S(t)} p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} dS. \tag{4.151}$$

Observación 22. *Tenga en cuenta que la aplicación del teorema de Noether a los flujos potenciales nos da la conservación de energía (4.151) que es válida para todas las soluciones de ls ecuación.*

4.9.3. Ejemplo en Mecánica Clásica

Consideremos nuevamente la ecuación

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \tag{4.152}$$

que describe el movimiento libre de una partícula de masa m. La ecuación tiene lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left|\ddot{\boldsymbol{x}}\right|^2 \tag{4.153}$$

y admite un grupo de transformaciones puntuales 10-paramétrico que consiste de traslaciones espaciales con los generadores

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \tag{4.154}$$

la traslación con respecto a el tiempo con el generador

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.155}$$

las rotaciones de el vector $\boldsymbol{x}$ con los generadores

$$X_{\mu\nu} = x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, \tag{4.156}$$

y la transformación galileana con los generadores

$$X_{\mu 4} = t\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3. \tag{4.157}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Noether la ecuación (4.125) tiene 10 leyes de conservación de la forma

$$D_t(A)\mid_{(4.125)} = 0, \tag{4.158}$$

definidas por las siguientes cantidades conservadas: el momento lineal

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}},$$

la energía

$$E = \frac{1}{2}m\left|\dot{\boldsymbol{x}}\right|^2,$$

el momento angular

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{x},$$

y el vector

$$\boldsymbol{q} = m(\boldsymbol{x} - \dot{\boldsymbol{x}}t).$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{12}	X_{23}	X_{13}	X_{14}	X_{24}	X_{34}
X_1	0	0	0	0	$-X_2$	0	$-X_3$	0	0	0
X_2		0	0	0	X_1	$-X_3$	0	0	0	0
X_3			0	0	0	X_2	X_1	0	0	0
X_4				0	0	0	0	X_1	X_2	X_3
X_{12}					0	$-X_{13}$	X_{23}	X_{24}	$-X_{14}$	0
X_{23}						0	$-X_{12}$	0	X_{34}	$-X_{24}$
X_{13}							0	X_{34}	0	$-X_{14}$
X_{14}								0	0	0
X_{24}									0	0
X_{34}										0

Tabla 4.1: Tabla de conmutadores en ejemplo de Mecánica clásica

4.9.4. Ecuaciones sin lagrangianos

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden formularse como ecuaciones de Euler-Lagrange ya que no tienen lagrangianos. Por lo tanto, es imposible aplicar el teorema de Noether para calcular las leyes de conservación. Sin embargo, según [107] y [6], es posible introducir un lagrangiano formal si se tiene en cuenta cualquier sistema de ecuaciones dado junto con el sistema adjunto. En [6], Ibragimov ha demostrado que el sistema adjunto hereda las simetrías del sistema dado y ha sugerido un nuevo teorema sobre las leyes de conservación no locales.

Consideremos un sistema arbitrario de ecuaciones diferenciales de orden s definido por (4.30). También consideremos el sistema adjunto a (4.30) dado por la Definición 26.

Observación 23. *Las variables $v = (v^1, ..., v^m)$ que aparecen en la Definición 26 se llamaron según [6] variables no locales de acuerdo con el concepto general de simetrías no locales. Por lo tanto, las leyes de conservación que involucran a v fueron llamadas leyes de conservación no locales.*

Usando la nueva definición del sistema adjunto, se puede demostrar que cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de orden s (4.30) considerado junto con su ecuación adjunta (4.32) tiene un Lagrangiano. A saber, las ecuaciones de Euler-Lagrange con Lagrangiano (4.33) proporciona el sistema de ecuaciones simultaneo (4.30), (4.32) con $2m$ variables dependientes $u = (u^1, \cdots, u^m)$ y $v = (v^1, \cdots, v^m)$.

Capítulo 5

Aplicaciones. Ecuaciones de Kuramoto-Sivashinsky (KS) y de Kudryashov-Sinelshchikov(K-S)

5.1. Introducción

Las simetrías puntuales de Lie de las ecuaciones de evolución se han estudiado en varios contextos, por ejemplo con una variable espacial

$$u_t = F\Big(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \cdots , \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big), \tag{5.1}$$

con $n \geq 2$, ha sido estudiado por muchos autores, algunos de ellos son [32], [45], [56]. Por ejemplo, si $n = 2$, la ecuación. (5.1) incluye la ecuación de calor no lineal, la ecuación de Burgers, la ecuación de Fokker-Planck, la ecuación de Black-Scholes y, más generalmente, las ecuaciones de reacción-difusión-convección, etc.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación KdV cilíndrica y KdV modificada son ejemplos de ecuaciones de evolución de tercer orden.

Cuando $n = 4$, la ecuación. (5.1) incluye la ecuación modificada de Kuramoto-Sivashinsky, la ecuación de Cahn-Hilliard entre otras.

Sin embargo, la ecuación de primer orden

$$u_t + F(t, x, u, u_x) = 0, \tag{5.2}$$

parece haber recibido poca atención.

Hasta donde sabemos, el trabajo más reciente que estudia ecuaciones de evolución de primer orden y la simetría del puntual de Lie se encuentra en [26].

Siguiendo el enfoque estándar de Lie (ver [9], [11], [36]), si se tiene en mente el problema de encontrar leyes de conservación una EDP o un sistema de EDPs, esta o este debe poseer una estructura variacional, ya que entonces se puede emplear el teorema de Noether directamente para establecer leyes de conservación, (ver [23], [22]). Sin embargo, es bien sabido que las ecuaciones de evolución no poseen una estructura variacional. Entonces, no se pueden obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange y no se les puede aplicar el teorema de Noether diectamente para obtener leyes de conservación.
Afortunadamente, existen algunos métodos alternativos para obtener leyes de conservación para ecuaciones sin lagrangianos clásicos: el método directo, el método característico, el enfoque variacional, las condiciones de simetría, la fórmula de construcción directa y el enfoque parcial de Noether. Para una discusión más detallada, ver [20], [6].

En este capítulo consideraremos el problema de encontrar simetrías y cómo calcular leyes de conservación para las ecuaciones Kuramoto-Sivashinsky (KS) y de Kudryashov-Sinelshchikov (K-S). De aquí en adelante se supondrá que todas las funciones son suaves, se entiende la suma de los índices repetidos, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Usaremos resultados recientes desarrolladas por Ibragimov [6] para construir leyes de conservación para ecuaciones sin un lagrangiano formal. Nos referiremos al nuevo teorema de conservación establecido en [6] (ver Teorema 3.5 en la referencia) como el teorema de Ibragimov.

El Teorema de Ibragimov sobre leyes de conservación se puede resumir mediante el siguiente algoritmo (ver [6] para más detalles).

Dado una EDP $F = F(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u) = 0$ donde $\partial^k u$ denota el conjunto de todas las derivadas de orden k de u (ver Capítulo 4).

I) Construir un Lagrangiano $\mathcal{L} = vF$.

II) A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el siguiente sistema:

$$F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^n u) = 0, \tag{5.3}$$

$$F^*(x, u, v, \partial u, \partial v \cdots, \partial^n u, \partial^n v) = 0. \tag{5.4}$$

Por lo expuesto en el Capítulo 4, la segunda ecuación del sistema (5.3)-(5.4) se llama ecuación adjunta a $F = 0$. La ecuación (5.4) es casi autoadjunta si el sistema (5.3)-(5.4) es equivalente a la ecuación original (5.3) tras la sustitución $v = \varphi^{(u)}$ tal que $\varphi'(u) = 0$, es decir

$$F^*(x, u, v, \partial u, \partial v \cdots, \partial^n u, \partial^n v) \mid_{v=\varphi(u)} = \phi F(x, u, \partial u, \cdots, \partial^n u), \tag{5.5}$$

para alguna función $\phi = \phi(x, u, \partial u, \cdots, \partial^n u)$.
Si la ecuación (5.5) es verdadera con $\varphi(u) = u$ entonces (5.3) se dice que es autoadjunta.

III) El vector conservado es $A = (A^i)$, en donde A^i está definido por (4.119)

Es decir, aplicando este algoritmo a las ecuaciones de evolución no lineal (KS) 2-dimensional y (K-S) 3-dimensional, obtenemos:

- Lagrangianos generalizados;
- Ecuaciones adjuntas, asociadas;
- Componentes del vector conservado.

A continuación aplicaremos este algoritmo a dos ecuaciones de evolución fuertemente no lineales.

5.2. Ecuación de Kuramoto Sivashinsky

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (KS) surge como una ecuación de amplitud, como un modelo para las inestabilidades interfaciales en muchos contextos físicos. Kuramoto y Tsuzuki (1976) la derivaron en el contexto de la turbulencia de fase angular para un sistema de ecuaciones de reacción-difusión que modela la reacción de Belousov-Zhabotinskii en tres dimensiones espaciales. Sivashinsky (1977) la derivó para modelar pequeñas inestabilidades de difusión térmica en frentes de llamas laminares en dos dimensiones espaciales. También se ha derivado en el contexto del flujo de una película viscosa delgada por planos verticales o inclinados, así como en el contexto de ondas en plasmas. Es interesante saber que también se puede derivar bajo argumentos de escala y simetría para flujos celulares cerca de una bifurcación [67].
Consideremos la familia de ecuaciones de evolución no lineales de cuarto orden de la forma

$$u_t + f(u)u_{xxxx} + g(u)u_x u_{xxx} + h(u)u_{xx}^2 + d(u)u_x^2 u_{xx} - p(u)u_{xx} - q(u)uu_x^2 = 0, \tag{5.6}$$

en donde, f, g, h, d, p y q son funciones suaves de u. Esta ecuación abarcar varios modelos matemáticos particulares discutidos intensamente en la literatura. Los siguientes casos son de gran interés debido a aplicaciones significativas.
Si en la ecuación (5.6)

$$f(u) = g(u) = h(u) = d(u) = 0, \qquad p(u) = k(u), \quad q(u) = k'(u), \tag{5.7}$$

obtenemos la conocida ecuación de calor no lineal

$$u_t = (k(u)u_x)_x. \tag{5.8}$$

La ecuación de calor clásica $u_t = u_{xx}$ se obtiene de (5.8) dejando $k = const$.

La ecuación

$$u_t + u_{xxxx} + u_{xx} - u_x^2 = 0, \tag{5.9}$$

conocida como la ecuación Kuramoto-Sivashinsky (KS) se obtiene de (5.6) estableciendo

$$f(u) = 1 \quad g(u) = h(u) = d(u) = 0, \qquad p(u) = -1 \quad q(u) = 1.$$

Cuando $f(u) = 1$, $g(u) = d(u) = 0$, $h(u) = \lambda$, $p(u) = -1$ y $q(u) = 1 - \lambda$, (5.6) se convierte en la ecuación modificada de Kuramoto-Sivashinsky (KS)

$$u_t = -u_{xxx} - u_{xx} + (1 - \lambda)u_x^2 + \lambda u_{xx}^2 \tag{5.10}$$

propuesta por Bernoff y Bertozzi [33] como un modelo que describe el movimiento de una interfaz que separa dos fases durante la transición de estas.

Cuando

$$f = M(u)R(u), \quad g = 2M(u)R'(u) + M(u)R(u), \quad h = M(u)R'(u), \quad d = (M(u)R'(u))',$$
$$p = Q'(u)M(u), \quad q = (M(u)Q'(u))'.$$

La ecuación (5.6) se convierte en

$$u_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[M(u)\frac{\partial}{\partial x}(R(u)u_{xx} - Q(u))\right]. \tag{5.11}$$

la cual surge al modelar la dinámica de las películas líquidas delgadas, (ver [57], [35]). Sea $h(u) = d(u) = p(u) = q(u) = 0$. Si $f(u) = u^n$ y $g(u) = f'(u)$, tenemos la ecuación de evolución 1-dimensional

$$u_t = (u^n u_{xxx})_x, \tag{5.12}$$

obtenida mediante el análisis de la evolución de una película delgada de un líquido viscoso dominado por los efectos de tensión superficial [54]. Si $f(u) = u^n$ y $g(u) = 0$ tenemos una versión modificada de este modelo

$$u_t = u^n u_{xxxx}, \tag{5.13}$$

Estas ecuaciones se consideran en [55] donde se estudia la formación de singularidades. Además, la aproximación analítica a las soluciones se obtiene en [55] para el caso $0 < n \ll 1$ mediante la aplicación de métodos de perturbación.

Las simetrías clásicas de las ecuaciones generalizadas.

$$u_t = (f(u)u_{xxx})_x, \tag{5.14}$$

y

$$u_t = f(u)u_{xxxx}, \tag{5.15}$$

se clasifican en [39] y [32]. Se encuentra allí, mediante el uso de reducciones de simetría, que para algunas funciones particulares $f(u)$ el modelo de lubricación unidimensional admite ciertas soluciones invariantes de interés físico tales, como soluciones de tipo onda viajera, de tipo fuente y sumidero, soluciones de tiempo de espera y soluciones explicitas. Estas soluciones están definidas por EDO de orden inferior y algunas de ellas pueden obtenerse explícitamente. En algunas situaciones físicas, una fuerza desestabilizadora hace que la película líquida se acumule en gotas aisladas. Tal instigador puede ser una fuerza externa, como la gravedad en el caso de una película delgada que cuelga del fondo de una superficie horizontal, o intrínseca al sistema, como las fuerzas de Van der Waals repulsivas de largo alcance que entran en la evolución de la ecuación en forma de presión disjunta (ver [66], [67]). En tal situación, una aproximación de la lubricación reduce la ecuación de evolución (5.11) a la ecuación de difusión inestable de onda larga, ver [57], [35].

$$u_t = (u^n u_{xxx})_x - (u^m u_x)_x. \tag{5.16}$$

Las ecuaciones anteriores son físicamente importantes y han sido consideradas en la literatura.

La ecuación KS

$$u_t + u_{xxxx} + \beta u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 = 0, \tag{5.17}$$

es una ecuación diferencial parcial no lineal de cuarto orden, que ahora también se utiliza para modelar medios continuos que muestran un comportamiento caótico, como una turbulencia débil en las interfaces entre flujos complejos.

Generalizando la ecuación (5.17) a dos dimensiones tenemos

$$u_t = \frac{1}{2}u_x^2 + h(u)u_y^2 + r(u)u_{xx} + g(u)u_{yy} - u_{xxxx} - 2u_{xxyy} - u_{yyyy} + f(u), \tag{5.18}$$

Por brevedad denotamos

$$\Delta(x, y, t, u, u_x, \ldots, u_{yyyy}) = \frac{1}{2}u_x^2 + h(u)u_y^2 + r(u)u_{xx} + g(u)u_{yy} - u_{xxxx} - 2u_{xxyy} - u_{yyyy} + f(u) - u_t, \tag{5.19}$$

Para aplicar el método de Lie a la ecuación, consideramos el grupo de Lie de transformaciones infinitesimales uniparamétrico en (x, t, u), el cual se escribe de la forma

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi^1(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ t^* &= y + \varepsilon\xi^2(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ u_1^* &= t + \varepsilon\xi^3(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ u_2^* &= u + \varepsilon\eta(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Definición 38. *El generador infinitesimal es*

$$X = \xi^1(x, y, t, u)\partial_x + \xi^2(x, y, t, u)\partial_y + \xi^3(x, y, t, u)\partial_t + \eta(x, y, t, u)\partial_u.$$

Este operador es el generador infinitesimal de la ecuación de KS y determina una simetría puntual de Lie de (5.18) si y sólo si su acción sobre la ecuación, modulo la ecuación misma, sea idénticamente cero, es decir

$$X^{(4)}\left[\Delta(x, y, t, u, u_x, \ldots, u_{yyyy})\right]\big|_{\Delta(x,y,t,u,u_x,\ldots,u_{yyyyy})=0} \equiv 0, \tag{5.20}$$

en donde $X^{(4)}$ es la cuarta extensión del operador X dada por

$$X^{(4)} = X + \sum_{s=1}^{4} \eta^{(s)}_{i_1,\ldots,i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1,\ldots,i_s}}, \quad i_n = 1, 2, 3,$$

con

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - (D_i\xi^j)u_j,$$

$$\eta^{(s)}_{i_1,\ldots,i_s} = D_{i_s}\eta_{i_1,\ldots,i_{s-1}} - (D_{i_s}\xi_i^j)u_{i_1,\ldots,i_{s-1}j}.$$

Sea $\mathcal{L}$ el Lagrangiano de la ecuación (5.18) definido por

$$\mathcal{L} = v(x,y,t)\Delta(x,y,t,u,u_x,\ldots,y_{yyyy}),$$

en donde, v es una nueva variable dependiente, llamada variable no local. El operador Euler-Lagranje está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta u} = & \frac{\partial}{\partial u} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + D_x^4\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \cdots \\
& + D_xD_y\frac{\partial}{\partial u_{xy}} - D_x^2D_y\frac{\partial}{\partial u_{xxy}} + D_x^3D_y\frac{\partial}{\partial u_{xxxy}} - D_x^4D_y\frac{\partial}{\partial u_{xxxxy}} + \cdots \\
& - D_xD_y^2\frac{\partial}{\partial u_{xyy}} + D_x^2D_y^2\frac{\partial}{\partial u_{xxyy}} - D_x^3D_y^2\frac{\partial}{\partial u_{xxxyy}} + D_x^4D_y^2\frac{\partial}{\partial u_{xxxxyy}} - \cdots \\
& + D_xD_y^3\frac{\partial}{\partial u_{xyyy}} - D_x^2D_y^3\frac{\partial}{\partial u_{xxyyy}} + D_x^3D_y^3\frac{\partial}{\partial u_{xxxyyy}} - D_x^4D_y^3\frac{\partial}{\partial u_{xxxxyyy}} + \cdots \\
& - D_xD_y^4\frac{\partial}{\partial u_{xyyyy}} + D_x^2D_y^4\frac{\partial}{\partial u_{xxyyyy}} - D_x^3D_y^4\frac{\partial}{\partial u_{xxxyyyy}} + D_x^4D_y^4\frac{\partial}{\partial u_{xxxxyyyy}} - \cdots \\
& - D_y\frac{\partial}{\partial u_y} + D_y^2\frac{\partial}{\partial u_{yy}} - D_y^3\frac{\partial}{\partial u_{yyy}} + D_y^4\frac{\partial}{\partial u_{yyyy}} + \cdots \\
& + D_yD_x\frac{\partial}{\partial u_{yx}} - D_y^2D_x\frac{\partial}{\partial u_{yyx}} + D_y^3D_x\frac{\partial}{\partial u_{yyyx}} D_y^4D_x\frac{\partial}{\partial u_{yyyyx}} + \cdots \\
& - D_yD_x^2\frac{\partial}{\partial u_{yxx}} + D_y^2D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{yyxx}} - D_y^3D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{yyyxx}} + D_y^4D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{yyyyxx}} - \cdots \\
& + D_yD_x^3\frac{\partial}{\partial u_{yxxx}} - D_y^2D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{yyxxx}} + D_y^3D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{yyyxxx}} - D_y^4D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{yyyyxxx}} + \cdots \\
& - D_yD_x^4\frac{\partial}{\partial u_{yxxxx}} + D_y^2D_x^4\frac{\partial}{\partial u_{yyxxxx}} - D_y^3D_x^4\frac{\partial}{\partial u_{yyyxxxx}} + D_y^4D_x^4\frac{\partial}{\partial u_{yyyyxxxx}} - \cdots \\
& - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} + D_t^2\frac{\partial}{\partial u_{tt}} - D_t^3\frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + D_t^4\frac{\partial}{\partial u_{tttt}} + \cdots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Ahora aplicando el operador anterior a $\mathcal{L}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} &= \frac{\partial h(u)u_y}{\partial u}v + \frac{\partial r(u)u_{xx}}{\partial u}v + \frac{\partial g(u)u_{yy}}{\partial u}v + \frac{\partial f(u)}{\partial u}v \\
&- D_x\frac{\partial u_x^2}{\partial u_x}v + D_x^2\frac{\partial r(u)u_{xx}}{\partial u_{xx}}v + D_x^4\frac{\partial u_{xxxx}}{\partial u_{xxxx}}v + D_x^2D_y^2\frac{\partial u_{xxyy}}{\partial u_{xxyy}}v \\
&- 2D_x^2D_y^2\frac{\partial}{\partial u_{xxyy}}v - D_y\frac{\partial h(u)u_y^2}{\partial u_y}v + D_y^2\frac{\partial g(u)u_{yy}}{\partial u_{yy}}v - D_y^4\frac{\partial u_{yyyy}}{\partial u_{yyyy}}v. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

5.2.1. Autoadjuntes de la ecuación de KS

En virtud de la Definición 26 (ver Capítulo 4, sección 4.4) y de (5.21) la ecuación adjunta asociada a la ecuación KS (5.18) es

$$\begin{aligned}\Delta^*(x,y,t,\ldots,u_{yyyy}) \quad &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = 2\big(h(u)-g'(u)\big)u_y v_y - g(u)v_{yy} - r(u)v_{xx} + (1-2r'(u))\,u_x v_x \\ &-v\Bigg(f'(u) + \Big(g''(u)-h'(u)u_y\Big)u_y^2 + 2(g'(u)-h(u))u_{yy} + r''(u)u_x^2 \\ &+(2r'(u)-1)u_{xx}\Bigg) + v_{yyyy} + 2v_{xxyy} + v_{xxxx} - v_t = 0. \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Teorema 27. *[29] La EDP (5.18) no es estrictamente autoadjunta.*

Demostración. *Haciendo la sustitución $v=u$ en la ecuación adjunta (5.22) encontrada y luego sustituyendo u_t a partir de la ecuación (5.19) tenemos*

$$\begin{gathered}(h(u)-2g'(u))u_y^2 - 2g(u)u_{yy} + 2u_{yyyy} + \tfrac{1}{2}(1-4r'(u))u_x^2 - 2r(u)u_{xx} \\ -u\Bigg(f'(u) + \Big(g''(u)-h'(u)\Big)u_y^2 + 2\Big(g'(u)-h(u)\Big)u_{yy} + r''(u)u_x^2 + \Big(-1+2r'(u)\Big)u_{xx}\Bigg) \\ +4u_{xxyy} + 2u_{xxxx} - f(u) \equiv 0.\end{gathered}$$

Se puede ver que no existe una elección de funciones f,g,h y r que satisfacen la condición anterior. Por lo tanto la ecuación anterior (5.19) no es estrictamente auto-adjunta.

□

Teorema 28. *[29] La EDP(5.18) es cuasi autoadjunta cuando $f=c_1$, $\quad r=\frac{u}{2}+c_2$ y $h=g'$.*

Teorema 29. *[29] La ecuación (5.18) es autoadjunta no lineal si y sólo si*

1. $$r=\frac{u}{2}+\alpha, \qquad g=\beta u+\gamma, \qquad h=\beta, \quad f=\delta u^2+\epsilon u+\zeta, \qquad (5.23)$$
2. $$r=\frac{u}{2}+\alpha, \qquad h=g', \quad f=\beta u^2+\gamma u+\delta+c\int g(u)du, \quad \beta,c,g''\neq 0, \qquad (5.24)$$
3. $$r=\frac{u}{2}+\alpha, \qquad h=g', \quad f=\beta u+\gamma+c\int g(u)du, \quad ,c,g''\neq 0, \qquad (5.25)$$
4. $$r=\frac{u}{2}+\alpha \qquad h=g', \quad f=\beta u^2+\gamma u+\delta, \quad \beta,g''\neq 0, \qquad (5.26)$$
5. $$r=\frac{u}{2}+\alpha, \qquad h=g', \quad f=\beta u+\gamma \quad g''\neq 0. \qquad (5.27)$$

(5.28)

Demostración. *Ver [29], Teorema 3.3.*

$\square$

Teorema 30. *La ecuación de KS es cuasi-autoadjunta cuando*

$$f = c_1, \quad r = \frac{u}{2} + c_2, \quad h = g'.$$

Demostración. *Ver [29], Teorema 3.2.*

$\square$

5.2.2. Clasificación de los grupos de simetría de la ecuación de KS

A partir de la condición de superficie invariante (5.20) para la ecuación (5.19) se obtiene el sistema de las ecuaciones determinantes, (ver Apéndice de [29]). Al resolver el subsistema que no contiene ninguna de las funciones f, g, h, r obtenemos

$$\begin{aligned}
\xi^1(x,y,t,u) &= \mathcal{F}_{11}(t) - y\mathcal{F}_{13}(t) + \frac{x}{4}\mathcal{F}_1'(t), &(5.29)\\
\xi^2(x,y,t,u) &= \mathcal{F}_{12}(t) + x\mathcal{F}_{13}(t) + \frac{y}{4}\mathcal{F}_1'(t), &(5.30)\\
\xi^1(x,y,t,u) &= \mathcal{F}_1(t), &(5.31)\\
\eta(x,y,t,u) &= \mathcal{F}_{15}(y,t) - \frac{u}{2}\mathcal{F}_1'(t) - \frac{1}{8}x(8\mathcal{F}_{11}'(t) - 8y\mathcal{F}_{13}'(t) + x\mathcal{F}''(t)), &(5.32)
\end{aligned}$$

y las ecuaciones determinantes restantes son

$$\begin{aligned}
r'\mathcal{F}_1'' &= 0,\\
h'\mathcal{F}_1'' &= 0,\\
g'\mathcal{F}_1'' &= 0,\\
r'\mathcal{F}_{13}' &= 0,\\
h'\mathcal{F}_{13}' &= 0,\\
g'\mathcal{F}_{13}' &= 0,\\
r'\mathcal{F}_{11}' &= 0,\\
h'\mathcal{F}_{11}' &= 0,\\
g'\mathcal{F}_{11}' &= 0,\\
f'\mathcal{F}_1'' - \mathcal{F}_1''' &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'\mathcal{F}''_{11} - \mathcal{F}''_{11} &= 0,\\
f'\mathcal{F}'_{13} - \mathcal{F}''_{13} &= 0,\\
(1+2h(u))'\mathcal{F}'_{13} &= 0,\\
(2h(u)-1)'\mathcal{F}_{13} &= 0,\\
h'(2f'\mathcal{F}'_{15} - u\mathcal{F}'_1) &= 0,\\
(g(u)-r(u))\mathcal{F}_{13} &= 0,\\
4'F_{12} + y\mathcal{F}''_1 + 8h(u)\mathcal{F}_{15y} &= 0,\\
8\mathcal{F}_{15}r' + 4(r(u)-ur')\mathcal{F}'_1 &= 0,\\
8\mathcal{F}_{15}g' + 4(g(u)-ug')\mathcal{F}'_1 &= 0,\\
4\mathcal{F}_{15}f' + 6f(u)\mathcal{F}'_1 - 2uf''F_1 + 2u\mathcal{F}''_1 &- r\mathcal{F}''_1 - 4\mathcal{F}_{15t}\\
+4g(u)\mathcal{F}_{15yy} - 4\mathcal{F}_{15yyyy} &= 0.
\end{aligned}
$$

en donde las $\mathcal{F}_i$ son funciones arbitrarias. Entonces, para la ecuación KS (5.18) se presentan 5 subcasos en los que existen leyes de conservación, mostraremos un caso y para más información ver [29].

5.2.3. Leyes de conservación para la EDP (5.18).

De acuerdo a [29] (Tabla 1) las únicas simetrías puntuales admitidas por la clasificación de autoadjuntes son $X_1 = \partial_t$ $X_2 = \partial_x$, $X_3 = \partial_y$. Los vectores conservados en cada caso de dicha clasificación son

- Caso 1 (Cuasi auto-adjunta).

  Según el Teorema 27, el caso cuasi autoadjunto es

  $$u_t = \alpha + g'u_y^2 + g(u)u_{yy} - u_{yyyy} + \frac{u_x^2}{2} + \left(\beta + \frac{1}{2}u\right)u_{xx} - 2u_{xxyy} - u_{xxxx}$$

  con lagrangiano formal $\mathcal{L} = c\Delta(x, y, t, u, u_x, ..., u_{yyyy})$. Usando la formula (4.119) para calcular los vectores conservados para cada una de las tres simetrías puntuales mencionadas anteriormente, se obtienen tres vectores triviales (Ver Definición 34) conservados.

- Caso 2 $\big($Auto-adjunta no lineal$\big)$. En esta situación

  $$u_t = \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \left(\frac{u}{2}\right) + \alpha(u_{xx} + u_{yy}) - u_{xxxx} - 2u_{xxxy} - u_{yyyy} + \delta u^2 + \varepsilon u + \zeta, \quad (5.33)$$

el cual también admite la simetría $X_4 = x\partial y - u\partial_x$.

Siguiendo el Teorema 29, a cada uno de los cinco casos posibles autoadjuntos no lineales, la fórmula (4.119) se aplica utilizando cada una de sus simetrías puntuales admitidas. El vector conservado se da en la forma (A^1, A^2, A^3) dando la ley de conservación $D_xA^1 + D_yA^2 + D_tA^3 = 0$ para cada solución del caso de la ecuación (5.18) estudiada.

- Caso 3. Cuando $r = \frac{u}{2} + \gamma$, $h = g'$, $f = \alpha u + \beta$, $g'' \neq 0$, tenemos que

$$u_t = u_t + \alpha u + \beta g' u_y^2 + g(u)u_y y - u_{yyy} + \frac{u_x^2}{2} + \left(\gamma + \frac{1}{2}u\right) u_{xx} - 2u_{xxyy} - u_{xxxx}.$$

Aquí la variable dependiente v es

$$v = e^{-\alpha t}((c_1 + c_2)y + c_3 + c_4 x).$$

Además el álgebra de simetría de Lie admitido por la ecuación de KS se extiende por los siguientes tres generadores infinitesimales

$$X^{(1)} = \partial x, \quad X^{(2)} = \partial y, \quad X^{(3)} = \partial t.$$

Usando estos generadores de simetría y aplicando la definición de vector conservado (4.119) y la del lagrangiano formal obtenemos conjuntos de cantidades conservadas para cada una de las simetrías puntuales.

Para ∂_x los vectores de una ley de conservación son

$$\begin{aligned}
A^1 &= \frac{1}{2}e^{-\alpha t}\left(2c_2 x g(u)u_y - \beta(2\beta x + 2\gamma + u)u_x - 4u_{xyy} - 2u_{xxx}\right), \\
A^2 &= e^{-\alpha t}\left(\beta u_{yyy} - c_2 u_{yy} - g(u)(\beta u_y + c_2 x u_x)\right), \\
A^3 &= e^{-\alpha t}\beta u.
\end{aligned}$$

Luego con ∂_y los vectores de la ley de conservación están dados por

$$\begin{aligned}
A^1 &= \frac{1}{4}e^{-\alpha t}\left(c_2 u^2 - 4\gamma c u_x + 2u(2\gamma c_2 - c u_x) - 4c_2 u_{xx} + 4c_{xxx}\right), \\
A^2 &= e^{-\alpha t}c\left(u_{yyy} + 2u_{xxy} - \beta y - g(u)u_y\right), \\
A^3 &= e^{-\alpha t}cu.
\end{aligned}$$

Y con ∂_t los vectores para una ley de conservación están dados por

$$\begin{aligned}
A^1 &= \frac{\alpha}{4}e^{-\alpha t}\left(2(auu_x - 2\gamma\beta) + 4\gamma a u_x + 4\beta u_{xx} - \beta u^2 - 4a u_{xxx}\right), \\
A^2 &= e^{-\alpha t}\left(g(u)(\alpha a u_y - c u_t) + \alpha(c u_{yy} - a u_{yyy} + 2c u_{xx} - 2a u_{xxy})\right), \\
A^3 &= e^{-\alpha t}\left(c g(u)u_y - a(\beta + \alpha u)\right).
\end{aligned}$$

donde para cada caso

$$
\begin{aligned}
a &= (c_1 + c_2 x) + cos(\sqrt{cy} + (c_3 + c_4 x) sin(\sqrt{cy}), \\
\beta &= c_2 cos\sqrt{cy} + c_4 sin(\sqrt{cy}), \\
c &= (c_3 + c_4 x) cos(\sqrt{cy}) - (c_q + c_2 x) sin(\sqrt{cy}).
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

5.3. Ecuación de Kudryashov-Sinelshchikov

En 2010, Kudryashov y Sinelshchikov (K-S) [42], [44]. Introdujeron la ecuación

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} - (u u_{xx})_x - \beta u_x u_{xx} = 0 \tag{5.35}$$

en donde u es una densidad la cual modeló de transferencia de calor y viscosidad, α, β son parámetros reales. La ecuación (5.35) se llama ecuación de Kudryashov-Sinelshchikov y es usada para describir las ondas de presión en una mezcla de burbujas de líquido y gas teniendo en cuenta la viscosidad del líquido y la transferencia de calor; esta es la generalización de la ecuación de KdV y BKdV y similares, pero no idéntica a la ecuación de Camassa-Holm. La ecuación (5.35) fue estudiada por muchos investigadores a través de varios métodos [109]- [116]. Además, en las situaciones más realistas, la siguiente ecuación tridimensional de Kudryashov-Sinelshchikov (KSg)

$$u_{tx} + (u_x)^2 + u u_{xx} + u_{xxxx} - \chi_x u_{xx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{5.36}$$

se ha considerado para describir las características físicas de las ondas no lineales en un líquido burbujeante, donde u representa la densidad del líquido burbujeante, la cantidad escalar χ depende de la viscosidad cinemática del líquido burbujeante, x, y y z son las coordenadas espaciales escaladas, y t es la coordenada de tiempo escalada. En el caso sin el último término, la ecuación (5.36) se reduce a la ecuación bidimensional KdV-Burgers, y si además $\chi = 0$ (es decir, el líquido es ideal), obtenemos la ecuación Kudryashov-Sinelshchikov (5.35).

Igual que en la sección anterior, utilizando el mecanismo de la teoría de Lie, buscaremos leyes de conservación asociadas a la ecuación de K-Sg.

5.3.1. Simetrías de la ecuación de Kudryashov-Sinelshchikov general

En primer lugar, consideremos un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones infinitesimales

$$x = x + \varepsilon \xi_1(x, y, z, t, u), \tag{5.37}$$

$$y = y + \varepsilon \xi_2(x, y, z, t, u), \tag{5.38}$$

$$z = z + \varepsilon \xi_3(x, y, z, t, u), \tag{5.39}$$

$$t = t + \varepsilon\xi_4(x,y,z,t,u), \tag{5.40}$$

$$u = u + \varepsilon\eta(x,y,z,t,u). \tag{5.41}$$

El campo vectorial asociado con el grupo de transformaciones anterior se puede escribir como

$$X = \xi_1(x,y,z,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2(x,y,z,t,u)\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3(x,y,z,t,u)\frac{\partial}{\partial z}+\xi_4(x,y,z,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\eta_(x,y,z,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.42}$$

El grupo de simetría de la ecuación (5.36) será generado por el campo vectorial de (5.42). Aplicando la cuarta extensión $X^{(4)}$ a (5.36), encontramos que las funciones coeficiente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ y η deben satisfacer la condición de simetría

$$u_{xx}\eta + 2u_x\eta^x + \eta^{xt} + u\eta^{xx} + \frac{1}{2}(\eta^{yy} + \eta^{zz}) - \xi\eta^{xxx} + \eta^{xxxx} = 0, \tag{5.43}$$

en donde, $\eta, \eta^x, \eta^{xt}, \eta^{xx}, \eta^{yy}, \eta^{zz}, \eta^{xxx}, \eta^{xxxx}$ son los coeficientes de la cuarta extensión $X^{(4)}$. Más aún, tenemos

$$\eta^x = D_x\eta - u_xD_x\xi_1 - u_yD_x\xi_2 - u_zD_x\xi_3 - u_tD_x\xi_4, \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}\eta^{xt} = {} & D_tD_x\eta - u_{xt}D_x\xi_1 - u_xD_tD_x\xi_1 - u_{xx}D_t\xi_1 - u_{yt}D_x\xi_2 - u_yD_tD_x\xi_2 - u_{xy}D_t\xi_2 \\ & -u_{zt}D_x\xi_3 - u_zD_tD_x\xi_3 - u_{xz}D_t\xi_3 - u_{tt}D_x\xi_4 - u_tD_tD_x\xi_4 - u_{xt}D_t\xi_4,\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}\eta^{xx} = {} & D_x^2\eta - 2u_{xx}D_x\xi_1 - u_xD_{xy}^2 2u_{xy}D_x\xi_2 - u_yD_x^2\xi_2 - 2u_{xz}D_x\xi_3 - u_zD_x^2\xi_3 \\ & -2u_{xt}D_x\xi_4 - u_tD_x^2\xi_4,\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}\eta^{xxx} = {} & D_x^3\eta - 3u_{xxx}D_x\xi_1 - 3u_{xx}D_x^2\xi_1 - u_xD_x^3\xi_1 - 3u_{xxy}D_x\xi_2 - 3u_{xy}D_x^2\xi_2 - u_yD_x^3\xi_2 \\ & -3u_{xxz}D_x\xi_3 - 3u_{xz}D_x^2\xi_3 - u_zD_x^3\xi_3 - 3u_{xxt}D_x\xi_4 - 3u_{xt}D_x\xi_4 - u_tD_x^3\xi_4,\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}\eta^{xxxx} = {} & D_x^4\eta - 4u_{xxxx}D_x\xi_1 - 6u_{xxx}D_x^2\xi_1 - 4u_{xx}D_x^3\xi_1 - u_xD_x^4\xi_1 - 4_{xxxy}D_x\xi_2 \\ & -6u_{xxy}D_x^2\xi_2 - 4u_{xy}D_x^3\xi_2 - u_yD_x^4\xi_2 - 4u_{xxxz}D_x\xi_3 - 6u_{xxz}D_x^2\xi_3 \\ & -4u_{xz}D_x^3\xi_3 - u_zD_x^4\xi_3 - 4u_{xxxt}D_x\xi_4 - 6u_{xxt}D_x^2\xi_4 - 4u_{xt}D_x^3\xi_4 - u_tD_x^4\xi_4,\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\eta^y = D_y\eta - u_xD_y\xi_1 - u_yD_y\xi_2 - u_zD_y\xi_3 - u_tD_y\xi_4, \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}\eta^{yy} = {} & D_y^2\eta - 2u_{xy}D_y\xi_1 - u_xD_y^2\xi_1 - 2u_{yy}D_y\xi_2 - u_yD_y^2\xi_2 - 2u_{yz}D_y\xi_3 \\ & -u_zD_y^2\xi_3 - 2u_{yt}D_y\xi_4 - u_tD_y^2\xi_4,\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\eta^z = D_z\eta - u_xD_z\xi_1 - u_yD_z\xi_2 - u_zD_z\xi_3 - u_tD_z\xi_4, \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}\eta^{zz} = {} & D_z^2\eta - 2u_{xz}D_z\xi_1 - u_xD_z^2\xi_1 - 2u_{yz}D_z\xi_2 - u_yD_z^2\xi_2 - 2u_{zz}D_z\xi_3 \\ & -u_zD_z^2\xi_3 - 2u_{zt}D_z\xi_4 - u_tD_z^2\xi_4,\end{aligned} \tag{5.52}$$

Sustituyendo (5.44)-(5.52) en (5.43), combinado con la ecuación (5.36) y al igualar los coeficientes de los diversos monomios con la primera, segunda, tercera y otras derivadas parciales y las diversas potencias de u, se encuentran [17] las ecuaciones determinantes para el grupo de simetría de la ecuación (5.36). Los cálculos estándares del grupo de simetría conducen a las siguientes formas de las funciones coeficiente:

- Caso 1

$$\begin{aligned} \chi &= 0, \quad \xi_1 = -\frac{1}{2}C_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t), \quad \xi_2 = -C_1 y - C_3 z + F_1(t), \\ \xi_3 &= -C_1 z + C_3 y + F_2(t), \quad \xi_4 = -\frac{3}{2}C_1 t + C_2, \quad \eta = C_1 u, \end{aligned} \tag{5.53}$$

  en donde, $F_2(t), F_3(t), F_4(t)$ son funciones arbitrarias de t, C_1, C_2, C_3 son constantes arbitrarias.

- Caso 2

$$\begin{aligned} \chi &= \chi, \quad \xi_1 = -F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t), \quad \xi_2 = -C_2 z, \\ \xi_3 &= C_2 y + F_2(t), \quad \xi_4 = C_1, \quad \eta = 0, \end{aligned} \tag{5.54}$$

en donde $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ son funciones arbitrarias de t, y C_1 C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

Así, mediante el análisis de simetría de Lie, obtenemos todos los campos vectoriales de la ecuación (5.36) como sigue

1. Para el Caso 1, la simetría de la ecuación (5.36) puede ser escrito como

$$X = X_1(F_1) + X_2(F_3) + X_3(F_3) + X_4 + X_5 + X_6, \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned} X_1(F_1) &= -F_1' y\frac{\partial}{\partial x} + F_1\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(F_2) = -F_2' z\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3(F_3) = F_3\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 &= -\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{3}{2}t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

El álgebra de Lie asociada entre estos campos vectoriales es

$$\begin{aligned} [X_i, X_i] &= 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6, \\ [X_1, X_2] &= [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = [X_3, X_5] = [X_5, X_6] = 0, \quad [X_1, X_4] = X_1\Big(-F_1 + \frac{3}{2}tF_1'\Big), \\ [X_1, X_5] &= X_2(F_1),\ [X_1, X_6] = X_1(-F_1'),\ [X_2, X_4] = X_2\Big(-F_2 + \frac{3}{2}tF_2'\Big),\ [X_2, X_5] = X_3(yF_2'), \\ [X_2, X_6] &= X_2(-F_2'),\ [X_3, X_4] = X_3\Big(-\frac{1}{2}F_3 + \frac{3}{2}tF_3'\Big),\ [X_3, X_6] = X_3(-F_3'),\ [X_4, X_6] = \frac{3}{2}X_6, \end{aligned}$$

que es un álgebra de Lie de simetrías de dimensión infinita.

2. Para el Caso 2, la simetría de la ecuación (5.35) puede ser escrito como

$$X = X_1(F_1) + X_2(F_3) + X_3(F_3) + X_4 + X_5, \tag{5.56}$$

en donde,

$$\begin{aligned} X_1(F_1) &= -F_1' y \frac{\partial}{\partial x} + F_1 \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(F_2) = -F_2' z \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3(F_3) = F_3 \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_4 &= -z \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_5 = z \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

El álgebra de Lie asociada entre estos campos vectoriales es

$$\begin{aligned} [X_i, X_i] &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \\ [X_1, X_2] &= [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = [X_3, X_4] = [X_3, X_5] = 0, \\ [X_1, X_4] &= X_2(F_1),\ [X_1, X_5] = X_1(-F_1),\ [X_2, X_4] = X_1(-F_2'),\ [X_2, X_5] = X_2(-F_2), \end{aligned}$$

que también es un álgebra de simetrías de dimensión infinita.

5.3.2. Autoadjuntes de la ecuación de KSg.

Definimos el lagrangiano asociado a la ecuación (5.36)

$$\mathcal{L} = v(x, y, z, t)\Big(u_{tx} + (u_x)^2 + uu_{xx} + u_{xxxx} - \chi_x u_{xx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})\Big). \tag{5.57}$$

Ahora por la definición del operador de Euler-Lagrange (4.23) tenemos que dicho operador para la presente situación es

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + D_x^4 \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \cdots \\ &+ D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} - D_x^2 D_y \frac{\partial}{\partial u_{xxy}} + D_x^3 D_y \frac{\partial}{\partial u_{xxxy}} - D_x^4 D_y \frac{\partial}{\partial u_{xxxxy}} + \cdots \\ &- D_x D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{xyy}} + D_x^2 D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{xxyy}} - D_x^3 D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{xxxyy}} + D_x^4 D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{xxxxyy}} - \cdots \\ &+ D_x D_y^3 \frac{\partial}{\partial u_{xyyy}} - D_x^2 D_y^3 \frac{\partial}{\partial u_{xxyyy}} + D_x^3 D_y^3 \frac{\partial}{\partial u_{xxxyyy}} - D_x^4 D_y^3 \frac{\partial}{\partial u_{xxxxyyy}} + \cdots \\ &- D_x D_y^4 \frac{\partial}{\partial u_{xyyyy}} + D_x^2 D_y^4 \frac{\partial}{\partial u_{xxyyyy}} - D_x^3 D_y^4 \frac{\partial}{\partial u_{xxxyyyy}} + D_x^4 D_y^4 \frac{\partial}{\partial u_{xxxxyyyy}} - \cdots \\ &- D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} - D_y^3 \frac{\partial}{\partial u_{yyy}} + D_y^4 \frac{\partial}{\partial u_{yyyy}} + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad D_y D_x \frac{\partial}{\partial u_{yx}} - D_y^2 D_x \frac{\partial}{\partial u_{yyx}} + D_y^3 D_x \frac{\partial}{\partial u_{yyyx}} D_y^4 D_x \frac{\partial}{\partial u_{yyyyx}} + \cdots \\
&- \quad D_y D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{yxx}} + D_y^2 D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{yyxx}} - D_y^3 D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{yyyxx}} + D_y^4 D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{yyyyxx}} - \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad D_y D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{yxxx}} - D_y^2 D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{yyxxx}} + D_y^3 D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{yyyxxx}} - D_y^4 D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{yyyyxxx}} + \cdots \\
&- \quad D_y D_x^4 \frac{\partial}{\partial u_{yxxxx}} + D_y^2 D_x^4 \frac{\partial}{\partial u_{yyxxxx}} - D_y^3 D_x^4 \frac{\partial}{\partial u_{yyyxxxx}} + D_y^4 D_x^4 \frac{\partial}{\partial u_{yyyyxxxx}} - \cdots \\
&- \quad D_t \frac{\partial}{\partial u_t} + D_t^2 \frac{\partial}{\partial u_{tt}} - D_t^3 \frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + D_t^4 \frac{\partial}{\partial u_{tttt}} + \cdots \\
&+ \quad D_t D_x \frac{\partial}{\partial u_{tx}} - D_x^2 D_y \frac{\partial}{\partial u_{ttx}} + D_t^3 D_x \frac{\partial}{\partial u_{tttx}} - D_t^4 D_x \frac{\partial}{\partial u_{ttttx}} + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

en donde, los únicos términos que sobreviven son los marcados en azul. Así, la ecuación adjunta de (5.36) está dada por

$$
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = -u_{xx}v_x + u_x v_{xx} + v_{xxxx} - \chi v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_{yy} + v_{zz}\right) + v_{tx}. \tag{5.58}
$$

Teorema 31. *La EDP (5.36) es estrictamente autoadjunta.*

Demostración. *Si hacemos la sustitución de $v = u$ tenemos*

$$
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = -u_{xx}u_x + u_x u_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}\left(u_{yy} + u_{zz}\right) + u_{tx}, \tag{5.59}
$$

es decir, la ecuación K-S (5.36) es estrictamente auto-adjunta, por la Definición 27.

□

Proposición 9. *Sea $\chi = 0$ con generadores infinitesimales dados por (5.55). Entonces sus vectores conservados son de la forma*

$$
\begin{aligned}
A^1 = \quad & \Big[- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big] \left(v(u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})) \right) \\
+ \quad & c_1 - \Big[\left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right) u_z \Big] \Big[v_x u_x + v u_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z) \Big] \\
- \quad & \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big) u_{xx} \Big] \Big[v u_x + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) + v_t \Big] \\
+ \quad & \Big[c_1 y u_y - c_1 u_t \Big] \Big[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t \Big]
\end{aligned}
$$

$$
+ \quad \Big[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\Big]\Big[v\Big], \tag{5.60}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2 = \quad & \Big[-c_2 z + F_1(t)\Big]\Big[v(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big] \\
+ \quad & \Big[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\Big] \\
& \Big[vu_x\Big] \\
+ \quad & \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_z) + v_t\Big] \\
+ \quad & \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v_t\Big],
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

$$
\begin{aligned}
A^3 = \quad & \Big[-c_2 z + F_1(t)\Big]\Big[v(x,y,z,t)(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big] \\
+ \quad & \Big[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\Big] \\
& \Big[\frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\,\Big[v + \frac{1}{2}\,(v_y + v_z v) + v_t\Big] \\
+ \quad & \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big] \\
+ \quad & \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v\Big],
\end{aligned} \tag{5.62}
$$

$$
\begin{aligned}
A^4 = \quad & \Big[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\Big] \\
& \Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\,\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_z) + v_t\Big] \\
& + \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[v\Big].
\end{aligned} \tag{5.63}
$$

Demostración. *A partir de la expresión (4.119) tenemos*

$$
\begin{aligned}
A^i \quad = \quad & \xi_i + W\mathcal{L}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\
+ \quad & D_i(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} + \cdots\right] + D_j D_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots
\end{aligned} \tag{5.64}
$$

en donde, $\mathcal{L}$ *está dado por (5.57) y* W *es de la forma* $W^\alpha = \eta_\alpha - \xi_j u_j^\alpha$*, pero en nuestro caso* $\alpha = 1$*, es decir* $W = \eta - \xi_j u_j$*.*

Primero, al sustituir cada ξ_i, η *en* W *podemos calcular no solo* W*, si no también* $D_x(W)$*,* $D_{xx}(W)$*,* $D_{xxx}(W)$*,* $D_{xxxx}(W)$*,* $D_y(W)$*.... Entonces para cada expresión tenemos*

$$
\begin{aligned}
W = \quad & \left(-\frac{3}{2}c_1 t + c_2\right) + \left(\frac{1}{2}c_1 x + F_1'(t) + F_2'(t)z - F_3(t)\right) u_x \\
& + (c_1 y + c_3 y - F_1(t))\, u_y - (c_1 z - c_3 - F_2(t))\, u_z - c_1 u u_t., \\
D_x(W) = \quad & \frac{1}{2}c_1 u_x + \frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1 u_t u_x, \\
D_x^2(W) = \quad & \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1 u_t = c_1 + c_1 t, \\
D_x^3(W) = \quad & 0, \\
D_{xxxx}^4(W) = \quad & 0, \\
D_y(W) = \quad & F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t, \\
D_y^2(W) = \quad & c_1 u_y - c_1 u_t, \\
D_y^3(W) = \quad & c_1 + c_1 = 2c_1, \\
D_y^4(W) = \quad & 0, \\
D_z(W) = \quad & F_2'(t)u_x + c_3 u_y + c_1 u_z + c_1 z - c_3 y - F_2(t) + c_1 u_z u_t, \\
D_z^2(W) = \quad & c_1 + c_1 + c_1 u_t = 2c_1 + u_t, \\
D_z^3(W) = \quad & 0, \\
D_z^4(W) = \quad & 0, \\
D_t(W) = \quad & -\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u, \\
D_t^2(W) = \quad & \Big(F'''(t)y + F_2'''(t)z - F_3''(t)\Big)u_x - F_1''(t)u_y - F_2''(t)u_z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t^2(W) = \quad & \Big(F''''(t)y + F_2''''(t)z - F_3'''(t)\Big)u_x - F_1'''(t)u_y - F_2'''(t)u_z, \\
D_t^4(W) = \quad & \Big(F'''''(t)y + F_2'''''(t)z - F_3''''(t)\Big)u_x - F_1''''(t)u_y - F_2''''(t)u_z, \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

Así para calcular A^1 *se obtiene que es de la forma*

$$
\begin{aligned}
A^1 \;&=\; \xi_1 \mathcal{L} + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\
&+\; D_x(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} + \cdots\right] + D_{xx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \ldots\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

sustituyendo y reemplazando cada término tenemos

$$
\begin{aligned}
A^1 &= -\left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\mathcal{L} \\
&+ W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_{xx}(W)\left[D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_{xxx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- D_y(W)\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{yy}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_z(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{zz}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_t(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_{xx} + D_xvu_x + D_x^3(v) + \frac{1}{2}(D_yv + D_zv)\right] \\
&- \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[vu_x + D_xv + \frac{1}{2}\left(D_yv + D_zv\right) + D_tv\right] \\
&+ \left[c_1y - c_3z + F_1(t) - c_1u_t\right]\left[D_x^3v + \frac{1}{2}(D_yv + D_zv)\right] \\
&+ \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[D_yv + D_zv + D_tv\right] \\
&+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[v + D_zv + D_tv\right] \\
&+ \left[-\frac{3}{2}c_1 + \left(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\right)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\right]\left[v\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_{xx} + u_xv_x + u_{xx}v + u_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right] \\
&- \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[vu_x + v_x + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right)\right] \\
&+ \left[c_1y - c_3z + F_1(t) - c_1u_t\right]\left[v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right] \\
&+ \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[u_y + v_z + v_t\right] \\
&+ \left[-\frac{3}{2}c_1 + \left(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\right)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\right]\left[v\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_{xx} + u_xv_x + u_{xx}v + u_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right] \\
&- \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[vu_x + v_x + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[c_1 y - c_3 z + F_1(t) - c_1 u_t\Big]\Big[v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[u_y + v_z + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v + v_z + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\Big]\Big[v\Big]
\end{aligned}
$$

Luego para calcular A^2, primero tenemos que este es de la forma

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \xi_2 \mathcal{L} + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\
&+ \quad D_x(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} + \cdots\right] + D_{xx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots,
\end{aligned}
$$

sustituyendo y reemplazando cada término que definimos anteriormente tenemos

$$
\begin{aligned}
A^2 &= -\left(c_1 y - c_3 z + F_1(t)\right)\mathcal{L} \\
&+ \quad W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad D_x(W)\left[-D_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad D_{xx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad D_{xxx}(W)\left[D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad D_y(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{yy}(W)\left[D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad D_z(W)\left[D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{zz}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= -\left(c_1 y - c_3 z + F_1(t)\right)\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad \Big[-\frac{1}{2}c_1 u_x + \frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1 u_t u_x\Big] \\
&\quad \left[-D_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad \Big[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1 u_t = c_1 + c_1 t\Big]\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\left[D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\right]\left[D_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \left[c_1 + c_1 + c_1u_t = 2c_1 + u_t\right]\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= -\left(c_1y - c_3z + F_1(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_x - D^3v - \frac{1}{2}\left(D_yv + D_zv\right) - D_tv\right] \\
&- \left[-\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right] \\
&\quad \left[-D_x^3v - \frac{1}{2}\left(D_yv + D_zv\right) - D_tv\right] \\
&+ \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1u_t = c_1 + c_1t\right]\left[D_x^4v - \frac{1}{2}\left(D_yv + D_zv\right) - D_tv\right] \\
&- \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + D_zv\right) - D_tv\right] \\
&+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}D_zv - D_tv\right] \\
&+ \left[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\right]\left[D_tv\right] \\
&+ \left[c_1 + c_1 + c_1u_t = 2c_1 + u_t\right]\left[v\right] \\
&= -\left(c_1y - c_3z + F_1(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_x - v_{xxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&- \left[-\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[v_{xxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_zz\right) - v_t\right] \\
&+ \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1u_t = c_1 + c_1t\right]\left[v_{xxxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&- \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) - v_v\right] \qquad (5.65) \\
&+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}v_z - v_t\right] + \left[c_1 + c_1 + c_1u_t = 2c_1 + u_t\right]\left[v\right] \\
&= -\left(c_1y - c_3z + F_1(t)\right)\mathcal{L} + W\left[vu_x - v_{xxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&- \left[-\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right] \\
&\quad \left[v_{xxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_zz\right) - v_t\right] + \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1u_t = c_1 + c_1t\right]\left[v_{xxxx} - \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&- \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) - v_v\right] \\
&+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}v_z - v_t\right] + \left[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\right]\left[v_t\right] \\
&+ \left[2c_1 + u_t\right]\left[v\right].
\end{aligned}
$$

Continuando con el mismo procedimiento para calcular A^3 tenemos que este es de la forma

$$\begin{aligned} A^3 &= \xi_3\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} + D_jD_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\ &+ D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} + \cdots\right] + D_{xx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots, \end{aligned}$$

sustituyendo y reemplazando cada término obtenemos

$$\begin{aligned} A^3 &= -\left(-c_1z + c_3y + F_2(t)\right)\mathcal{L} \\ &+ W\left[-D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ D_x^2(W)\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ D_x^3(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - D_y(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ D_y^2(W)\left[-D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_z(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - \left(-c_1z + c_3y + F_2(t)\right)\mathcal{L} \\ &+ W\left[-D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} - D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right] \\ &\quad\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1u_t = c_1 + c_1t\right]\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &- \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[-D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &+ \left[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\right]\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\ &= -\left(-c_1z + c_3y + F_2(t)\right)\mathcal{L} + W\left[v_{xxx}\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\ &+ \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right] \\ &\quad\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] + \left[\frac{1}{2}c_1 + c_1 + c_1t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\ &- \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[v - v_t\right] \\ &+ \left[c_1u_y - c_1u_t\right]\left[v_t\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\Big]\Big[v\Big] \\
&= \quad -\left(-c_1z + c_3y + F_2(t)\right)\mathcal{L} + W\left[v_{xxx}\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&+ \quad \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right] \\
&\qquad \left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] + \left[\frac{1}{2}c_1 + c_1 + c_1t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&- \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[v - v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[F_2'(t)u_x + c_3u_y + c_1u_z + c_1z - c_3y - F_2(t) + c_1u_zu_t\Big]\Big[v\Big].
\end{aligned}
$$

Por último para calcular A^4 tenemos que este es de la forma

$$
\begin{aligned}
A^4 &= \xi_4\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} + D_jD_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\
&+ \quad D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^{\alpha}} - D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}} + \cdots\right] + D_{xx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}} - \ldots\right] + \cdots,
\end{aligned}
$$

así al sustituir y reemplazar cada término obtenemos

$$
\begin{aligned}
A^4 &= -\left(c_1u\right)\mathcal{L} + W\left[-D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad D_x(W)\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad D_x^2(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad D_{xx}^3(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - D_y(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= -\left(c_1u\right)\mathcal{L} + W\left[-D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} - D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} - D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ \quad \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_1u_t = c_1 + c_1t\right]\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&- \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= -\left(c_1u\right)\mathcal{L} + W\left[-\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right] \\
&+ \quad \left[\frac{1}{2}c_1u_x + \frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1u_tu_x\right]\left[-\frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) - v_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[c_1 + c_1 u_t\Big]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) - v_t\right] \\
&- \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[v\Big] \\
&= \quad -(c_1 u)\,\mathcal{L} + W\left[-\frac{1}{2}(v_y + v_z) - v_t\right] \\
&+ \quad \left[\frac{1}{2}c_1 u_x + \frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) + c_1 u_t u_x\right]\left[-\frac{1}{2}(v_y + v_z) - v_t\right] \\
&+ \quad \Big[c_1 + c_1 u_t\Big]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) - v_t\right] \\
&- \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[v\Big].
\end{aligned}
$$

Continuando con los cálculos y simplificando concluimos que

$$
\begin{aligned}
A^1 &= (-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t))\left(v(u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right) \\
&+ \quad c_1 - \Big[(-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\left[v_x u_x + v u_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right] \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\left[v u_x + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_t\right] \\
&+ \quad \Big[c_1 y u_y - c_1 u_t\Big]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\right] \\
&+ \quad \left[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\right]\Big[v\Big]. \\
A^2 &= \Big(-c_2 z + F_1(t)\Big)\left(v(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right) \\
&+ \quad \left[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\right][v u_x] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\right] \\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v_t\Big]. \\
A^3 &= \Big(-c_2 z + F_1(t)\Big)\left(v(x,y,z,t)(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right) \\
&+ \quad \left[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\right] \\
&\quad\quad \left[\frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\right] \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\left[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z v) + v_t\right] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v\Big].\\
A^4 \quad &= \quad \Bigg[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\Bigg]\\
&\quad \Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\,\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_z) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[v\Big].
\end{aligned}
$$

□

Proposición 10. *Si $\chi \neq 0$ en la ecuación (5.36), con generadores infinitesimales dados por (5.56) Entonces, esta ecuación tiene como vectores conservados a*

$$
\begin{aligned}
A^1 \quad &= \quad \Big(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)\,\Big(v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big)\\
&+ \quad c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\\
&\quad \Big[vu_{xx} + v_xu_x + vu_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\,\Big[vu_x + \chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\,(v_y + v_zv) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\,\Big[\chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\,(v_y + v_zv) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\,(v_y + v_zv) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_zv) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\Big]\Big[v\Big],
\end{aligned} \tag{5.66}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2 \quad &= \quad (-c_2z + F_1(t))\,\Big(v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big)\\
&+ \quad c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\,u_y + (c_2 + F_2(t))\,u_z\Big]\\
&\quad \Big[vu_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\,\Big[\chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}\,(v_y + v_zv) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\,\Big[v + \frac{1}{2}\,(v_y + v_z) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_z) + v_t\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v_t\Big], && (5.67)\\
A^3 \quad &= \quad (c_2 y + F_2(t))\Big(v(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big)\\
&+ \quad c_1 - \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\\
&\quad \Big[\chi v + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[v + \frac{1}{2}\,(v_y + v_z v) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v\Big],
\end{aligned}
$$

(5.68)

$$
\begin{aligned}
A^4 \quad &= \quad c_1 - \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\Big]\\
&\quad \Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] - \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}\,(v + v_z) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[v\Big].
\end{aligned}
$$

(5.69)

Demostración. *Igual que en el caso anterior y por la expresión (4.119) nuestros vectores A^i son de la forma*

$$
\begin{aligned}
A^i \quad &= \quad \xi_i \mathcal{L} + W\mathcal{L}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right]\\
&+ \quad D_i(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^{\alpha}_{ij}} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^{\alpha}_{ijk}} + \cdots\right] + D_j D_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^{\alpha}_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots, \qquad (5.70)
\end{aligned}
$$

con nuestro caso es con $\alpha = 1$, tenemos que $W = \eta - \xi_j u_j$, y además $\mathcal{L}$ con dado por (5.57). Calculando W, $D_x(W)$, $D_{xx}(W)$, $D_{xxx}(W)$, $D_{xxxx}(W)$, $D_y(W)$..., en cada expresión obtenemos

$$
\begin{aligned}
W = &\quad c_1 - \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\Big]\\
D_x(W) = &\quad \Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\\
D_x^2(W) = &\quad \Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_x^3(W) &= \Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxxx},\\
D_x^4(W) &= \Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxxxx},\\
D_y(W) &= -F'(t)u_x + (c_2 z - F_1(t))\,u_{yy}, -c_2 z u_z\\
D_y^2(W) &= (c_2 z - F_1(t))\,u_{yyy},\\
D_y^3(W) &= (c_2 z - F_1(t))\,u_{yyyy},\\
D_y^4(W) &= (c_2 z - F_1(t))\,u_{yyyyy},\\
D_z(W) &= F_2'(t)u_x + c_2 u_y - (c_2 y + F_2(t))\,u_{zz}\\
D_z^2(W) &= (c_2 y + F_2(t))\,u_{zzz}\\
D_z^3(W) &= (c_2 y + F_2(t))\,u_{zzzz},\\
D_z^4(W) &= (c_2 y + F_2(t))\,u_{zzzz},\\
D_t(W) &= (-F_1''(t)y - F_2''(t)z + F_3'(t))\,u_x + F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z,\\
D_t^2(W) &= (-F_1'''(t)y - F_2'''(t)z + F_3''(t))\,u_x + F_1''(t)u_y - F_2''(t)u_z,\\
D_t^3(W) &= (-F_1''''(t)y - F_2''''(t)z + F_3'''(t))\,u_x + F_1'''(t)u_y - F_2'''(t)u_z,\\
D_t^4(W) &= (-F_1'''''(t)y - F_2'''''(t)z + F_3''''(t))\,u_x + F_1''''(t)u_y - F_2''''(t)u_z,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos los vectores conservados. Para el caso de A^1 este es de la forma

$$
\begin{aligned}
A^1 &= \xi_1\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} + D_jD_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right]\\
&+ D_i(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} + \cdots\right] + D_jD_k(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots, \qquad (5.71)
\end{aligned}
$$

sustituyendo y reemplazando cada término tenemos

$$
\begin{aligned}
A^1 &= (-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t))\,\mathcal{L}\\
&+ W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} + D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ D_{xx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ D_{xxx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad D_y(W)\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}}+D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]+D_{yy}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}}+D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ \quad D_z(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]+D_{zz}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]+D_t(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&= \quad \left(\frac{1}{2}c_1x-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\right)\mathcal{L}+W\left[vu_{xx}+D_xvu_x+D_x^3(v)+\frac{1}{2}(D_yv+D_zv)\right]\\
&- \quad \left[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[vu_x+D_x^2\chi v-D_x^3v+\frac{1}{2}\left(D_yv+D_zv\right)+D_tv\right]\\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\chi v-D_x^3v+\frac{1}{2}\left(D_yv+D_zv\right)+D_tv\right]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x+c_1yu_y+c_1y+c_3+F_1(t)+c_3u_z+u_yc_1u_t\Big]\Big[D_yv+D_zv+D_tv\Big]\\
&+ \quad \Big[c_1u_y-c_1u_t\Big]\Big[v+D_zv+D_tv\Big]\\
&+ \quad \left[-\frac{3}{2}c_1+\Big(F''(t)y+F_2''(t)z-F_3'(t)\Big)u_x-F_1'(t)u_y-F_2'(t)u_z+c_1u\right]\Big[v\Big]\\
&= \quad \left(\frac{1}{2}c_1x-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\right)\mathcal{L}+W\left[vu_{xx}+v_xu_x+vu_{xx}+v_{xxx}+\frac{1}{2}(v_y+v_z)\right]\\
&- \quad \left[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[vu_x+\chi v_{xx}v_{xxx}+\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\right]\\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\chi v_{xx}v_{xxx}+\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\right]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x+c_1yu_y+c_1y+c_3+F_1(t)+c_3u_z+u_yc_1u_t\Big]\left[\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\right]\\
&+ \quad \Big[c_1u_y-c_1u_t\Big]\left[\frac{1}{2}\left(v+v_zv\right)+v_t\right]\\
&+ \quad \left[-\frac{3}{2}c_1+\Big(F''(t)y+F_2''(t)z-F_3'(t)\Big)u_x-F_1'(t)u_y-F_2'(t)u_z+c_1u\right]\Big[v\Big].
\end{aligned}
$$

De igual modo para calcular A^2, primero, tenemos que es de la forma

$$
\begin{aligned}
A^2 \quad &= \quad \xi_2+W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-D_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j}+D_jD_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{jk}}-\cdots\right]\\
&+ \quad D_i(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^{\alpha}}-D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}}+\cdots\right]+D_jD_k(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}}-\dots\right]+\cdots, \qquad (5.72)
\end{aligned}
$$

sustituyendo y reemplazando cada término tenemos

$$
\begin{aligned}
A^2 \quad &= \quad \big(-c_2z+F_1(t)\big)\mathcal{L}\\
&+ \quad W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}+D_x^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}-D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}+D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}}+D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ \quad D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}}+D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}+D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}}+D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ \quad D_{xx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}}+D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}}+D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}}+D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad D_{xxx}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - D_y(W)\left[D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ \quad D_{yy}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_z(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{zz}(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&= \quad \big(c_2 z + F_1(t)\big)\mathcal{L}\\
&+ \quad c_1 - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right]\\
&\qquad \left[vu_x + \chi D_x^2(v) + D_x^3 v + \frac{1}{2}(D_y v + D_z v) + D_{tx} v\right]\\
&- \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\chi v - D_x^3 v + \frac{1}{2}\left(D_y v + D_z v\right) + D_t v\right]\\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(D_y v + D_z v\right) + D_t v\right]\\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}(v + D_z v) + D_t v\right]\\
&+ \quad \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}v + D_t v\right]\\
&= \quad \left(\frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\mathcal{L}\\
&+ \quad W\left[vu_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right]\\
&- \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v_t\right],
\end{aligned}
$$

Continuando con el mismo procedimiento para calcular A^3 tenemos que este es de la forma

$$
\begin{aligned}
A^3 &= \xi_3\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - D_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right]\\
&+ D_i(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^{\alpha}} - D_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}} + \cdots\right] + D_j D_k(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^{\alpha}} - \ldots\right] + \cdots, \qquad (5.73)
\end{aligned}
$$

sustituyendo y reemplazando cada término obtenemos

$$
\begin{aligned}
A^3 &= \big(-c_2 z + F_1(t)\big)\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} - D_x^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ D_x(W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]\\
&+ D_{xx}(W)\left[D_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad D_{xxx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - D_y(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] + D_{yy}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= \quad \big(c_2 z + F_1(t)\big)\mathcal{L} + W\left[\chi v + D_x^3 v + \frac{1}{2}(D_y v + D_z v) + D_{tx} v\right] \\
&- \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(D_y v + D_z v\right) + D_t v\right] \\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + D_z v\right) + D_t v\right] \\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}v + D_t v\right] \\
&+ \quad \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v\right] \\
&= \quad \big(-c_2 z + F_1(t)\big)\mathcal{L} - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
&+ \quad \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\right] \\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right] \\
&+ \quad \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v\right].
\end{aligned}
$$

Por ultimo para calcular A^4 *tenemos que es de la forma*

$$
\begin{aligned}
A^4 &= \xi_4 + W\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_j\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} + D_j D_k\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jk}} - \cdots\right] \\
&+ D_i(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} + \cdots\right] + D_j D_k(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\right] + \cdots, \qquad (5.74)
\end{aligned}
$$

así al sustituir y reemplazar cada término tenemos

$$
\begin{aligned}
A^4 &= W\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} + D_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_{xx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} + D_z\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&+ D_{xxx}(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} + D_t\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] - D_y(W)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tx}}\right] \\
&= W\left[v + \frac{1}{2}(D_y v + D_z v) + D_{tx} v\right] \\
&- \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v + D_z v\right) + D_t v\right] \\
&+ \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}v + D_t v\right] \\
&+ \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[v\right] \\
&= W\left[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\right] - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right]\\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\Big[v\Big]
\end{aligned}
$$

Reduciendo términos reescribimos los A^i, $i = 1, 2, 3, 4$ *como*

$$
\begin{aligned}
A^1 \quad &= \quad \left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\left(v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right)\\
&+ \quad c_1 - \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\right]\\
&\qquad \left[vu_{xx} + v_xu_x + vu_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right]\\
&- \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[vu_x + \chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_zv\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\right]\Big[v\Big],\\
A^2 \quad &= \quad (-c_2z + F_1(t))\left(v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right)\\
&+ \quad c_1 - \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\right]\\
&\qquad \left[vu_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right]\\
&- \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \left[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t\right]\\
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v_t\Big],\\
A^3 \quad &= \quad (c_2y + F_2(t))\left(v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\right)\\
&+ \quad c_1 - \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\right]\\
&\qquad \left[\chi v + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\right]\\
&- \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ && \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}(v+v_z)+v_t\right] \\
&+ && \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right] \\
&+ && \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v\right], \\
A^4 &= && c_1 - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right] \\
& && \left[v + \frac{1}{2}(v_y+v_z) + v_{tx}\right] \\
&- && \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right)+v_t\right] \\
&+ && \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right] \\
&+ && \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[v\right].
\end{aligned}
$$

□

Teorema 32. *Si $\chi = 0$ en la ecuación (5.36), entonces los vectores $A = (A^1, A^2, A^3, A^4)$ dados por (5.60)-(5.63) proporcionan una ley de conservación asociada a esta ecuación.*

Demostración. *Por el nuevo Teorema de Ibragimov 25 se puede concluir que nuestras simetrías puntales (5.55) satisfacen las ecuaciones de conservación, es decir, que $Div(A^i) = 0$. Primero, calculemos la divergencia de nuestros vectores conservados $A = (A^1, A^2, A^3, A^4)$ definidos en (5.60)-(5.63), es decir*

$$
\begin{aligned}
D_i(A^i) &= && D_x\Bigg[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)\left(v(u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy}+u_{zz}))\right) \\
&+ && c_1 - \left[\left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right]\left[v_x u_x + v u_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y+v_z)\right] \\
&- && \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v u_x + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
&+ && \left[c_1 y u_y - c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right)+v_t\right] \\
&+ && \left[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\right]\left[v\right]\Bigg] \\
&+ && D_y\Bigg[\Big(-c_2 z + F_1(t)\Big)\left(v(x,y,z,t)(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy}+u_{zz}))\right) \\
&+ && \Bigg[c_1 - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right]\Bigg] \\
& && [v u_x] + \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right)+v_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v_t\Big]\Bigg]\\
&+ \quad D_z\Bigg[\Big(-c_2z + F_1(t)\Big)\Bigg(v(x,y,z,t)(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Bigg)\\
&+ \quad \Bigg[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\Big]\Bigg]\\
&\quad\quad \Big[\frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big] + \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v\Big]\Bigg]\\
&+ \quad D_t\Bigg[\Bigg[c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\Big]\Bigg]\\
&\quad\quad \Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[v\Big]\Bigg].
\end{aligned}
$$

Reduciendo términos y aplicando el operador de derivada total en cada vector tenemos

$$
\begin{aligned}
D(A^i) &= (-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t))\left(v_x(u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})) + vu_{xxxxx}\right)\\
&- \Big[\left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\Big]\left[v_{xx}u_x + v_xu_{xx} + vu_{xxx} + v_xu_{xx} + v_{xxxx}\right]\\
&- \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\left[v_xu_x + vu_{xx}\right]\\
&+ \Big[\Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\Big]\Big[v_x\Big]\\
&+ \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_{xx}\\
&+ \Big(-c_2z + F_1(t)\Big)\left(v_y\frac{1}{2}(u_{yy}) + vu_{yyy}\right) - \Big[-F_1'(t)\left(-c_2z + F_1(t)\right)u_{yy}\Big]\left[vu_x\right]\\
&+ \Big[c_1u_yc_1u_{yy} + c_1 + u_{yy}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_y\Big] - c_2\left(v_z(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})) + vu_{zzz}\right)\\
&+ \Big[-F_2'(t)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_{zz} - c_2u_z\Big]\Big[\frac{1}{2}v_{zz}\Big]\\
&- \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[v_z + \frac{1}{2}\left(v_z\right)\Big] - F_2'(t)\left(v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_t\right)\\
&+ \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z\Big] + \Big[c_3u_{zz}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \left[- \left[\Big(- F_1''(t)y - F_2''(t)z + F_3'(t) \Big) u_x + F_1'(t)u_y + F_2'(t)u_z \right] \right] \left[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_t \right] \\
&- \quad \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_{xx} \right] \left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t \right] \\
&- \quad \left[c_1 - \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right) u_z \right] \right] [v_t] \\
&+ \quad \left[F_1''(t)u_x + F_1'(t) \right] \left[v \right] + \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t \right] \left[v_t \right]
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
D_i(A^i) \quad = \quad & \left(\frac{1}{2}c_1 + \left(\frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \right) \left(v_x(u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})) \right) \right. \\
- \quad & \left[\left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right) u_z \right] [v_{xx}u_x + v_x u_{xx} + v u_{xxx} + + v_x u_{xx} + v_{xxxx}] \\
- \quad & \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_{xx} \right] [v_x u_x + v u_{xx}] \\
+ \quad & \left. \left[\Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t) \Big) u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u \right] \left[v_x \right] \right) \\
+ \quad & \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t) \Big) u_{xx} + \big(- c_2 z + F_1(t) \big) \left(v_y \frac{1}{2}(u_{yy}) + v u_{yyy} \right) \\
- \quad & \left[- F_1'(t) \left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_{yy} \right] [v u_x] \;\; + \left[c_1 u_y c_1 u_{yy} + c_1 + u_{yy} \right] \left[\frac{1}{2}\left(v_y\right) \right] \\
- \quad & c_2 \left(v_z(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz})) + v u_{zzz} \right) \\
+ \quad & \left[- F_2'(t)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right) u_{zz} - c_2 u_z \right] \left[\frac{1}{2} v_{zz} \right] \\
- \quad & \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_{xx} \right] \left[v_z + \frac{1}{2}\left(v_z\right) \right] - F_2'(t) \left(v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_t \right) \\
+ \quad & \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t \right] \left[\frac{1}{2} v_z \right] + \left[c_3 u_{zz} \right] \left[\frac{1}{2} v_z + v_t \right] \\
+ \quad & \left[- \left[\Big(- F_1''(t)y - F_2''(t)z + F_3'(t) \Big) u_x + F_1'(t)u_y + F_2'(t)u_z \right] \right] \left[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx} \right] \\
- \quad & \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_{xx} \right] \left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t \right] \\
- \quad & \left[c_1 - \left[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t) \Big) u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right) u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right) u_z \right] \right] \\
& [v_t] + \left[F_1''(t)u_x + F_1'(t) \right] \left[v \right] \\
+ \quad & \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t \right] \left[v_t \right].
\end{aligned}
$$

Por el nuevo Teorema de Ibragimov 25 no requerimos la existencia de un lagrangiano, además está comprobado que la ecuación adjunta hereda todas las simetrías de la ecuación original. En consecuencia, se puede asociar una ley de conservación con cualquier grupo de simetrías de Lie, o simetrías no locales y encontrar leyes de conservación para ecuaciones diferenciales sin lagrangianos clásicos. Pero para encontrar mas fácilmente la divergencia de nuestros vectores tomamos a $v = x$ y hacemos a

$$c_2 = F_1''(t)u_x + F_1'(t),$$

$$c_3 = -F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t),$$

así eliminando términos en común y resolviendo $D_i(A^i)$, podemos concluir que $D_i(A^i)$ es trivial, es decir, los A^i proporcionan una ley de conservación para K-S.

□

Teorema 33. *Sea $\chi \neq 0$ en la ecuación (5.36) y sean los vectores $A = (A^1, A^2, A^3, A^4)$ definidos en (5.66)-(5.69). Estos vectores proporcionan una ley de conservación para la ecuación (5.54).*

Demostración. *Como en el caso anterior, por el nuevo Teorema de Ibragimov 25 se puede concluir que las simetrías puntales (5.56) satisfacen las ecuaciones de conservación, es decir, que $Div(A^i) = 0$.*

Primero, calculemos la divergencia de nuestros vectores conservados $A = (A^1, A^2, A^3, A^4)$ definidos en (5.66)-(5.69), es decir

$$\begin{aligned}
D_i(A^i) &= D_x\Bigg[\left(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right) \\
&+ c_1 - \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\Big] \\
&\quad \Big[vu_{xx} + v_xu_x + vu_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big] \\
&- \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[vu_x + \chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\Big] \\
&+ \Big[\Big(- F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\Big] \\
&+ \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\left(v_y + v_zv\right) + v_t\Big] \\
&+ \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}\left(v + v_zv\right) + v_t\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\Big]\Big[v\Big]\Big] \\
&+ \quad D_y\Bigg[((-c_2 z + F_1(t))\Big(v(x,y,z,t)(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big) \\
&+ \quad c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\Big] \\
&\quad\quad \Big[v u_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big] \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z v) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v_t\Big]\Big] + D_z\Bigg[(c_2 y + F_2(t))\,\mathcal{L} \\
&+ \quad c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\Big] \\
&\quad\quad \Big[\chi v + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z v) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[c_1 u_y - c_1 u_t\Big]\Big[v\Big]\Big] + D_t\Bigg[\Big[v + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\Big] \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\Big]\Big[v\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

Reduciendo términos y aplicando en operador de derivada total en cada vector tenemos

$$
\begin{aligned}
D_i(A^i) &= D_x\Bigg[\Big(\frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big) + c_1 \\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + (-c_2 z + F_1(t))\, u_y + (c_2 + F_2(t))\, u_z\Big] \\
&\quad\quad \Big[v u_{xx} + v_x u_x + v u_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[vu_x + \chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\chi v_{xx}v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1 u\right]\left[v\right]\Bigg] \\
+ & D_y\Bigg[\left(\frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\Big(v(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} \\
- & \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big) + c_1 \\
- & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right] \\
& \left[vu_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z)\right] \\
- & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[\chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z\right) + v_t\right] \\
+ & \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}\left(v + v_z\right) + v_t\right] \\
+ & \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v_t\right]\Bigg] \\
+ & D_z\Bigg[\left(\frac{1}{2}c_1 x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\right)\Big(v(u_{tx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy} + u_{zz}))\Big) \\
+ & c_1 - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right] \\
& \left[\chi v + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y + v_z) + v_{tx}\right] \\
- & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\right]\left[v + \frac{1}{2}\left(v_y + v_z v\right) + v_t\right] \\
+ & \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\right]\left[\frac{1}{2}(v + v_z) + v_t\right] \\
+ & \left[F_1'(t)u_x + c_1 y u_y + c_1 y + c_3 + F_1(t) + c_3 u_z + u_y c_1 u_t\right]\left[\frac{1}{2}v_z + v_t\right] \\
+ & \left[c_1 u_y - c_1 u_t\right]\left[v\right]\Bigg] \\
+ & D_t\Bigg[c_1 - \left[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2 z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2 + F_2(t)\right)u_z\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Big[v+\frac{1}{2}(v_y+v_z)+v_{tx}\Big]-\Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right)+v_t\Big]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z+v_t\Big]\\
+ & \Big[F_1'(t)u_x+c_1yu_y+c_1y+c_3+F_1(t)+c_3u_z+u_yc_1u_t\Big]\Big[v\Big]\Big].
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
D_i(A^i) \;=\; & \frac{1}{2}c_1-\Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[vu_{xx}+v_xu_x+vu_{xx}+v_{xxx}+\frac{1}{2}(v_y+v_z)\Big]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}+\left(-c_2z+F_1(t)\right)u_y+\left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
& [v_xu_{xx}+vu_{xxx}+v_{xx}u_x+v_xu_{xx}+vu_{xxx}+v_vu_{xx}+v_{xxxx}]\\
- & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[vu_x+\chi v_{xx}v_{xxx}+\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\Big]\\
- & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\Big][v_xu_x+vu_{xx}+\chi v_{xxx}v_{xxx}+\chi v_{xx}v_{xxxx}]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxxx}\Big]\Big[\chi v_{xx}v_{xxx}+\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\Big]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big][\chi v_{xxx}v_{xxx}+\chi v_{xx}v_{xxxx}]+\Big[F_1'(t)u_{xxx}\Big]\\
+ & \Big[c_1u_y-c_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_x\Big]\\
+ & \Big[-\frac{3}{2}c_1+\Big(F''(t)y+F_2''(t)z-F_3'(t)\Big)u_x-F_1'(t)u_y-F_2'(t)u_z+c_1u\Big]\Big[v\Big]\\
- & \Big[F_1'(t)\Big]\Big[v\frac{1}{2}u_{yyy}\Big]+\Big[-F_1'(t)u_x+\left(-c_2z+F_1(t)\right)u_{yy}+\left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
& \Big[vu_x+\chi v_{xx}+v_{xxx}+\frac{1}{2}(v_y+v_z)\Big]\\
+ & \frac{1}{2}\Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_x+\left(-c_2z+F_1(t)\right)u_y+\left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
+ & \Big[-F_1'(t)u_{xx}\Big]\Big[\chi v_{xx}+v_{xxx}+\frac{1}{2}\left(v_y+v_zv\right)+v_t\Big]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\frac{1}{2}\left(v_{yy}\right)-\Big[F_1'(t)u_{xxx}\Big]\Big[v+\frac{1}{2}\left(v_y+v_z\right)+v_t\Big]\\
+ & \Big[\Big(-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_{yy}\Big]+\Big[c_1u_yc_1yu_{yy}+c_1+u_{yy}c_1u_t\Big]\\
& \Big[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right)+v_t\Big]\\
+ & \Big[F_1'(t)u_x+c_1yu_y+c_1y+c_3+F_1(t)+c_3u_z+u_yc_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_y\Big]\\
+ & \Big[c_1u_{yy}\Big]\Big[v_t\Big]-F_2'(t)v(u_{tx}+u_xu_{xx}+u_{xxxx}-\chi u_{xxx}+\frac{1}{2}(u_{yy}+u_{zz}))\Big)\\
+ & \Big[\Big(\frac{1}{2}c_1x-F_1'(t)y-F_2'(t)z+F_3(t)\Big)\Big]\Big(\frac{1}{2}+u_{zzz}+v_zu_{zz}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[F_2'(t)u_x + -c_2u_y\left(c_2+F_2(t)\right)u_{zz}\Big]\Big[\chi v + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y+v_z) + v_{tx}\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z - F_3(t)\Big)u_x - \left(c_2z - F_1(t)\right)u_y + \left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
&\quad\quad \Big[\chi v_z + \frac{1}{2}v_{zz}\Big] + \Big[F_2'(t)u_{xx}\Big]\Big[v + \frac{1}{2}\left(v_y+v_z\right) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[v_z + \frac{1}{2}v_{zz}\Big] - \Big(F_2'(t)\Big)u_{xxx}\Big[\frac{1}{2}(v+v_z) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}(v_z+v_{zz})\Big] + \Big[c_3u_{zz}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\frac{1}{2}v_{zz}\\
&+ \quad \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[v_z\Big] - \Big[\Big(F_1''(t)y - F_2''(t)z + F_3'(t)\Big)u_x + F_1'(t)u_y + F_2'(t)u_z\Big]\\
&\quad\quad \Big[v + \frac{1}{2}(v_y+v_z) + v_{tx}\Big]\\
&- \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y + F_2'(t)z - F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
&\quad\quad [v_t + v_{ttx}]\\
&+ \quad \Big[\Big(F_1''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}\left(v+v_z\right) + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(F_1'(t)y + F_2'(t)z - F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_t + v_{tt}\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1''(t)y - F_2''(t)z + F_3'(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big]\\
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]v_{tt} + \Big[F_1''(t)u_x + F_1'(t) + c_1u_yu_{tt}\Big]\Big[v\Big]\\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[v_t\Big].
\end{aligned}
$$

Equivalentemente se tiene que $D(A^i)$ *toma la forma*

$$
\begin{aligned}
D_i(A^i) \;=\; & \frac{1}{2}c_1 - \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big[\frac{1}{2}(v_y+v_z)\Big]\\
+ \;& [v_{xx}u_x + v_xu_{xx} + vu_{xxx} + v_vu_{xx} + v_{xxxx}]\\
+ \;& \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xx}\Big][\chi v_{xxx}v_{xxx} + \chi v_{xx}v_{xxxx}]\\
+ \;& \Big[c_1u_y - c_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}v_x\Big] + \Big[-F_1'(t)\Big]\Big(v\frac{1}{2}u_{yyy}\Big)\\
+ \;& \Big[-\frac{3}{2}c_1 + \Big(F''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_x - F_1'(t)u_y - F_2'(t)u_z + c_1u\Big]\Big[v\Big]\\
+ \;& \Big[-F_1'(t)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_{yy} + \left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]\\
& \Big[vu_x + \chi v_{xx} + v_{xxx} + \frac{1}{2}(v_y+v_z)\Big]\\
+ \;& \frac{1}{2}\Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_x + \left(-c_2z + F_1(t)\right)u_y + \left(c_2+F_2(t)\right)u_z\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \Big[\Big(-F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_{yy}\Big] \\
&+ \quad \Big[c_1u_yc_1yu_{yy} + c_1 + u_{yy}c_1u_t\Big]\Big[\frac{1}{2}(v+v_z)+v_t\Big] + \Big[c_1u_{yy}\Big]\Big[v_t\Big] \\
&- \quad F_2'(t)v(u_{tx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx} - \chi u_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{yy}+u_{zz}))\Big) \\
&+ \quad \Bigg[\Bigg(\frac{1}{2}c_1x - F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)\Bigg)\Bigg]\Big(\frac{1}{2} + u_{zzz} + v_zu_{zz}\Big) \\
&+ \quad \Big[F_2'(t)u_x + -c_2u_y\left(c_2 + F_2(t)\right)u_{zz}\Big]\Big[\chi veft[\Big(F_1'(t)y + F_2'(t)z - F_3(t)\Big)u_{xx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_t + v_{tt}\Big] \\
&- \quad \Big[\Big(F_1''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t)\Big)u_{xxx}\Big]\Big[\frac{1}{2}v_z + v_t\Big] - \Big[\Big(F_1'(t)y + F_2'(t)z - F_3(t)\Big)u_{xxx}\Big]v_{tt} \\
&+ \quad \Big[F_1''(t)u_x + F_1'(t) + c_1u_yu_{tt}\Big]\Big[v\Big] \\
&+ \quad \Big[F_1'(t)u_x + c_1yu_y + c_1y + c_3 + F_1(t) + c_3u_z + u_yc_1u_t\Big]\Big[v_t\Big].
\end{aligned}
$$

Igual que en el teorema anterior gracias el nuevo teorema de Ibragimov 25 no requerimos la existencia de un lagrangiano. En consecuencia, se puede asociar una ley de conservación con cualquier grupo de simetrías de Lie, o simetrías no locales y encontrar leyes de conservación para ecuaciones diferenciales sin lagrangianos clásicos, pero para que nosotros podamos encontrar mas fácilmente la divergencia de nuestros vectores volvemos a tomar $v = x$ *y sustituimos* c_1, c_2, c_3 *por*

$$
\begin{aligned}
c_1 &= F_3(t), \\
c_2 &= F_1''(t)y + F_2''(t)z - F_3'(t), \\
c_3 &= -F_1'(t)y - F_2'(t)z + F_3(t)
\end{aligned}
$$

así podemos eliminar términos en común y resolver $D_i(A^i)$.
Cuando resolvemos nuestras ecuaciones podemos concluir que $D_i(A^i)$ *es trivial, es decir, los* A^i *proporcionan una ley de conservación para KSg.*

□

El teorema de Noether establece una conexión entre simetrías de ecuaciones diferenciales y leyes de conservación, siempre que las ecuaciones consideradas se obtengan del principio variacional, es decir, satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, los lagrangianos clásicos existen solo para tipos muy especiales de ecuaciones diferenciales. La restricción a las ecuaciones de Euler-Lagrange reduce significativamente las aplicaciones del teorema de

Noether. Específicamente, el teorema de Noether no es aplicable a las ecuaciones de evolución, a las ecuaciones diferenciales de un orden impar, etc. Además, una simetría de las ecuaciones de Euler-Lagrange debería satisfacer una propiedad adicional para dejar invariante la integral variacional.

A pesar del hecho de que se han hecho ciertos intentos para superar estas restricciones y se han discutido varias generalizaciones del teorema de Noether, no se conocen en la literatura un resultado general que asocie una ley de conservación con cada simetría infinitesimal de una ecuación diferencial arbitraria.

Capítulo 6

Conclusiones

El papel desempeñado en las ciencias por las ecuaciones de evolución lineales y no lineales y, en particular, por las leyes de conservación de las mismas, es difícil de sobreestimar y han atraído el interés de los investigadores tanto matemáticos como físicos.
La construcción de formas explícitas de leyes de conservación juega un papel importante en el estudio de la ciencia no lineal, ya que se utilizan para el desarrollo de métodos numéricos apropiados y para el análisis matemático, en particular, análisis de existencia, unicidad y estabilidad. Además, la existencia de una gran cantidad de leyes de conservación de una ecuación diferencial parcial (o sistema) es una fuerte indicación de su integrabilidad.
Al aplicar el teorema de Noether para obtener leyes de conservación de ecuaciones de evolución no lineal con derivadas mixtas de orden superior, las leyes de conservación obtenidas deben ajustarse para satisfacer la definición de las leyes de conservación. Nos enfrentamos al mismo problema al aplicar el nuevo teorema de conservación de Ibragimov para encontrar leyes de conservación de ecuaciones de evolución no lineal. Ibragimov fue el primero en enunciar y probar una nueva y más general versión del teorema de leyes de conservscón usando simetrías.

El teorema de Noether ha proporcionado una forma sistemática de determinar las leyes de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange, una vez que se conocen sus simetrías de Noether, pero este teorema se basa en la disponibilidad de los lagrangianos clásicos. Para encontrar leyes de conservación de ecuaciones diferenciales sin lagrangianos clásicos, los investigadores han hecho varias generalizaciones del teorema de Noether. Entre ellos, el nuevo teorema de conservación dado por Ibragimov [6] es uno de los métodos más utilizados.

Se definió una ecuación adjunta para ecuaciones diferenciales no lineales y se construyó un lagrangiano para las ecuación de evolución KS y KSg junto con su ecuación adjunta. La misma construcción nos proporciona un Lagrangiano para estas ecuaciones consideradas junto con el sistema adjunto. Utilizamos el nuevo teorema general de leyes de conservación hallamos dichas leyes para estas dos ecuaciones de evolución no lineales.

Para cualquier ecuación diferencial lineal o no lineal, el nuevo teorema de conservación de Ibragimov ofrece un procedimiento para construir leyes de conservación explícitas asociadas con las simetrías conocidas de Lie. Además, no requiere la existencia de lagrangianos clásicos.

APÉNDICE

.1. Anexo 1. Breve semblanza de Emmy Noether

Amalie Emmy Noether nació en Erlangen (Baviera) el 23 de marzo de 1882, su padre era un matemático reconocido en su Universidad y se esperabá que ella ocupara un lugar aventajado en la rueda femenina, pero decidió salirse de la cómoda rueda, y se incorpó a la Universidad, sin embargo, la Universidad de Erlangen había proclamado que no daría la bienvenida a ninguna presencia femenina porque era capaz de derrocar todo orden académico. Afortunadamente, gracias a su padre matemático y Paul Gordan otro conocido matemático que conocía a Emmy desde niña (ambos expertos en la teoría de los invariantes), en 1900 Noether pudo entrar en la Universidad de oyente pidiendo permiso a cada profesor para poder atender su clase.

Figura 1: Emmy Noether.

Pasó el examen de acceso a la Universidad el 14 de julio de 1903, solo faltaba que alguna Universidad le permitiera matricularse. En el invierno de 1903 gracias a la amistad entre su padre y otros matemáticos, Emmy recibió clases de Felix Klein, David Hilbert, Karl Schwarzschild y Hermann Minkowski entre otros. Como compañero tendría a Hermann Weyl. Curiosamente, en ese mismo año permitió la matriculación de las mujeres así que volvió a Erlangen en 1904 y se matriculó en la universidad (fue la primera mujer en matricularse.). Tres años después, el 13 de diciembre de 1907, defendió su tesis sobre la construcción de un sistema para la forma bicuadrática terciaria, desarrollada bajo la supervisión de Gordan, trataba de la búsqueda de invariantes en la forma bicuadrática terciaria. En su siguiente artículo extendería los argumentos de su tesis a n variables. Aunque su trabajo sobre invariantes no fue de sus favoritos, su dominio sobre el tema fue clave para su carrera y para descubrir su famoso teorema, tan apreciado en física.

En 1915 recibe una invitación de Klein y Hilbert de la Universidad de Gotinga para ayudarles en el desarrollo de la teoría de la relatividad general. Ellos sabían que Noether era experta en la teoría de los invariantes y eso era lo que ellos necesitaban. Noether descubrió las profundas razones de las dificultades que habían surgido en la interpretación de las leyes de conservación en relatividad general y la conservación de la energía. Utilizó el principio variacional que también había usado Hilbert para deducir las ecuaciones de la relatividad general. La raíz del problema estaba en explicar la diferencia de la Naturaleza de las leyes de conservación en mecánica clásica y relatividad especial por un lado y las de la relatividad general por otro.

En 1918 Noether presentó su artículo "Invariante Variations probleme" [18], que contenía dos teoremas. Las publicaciones predecesoras serián casos particulares del primer teorema. Ese mismo año Einstein escribió a Hilbert sobre el trabajo de Emmy Noether: "*ayer recibí de la señorita Noether un trabajo muy interesante sobre la generación de invariantes. Estoy impresionado que estos asuntos se puedan entender desde un punto de vista tan general. La vieja guardia de Gotinga debería aprender de la señorita Noether. Verdaderamente sabe lo que hace*".

El 4 de junio de 1919 Emmy Noether presentó su trabajo con el apoyo de Hilbert, Klein y del matemático Richard Courant en un nuevo intento de conseguir la habilitación como profesora de la Universidad de Gotinga. Después de exponer sus trabajos y defenderlos Emmy Noether se convertiría en la primera mujer habilitada de la Universidad de Gotinga.

El primer teorema, que es el que comúnmente se conoce como teorema de Noether, se refería a la invariancia de la acción respecto al grupo de Lie en cuestión. Ella formuló de forma general la correspondencia entre las simetrías de un problema variacional y las leyes de conservación derivadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Nos ofrece entonces una maquínaria para deducir leyes de conservación si sabemos las simetrías o para deducir las simetrías si sabemos las leyes de conservación. Aún más allá, conociendo las simetrías, el teorema de Noether proporciona un mecanismo para crear la acción. Si la acción es invariante ante un desplazamiento temporal se conserva la energía; si lo es ante un desplazamiento espacial, se conserva el momento lineal; si lo es ante una rotación, se conserva el momento angular; y si lo es ante una transformación gauge interna se conserva la carga y viceversa. Noether dió la llave para entender las leyes de conservación que hasta entonces eran promesas que cumplía la Naturaleza.

Su segundo teorema trata de la invariancia del problema variacional bajo la acción de un grupo del mismo tipo que existe en relatividad general, una teoría covariante general, cuyas ecuaciones de campo son invariantes bajo cualquier cambio de coordenadas. Noether así enfatizó que el problema se entiende de forma más general y transparente con la maquinaria de teoría de grupos y que lo que distingue a la relatividad general es la invariancia del grupo respecto a funciones arbitrarias que pueden tener dimensión infinita en contraste con el grupo de Lie que tiene dimensión finita.

.2. Anexo 2. Álgebra Diferencial $\mathcal{A}$

Denotemos una sucesión arbitraria por z,

$$z = (x, u, u_{(1)}, u_{(2)} \dots) \tag{1}$$

con elementos z^ν, $\nu \geq 1$. Aquí

$$z^i = x_i \quad i = 1, 2, , \dots n \tag{2}$$

$$z^{n+a} = u^\alpha \dots \alpha = 1, \dots, m \tag{3}$$

y los elementos restantes son derivadas de u.
Una subsucesión finita de z se denotará con $[z]$.

Definición 39. *Una función diferencial* $f([z])$ *es una función analítica local. El orden de* $f([z])$ *es la derivada de orden más alto en la función diferencial* $f([z])$*. Denotamos el conjunto de todas las funciones diferenciales de orden finito por* $\mathcal{A}$*.*

Propiedades en el espacio $\mathcal{A}$. Si $f([z]) \in \mathcal{A}$ y $g([z]) \in \mathcal{A}$, entonces

1. $af + bg \in \mathcal{A}$ para cualquier constante a, b.

2. $fg \in \mathcal{A}$;

3. $D_i(f) \in \mathcal{A}$;

La primera y segunda propiedad se derivan del hecho de que tanto f como g son funciones analíticas. Para la tercera propiedad, sabemos que la derivada de una función analítica es analítica. Además, de la expresión para el operador D_i (2.71), vemos que este se trunca cuando actúa sobre una función diferencial y aumenta el orden de la función diferencial en uno, es decir, si $ord(f) = s$, entonces $ord(D_i(f)) = s + 1$ el cual sigue siendo finito. De acuerdo con la Definición 39, las tres afirmaciones se siguen.

Referencias

[1] N.H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Wiley Sons, Chich-ester, 1999.

[2] N. H., Ibragimov. Invariant variational problems and conservation laws. Teoreticheskaya Matematiches kaya Fizika, 1, No. 3:350-359, 1969. Publications, Karlskrona (2006).

[3] Bieberbach, L., "Über die Bewegungs gruppen der Euklidischen Räume. (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamental bereich."Mathematische Annalen 72 (1912).

[4] Mal′tsev AI., On the history of algebra in the USSR during her first twenty-five years Algebra and Logic 10 6875 (1971).

[5] N. H. Ibragimov, Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 318.

[6] I bragimov N .H., A new conservation theorem J.Math.Anal.Appl. 333311- 28. 2007.

[7] Nail H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws, Department of Mathematics and Science, Blekinge Institute of Technology, 371 79 Karlskrona, Sweden.

[8] N. H. Ibragimov, M. Torrisi, and R. Tracina, Quasi self-adjoint nonlinear wave equations, J. Phys. A: Math. Theor., vol. 43, 2010. doi:10.1088/1751- 8113/43/44/442001.

[9] N.H. Ibragimov, Transformation Groups in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1983, English transl.: Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Riedel, Dordrecht, (1985).

[10] Myeni SM and Leach PGL, Complete Symmetry Groups I, The Connection of Ordinary Differential Equations and Partial Differential Equations (2007).

[11] Olver, P. J., Application of Lie Groups to Differential Equations, Springer Verlag, New York, 496pp (1986).

[12] Lucha, W., Gruppen theorie, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 140pp.(1993).

[13] Hydon, P., Symmetry Methods for Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 213pp.(2000).

[14] George W.Bluman, Stephen C. Anco: Symmetry and integration methods for differential equations. (2002).

[15] Stephani, H., Differential gleichungen, Spektrum Akademischer Verlag, Heidel- berg, 320pp (1994).

[16] Marcus Eriksson, Simmeries and conservation laws obtained by groups analysis for certain physical systems.

[17] Yang, Huizhang and Liu, Wei and Yang, Biyu and He, Bin., Lie symmetry analysis and exact explicit solutions of three-dimensional Kudryashov-Sinelshchikov equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 27, 10.1016/j.cnsns.2015.03.014,2015.

[18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme. Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Nachrichten. Math ematisch- Physikalische Klasse, Heft 2:235-257, 1918. English transl., Transport Theory and Statistical Physics, vol. 1, No. 3, 1971, 186-207.

[19] Edwige Godlewski, Pierre-Arnaud Raviart., Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws Springer, New York (1996).

[20] G. Bluman, Temuerchaolu and S. C. Anco, New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law, J. Math. Anal. Appl. 322(1) (2006) 233-250.

[21] Yurii N. Grigoriev, Nail H. Ibragimov, Vladimir F. Kovalev, Sergey V. Meleshko, Symmetries of Integro-Differential Equations With Applications in Mechanics and Plasma physics.

[22] Y. D. Bozhkov and I. L. Freire, Conservations laws for critical Kohn-Laplace equations on the Heisenberg group, J. Nonlinear Math. Phys. 15(1) (2008) 35-47.

[23] Y. Bozhkov and I. L. Freire, Special conformal groups of a Riemannian manifold and the Lie point symmetries of the nonlinear Poisson equations, J. Differential Equations 249(4) (2010) 872-913.

[24] Tseluiko, Dmitri and Papageorgiou, Demetrios, A global attracting set for nonlocal Kuramoto-Sivashinsky equations arising in interfacial electrohydrodynamics (677 - 703) 17, European Journal of Applied Mathematics, 10.1017/S0956792506006760 (2006).

[25] Gennadi Sardanashvily, Noether's Tehorems, Aplications in Mechanics and Field Theory, Atlantis Studies in Variational Geometry (Libro 3) 297 páginas, 1st ed. 2016 (8 de marzo de 2016), 978-9462391703.

[26] A. Ouhadan and E. H. El Kinani, Lie symmetries of the equation $ut(x,t)+g(u)ux(x,t) = 0$, Adv. Appl. Clifford Algebras 17(1) (2007) 95-106.

[27] M.Nadjafikhah, Liesymmetries of inviscid Burgers equation, Adv. Appl. Clifford Algebras 19(1) (2009) 101-112.

[28] M. Nadjafikhah, Classification of similarity solutions for inviscid Burgers equation, Adv. Appl. Clifford Algebras 20(1) (2009) 71-77.

[29] Y.Bozhkov, S.Dimas, Group Classification and Conservation Laws for a two-dimensional Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation. IMECC Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651.

[30] S. Lie, Zur allgemeinen Theorie der partiell en Differential gleichungen beliebeger Ordnung,Leipz. Berich., 1 (1895), pp. 53-128; also Gesammelte Abhandlungen, vol. 4, B. G. Teubner, Leipzig, 1929, pp. 320-384.

[31] G. W. Bluman and J.D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, J. Math. Mech., 18 (1969), pp. 1025-1042.

[32] M. L. Gandarias and N. H. Ibragimov, Equivalence group of a fourth-order evolution equation unifying various nonlinear models, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13(2) (2008) 259-268.

[33] Bernoff AJ, Bertozzi AL. Singularities in a modified Kuramoto Sivashinsky equation describing interface motion for phase transition. Physica D 1995;85:375-404.

[34] R. Gazizov and N. Ibragimov, Lie symmetry analysis of differential equations in finance, Nonlinear Dyn. 17(4) (1998) 387-407.

[35] Bertozzi AL, Pugh M. Long-wave instabilities and saturation in thin film equations. Comm Pur Appl Math 1998; LI :625-51.

[36] G. W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations (Springer, New York, 1989).

[37] Anton A. Darhuber and Sandra M. Troian Principles of microfluidic actuation by modulation of durface streses, Annual Review of Fluid Mechanics Vol. 37:425-455 (Volume publication date 21 January 2005) https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122052

[38] AL Bertozzi. Symmetric singularity formation in lubrication-type equations for interface motion. Siam Journal On Applied Mathematics, 56:681-714, 1996

[39] Gandarias, Maria Luz and Ibragimov, Nail Europhys Lett 2001;55:143-9 Equivalence group of a fourth-order evolution equation unifying various non-linear models

[40] Peter J. Olver and Philip Rosenaut, Groups Invariant Solutions of Differential Ecuations.

[41] Zhang, Zhi-Yong, Conservation laws of partial differential equations: Symmetry, adjoint symmetry and nonlinear self-adjointness, 10.1016/j. camwa.2017.08.008, Computers & Mathematics with Applications.

[42] Kudryashov, N.A.,Sinelshchikov,D.I., Nonlinear evolution equation for describing waves in bubbly liquids with viscosity and heat transfer consideration. Appl. Math. Comput. 217, 414-421 (2010). https://arxiv.org/pdf/1112.5450.pdf.

[43] Michael Kunzinger, Lie Transformation Groups An Introduction to Symmetry Group Analysis of Differential Equations, Summer Term 2015

[44] Kudryashov, N.A.,Sinelshchikov,D.I.:Non linear wave in bubbly liquids with consideration for viscosity and heat transfer. Phys. Lett. A 374, 2011-2016 (2010). https://arxiv.org/pdf/1112.5436.pdf

[45] R. Zhdanov and V. Lahno, Group classification of the general evolution equation: Local and quasilocal symmetries, SIGMA 1 (2005).

[46] V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, Variational Principles for Nonpotential Operators (VINITI,Moscow, 1992), Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovr. Probl. Mat., Noveishie Dostizh. 40; Engl. transl.: J. Math. Sci. 68 (3), 275-398 (1994).

[47] V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, On the Existence of Variational Principles for Differential Difference Evolution Equations, Received November 2012.

[48] V.M. Savchin, An operator approach to Birkhoff's equations, Vestn. Ross. Univ. Druzhby Narodov, Mat 2 (2), 111-123 1995.

[49] V.M. Savchin and S. A. Budochkina, On the structure of a varational equation of evolution type with the second t-derivative, Diff. Uravn. 39 (1), 118-124 2003.

[50] V.M. Savchin and S. A. Budochkina, On the existence of a varational principle for an operador equation withh the second derivative respect to time, Mat. Zametki 80 (1) 87-94 (2006).

[51] S.A. Budotchkina and V.M. Savchin, On indirect varitional formulations for operator equations, J. Funct. Spaces Appl. 5 (3), 231-242 2007.

[52] Agreement Mathebula, Sameerah Jamal, Abdul Kara, Symmetry Analysis and Invariant Properties of some Partial Differential Equations.

[53] Sagan, H., Introduction to the calculus of variations. Corrected reprint of the 1969 original. Dover 1992.

[54] Giaquinta, M., Hildebrandt, S., Calculus of variations. I. The Lagrangian for- malism. Springer, Berlin, 1996.

[55] Giaquinta, M., Hildebrandt, S., Calculus of variations. II. The Hamiltonian formalism. Springer, Berlin, 1996.

[56] R. Zhdanov and V. Lahno, Group classification of the general second-order evolution equation: Semi-simple invariance groups, J. Phys. A: Math. Theor. 40(19) (2007) 5083-5103.

[57] Hocherman T, Rosenau P. On KS-type equations describing the evolution and rupture of a liquid interface. Physica D. 1993, 67:113-25.

[58] Daniel J. Arrigo, An Introduction Symmetry Analysis of Differential Equations.

[59] N.H. Ibragimov, A.B. Shabat, Korteweg-de Vries equation from the group-theoretic point of view, Dokl. Akad. Nauk SSSR 244 (1) (1979) 57-61, English transl. Soviet Phys. Dokl. 24 (1) 1979 15-17.

[60] Nail.H. Ibragimov, A practical course in differential equations and mathematical modelling. ALGA publications, Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2005. 2nd edition.

[61] Robert C. MacOwen. Partial Differential Equations, Pearson Education, United States, 2003. 2th Edition.

[62] Gilmore, R. . Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications. Wiley, New York, NY 1974.

[63] Ovsiannikov, L.V,. Group Properties of Differential Equations. Nauka, Novosibirsk (in Russian) 1962.

[64] Ovsiannikov, L.V. (1982). Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York, NY.

[65] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. Analysis, manifolds and physics, Part I: Basics. North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1982. (Part II: 92 Applications.- North Holland, Amsterdam, 1989.

[66] Y. Bozhkov and I. L. Freire, Special conformal groups of a riemannian manifold and the Lie point symmetries of the nonlinear Poisson equations, J. Differential Equations 249(4) (2010) 872-913.

[67] I. L. Freire, Self-adjoint sub-classes of third and fourth-order evolution equations, Appl. Math. Comp. 217(22) 9467-9473 2011.

[68] Jerry B. Marion and Stephen T. Thornton, Classical dynamics of particles and systems. Thomson Brooks/Cole, United States, 1995. 4th Edition.

[69] Lax, P. D. Shock waves and entropy, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E.H. Zarantonello, ed., Academic Press, New York, pp. 603-634, 1971.

[70] DiPerna, R. J. Decay of solutions of hyperbolic systems of conservation laws with a convex extension, Arch. Rat. Mech. Anal., 64, pp. 1-46, 1977.

[71] DiPerna, R. J. Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws, Indiana Univ. Math. J., 28, pp. 137-188, 1979.

[72] Bejamin, T. B. The stability of solitary waves, Proc. Roy. Soc., London, A328, pp. 153-183, 1972.

[73] Holm, D. D., Marsden, J. E., Ratiu, T. and Weinstein, A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, Phys. Rep., 123, pp. 1-116, 1985.

[74] Bilby, B. A., Miller, K. J. and Willis, J. R. Fundamentals of Deformation and Fracture, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[75] Knops, R. J. and Stuart, C. A. Quasiconvexity and uniqueness of equilibrium solutions in nonlinear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 86, pp. 234-249, (1984).

[76] Harwitt, M. Photon orbital angular momentum in astrophysics, Astrophys. J., 597, pp. 1266-1270, 2003.

[77] Elias N. M., Photon orbital angular momentum in astronomy, Astron. Astrophys, 492(3), pp. 883-922, 2008.

[78] Berkhout, G. C. G and Beijersbergen, M. W. Method for probing the orbital angular momentum of optical vortices in electromagnetic waves from astronomical objects, Phys. Rev. Lett., 101, 100801, 2008.

[79] Thidé, B., Then, H., Sjoholm, J., Palmer, K., Bergman, J., Carozzi, T. D., Istomin, Ya. N., Ibragimov, N. H. and Khamitova R. Utilization of photon orbital angular momentum in the low-frequency radio domain, Phys. Rev. Lett., 99, pp. 087701-1-087701-4, 2007.

[80] Olver, P. J. Applications of Lie groups to Differential equations, 2nd ed., Springer, 1993.

[81] Newton, I. Mathematical principles of natural philosophy, 1st ed., 1687.

[82] Laplace, P.-S., Celestial mechanics, vol. 1-5, 1799-1825. English trans., New-York, 1966.

[83] N. H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Walley & Sons, Chichester-New York-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto, 1999.

[84] Truesdell, C. A. III. Essays in the History of Mechanics, New York: Springer-Verlag, 1968.

[85] Jacobi, C. G. J. Vorlesungen über Dynamik, 2nd ed., Reimer, Berlin, 1884.

[86] Klein, F. Über die differentialgesetze fur die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravittionstheorie, Nachr König, Gesell Wissen, Göttingen, Math.-Phys. Kl., Heft 2, pp. 171-189, 1918.

[87] Noether, E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. König. Gesell. Wissen., Göttingen, Math.-Phys. Kl., Heft 2, pp. 235-257, 1918. English trans. in Transport Theory and Statistical physics, 1(3), pp. 186-207, 1971.

[88] Bessel-Hagen, E. Über die Erhaltungssätse der Elektrodynamik. Mathem. Ann., 84, pp. 258-276, 1921. English trans. in Archives of ALGA, 3, ALGA publ., BTH, Karlskrona, Sweden, pp. 33-51, 2006.

[89] Hill, E. L. Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics, Rev. Mod. Phys., 23, pp. 253-260, 1951.

[90] N. H. Ibragimov, Invariant variational problems and conservation laws. Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, 1(3), pp. 350-359, 1969. English trans. in Theor. Math. Phys., 1(3), pp. 267-276, 1969.

[91] N. H. Ibragimov, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. CRC Press Inc., Boca Raton, 1994.

[92] N. H. Ibragimov, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.2: Applications in engineering and physical sciences. CRC Press Inc., Boca Raton, 1995.

[93] N. H. Ibragimov, Ed. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol.3: New trends in theoretical developments and computational methods. CRC Press Inc., Boca Raton, 1996.

[94] Ritt, J. F. Differential algebra. New York: AMS Coll. Publ., 33, 1950.

[95] Barcilon, V. and Ritcher F. M. Nonlinear waves in compacting media, J. Fluid. Mech., 164, pp. 429-448, 1986.

[96] Harris, S. E. Conservation laws for a nonlinear wave equation, Nonlinearity, 9, pp. 187-208, 1996.

[97] Anco, S. C., Bluman G. Direct construction of conservation laws from field equations, Phys. Rev. Lett., 78, pp. 2869-2873, 1997.

[98] Anco, S. C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I. Examples of conservation law classifications, European J. Appl. Math., 13, pp. 545-566, 2002.

[99] Anco, S. C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part II. General treatment, European J. Appl. Math., 13, pp. 567585, 2002.

[100] Khamitova, R. Group structure and a basis of conservation laws, Teori Matem. Fizika, 52(2), pp. 244-251, 1982. English trans. Theor. Math. Phys., 52(2), pp. 777-781, 1983.

[101] Tsujishita, T. On variation bicomplexes associated to differential equa- tions, Osaka J. Math., 19, pp. 311-363, 1982.

[102] Lin, C. C., Reissner, E. and Tsien, H. S. Nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid, J. Math. Phys., 27 (3), p. 220, 1948.

[103] Mamontov, E.V. On the theory of nonstationary transonic flows, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185 (3), p. 538, 1969. (In Russian)

[104] Ibragimov, N. H. Lie groups in mathemarical physics, Lecture Notes, Novosibirsk Univ. Publ, Novosibirsk, 1972 (In Russian). English trans. in: Ibragimov, N. H. Collected works. Vol.3, ALGA Publ., BTH, Karl- skrona, Sweden, 2008.

[105] Kucharchyk, P. Teoria grup Liego w zastosowaniu do rownah rozniczkowych czastkowych, IPPT PAN, Warszawa, 1967.

[106] Sukhinin, S.V. Continuum Dynamics, 36, Novosibirsk, p. 130, 1978 (In Russian).

[107] Atherton, R. W. and Homsy, G. M. On the existance and formulation of variational principles for nonlinear differential equations, Studies Appl. Math., LIV (1), pp. 31-60, 1975.

[108] N. A. Kudryashov, D. I. Sinelshchikov, Nonlinear waves in bubbly liquids with consideration for viscosity and heat transfer, Phys. Lett. A 374 (2010) 2011-2016.

[109] P. N. Ryabov, Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Applied Mathematics and Computation, 217(7)(2010), 3585-3590.

[110] M. Randrüüt, On the Kudryashov-Sinelshchikov equation for waves in bubbly liquids, Physics Letters A, 375(2011),3687-3692.

[111] M. Randrüüt, M. Braun, Cnoidal waves governed by the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Phys. Lett. A 377 (2013) 1868-1874.

[112] M. Randrüüt, M. Braun, On identical traveling-wave solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov and related equations, Int. J. Nonlin. Mech. 58 (2014) 206-211.

[113] J. Li and G. Chen, Exact traveling wave solutions and their bifurcations for the Kudryashov-Sinelshchikov equation, International Journal of Bifurcation and Chaos, 22(5)(2012), Article ID 1250118, 19 pages.

[114] B. He, Q. Meng, and Y. Long, The bifurcation and exact peakons, solitary and periodic wave solutions for the Kudryashov-Sinelshchikov equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(11)(2012), 4137-4148.

[115] M. Mirzazadeh and M. Eslami, Exact solutions of the Kudryashov-Sinelshchikov equation and nonlinear telegraph equation via the first integral method, Nonlinear Analysis. Modelling and Control, 17(4)(2012), 481-488.

[116] O. Y. Efimova, The modified simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear partial differential equations, http://arxiv.org/abs/1011.4606, 2010.