**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO**
**FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

# RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO SOBRE CAMBIO COGNITIVO Y SENSIBILIDAD DIDÁCTICA

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

**LANDY ELENA SOSA MOGUEL**

DIRECTOR DE TESIS:

**DRA. GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ**

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero

Diciembre de 2019

## Resumen

En esta investigación se estudió un cambio cognitivo docente en el razonamiento inductivo de profesores de matemáticas en servicio. Este cambio docente es descrito como resultado de una transacción entre el desarrollo de este tipo de razonamiento en los profesores, y una acción de la práctica profesional. Por tanto, concierne tanto al desarrollo personal como al crecimiento profesional del profesor. Se asumió que la transacción entre el razonamiento inductivo de los profesores y una acción de la práctica docente requiere ser mediada por la sensibilización didáctica. El objetivo fue describir el cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en profesores de matemáticas respecto a su razonamiento inductivo y sus implicaciones en el rediseño de una actividad de aprendizaje. El cambio cognitivo docente fue examinado en dos aristas: a nivel personal, un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores y, a nivel de la actividad profesional, la sensibilidad didáctica como medio para la transacción entre el razonamiento de los profesores y la acción de rediseñar una actividad de generalización. La investigación se llevó a cabo mediante dos acciones: i) Examinar el estado del razonamiento inductivo de profesores de secundaria; y ii) Diseñar y ejecutar un Experimento de Desarrollo del Profesor para propiciar y analizar un cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica. El cambio cognitivo se analizó utilizando el método microgenético y la sensibilidad didáctica con el método del análisis temático. Entre los hallazgos se obtuvo que, se produce un cambio cognitivo en los profesores al conectar tres procesos inductivos: observar regularidades, establecer patrones y formular generalizaciones, a través de establecer relaciones numéricas que describen un comportamiento cuadrático y abstraer la generalidad. También, se observó una sensibilización didáctica en los profesores que favoreció ir más allá del reconocimiento y entendimiento de los procesos inductivos en las actividades realizadas, y transferir lo aprendido al rediseño de una actividad de generalización.

**Palabras clave:** *Cambio cognitivo docente, razonamiento inductivo, sensibilidad didáctica, profesores de matemáticas.*

## Abstract

In this research a teacher cognitive change in the inductive reasoning of in-service mathematics teachers was studied. This teacher change is described as a result of a transaction between the development of teachers reasoning, and an action of professional practice. Therefore, it concerns both personal development and professional growth of the teacher. It was assumed that the transaction between the inductive reasoning of teachers and an action of teaching practice needs to be mediated by didactic sensitising. The objective was to describe the cognitive change and didactic sensitivity in mathematics teachers regarding their inductive reasoning and its implications in the redesign of a learning activity. Teacher cognitive change was examined in two aspects: at a personal level, a cognitive change in the teachers' inductive reasoning and, at the level of professional activity, didactic sensitivity as a means for the transaction between teacher reasoning and the action of redesigning a generalization activity. The investigation was carried out through two actions: i) Examine the state of inductive reasoning of secondary school teachers; and ii) Design and carry out a Teacher Development Experiment to promote and analyze cognitive change and didactic sensitivity. Cognitive change was analyzed using the microgenetic method and didactic sensitivity with the thematic analysis method. Among the findings, it was obtained that there is a cognitive change in teachers by connecting three inductive processes: observe regularities, establish patterns and formulate generalizations, through establishing numerical relationships that describe a quadratic behavior and abstracting generality. Also, a didactic sensitising was observed in the teachers that allowed them to go beyond the recognition and understanding of the inductive processes in the activities implemented, and transfer what they learned to the redesign of a generalization activity.



**Palabras clave:** *Teacher cognitive change, inductive reasoning, didactic sensitivity, mathematics teachers.*

# *Agradecimientos*

A mis padres, José Sosa y Landy Moguel, porque con su ejemplo me han enseñado que el trabajo continuo con exigencia, honestidad, humildad y perseverancia es la ruta más adecuada para alcanzar las metas. Gracias por la educación y el apoyo incondicional que me han brindado.

A Eddie Aparicio, por acompañarme en este proyecto en la elaboración, reflexión y debate de ideas. En especial, porque siempre he contado con tu apoyo en un tramo largo de mi desarrollo personal y profesional, y has hecho significativa cada experiencia compartida y continuo el aprendizaje. Gracias infinitas.

A la Dra. Guadalupe Cabañas, por su tiempo, atención y facilidades otorgadas para el desarrollo del proyecto doctoral en su calidad de asesora. Gracias por su comprensión y compañerismo profesional.

A Damián, Kevin y Andrea, quienes colaboraron conmigo en las sesiones de desarrollo profesional con profesores de secundaria, por su disponibilidad, tiempo y trabajo responsable.

A los revisores de la tesis doctoral, por los pertinentes comentarios realizados sobre esta investigación, los cuales contribuyeron a reflexiones más profundas y a su mejora. Gracias por su tiempo y profesionalismo.

A mis compañeros del Cuerpo Académico Enseñanza de las Matemáticas de la UADY, quienes en la cercanía o lejanía me motivaron y apoyaron en este trayecto de formación académica en la investigación.

A Melby, Safira, Erika, Angie, Eddie, Esteban, Gustavo, Noé, por hacer que las experiencias vividas durante el doctorado, sin importar su naturaleza, sean sumamente gratas. Porque con las cualidades que nos distinguen y la aceptación de nuestras diferencias, supimos forjar lazos de amistad. Con el aporte de cada uno, los momentos compartidos han sido inolvidables y fabulosos. Gracias por hacer más placentera mi estadía en Chilpancingo.

# Índice de contenido

Introducción……………………………………………………………………………….. 1
Capítulo 1. Desarrollo profesional docente y razonamiento inductivo ................................ 5
1.1. Desarrollo profesional y cambio cognitivo docente en matemáticas ........................ 5
1.2. Investigaciones sobre razonamiento inductivo de niños y jóvenes ......................... 11
1.3. Papel del razonamiento inductivo en el aprendizaje matemático ............................ 15
1.4. Razonamiento inductivo y docencia en matemáticas ............................................. 19
1.5. Problema y preguntas de investigación ................................................................ 22
Capítulo 2. Marco de referencia del razonamiento inductivo ............................................ 26
2.1. Razonamiento matemático........................................................................................ 26
2.2. Perspectivas del razonamiento inductivo................................................................ 27
2.2.1. Inducción en la ciencia ............................................................................................ 27
2.2.2. Razonamiento inductivo en Lógica ........................................................................ 30
2.2.3. Razonamiento inductivo desde una perspectiva psicológica ................................ 33
2.2.4. Razonamiento inductivo y resolución de problemas .............................................. 37
2.2.5. Teorías y modelos del razonamiento inductivo ........................................................ 39
2.3. Características y procesos subyacentes al razonamiento inductivo.......................... 43
2.3.1. Relación entre razonamiento inductivo y generalización ........................................ 43
2.3.2. Procesos inductivos ................................................................................................ 45
Capítulo 3. Fundamentos y elementos teóricos ................................................................... 48
3.1. Desarrollo cognitivo en la teoría de Vygotsky ........................................................ 48
3.1.1. Procesos cognitivos elementales y superiores ........................................................ 49
3.1.2. Desarrollo y aprendizaje ........................................................................................ 51
3.1.3. Cambio cognitivo.................................................................................................... 54
3.1.4. Actividad y desarrollo cognitivo en la teoría de Leontiev ...................................... 56
3.2. Desarrollo profesional docente y sensibilidad didáctica ......................................... 59
3.2.1. Desarrollo profesional docente como cambio y crecimiento ................................ 59
3.2.2. Sensibilidad didáctica docente................................................................................ 61
Capítulo 4. Marco metodológico ........................................................................................ 65
4.1. Acciones de la investigación .................................................................................... 65
4.2. Investigación de diseño............................................................................................ 66
4.3. Experimentos de Enseñanza y de Desarrollo del profesor ........................................ 79
4.4. Categorías y métodos de análisis de datos.............................................................. 86

Capítulo 5. Examinación del razonamiento inductivo de profesores de secundaria ........... 98
5.1. Participantes en el estudio ........................................................................ 98
5.2. Instrumento para la recolección de datos ................................................ 99
5.3. Recolección y análisis de datos ............................................................. 102
5.4. Procesos inductivos de los profesores para generalizar ......................... 104
5.5. Dificultades para generalizar patrones cuadráticos inductivamente ....... 112
Capítulo 6. Diseño del experimento para un cambio cognitivo en el razonamiento .......... 122
6.1. Descripción general del experimento .................................................... 122
6.1.1. Objetivo del experimento ............................................................ 123
6.1.2. Participantes ............................................................................... 123
6.1.3. Estructura general del experimento y organización de las sesiones ............ 124
6.2. Trayectoria hipotética de aprendizaje .................................................... 126
6.2.1. Conjeturas de la investigación ..................................................... 127
6.2.2. Contenido matemático ................................................................. 128
6.2.3. Actividades por sesión ................................................................. 132
6.3. Recolección de datos en las sesiones ..................................................... 150
Capítulo 7. Desarrollo del experimento y resultados parciales por sesión ........................ 151
7.1. Sesión 1: Etapa A - Categoría didáctica ................................................. 151
7.2. Sesión 2: Etapa A – Categoría cognitiva ................................................ 163
7.3. Sesión 3: Etapa B – Categoría cognitiva y didáctica .............................. 172
7.4. Sesión 4: Etapa B – Categoría didáctica ................................................. 192
7.5. Sesión 5: Etapa C – Categorías cognitiva y didáctica ............................ 200
Capítulo 8. Resultados y conclusiones ................................................................................ 210
8.1. Cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores ......... 210
8.2. Sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo ................................... 216
8.3. Implicaciones del cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en el rediseño de una actividad ........................................................................................ 221
8.4. Limitaciones de la investigación ............................................................. 223
8.5. Aportes y alcances de los resultados de la investigación ....................... 225
Referencias bibliográficas ..................................................................................................... 227

# Índice de tablas

**Tabla 2.1.** Tipos de tareas del razonamiento inductivo (Klauer, 1996, p. 39) 39
**Tabla 4.1.** Tipos de investigaciones de diseño según su objetivo y producto (Plomp, 2013, p. 23) 75
**Tabla 4.2.** Criterios para intervenciones de alta calidad en investigaciones de diseño. Fuente: Plomp (2013, p. 29). 78
**Tabla 5.1.** Patrón en los valores del área de los rectángulos de la Tarea 2 102
**Tabla 5.2.** Clasificación de las respuestas de los profesores por tarea 104
**Tabla 5.3.** Frecuencia de profesores por proceso inductivo en cada tarea 104
**Tabla 5.4**. Estructura general de los patrones establecidos por los profesores en la Tarea 1 109
**Tabla 6.1.** Organización de los profesores por equipo en el TDE 124
**Tabla 6.2.** Organización y objetivos de las sesiones en cada etapa del TDE 126
**Tabla 6.3.** Tema y aprendizajes esperados relativos a la ecuación cuadrática por bloque. Fuente: Libro "Matemáticas 3. Por competencias" (Arriaga y Benítez, 2014) 129
**Tabla 6.4.** Componentes conceptuales y procedimentales de la ecuación cuadrática. Fuente: Fernández (2016) 131
**Tabla 6.5.** Solución propuesta de la tarea presentada en la Actividad IV 144
**Tabla 7.1.** Listado parcial de extractos agrupados por código (Actividad I) 155
**Tabla 7.2.** Formas de interpretación de la enseñanza basada en la inducción (Actividad I) 158
**Tabla 7.3.** Transcripción de las fases descritas por el profesor I 159
**Tabla 7.4.** Transcripción de las fases descritas por el profesor B 160
**Tabla 7.5.** Respuestas escritas de los profesores al ítem 1 de la Actividad II 165
**Tabla 7.6.** Resultados globales del estado inicial de razonamiento inductivo de los profesores 168
**Tabla 7.7.** Estructuras subyacentes al patrón de la secuencia D establecidas por los equipos 180
**Tabla 7.8.** Listado de códigos generados sobre las acciones para generalizar inductivamente 186
**Tabla 7.9.** Relación de temas sobre los procesos percibidos en la actividad III 187
**Tabla 7.10.** Procesos inductivos asociados por los equipos a cada paso de la solución 195
**Tabla 7.11.** Orden preestablecido para las tareas de acuerdo a una lógica inductiva 206
**Tabla 7.12.** Orden de las tareas dispuesto por cada equipo en el rediseño de la actividad 206
**Tabla 7.13.** Orden de las tareas asignado por E6 y razones de los cambios efectuados 207
**Tabla 7.14.** Orden de las tareas asignado por E1 y razones de los cambios efectuados 207
**Tabla 7.15.** Orden de las tareas asignado por E5 y razones de los cambios efectuados 208
**Tabla 8.1.** Procesos inductivos y acciones predominantes en el razonamiento de los profesores durante el TDE 211
**Tabla 8.2.** Aspectos de la sensibilidad didáctica antes, durante y después del cambio cognitivo 217

# Índice de figuras


**Figura 1.1.** Esquema del cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo y los elementos teóricos involucrados 10
**Figura 1.2.** Problemas sobre similitud y/o disimilitud. Fuente: Papageorgiou (2009, p. 317) 13
**Figura 1.3.** Actividad sobre patrones y ecuaciones en un libro de texto 18
**Figura 2.1.** Esquemas del razonamiento deductivo y del inductivo en Lógica 31
**Figura 2.2.** Esquema de un razonamiento por analogía. Fuente: Guetmanova (1989, p. 204) 32
**Figura 2.3.** Estructura de la abducción, inducción y deducción (Rivera, 2013) 33
**Figura 3.1.** Relación entre aprendizaje y desarrollo. Fuente: Castillo (2011, p. 21) 53
**Figura 3.2.** Cambio cognitivo como descriptor del desarrollo del razonamiento inductivo 56
**Figura 3.3.** Estructura de la actividad en la Teoría de Leontiev 59
**Figura 3.4.** Esquema del estudio de un cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo 64
**Figura 4.1.** Aspectos del ciclo de investigación en estudios de desarrollo. Fuente: Cobb (2000, p. 315) 81
**Figura 4.2**. Esquema general del TDE respecto al razonamiento inductivo 86
**Figura 4.3.** Codificación de las características del razonamiento inductivo con MAXQDA 94
**Figura 4.4.** Algunos extractos de datos y códigos asociados con MAXQDA 94
**Figura 4.5.** Agrupación de códigos en un tema provisional 95
**Figura 5.1.** Tarea 1 para la recolección de datos 100
**Figura 5.2.** Tarea 2 para la recolección de datos 101
**Figura 5.3.** Organización de casos y observación local de regularidades por el profesor A (T1) 106
**Figura 5.4**. Proceso para observar regularidades globales por el profesor B (T1) 106
**Figura 5.5**. Establecimiento del patrón con una estructura multiplicativa por el profesor B (T1) 108
**Figura 5.6**. Expresión algebraica de la regla general y solución dada por el profesor B (T1) 110
**Figura 5.7**. Expresión algebraica de la regla general dada por el profesor A (a) y el profesor D (b) en T1 110
**Figura 5.8.** Regularidad global observada por el profesor A (T2) 113
**Figura 5.9.** Análisis numérico de casos y cálculo de diferencias por el profesor E (T2) 114
**Figura 5.10**. Solución del profesor F (T2) 115
**Figura 5.11.** Extractos de la solución escrita del profesor G (T2) 117
**Figura 5.12.** Solución del profesor B (T2) 118
**Figura 5.13**. Relación entre los valores de $b$ y $h$ establecida por el profesor H (T2) 118
**Figura 5.14**. Asociación de casos particulares y expresiones algebraicas por el profesor F (T2) 119
**Figura 5.15.** Expresión verbal y algebraica de la generalización por el profesor G (T2) 119
**Figura 5.16.** Intento de generalización del profesor E por ensayo y error (T2) 120
**Figura 6.1**. Esquema general del TDE por etapas y sesiones 125
**Figura 6.2**. Esquema experimental de desarrollo del razonamiento inductivo 128
**Figura 6.3.** Actividad I para examinar la sensibilidad didáctica (Sesión 1) 134
**Figura 6.4.** Actividad II para examinar el razonamiento inductivo en lo cognitivo (Sesión 2) 135

**Figura 6.5**. Actividad III – Parte 1: Secuencia de figuras y puntos (Sesión 3) 139
**Figura 6.6**. Actividad III – Parte 2 (Sesión 3) 142
**Figura 6.7.** Tarea de razonamiento inductivo planteada en la Actividad IV (Sesión 4) 143
**Figura 6.8.** Actividad V – Etapa C: Categoría cognitiva (Sesión 5) 148
**Figura 6.9.** Situación de la Actividad VI – Etapa C: Categoría didáctica (Sesión 5) 149
**Figura 6.10.** Instrucción de la Actividad VI – Etapa C: Categoría didáctica (Sesión 5) 150
**Figura 7.1.** Tareas A y B de la Actividad I 152
**Figura 7.2.** Pantalla de la codificación de datos de la Tarea A (Software MAXQDA) 154
**Figura 7.3.** Códigos generados de las características del razonamiento inductivo (Actividad I) 155
**Figura 7.4.** Fases propuestas para la enseñanza de la ecuación cuadrática por la profesora M 159
**Figura 7.5.** Fases de enseñanza acordes a una lógica deductiva (Profesor O) 160
**Figura 7.6**. Fases descritas por la profesora J 161
**Figura 7.7**. Problema e instrucciones de la Actividad II 164
**Figura 7.8.** Solución del profesor A usando razonamiento inductivo 168
**Figura 7.9.** Proceso de observar regularidades y determinar una regla por la profesora L 170
**Figura 7.10.** Observación de regularidades y búsqueda del patrón por el profesor N 170
**Figura 7.11.** Solución de la profesora M por un método algebraico 171
**Figura 7.12.** Actividad III: Secuencia de figuras y puntos (Parte 1) 173
**Figura 7.13**. Actividad III – Parte 2 174
**Figura 7.14.** Observación de regularidades por E2 en la Tarea 1 (Actividad III) 177
**Figura 7.15**. Observación de regularidades por E5 en la Tarea 1 178
**Figura 7.16.** Respuesta escrita de E3 a la Tarea 2 de la actividad III – Parte 1 180
**Figura 7.17.** Respuesta escrita de E4 a la Tarea 2 de la actividad III – Parte 1 181
**Figura 7.18.** Respuesta escrita de E1 a la Tarea 2 182
**Figura 7.19.** Respuesta escrita de E6 a la Tarea 2 182
**Figura 7.20.** Evidencias de generalización del patrón de las secuencias por E4 y E6 (Tarea 3) 183
**Figura 7.21.** Codificación de extractos de las respuestas de la Actividad III – Parte 2 186
**Figura 7.22.** Agrupación y revisión de códigos en Excel para la búsqueda de temas 187
**Figura 7.23.** Tarea de razonamiento inductivo de la Actividad IV 193
**Figura 7.24.** Pasos de la solución propuesta a la tarea de la Actividad IV 193
**Figura 7.25.** Actividad V para evaluar un cambio cognitivo 201
**Figura 7.26.** Actividad de generalización inductiva a rediseñar 202
**Figura 7.27.** Respuestas de E2 en los incisos a) y b) 203
**Figura 7.28.** Patrón numérico representado por E5 en el análisis de los valores del área 204
**Figura 7.29.** Formulación de un modelo general por E4, inciso b 204
**Figura 7.30.** Formulación de un modelo general por E2, inciso c 205
**Figura 7.31.** Formulación de un modelo general por E5, inciso b 205
**Figura 7.32.** Tarea E propuesta por E4 en el rediseño de la actividad 207
**Figura 8.1.** Tarea de razonamiento inductivo planteada en la Actividad IV 220
**Figura 8.2.** Esquema de desarrollo del razonamiento inductivo de los profesores en el TDE 222

# Introducción

En esta investigación se diseñó y experimentó una propuesta de actividades para promover y analizar un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de profesores de matemáticas, como una forma de favorecer su desarrollo profesional docente. De acuerdo con Guskey (2000; 2002) el desarrollo profesional involucra a aquellos procesos y actividades diseñados con el propósito de cambiar y mejorar el conocimiento profesional, las prácticas docentes en el aula, las habilidades y actitudes de los profesores y, a su vez, el aprendizaje de los estudiantes.

Richardson y Placier (2011) señalan que este cambio docente puede describirse en términos de aprendizaje, crecimiento, mejora, implementación de algo nuevo o diferente y un cambio cognitivo. Esta investigación doctoral toma como base la noción de cambio cognitivo docente, referida por estas autoras al hablar de un cambio en relación a lo que el profesor conoce, piensa y hace en su profesión. Un cambio cognitivo es una transición de un estado menos organizado de desarrollo a otro más organizado (Fowler, 1992) o, en palabras de Vygotsky (1978), la transformación de un estado actual a otro superior o potencial de desarrollo. Tal como se postula en la teoría histórico-cultural de Vygotsky, se asume que el desarrollo cognitivo es dinámico y progresivo, por lo que dicho cambio es una manifestación de aprendizaje y desarrollo. Más aun, Fowler argumenta que el cambio cognitivo tiene dirección hacia un punto final o estado meta en el desarrollo de un individuo.

En esa dirección, Clarke y Hollingsworth (2002) sostienen que el cambio profesional docente alude tanto a un *desarrollo personal* como a un *crecimiento profesional*. El primero está orientado a mejorar su desempeño, desarrollar habilidades o estrategias adicionales en el docente; el segundo, involucra aprendizaje en una comunidad y cambio en la actividad profesional. De este modo, la presente investigación se sitúa en la línea del *cambio cognitivo docente* como un descriptor del desarrollo profesional de profesores de secundaria, y entendido como una transformación de las formas de pensamiento, conocimientos y habilidades del profesor, que ha de reflejarse en la mejora en su práctica. En particular, aquí se estudió un cambio cognitivo respecto al razonamiento inductivo de profesores de secundaria.

El razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que consiste en inferir leyes o conclusiones generales por medio de la observación y conexión de instancias particulares de una clase de objetos o situaciones. Se tomó como objeto del estudio a este tipo de razonamiento, porque tiene una función importante en el desarrollo de procesos intelectuales (Klauer, Willmes, & Phye, 2002; Mousa, 2017), tales como la generación y aplicación de conocimiento (Klauer, 1996), la habilidad de resolución de problemas (Haverty, Koedinguer, Klahr, & Alibali, 2000; Molnár, Greiff & Csapó, 2013) y la generalización de distintas clases de patrones matemáticos (Cañadas, Castro y Castro, 2008; Neubert & Binko, 1992).

Curricularmente, uno de los objetivos de la educación secundaria (SEP, 2011; 2017; NCTM, 2000) es que los estudiantes generalicen patrones lineales y cuadráticos a partir de representaciones numéricas y geométricas, y en esta actividad el razonamiento inductivo es clave. Es decir, es un medio para generalizar desde casos particulares, porque permite descubrir la característica invariante entre los casos y sintetizarla en una regla general (Bills & Rowland, 1999). En lo escolar, esto implica una demanda a los profesores de desarrollar en los estudiantes la capacidad de razonar inductivamente para examinar estructuras, generar argumentos y generalizar. En el mismo sentido, en el plan de estudios de educación básica en México (SEP, 2017) se atribuye a los profesores la función pedagógica de organizar actividades de aprendizaje relacionadas con esta forma de razonamiento, tales como formular conjeturas y generalizar patrones en la resolución de problemas matemáticos, así como de acompañar a los estudiantes en el análisis, comunicación y justificación de su proceso de solución.

Por lo anterior, el trabajo se enfocó en el razonamiento inductivo de profesores en secundaria, porque son quienes principalmente tiene la labor de fomentar e interpretar ésta y otras formas de razonamiento en los estudiantes (AMTE, 2017; SEP, 2017). Sin embargo, realizar esta labor representa una problemática. Por un lado, en la práctica docente es confuso cómo promover el razonamiento en el aula (Herberts, Vale, Bragg, Loong y Widjaja, 2015; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina, 2013) y es complejo para los profesores reconocer cómo razonan los estudiantes en tareas de generalización (Callejo & Zapatera, 2017; El Mouhayar, 2018). Por otro lado, estudios previos reportan dificultades de profesores en formación y servicio para generalizar de manera inductiva, en particular, para obtener la regla de patrones cuadráticos (e.g., Alajmi, 2016; Manfreda, Slapar, & Hodnik, 2012).

Pese a esta problemática, en la literatura sobre el tema se carece de información acerca de cómo profesores de secundaria razonan inductivamente y cómo lo incorporan, si fuera así, en la enseñanza de conceptos matemáticos (Sosa & Cabañas, 2017). Esto es, poco se ha indagado sobre el razonamiento del profesor, aun cuando es parte constitutiva de su forma de pensar, conocer y actuar.

En este orden de ideas, se presenta el estudio del *cambio cognitivo docente* respecto al razonamiento inductivo, tomando como referencia lo propuesto por Fraser, Kennedy, Reid y Mckinney (2007). Para estos autores, un cambio profesional docente se entiende mejor si se describe como “resultado de un proceso de aprendizaje en términos de *transacciones* entre el conocimiento, la experiencia y las creencias de los docentes, por un lado, y sus acciones profesionales, por el otro” (p. 157). Por tanto, el cambio fue analizado en dos aristas: a *nivel personal*, referido al cambio en el estado que guarda el razonamiento inductivo en la cognición del docente; a nivel de la *actividad profesional*, en una acción de su práctica profesional, en específico, el rediseño de una actividad de generalización. El objetivo general fue describir el cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica respecto al razonamiento inductivo de los profesores y sus implicaciones en el rediseño de una actividad de aprendizaje.

No obstante, un cambio cognitivo por sí mismo no garantiza que se refleje en la práctica docente. Según Hopwood (2016), el traspaso del aprendizaje profesional a la práctica no se da por transferencia de información, requiere de la sensibilización de lo aprendido para cambiar la forma en que se interpreta la acción en la práctica y fortalecer la conexión del conocimiento adquirido con tal acción. Por tal razón, en el trabajo se presenta la noción de *sensibilidad didáctica* y se usa como un medio para analizar la transacción del cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores a la acción de rediseño de una actividad de aprendizaje. En este estudio, la sensibilidad didáctica a la inducción se refiere a la capacidad de los profesores de percibir a este razonamiento como una forma alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y sus implicaciones en su práctica para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

Las acciones para el desarrollo de la investigación fueron: i) Examinar el estado del razonamiento inductivo de un grupo de profesores de secundaria; y ii) Diseñar y ejecutar un Experimento de Desarrollo del Profesor (TDE, por sus siglas en inglés) con el objetivo de analizar un cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en los profesores respecto a este razonamiento.

Para presentar los elementos de la investigación, este documento se ha estructurado en ocho capítulos. En el Capítulo 1 se plantean los antecedentes del estudio y la problemática de la investigación. En el Capítulo 2 se expone el posicionamiento teórico sobre el razonamiento inductivo y el marco de referencia utilizado para examinar el estatus de dicho razonamiento y un cambio cognitivo en los profesores.

Los fundamentos y constructos teóricos del trabajo se describen en el Capítulo 3. Por un lado, los principios de la perspectiva histórico-cultural de Vygotsky (1978) sobre el desarrollo humano y los elementos de la teoría de la Actividad de Leontiev (1984), los cuales se adoptaron para analizar el cambio cognitivo y estructurar una actividad que lo suscite, respectivamente. Por otro lado, bajo la perspectiva del desarrollo docente como un proceso de crecimiento personal y profesional, se presenta el constructo “sensibilidad didáctica” y su marco conceptual.

El Capítulo 4 concierne al marco metodológico. El TDE es una modalidad de la metodología denominada Investigación de diseño, se trata de un *Experimento de Enseñanza* en escenarios de desarrollo profesional docente. Para estudiar un cambio cognitivo docente se utilizaron dos categorías de análisis correspondientes a cada nivel de cambio profesional docente: el personal y el de actividad profesional. Estas categorías fueron: el *cambio cognitivo* y la *sensibilidad didáctica*, respectivamente. En la primera categoría se empleó el método microgenético y en la segunda, el método de análisis temático.

En el Capítulo 5 se reportan los resultados del estudio sobre el estado del razonamiento inductivo de profesores de secundaria, en los que se caracterizan los procesos inductivos que usan para generalizar con éxito, así como el tipo de dificultades que enfrentan. El Capítulo 6 contiene la planeación y diseño del TDE. En este se indican las etapas del experimento, la organización de las sesiones y los objetivos perseguidos en cada una. También, incluye la descripción de la trayectoria hipotética de aprendizaje (objetivos, conjeturas y actividades) para el desarrollo del razonamiento de los profesores. En el Capítulo 7 se detalla el desarrollo de las sesiones, junto con los análisis y resultados parciales del TDE.

En el Capítulo 8 se exponen los resultados finales de la investigación relativos a la descripción del cambio cognitivo observado y en qué medida se produce, así como una caracterización de la sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo y su papel como mediadora para la transacción del conocimiento generado por los profesores a la acción de rediseño de una actividad de generalización inductiva. Finalmente, se plantean conclusiones sobre limitaciones y aportes del trabajo.

# Capítulo 1

# Desarrollo profesional docente y razonamiento inductivo

El tema de la presente investigación es el desarrollo profesional docente en matemáticas, desde la perspectiva de un cambio en el desarrollo personal y en el crecimiento profesional de profesores. En esta línea, se consideró como objeto de estudio al cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de profesores de secundaria. En este capítulo se exponen los antecedentes de la investigación en dos direcciones: i) estudios sobre desarrollo profesional docente y cambio cognitivo; ii) estudios acerca del razonamiento inductivo en el aprendizaje y en relación con la docencia en matemáticas. Con base en los hallazgos de tales estudios se plantea el problema y los objetivos de esta investigación.

## 1.1. Desarrollo profesional y cambio cognitivo docente en matemáticas

El estudio de los procesos de formación y desarrollo profesional docente, particularmente en matemáticas, ha transitado por diversas aproximaciones teóricas. Algunos han analizado y documentado la relación de dependencia entre el tipo de práctica educativa realizada por el profesorado con el tipo de concepciones, creencias y conocimiento que poseen (e.g., Pajares, 1992; Ponte, 1994; Thompson, 1992). Otros han colocado como eje central de estudio, el tipo de conocimiento pedagógico y disciplinar que un profesor debiera poseer para desempeñar profesionalmente su labor, asumiéndose la existencia de un conocimiento "base" para la enseñanza, (e.g. Leinhardt & Greeno, 1986; Shulman, 1986, 2005).

En la educación matemática, el análisis y la caracterización del conocimiento de los profesores para la enseñanza se ha investigado mayormente con base en el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames, & Phelps, 2008), otros bajo el modelo denominado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013; Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes, Climent, 2015) y algunos con enfoque en las dimensiones del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino y Godino, 2015; Pino, Godino & Font, 2016). Estas investigaciones argumentan que el conocimiento de la estructura matemática, el conocimiento pedagógico y la comprensión de las conexiones *intra* y *extra* matemáticas permite a los profesores ser más eficaces en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y en apoyar el reconocimiento y uso de las estructuras matemáticas.

Por otra parte, en la literatura también se han identificado estudios que plantean la importancia de favorecer la auto reflexión académica y el análisis de la reflexión sobre la práctica docente, como una forma de que los profesores mejoren su práctica y se responsabilicen de generar su propio conocimiento matemático para la enseñanza (e.g. Jansen & Spitzer, 2009; Ponte & Chapman, 2006; Walshaw, 2010).

En los trabajos antes citados, la cuestión de la profesionalización docente ha sido atendida desde la perspectiva de los procesos cognitivos del profesor, pero sin considerar el papel de los colectivos en los procesos de desarrollo profesional. La visión del docente y su actividad como un sistema complejo, en el que su conocimiento de la matemática se ve afectado en lo global e individual por la interpretación colaborativa y la actividad de co-adaptación en el aprendizaje, ha sido investigada en el modelo *Mathematics for Teaching* (Davis & Simmt, 2003). De este modo, lo social se incorpora a lo cognitivo para estudiar no cómo enseñan, sino cómo aprenden matemáticas los profesores, dando mayor importancia al desarrollo de experiencias docentes en entornos colectivos y transformativos sobre la visión, estructura y uso de la matemática (Davis & Simmt, 2006).

Desde una perspectiva sociocultural, las investigaciones sobre las experiencias de profesionalización se han analizado mayormente en el contexto de comunidades de práctica (Núñez, Arévalo y Ávalos, 2012) o los estudios de clase (Lee, 2008; Lewis, Perry, & Murata, 2006), mediante la conformación de equipos de estudio entre profesores y formadores de profesores para la teorización de la práctica docente y la construcción de conocimiento a través de acciones reflexivas situadas. También en un encuadre sociocultural, la profesionalización docente en matemáticas ha sido abordada desde una mirada socioepistemológica con énfasis en la noción de problematización del saber matemático escolar. Bajo esta mirada, la problematización del saber es vista como una forma en que el profesor pueda empoderarse de su actividad (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014).

Es de notar que, en el tema de la profesionalización docente en matemáticas, la mayoría de las investigaciones se han centrado en el conocimiento, las creencias o concepciones, la práctica reflexiva y la noción de aprendizaje situado (comunidad de prácticas). No obstante, en pocos estudios se ha cuestionado cómo construye conocimiento matemático el profesor o se ha intentado trascender del conocimiento al razonamiento matemático, aun cuando dicho razonamiento forma parte del sistema complejo de pensamientos, conocimientos y prácticas inherentes al quehacer docente en matemáticas.

En términos generales, el tema de la profesionalización docente ha sido estudiado desde la perspectiva de un cambio en el profesor en relación a lo que conoce, piensa y hace en su profesión. Según Richardson y Placier (2001), el cambio docente puede describirse en términos de aprendizaje, crecimiento, socialización, mejora, implementación de algo nuevo o diferente, auto-estudio, cambio afectivo y cognitivo. En un sentido cognitivista, el cambio es sinónimo de aprendizaje y es esencial para el desarrollo (Dole & Sinatra, 1998; Siegler & Crowler, 1991).

La presente investigación doctoral se fundamenta en la noción de cambio docente referida en Richardson y Placier (2001), entendido como un descriptor del desarrollo profesional de profesores de matemáticas. A decir de estas autoras, las investigaciones en el tema se han focalizado en examinar el conocimiento de la práctica, del contenido, así como la reflexión de la práctica, a fin de determinar sus efectos en procesos de cambio en el profesor. Desde una mirada de las teorías del aprendizaje constructivista, los cambios relativos a lo que conoce y piensa el profesor son denominados por estas autoras como cambios cognitivos. Al respecto, en la teoría histórico-cultural de Vygotsky se establece que el desarrollo cognitivo es dinámico y progresivo (Vygotsky, 1978), y un cambio cognitivo representa la transformación de cierto estado de desarrollo y su ascenso a un estado superior. Por ende, denota aprendizaje y desarrollo.

El cambio profesional docente connota *desarrollo personal* del profesor y *crecimiento profesional* (e.g., Clarke & Hollingsworth, 2002; Day, 1999). El cambio como desarrollo personal involucra la modificación o transformación de actitudes, percepciones, habilidades, pensamiento y estrategias del profesor con la intención de mejorar su práctica; el cambio como crecimiento profesional concierne a las adaptaciones y modificaciones que el profesor hace en su práctica, mejorándola. En este trabajo, se estudia el *cambio cognitivo docente* entendido como una transformación en el pensamiento y conocimiento del profesor, que repercute en su práctica en términos de mejoras en su quehacer profesional.

La consideración del cambio cognitivo docente, tanto a nivel personal como profesional, se refuerza con la idea de que el cambio profesional se entiende mejor si se describe como: “resultado de un proceso de aprendizaje en términos de transacciones entre el conocimiento, la experiencia y las creencias de los docentes, por un lado, y sus acciones profesionales, por el otro” (Fraser, Kennedy, Reid, & Mckinney, 2007, p. 157). Es decir, se asume que un desarrollo profesional del profesor debe entenderse como un cambio cognitivo que trasciende a lo personal y se sitúa en mejoras a la práctica, por ende, en el aprendizaje de sus estudiantes (nivel micro) y en la mejora de la calidad educativa (nivel macro). Por tanto, el cambio cognitivo docente es considerado como un indicador de aprendizaje y desarrollo profesional del profesor.

De acuerdo con Hopwood (2016), el traspaso del aprendizaje profesional a la práctica se realiza en escenarios con colectivos de profesionales donde se producen formas cambiantes de conocimiento relacionadas con la acción en la práctica, a través de conectar los conocimientos de una persona a otra en la acción y la interacción, dando lugar a cambios en la interpretación de la acción. Este autor sostiene que el traspaso puede entenderse en términos de dos funciones del aprendizaje profesional: *conexión* y *sensibilización*. Hopwood señala que la *conexión* del conocimiento con la experiencia profesional, útil para transformar la práctica, no se logra por sí mismo. Por el contrario, esta conexión a menudo se produce de manera deliberada, cuestionando y discutiendo colectivamente el conocimiento emergente del aprendizaje, mediante la interacción entre profesionales.

La conexión del conocimiento de un profesional con la acción en la práctica se afianzan a través de la *sensibilización* (Hopwood, 2016). Considerando que el aprendizaje profesional implica reposicionarse en relación con los conocimientos y las acciones de otros pares (Edwards, 2000), esta función del aprendizaje es la que permite acceder a formas alternativas de interpretar la acción en la práctica y abrir nuevas posibilidades de actuación en ésta. En efecto, en experiencias de aprendizaje profesional con colectivos de profesores de educación básica, se ha constatado empíricamente que la sensibilización *didáctica* respecto a lo que conoce y cómo lo conoce (en el dominio matemático y pedagógico), y las implicaciones de tal o cual práctica en el aprendizaje de sus estudiantes, favorece la reorganización de su práctica en el aula al reconocer y aceptar la funcionalidad de nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos (Sosa y Aparicio, 2017).

Por consiguiente, se asumió que la sensibilidad tiene una función mediadora de la transacción entre un cambio cognitivo personal y la actividad profesional. Sosa y Aparicio (2017) denominan *sensibilidad didáctica* a la capacidad de los profesores para percibir formas alternativas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los alcances y limitaciones de su práctica, y sus implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes, según el tipo de conceptualización matemática y pedagógica presente en ellos.

En esta investigación, se estudia el cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria. A *nivel personal*, se analiza un cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores, esto es, una transformación en el estado que éste guarda en su cognición. En este nivel, el cambio estará indicado por el tránsito de un estado inicial a un estado superior de desarrollo del razonamiento inductivo de los profesores (Fowler, 1992; Vygotsky, 1978).

A *nivel de la actividad profesional,* se indaga si ese cambio cognitivo repercute en una acción de la práctica profesional, como es el rediseño de una actividad de aprendizaje matemático. Puesto que la generalización es una actividad que potencia el aprendizaje (Demonty, Vlassis, & Fagnant, 2018; Warren, Trigueris, & Ursini, 2016) y el razonamiento inductivo es un medio para generalizar (Bills & Rowland, 1999; Sriraman & Adrian, 2004), el rediseño consistió en la modificación de una actividad de generalización de acuerdo con una lógica inductiva.

Para dar cuenta de la transacción entre el razonamiento inductivo de los profesores y una acción de la práctica docente, se analiza su sensibilidad didáctica a este tipo de razonamiento. Es decir, su percepción acerca del razonamiento inductivo y los procesos cognitivos subyacentes, y su uso en la enseñanza de un concepto matemático. Por lo que la sensibilización didáctica (aumento de sensibilidad) en los profesores se observará si hay una ampliación en el conocimiento que poseen acerca de la inducción y una transformación de su interpretación en la enseñanza de un concepto, así como en el uso que hagan de este conocimiento en el rediseño de la actividad de aprendizaje.

En la Figura 1.1 se presenta un esquema del objeto de estudio de la investigación y los elementos teóricos asociados.

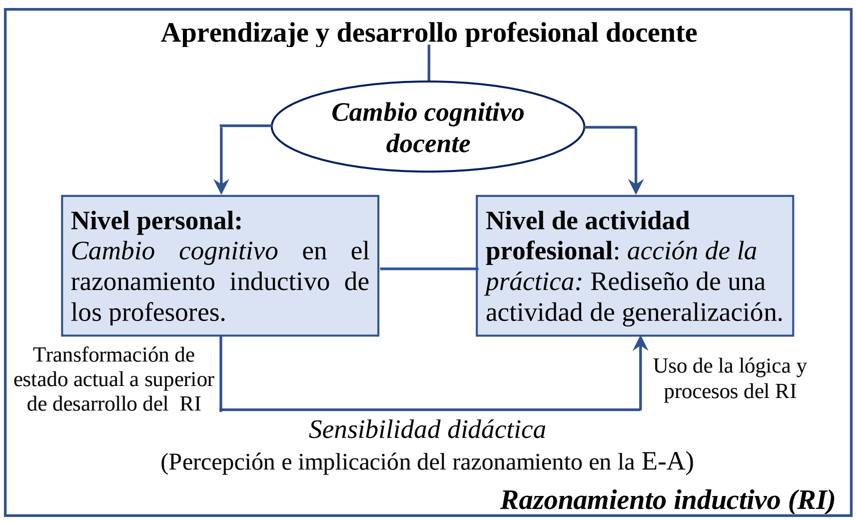



**Figura 1.1.** Esquema del cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo y los elementos teóricos involucrados.

La atención en esta forma de razonamiento obedece a dos consideraciones. Por un lado, es una vía de enseñanza para la conceptualización o formación de conceptos en matemáticas, ya que ayuda a realizar abstracciones y generalizaciones (Dörfler, 1991; Sriraman & Adrian, 2004). Por otro, en la educación secundaria se demanda que los estudiantes generalicen distintas clases de patrones lineales y cuadráticos para obtener reglas generales y fórmulas (NCTM, 2000; SEP, 2011; 2017). Y en la actividad de generalización, el razonamiento inductivo es clave (Haverty et al., 2000; Neubert & Binko, 1992), debido a que permite descubrir características invariantes entre casos particulares y sintetizar estas características en una regla general (Bills & Rowland, 1999).

## 1.2. Investigaciones sobre razonamiento inductivo de niños y jóvenes

El razonamiento inductivo ha sido ampliamente valorado en diversas áreas del conocimiento científico, pues se ha podido constatar sus aportes en el descubrimiento de principios universales de fenómenos a partir de la observación empírica de hechos particulares (Frank, 1991; Shapiro, 2007). Este juega un rol significativo en la mejora de los procesos del desarrollo intelectual tales como la inteligencia, la resolución de problemas y las estrategias de razonamiento (Hayes, Heit, & Swendsen, 2010; Klauer & Phye, 2008; Mousa, 2017). Por estas razones, diversos investigadores en el campo de la educación matemática se han interesado en analizar los procesos implicados y las formas de favorecer dicho razonamiento en situación escolar (e.g., Molnár, 2011; Papageorgiou, 2009; Klauer & Phye, 1994; Sriraman & Adrian, 2004).

La mayor parte de la literatura en este tema se ha enfocado en el aprendiz, más que en quien enseña, y han probado que es posible desarrollar el razonamiento inductivo desde la educación básica. Desde una perspectiva psicológica, Klauer (1990; 1996) experimenta un conjunto de tareas para la prescripción y entrenamiento de esta forma de razonamiento en niños. Establece que el razonamiento inductivo se puede potenciar mediante estrategias basadas en la comparación para descubrir similitudes o diferencias entre los atributos y las relaciones de objetos, a partir de una genealogía de tareas basadas en la clasificación de objetos y la formación de sistemas de relaciones.

La tipología de tareas propuesta por Klauer ha sido la base de varias investigaciones para medir el impacto de programas de instrucción o entrenamiento del razonamiento inductivo en relación con la mejora de procesos intelectuales en niños. Por ejemplo, Tomic (1995) mide el efecto de transferencia de un programa de este tipo en niños de siete años en promedio. La transferencia, medida en términos de un cambio más o menos duradero en la habilidad de un niño para resolver problemas, resultó con un efecto positivo en la duración de la habilidad. También, el programa mostró efectividad en tareas de transferencia cercana a lejana, es decir, tareas sobre el mismo concepto, pero presentada con estímulos o condiciones diferentes a aquellas del entrenamiento. Klauer, Willmes y Phye (2002) analizan el alcance de un programa de entrenamiento del razonamiento inductivo en relación con la inteligencia fluida y la cristalizada en niños. La primera clase de inteligencia está involucrada en la resolución de problemas, mientras que la segunda está implicada en la adquisición de conocimiento declarativo y es considerada como producto de la inteligencia fluida y educación. El programa de entrenamiento impactó positivamente en ambas clases de inteligencia, pero en mayor medida en la fluida que en la cristalizada.

Molnár (2011) evalúa el efecto longitudinal de un programa de instrucción caracterizado por el fomento lúdico del razonamiento inductivo en niños de primer grado (6-8 años) de educación primaria. La instrucción se basó en la resolución de 120 problemas compuestos de los seis tipos de tareas propuestas en la teoría de Klauer: generalización, discriminación (entre atributos de objetos), clasificación-cruzada, reconocimiento de relaciones, discriminación entre relaciones y formación de sistema. El efecto positivo y a largo plazo en el incremento del nivel de razonamiento inductivo en los niños, evidenció que dicho razonamiento podría ser desarrollado desde edad temprana.

En Matemática Educativa, varios estudios (e.g., Cañadas, Castro y Castro, 2008; Haverty, Koedinguer, Klahr y Alibali, 2000; Molnár, Greiff y Csapó, 2013) coinciden en señalar que el razonamiento inductivo permite desarrollar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas y generalizar diferentes patrones matemáticos. Papageorgiou (2009) evalúa los efectos de una instrucción que combina resolución de problemas de razonamiento inductivo y el desarrollo de conceptos matemáticos en un aula de primaria. En la instrucción se utilizó el formato de problemas similitud y disimilitud propuestos por Klauer, los cuales estaban enfocados a la búsqueda de atributos y relaciones entre objetos aritméticos y geométricos (Figura 1.2). Como resultado se obtuvo que este enfoque de instrucción fue efectivo en mejorar la habilidad de los niños para resolver este tipo de problemas y fomentar el desarrollo de conocimientos conceptuales y procedimentales para la construcción de sus esquemas.

<table>
<tr><th></th><th>Attributes tasks</th><th>Relations tasks</th></tr>
<tr><td>Similarity</td><td>The numbers below have something in common. Write the common feature of the numbers:<br>4, 16, 8, 32, 20, 100, 40</td><td>Complete with the right number.<br>1 5 13 29 ……<br>(a) 33 (b) 37 (c) 45 (d) 61</td></tr>
<tr><td>Dissimilarity</td><td>Find the numbers that does not fit in with the others and put it in a circle. Explain.<br>9 21 11 15 12 6 23</td><td>One of the figures disturbs the sequence. Find it and define the right sequence.<br>△ △ ○ ◯ △ △ △ ○ ◯ △</td></tr>
<tr><td>Integration</td><td>Write the number 24 in the appropriate cell. Explain.<table><tr><td>6 18<br>12</td><td>16 8<br>2</td></tr><tr><td>3 15<br>9</td><td>7 25<br>5</td></tr></table></td><td>Complete the empty cell with the appropriate number.<table><tr><td>8</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr><tr><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>;</td></tr></table></td></tr>
</table>

**Figura 1.2.** Problemas sobre similitud y/o disimilitud. Fuente: Papageorgiou (2009, p. 317).

Por su parte, Haverty, Koedinguer, Klahr y Alibali (2000) indagan los procesos cognitivos involucrados en el razonamiento inductivo de estudiantes de licenciatura o pregrado al resolver problemas sobre funciones cuadráticas. Estos autores muestran que las actividades inductivas de recolección de datos, reconocimiento de patrones y generación de hipótesis posibilitan la resolución exitosa de problemas que involucran descubrir la fórmula de dichas funciones. El papel de lo inductivo radicó principalmente en orientar el establecimiento de relaciones entre pares de valores de dos variables y la detección de patrones por parte de los jóvenes, para así obtener la fórmula de la función que se ajustaba a esos valores.

Molnár, Greiff y Csapó (2013) examinan los niveles de desarrollo del razonamiento inductivo, la resolución de problemas en un dominio específico (matemático) y la resolución de problemas complejos a lo largo de la escolarización, desde tercero a onceavo grado (estudiantes de 9 a 17 años). Asimismo, describen las relaciones entre estos procesos en general y cómo cambian a través del tiempo. Entre los hallazgos del estudio se identificó que el razonamiento inductivo guarda una fuerte relación con la resolución de problemas complejos a lo largo de esa etapa escolar, y contribuye a la adquisición y aplicación de conocimiento para la resolución de problemas matemáticos. Adicionalmente, se encontró que el periodo escolar más efectivo para fomentar el desarrollo de este razonamiento en relación con la resolución de esta clase de problemas es el equivalente a la educación secundaria en México (12-14 años de edad en promedio).

Algunas investigaciones (Cañadas & Castro, 2007; Cañadas, Castro y Castro, 2008, 2009) se han centrado en identificar las estrategias y las fases de razonamiento inductivo que siguen estudiantes de secundaria en la resolución de problemas sobre sucesiones lineales y cuadráticas. Por ejemplo, Cañadas y Castro (2007) desarrollan y validan empíricamente un modelo de las fases de razonamiento de los estudiantes, entre las que se encuentra la identificación de patrones, la formulación de conjeturas y la generalización. En tales estudios se reporta que los estudiantes inducen mayormente basados en estrategias numéricas por encima de las figurales, y la identificación de patrones es fundamental para generalizar de manera inductiva.

Otros trabajos con foco en el razonamiento inductivo se han desarrollado en la línea de propuestas instruccionales para el aprendizaje matemático. Tal es el caso del trabajo realizado por Koedinger y Anderson (1998), quienes experimentan un tutor computacional con soporte inductivo para favorecer la habilidad de simbolizar algebraicamente en estudiantes de nivel medio superior. La estrategia de simbolización en el tutor consistía en inducir a la obtención de expresiones algebraicas de situaciones problema a partir de reconocer patrones en operaciones aritméticas. En la adquisición de dicha habilidad, la estrategia inductiva propuesta en el tutor, mostró mayor efectividad que la estrategia de traducción directa de las palabras a los símbolos basada en una lógica deductiva.

Por otra parte, Murawska y Zollman (2015) proponen una secuencia de tareas de razonamiento inductivo, basadas en el modelo *Inquiry Continuum* (indagación continua con preguntas) para educadores de ciencias. Las tareas favorecieron que los estudiantes conjeturan, construyeran argumentos y cuestionaran los razonamientos de los compañeros, y así lograr formular generalizaciones. Si bien la propuesta de enseñanza basada en lo inductivo, promovió la comprensión conceptual y el desarrollo de esta clase de competencias matemáticas en los estudiantes, los autores señalan algunas limitaciones de ésta. Por un lado, que los estudiantes obtengan falsas generalizaciones y piensen que las generalizaciones obtenidas son argumentos de una prueba formal. Por otro, la funcionalidad de la propuesta puede limitarse si el conocimiento pedagógico y de contenido del profesor es insuficiente para promover estrategias de pensamiento en los estudiantes y generar condiciones para un discurso significativo a lo largo de la actividad.

Es indudable que el razonamiento inductivo soporta cognitivamente los procesos de resolución de problemas y generalización en particular, y el aprendizaje matemático en general, como muestra la evidencia empírica que ha derivado de la investigación en disciplinas como la Psicología y la Matemática Educativa. La inducción constituye parte esencial de estos procesos también en el currículo escolar y para la consecución de los objetivos de la educación básica en matemáticas (NCTM, 2000). Johnassen, Beissner y Yacci (2013) señalan que la adquisición de un conocimiento estructural en el aprendizaje matemático se basa en procesos relacionados con lo inductivo, tal como la generalización de diferentes tipos de patrones.

## 1.3. Papel del razonamiento inductivo en el aprendizaje matemático

Histórica y filosóficamente la construcción de conocimiento científico y matemático ha estado estrechamente ligada a procesos tanto cognoscitivos como socioculturales que en su mayoría iniciaron con razonamientos inductivos, con el estudio de casos particulares y la detección de patrones locales que se racionalizaron para hacer una generalización o validar algún resultado (Poincaré, 1914; Pineda, 2009). Al respecto, Poincaré afirmaba que "El verdadero razonamiento matemático es una inducción real […] procediendo de lo particular a lo universal" (p. 185). Hoy día se reconoce que la inducción, junto con la deducción, constituye una forma de razonar que es importante para la construcción del conocimiento y sustenta procesos de aprendizaje matemático.

El razonamiento inductivo es una forma de pensamiento que está relacionada con la adquisición y aplicación de conocimiento y la resolución de problemas (Klauer, 1996; Molnár et al., 2013; Pólya, 1957). Por tanto, es una vía de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El conocimiento y la formación de conceptos matemáticos son resultado de la abstracción y generalización de las características esenciales de un objeto matemático en situaciones específicas (Sosa, Cabañas y Aparicio, 2019a). En un sentido cognitivo, formar un concepto significa "seleccionar algunas características de entidades particulares y descartar algunas otras; entonces se forma una entidad generalizada" (Hodnik & Manfreda, 2015, p. 286). Es decir, la generalización de las características esenciales de estas entidades conduce a la formación de un concepto; tal generalización es producto de un proceso inductivo que consiste en reconocer lo invariante en experiencias o situaciones particulares (Sriraman & Adrian, 2004).

Por otro lado, las personas procesan información y adquieren conocimiento en la resolución de problemas empleando razonamiento inductivo (Haverty et al., 2000; Molnár et al., 2013). Varios problemas matemáticos poseen contextos distintos pero estructura similar, de manera que este razonamiento es útil para reconocer la estructura común de los problemas y generalizar los métodos de resolución (Sriraman & Adrian, 2004). De acuerdo con Klauer (1996), el efecto del desarrollo del razonamiento en la mejora de la habilidad de resolver problemas lo explica el hecho de que éste conduce a “detectar regularidades, sean clases de objetos representados por conceptos genéricos, estructuras comunes entre diferentes objetos o esquemas, que permitan a los estudiantes identificar la misma idea básica en diversos contextos” (p. 53).

Curricularmente, desarrollar el razonamiento inductivo ha sido una demanda constante para apoyar procesos de aprendizaje matemático tales como la resolución de problemas no rutinarios, la formulación de conjeturas, la realización de generalizaciones matemáticas y la construcción de argumentos y pruebas (NCTM, 2000; Common Core State Standards Initiative, 2010). Investigaciones empíricas respaldan la idea de que la argumentación basada en razonamientos inductivos coadyuva y soporta la justificación de conjeturas y la construcción de pruebas (e.g., Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Martinez & Pedemonte, 2014). Wilhelm y Beishuizen (2003), argumentan que los procesos del aprendizaje inductivo autodirigido como la generación de hipótesis, el diseño de experimentos sistemáticos, la resolución de tareas concretas y establecimiento de inferencias, son transformativos y potencian el aprendizaje matemático.

En el Marco Matemático del TIMSS 2015, el razonamiento matemático es uno de los dominios cognitivos que se precisan para el desarrollo de un pensamiento sistemático en niños y jóvenes, el cual les permita plantear y resolver problemas en diferentes contextos. En este marco, el razonamiento inductivo y el deductivo están asociados a acciones tales como analizar-sintetizar, observar y formular conjeturas, generalizar, justificar y hacer deducciones lógicas basados en suposiciones o reglas específicas (Grønmo, Lindquist, Arora, & Mullis, 2013).

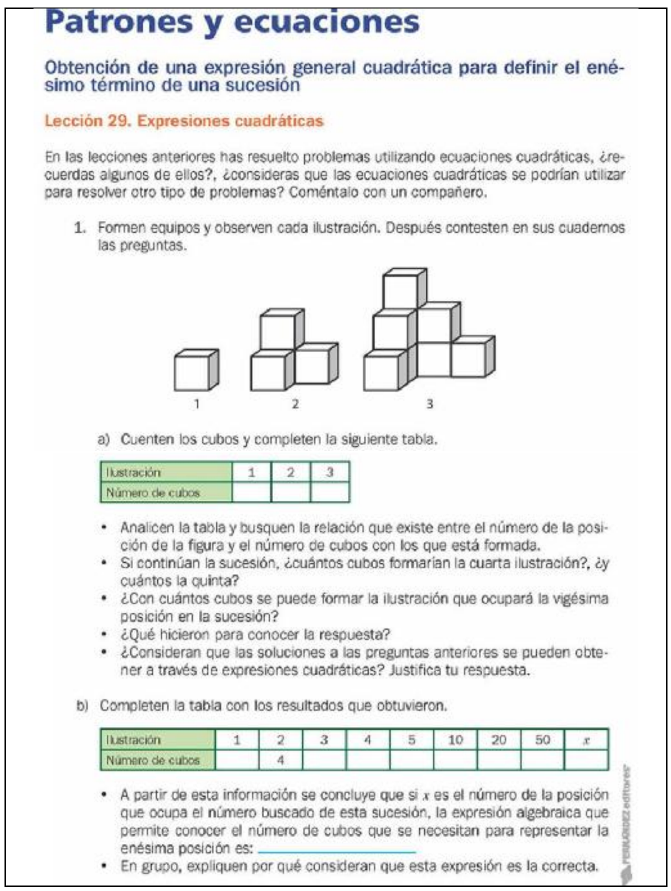
Por su parte, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés, 2000) enfatiza la necesidad de desarrollar el razonamiento inductivo en estudiantes de secundaria para examinar estructuras, generar argumentos y formular generalizaciones sobre patrones lineales o cuadráticos. A su vez, la actividad de generalizar regularidades numéricas y geométricas ha sido resaltada por distintos autores como una forma de propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela (Demonty, Vlassis, & Fagnant, 2018; Warren, Trigueros, & Ursini, 2016). Y el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo esencial para llevar a cabo esta actividad, porque permite el descubrimiento de características invariantes entre casos particulares y sintetizar estas características en una regla general (Bills & Rowland, 1999).

En México, en el currículo matemático de educación básica, en la reforma de 1992 se hacía explícita la importancia de promover el razonamiento inductivo en relación con el desarrollo de la habilidad para resolver problemas y de procurar el tránsito de esta forma de razonamiento al deductivo, particularmente en educación secundaria. En los más recientes programas de estudio (SEP, 2011; 2017) ha quedado algo implícito cómo y cuándo fomentarlo, pero como antes se ha mencionado, sustenta varios procesos de aprendizaje matemático en secundaria, entre ellos, la generalización.

En la educación secundaria, uno de los primeros retos cognitivos que enfrenta el estudiante en matemáticas está asociado con la generalización en más de un sentido. Por ejemplo, obtener expresiones generales o ecuaciones hasta de segundo grado que definen patrones matemáticos para modelar y resolver problemas es uno de los propósitos de estudio en este nivel educativo (SEP, 2011; 2017). En relación con el desarrollo del pensamiento algebraico, se pretende que los estudiantes generalicen propiedades y relaciones numéricas, obtengan la regla general de una sucesión lineal o cuadrática e identifiquen expresiones algebraicas equivalentes. Adicionalmente, se espera que los jóvenes de secundaria generalicen métodos o resultados a partir del análisis y resolución de problemas particulares. En ambos sentidos de la generalización, el razonamiento inductivo adquiere un papel clave (Haverty, et al., 2000; Neubert & Binko, 1992; Sriraman & Adrian, 2004).

Por consiguiente, en el currículo matemático de este nivel educativo, el razonamiento inductivo está conectado con la generalización de patrones lineales y cuadráticos en el eje temático sobre pensamiento algebraico, entre otros contenidos.  Obtener la regla general de esta clase de patrones es un aprendizaje esperado relativo al tema “Patrones y ecuaciones”. Es así que hoy en día, varios de los libros de texto gratuitos recomendados por la Secretaría de Educación Pública (2018) para matemáticas en secundaria, proponen tareas sobre patrones numéricos y figurales para la enseñanza de ecuaciones de primer y segundo grado.

En el libro “Matemáticas 3. Desafíos matemáticos” (Ramírez, Castillo, Vergara, Flores y Azpeitia, 2014), por ejemplo, el razonamiento inductivo se relaciona con la resolución de tareas cuyo propósito es generalizar un patrón a partir de datos numéricos para obtener una expresión algebraica cuadrática. En una de las actividades extraídas de este libro (Figura 1.3) puede observarse que en las tareas se plantea buscar la relación entre los valores del número de cubos que forman cada figura en una secuencia para obtener la expresión algebraica correspondiente al número de cubos de la figura en la enésima posición.


# Patrones y ecuaciones

**Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión**

**Lección 29. Expresiones cuadráticas**

En las lecciones anteriores has resuelto problemas utilizando ecuaciones cuadráticas, ¿recuerdas algunos de ellos?, ¿consideras que las ecuaciones cuadráticas se podrían utilizar para resolver otro tipo de problemas? Coméntalo con un compañero.

1. Formen equipos y observen cada ilustración. Después contesten en sus cuadernos las preguntas.



a) Cuenten los cubos y completen la siguiente tabla.

| Ilustración | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Número de cubos | | | |

- Analicen la tabla y busquen la relación que existe entre el número de la posición de la figura y el número de cubos con los que está formada.
- Si continúan la sucesión, ¿cuántos cubos formarían la cuarta ilustración?, ¿y cuántos la quinta?
- ¿Con cuántos cubos se puede formar la ilustración que ocupará la vigésima posición en la sucesión?
- ¿Qué hicieron para conocer la respuesta?
- ¿Consideran que las soluciones a las preguntas anteriores se pueden obtener a través de expresiones cuadráticas? Justifica tu respuesta.

b) Completen la tabla con los resultados que obtuvieron.

| Ilustración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 50 | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de cubos | | 4 | | | | | | | |

- A partir de esta información se concluye que si $x$ es el número de la posición que ocupa el número buscado de esta sucesión, la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos que se necesitan para representar la enésima posición es: ________
- En grupo, expliquen por qué consideran que esta expresión es la correcta.

**Figura 1.3.** Actividad sobre patrones y ecuaciones en un libro de texto.
Fuente: Ramírez, Castillo, Vergara, Flores y Azpeitia (2014, p. 168).

No obstante, las concepciones y prácticas en la enseñanza de ecuaciones por profesores de secundaria en México, se centran en la forma de las expresiones algebraicas y se dirigen a la obtención de elementos particulares tales como la solución, los valores específicos de una variable o puntos en la gráfica que representa (Cedillo, 2006). En adición, Tossavainen, Attorps y Väisänen (2012) afirman que, en las concepciones de ecuación de profesores de secundaria se atribuye mayor importancia al valor de verdad y a la sintaxis de su expresión. Estos autores concluyen que las ecuaciones también son vistas como etiquetas para problemas algebraicos y dichas concepciones obstaculizan fomentar en los estudiantes el pensamiento algebraico. En consecuencia, en la enseñanza prevalece una lógica deductiva, con discursos que inician con el establecimiento de ecuaciones generales y continúan con ejemplos de su uso en casos particulares, con poca o nula atención al estudio de patrones.

Por otra parte, el estudio matemático de fenómenos de las ciencias (Física, Química y Biología), que inicia justo en esta etapa escolar (SEP, 2011), entraña prácticas inductivas para el descubrimiento de leyes y principios, por medio de la observación y el análisis de las causas que los producen. Por tanto, el saber razonar inductivamente o tener la oportunidad para desarrollar dicho razonamiento, resulta también relevante para el uso de las matemáticas y aprendizaje de ciencias en secundaria.

La incorporación del razonamiento inductivo en las aulas de clase de matemáticas, demanda contar con profesores sensibles al papel de este razonamiento como una vía de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, y suficientemente preparados para promoverlo en sus estudiantes. Este aspecto ha pasado casi inadvertido en la literatura especializada sobre procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas en particular, en tanto poco se ha investigado sobre el estado del razonamiento inductivo en los profesores y en la práctica docente.

## 1.4. Razonamiento inductivo y docencia en matemáticas

Ciertamente, desarrollar el razonamiento inductivo no solo es cuestión de los estudiantes, sino también de los profesores. Ellos tienen la importante labor de fomentar, interpretar y vigilar el razonamiento matemático de los estudiantes, así como ayudarlos a reconocer sus limitaciones y posibilidades (AMTE, 2017; NCTM, 2000, SEP, 2017). Por ejemplo, los profesores necesitan ser capaces de identificar y explicar las acciones del razonamiento de los estudiantes al generalizar desde instancias particulares (El Mouhayar & Jurdak, 2013; Rivera & Becker, 2007).

Sin embargo, realizar esta labor representa una problemática. Por un lado, poco se enfatiza el razonamiento matemático, incluyendo el inductivo, en la práctica docente y existe falta de claridad en cómo promoverlo en el aula, tanto para profesores en formación como en servicio (Herbert, Vale, Bragg, Loong, & Widjaja, 2015; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina, 2013). Además, investigaciones previas han mostrado que interpretar y prestar atención al razonamiento de los estudiantes en tareas de generalización es cognitivamente desafiante para los profesores (Callejo & Zapatera, 2017; El Mouhayar & Jurdak, 2013; Melhuish, Thanheiser, & Guyot, 2018). En particular, El Mouhayar (2018) señala que reconocer propiedades y relaciones de aspectos generales de un patrón en tareas de generalización lejana es complejo para ellos.

Por otro lado, diversos estudios remarcan que profesores de primaria y secundaria enfrentan dificultades para generalizar desde una clase finita de casos particulares; especialmente en la generalización de patrones no lineales, como es el caso de los cuadráticos (e.g., Alajmi, 2016; Hallagan, Rule, & Carlson, 2009; Rivera & Becker, 2003). Se asume que estas dificultades están relacionadas con el nivel de desarrollo de su razonamiento inductivo porque éste ayuda a percibir características, estructuras y reglas generales a partir de la observación de similitudes entre hechos o casos particulares (Bills & Rowland, 1999; Pólya, 1966), lo cual es esencial para generalizar (Clements & Sarama, 2009; Rivera, 2010; Rivera & Becker, 2016).

Las investigaciones sobre razonamiento inductivo y docencia en matemáticas en su mayoría se han conducido con profesores en formación y atañen solamente al nivel personal de desarrollo del profesor, en específico se han enfocado en su cognición. Estas se han ocupado en analizar el rol de la inducción y la abducción al realizar generalizaciones sobre clases de objetos abstractos (Rivera & Becker, 2007); reconocer la relación del razonamiento inductivo y deductivo con estilos de aprendizaje (Arslan, Göcmencelebi, & Tapan, 2009); y detectar los tipos de razonamientos que involucra el proceso de descubrimiento matemático en una clase para profesores en formación (Soler-Álvarez & Manrique, 2014). En estos trabajos puede hallarse una tipificación de los razonamientos (abductivo, inductivo o deductivo) que profesores en formación emplean al resolver ciertos problemas matemáticos. En particular, Arslan, Göcmencelebi y Tapan (2009) concluyen que las respuestas a problemas que involucran generalizaciones se basan esencialmente en argumentos inductivos por encima de los deductivos.

Específicamente, los estudios sobre el razonamiento inductivo se han enfocado en entender, desde la etapa de formación profesional de profesores, los contextos y formas de reconocer similitudes al generalizar por inducción a partir de representaciones numéricas y figurales (Rivera & Becker, 2003), así como los niveles de profundización y las estrategias que emplean al resolver un problema de generalización razonando de manera inductiva (Manfreda, Slapar, & Hodnik, 2012).

Estos estudios han usado tareas de generalización de patrones lineales y cuadráticos y han mostrado que los profesores en formación inducen reglas generales usando diferentes estrategias. Por ejemplo, ellos tienden a usar estrategias de similitud numérica sobre las figurales, pero quienes inducen por similitud figural parecen ser más capaces de justificar y dar sentido a sus generalizaciones (Rivera & Becker, 2003; 2007). Manfreda et al. (2012) argumentan que no todas las estrategias son igualmente efectivas para generalizar, en particular cuando se trata de un patrón cuadrático. Estas autoras señalan que las estrategias de producto, binomio y suma son más efectivas cuando se generaliza, mientras que la estrategia recursiva de diferencias suele conducir generalizaciones incorrectas.

Los resultados de estas investigaciones reafirman que los profesores tienen dificultad para generalizar patrones cuadráticos cuando razonan de manera inductiva. Manfreda y colaboradores (2012) identificaron diferentes niveles de profundización en la generalización de un patrón con funciones cuadráticas; aunque la mayoría identifica el patrón numérico, pocos fueron capaces de obtener la expresión general. Según Rivera y Becker (2003), ellos se enfocan más en los atributos invariantes de números que en las relaciones entre objetos al inducir reglas generales. En adición, si bien la estrategia recursiva es la más utilizada para generalizar patrones cuadráticos, ésta hace más difícil reconocer la estructura del patrón cuadrático y por ende, alcanzar la generalización (Alajmi, 2016; Manfreda et al., 2012; Yeşildere & Akkoç, 2010).

En conclusión, puede decirse que la capacidad para razonar inductivamente de los profesores de matemáticas influye en su forma de realizar generalizaciones. Los estudios previos muestran que ellos tienden a usar razonamiento inductivo en tareas de generalización desde casos particulares, pero tienen dificultades para llegar a producir una generalización correcta; en particular, las mayores dificultades ocurren al intentar generalizar patrones cuadráticos. Por otra parte, estos estudios se centran en un aspecto personal del profesor tal como su cognición, pero poco se conoce acerca de este razonamiento en relación con su práctica profesional. Se carece de información sobre cómo los profesores lo perciben y cómo lo interpretan en la enseñanza, tampoco si lo usan y de qué manera en acciones de la práctica docente. Por tal motivo, fue de interés examinar el cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo no solo a nivel personal de desarrollo del profesor, sino también a nivel profesional.

## 1.5. Problema y preguntas de investigación

Uno de los niveles educativos en los que mayor demanda y efecto tiene el desarrollo del razonamiento inductivo en los estudiantes para el aprendizaje matemático es la secundaria. En particular, es necesario para ayudarlos a conectar instancias particulares y sistematizar el reconocimiento de distintas clases de patrones y, por consiguiente, la generalización (Cañadas & Castro, 2007; Haverty et al., 2000; Sriraman & Adrian, 2004). El profesor es quien principalmente tiene la labor de incorporar estrategias y medios en la práctica de enseñanza que propicien el desarrollo de procesos inductivos en los estudiantes. No obstante, como antes se ha mencionado, la movilización de esta forma de razonamiento en tareas de generalización por parte de profesores de educación básica representa una problemática. Por un lado, les resulta poco claro y desafiante cómo promoverlo e interpretarlo en sus estudiantes y por otro, es cognitivamente complejo para ellos lograr generalizar patrones no lineales de manera inductiva, especialmente los de tipo cuadrático.

En consecuencia puede decirse que la inducción poco o nada se favorece al organizar y tratar el contenido matemático en el aula, por ejemplo, en el diseño o rediseño de actividades de generalización matemática. Considerando que este razonamiento es un medio para generalizar desde casos particulares (Bills & Growland, 1999; Haverty et al., 2000), en esta investigación asumimos que la capacidad de los profesores para razonar inductivamente es un factor que influye no solo en la forma en que interpretan y resuelven las tareas de generalización, sino también en las formas de fomentar y notar las acciones de razonamiento de los estudiantes para generalizar. Si los profesores tienen falta de entendimiento o consciencia de las características y procesos cognitivos subyacentes al razonamiento inductivo, difícilmente podrán incorporarlos en actividades de aprendizaje ni reconocerlos en las acciones matemáticas de los estudiantes al generalizar. Asimismo, inhibe que dispongan de formas propias de construir su conocimiento matemático.

Por tanto, se requiere sensibilizar a los profesores de matemáticas de secundaria sobre la importancia e implicaciones didácticas que tienen los procesos involucrados en el razonamiento inductivo. En especial, si se considera que una de las problemáticas en el sistema escolar mexicano es el hecho de que las prácticas docentes permanecen adheridas a una lógica formal de enseñanza y validación de la matemática como ciencia deductiva.

Sin embargo, en la literatura sobre el tema se carece de información acerca de los procesos cognitivos que profesores de matemáticas en servicio, siguen o no, para razonar inductivamente, y del tipo de dificultades que tienen cuando intentan generalizar patrones cuadráticos (Sosa & Cabañas, 2017). Además, pocos estudios han examinado cómo incorporar el razonamiento inductivo a los procesos de pensamiento y construcción de conocimiento matemático en las personas, y se han enfocado en los estudiantes. Entonces, es factible decir que en cierta forma se soslayan experiencias de aprendizaje profesional docente en matemáticas que otorguen atención a la inducción como parte de los procesos de desarrollo profesional. No basta solamente entender dicho razonamiento en quien aprende, falta indagar el estado que éste guarda en quien enseña y generar propuestas para su mejora o desarrollo.

En esta investigación examinamos el estado y desarrollo del razonamiento inductivo de profesores de matemáticas de secundaria al generalizar comportamientos cuadráticos entre variables, con la intención de fomentar y analizar un cambio cognitivo respecto al estado que guarda su razonamiento, no solo en lo cognitivo sino también en una actividad de su práctica profesional. Con tal propósito se diseñó y experimentó una propuesta para promover el desarrollo de dicho razonamiento en un grupo de profesores, como una manera de favorecer una experiencia de aprendizaje y profesionalización docente.

Según Vygotsky, el desarrollo cognitivo presupone aprendizaje. En ese sentido, se espera que el cambio cognitivo en el razonamiento inductivo en los profesores signifique un aprendizaje profesional. Sin embargo, como señala Hopwood (2016) se requiere de una sensibilización para que el aprendizaje se traspase a la acción en la práctica profesional, pues cambia la forma de interpretarla y de actuar en ésta. Por tanto, se utilizó la noción de sensibilidad didáctica para indagar y explicar este traspaso. De manera que, se dirá que el profesor muestra una sensibilización hacia el razonamiento inductivo en su práctica, si percibe los aportes teóricos y prácticos de lo inductivo en un espacio de aprendizaje profesional docente y los traspasa adecuadamente a alguna acción para la mejora de su práctica profesional, tal como el rediseño de una actividad de generalización de un patrón cuadrático.

Por tanto, la transacción entre el razonamiento inductivo de los profesores y la actividad profesional docente, se analizó en dos aristas: 1) la movilización de procesos cognitivos subyacentes al razonamiento inductivo en los profesores, asociados al tránsito de un estado inferior a otro superior de desarrollo de su razonamiento, y 2) la sensibilidad didáctica como un medio para la transacción entre el razonamiento de los profesores y una acción de su práctica profesional. La investigación se orientó hacia los siguientes objetivos:

**Objetivo general:**

Describir el cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en profesores de matemáticas de secundaria respecto a su razonamiento inductivo y sus implicaciones en el rediseño de una actividad de aprendizaje.

**Objetivos específicos:**

1. Analizar el cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de profesores de matemáticas cuando realizan actividades de generalización.
2. Describir la sensibilidad didáctica de los profesores al razonamiento inductivo y los criterios que emplean para el rediseño de una actividad de aprendizaje.

En relación con estos objetivos, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

A. ¿En qué medida se produce un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores mediante actividades de generalización de patrones cuadráticos?

B. ¿Qué caracteriza la sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo asociada al cambio cognitivo en los profesores?

# Capítulo 2

## Marco de referencia del razonamiento inductivo

En este capítulo se muestran diferentes perspectivas del razonamiento inductivo: en la filosofía y epistemología de las ciencias, en Lógica, en el ámbito de la psicología y en la resolución de problemas. Asimismo, se establece una relación entre inducción y generalización. En este trabajo, se examina el cambio cognitivo de esta forma de razonamiento en profesores de secundaria desde una perspectiva cognitiva. Ante la ausencia de un marco de referencia en la literatura para tal objeto de estudio, se proponen y describen tres procesos cognitivos subyacentes al razonamiento inductivo, que se utilizan como referentes para reconocer el estado y desarrollo del razonamiento de los profesores.

### 2.1. Razonamiento matemático

La inducción es un tipo de razonamiento matemático. El razonamiento es una forma de pensamiento que consiste en la estructuración de ideas para generar conclusiones. Singmann y Klauer (2011) afirman que las teorías contemporáneas sobre el razonamiento humano se han desplazado del logicismo y consideran que éste incorpora mecanismos que son inconmensurables con la lógica estándar. Desde una perspectiva psicológica, Rubinstein (1979) establece que el razonamiento no radica en la correlación de premisas o proposiciones en sí mismo, sino en la correlación entre los objetos que se tratan en las proposiciones, de sus propiedades y relaciones. Lo señalado por Rubinstein marca una diferencia en la forma en que el razonamiento es entendido desde un punto de vista lógico y uno cognitivo. En particular, en esta investigación analizamos el razonamiento inductivo con un enfoque cognitivo.

De acuerdo con Francisco y Maher (2005), el razonamiento matemático consiste en la capacidad para discernir y articular relaciones que involucran conceptos matemáticos. Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco (2014) lo definen como hacer una inferencia deliberada acerca de entidades o relaciones matemáticas. La entidad es "cualquier objeto matemático de cualquier área de las matemáticas" (p. 183).

## 2.2. Perspectivas del razonamiento inductivo

La inducción, del latín *inductio* (conducción a o hacia), es definido en el Diccionario filosófico (Frolov, 1984) como un tipo de razonamiento y método de investigación. De manera que es considerado como un razonamiento que posibilita "pasar de los hechos singulares a las proposiciones generales" (p. 227) y también como una vía del estudio experimental de los fenómenos para descubrir principios generales a partir de la observación y la experiencia (método inductivo). En este escrito, los términos "inducción" o "razonamiento inductivo" se utilizan de manera indistinta para referirnos a una forma específica de razonamiento que, *grosso modo*, consiste en el proceso para pasar de lo particular a lo general.

### 2.2.1. Inducción en la ciencia

Filosófica y epistemológicamente, la inducción y la deducción, han sido formas de construir conocimiento científico. Según Frank (1991), la ciencia antigua (medieval) y la ciencia moderna (después de 1600) han usado ambas clases de procedimiento o métodos para el establecimiento de principios generales con base en hechos observados, pero difieren en la forma de hacerlo. La ciencia medieval usaba el método deductivo, de manera que a través de generar conclusiones basadas en principios generales se llegaba a hechos particulares, los cuales podían ser observados. Pero a su vez, estos principios generales se fundamentaban en la inducción. Mientras que, la ciencia moderna parte de la observación y experimentación de hechos particulares y llega a principios generales a través del método de inducción; posteriormente, de tales principios se extraen (deducen) conclusiones lógicas para obtener hechos individuales que se verifican mediante la experimentación.

El filósofo Francis Bacon (1620) enfatizó el papel de la inducción en la ciencia, antigua y moderna, al señalar que:

> Hay, y sólo puede haber, dos maneras de buscar y descubrir la verdad. Una de ellas va desde los sentidos y los detalles hasta los axiomas más generales, y desde estos principios, cuya verdad se da por establecida e inconmovible, pasa a juzgar y a descubrir axiomas intermedios, y esta forma está ahora en boga [en la ciencia medieval]. La otra deduce axiomas de los sentidos y los detalles elevándose mediante una ascensión gradual e ininterrumpida, de manera que llega a los axiomas más generales al final de todo. Este es el verdadero camino, pero, hasta ahora, no ha sido ensayado (Bacon, como se citó en Frank, 1991, p. 34).

Frank (1991) aclara que los “axiomas intermedios” referidos por Bacon son las leyes que se construyen por inducción a partir de observaciones y experimentos, tal como las leyes físicas. Por ejemplo, a partir de las observaciones y mediciones de las posiciones del planeta Marte, Kepler infirió la ley del movimiento de los planetas, según la cual siguen un movimiento en órbitas elípticas. De manera que, para Bacon, tanto la ciencia antigua como la moderna parten de la inducción. La posibilidad de conocer científicamente los hechos de la realidad mediante este método se fundamenta en el principio de *legalidad de la naturaleza*, el cual establece que toda naturaleza está regida por leyes (Mares, 2015). Es así que el filósofo Whewell (1837) consideró a la física, la química y la biología (es decir, a las ciencias de la naturaleza) como ciencias inductivas.

Asimismo, las consideraciones metodológicas y filosóficas de Newton para el descubrimiento de leyes de la física tuvieron un carácter experimental y fueron soportadas por la inducción. Para Newton (como se citó en Shapiro, 2007), el procedimiento de la ciencia para entender la constitución de la naturaleza debía partir del análisis y extraer principios generales por la vía inductiva:

> Este Análisis consiste en <hacer experimentos y observaciones y argumentar por ellos [los fenómenos] > de las composiciones a los ingredientes y de los movimientos a las fuerzas que los producen y en general de los <efectos> a sus causas y de las causas particulares a las más generales hasta que el argumento termine en el más general. (p. 122)

Moulines (1976) refiere que el concepto de inducción de Newton operaba en dos niveles: “regularidades empíricas” y “leyes teóricas”. El primero consiste en inferir de todos los objetos observados en un dominio empírico, que estos poseen una propiedad. El segundo, podría interpretarse como una especie de extensión la propiedad o ley general descubierta en un primer nivel inductivo, en palabras de Moulines (1976, p. 30), el nivel teórico se refiere al caso en que “de las observaciones hechas en un dominio se hace una inferencia acerca de otro dominio, distinto del primero, pero análogo en algún sentido”. Por ejemplo, hacer inferencias sobre los movimientos de los planetas a partir de la observación de la existencia de una fuerza que influye en la caída libre de cuerpos, a saber: la gravedad.

¿Cómo pasar de los hechos particulares a los axiomas o principios generales en ciencias? Frank (1991) resume la estructura del método inductivo de la siguiente forma. En primer lugar, obtener resultados de fenómenos o situaciones mediante observaciones y experimentos físicos (material observacional). Y luego, emplear palabras o fórmulas matemáticas (material lingüístico) para conectar estos resultados. Basado en el trabajo de Whewell, quien refiere que la inducción consiste en conectar hechos con ideas, Frank describe el papel de este método en la producción de conocimiento como sigue: “la inducción parte de las sensaciones, los hechos, las cosas,… conecta estos elementos mediante ideas, teorías, pensamientos… y conduce a principios generales de los cuales, por deducción, pueden inferirse nuevos hechos, cosas” (p. 36).

De acuerdo con Whewell, la producción de leyes generales de manera inductiva requiere construir nuevos conceptos a través de material lingüístico para coligar los hechos observados. Por ejemplo, Kepler conectó y describió las posiciones del planeta por medio del concepto de elipse; y Newton empleó los conceptos de aceleración y gravitación en el descubrimiento de las leyes del movimiento (Frank, 1991). De este modo, la inducción conduce de hechos específicos al descubrimiento de nuevos hechos y leyes generales por medio de la observación de regularidades (Poincaré, 1914), lo cual supone el reconocimiento de repeticiones o uniformidades en secuencias de hechos.

El carácter del razonamiento inductivo como un proceso de inferencia es enfatizado por el filósofo John Stuart Mill (1806-1873), es decir, refiere a la inducción como una operación mental que permite descubrir algo nuevo o antes desconocido a partir de algo conocido. Define a la inducción como "el proceso mediante el cual concluimos que, lo que es verdad en ciertos individuos de una clase es verdad para toda la clase, o lo que es verdad en ciertos momentos será verdad en circunstancias similares en todo momento" (Mill, 2011, p. 27). Al respecto, Smith y Henderson (1959) señalan que dicho razonamiento conduce a un conocimiento probable, pues produce conclusiones sin certeza.

El valor de verdad o la justificación de las conclusiones establecidas ha sido planteado como el problema de la inducción por filósofos y también desde la perspectiva de la lógica. De hecho, Newton señalaba que la argumentación por inducción no era una demostración de las conclusiones generales, pero la veracidad de éstas se hacía más fuerte conforme se argumente sobre la base de un mayor número de experimentos (Shapiro, 2007). Según Holyoak y Morrison (como se citó en Cañadas, 2007), Hume aceptaba a la inducción como forma de hacer ciencia partiendo de la experiencia y la observación de un hecho que se repite, pero no era suficiente para justificar las inferencias establecidas por este método.

En conclusión, la inducción en las ciencias ha sido considerada como un método y proceso mental de construcción de conocimiento, que se caracteriza por el descubrimiento de leyes o principios generales a partir de la observación empírica de hechos particulares y su conexión a través del uso de formas lingüísticas y conceptos. Sin embargo, carece de formas de validación propia, por lo que algunos pensadores lo consideran como generador de un conocimiento sin certeza o probable.

### 2.2.2. Razonamiento inductivo en Lógica

En Lógica, el razonamiento es considerado como una forma de pensamiento abstracto tal que "partiendo de uno o varios juicios verdaderos, denominados premisas, llegamos a una conclusión conforme a ciertas reglas de inferencia" (Guetmanova, 1989, p. 13). Se denomina inferencia a la relación o nexo lógico entre las premisas y la conclusión. La lógica formal suele distinguir dos clases de razonamiento: *deductivo* e *inductivo*. En el primero, la conclusión se infiere necesariamente de las premisas, y si estas son verdaderas, la conclusión también lo será (Martín y Valiña, 2002). El segundo, consiste en inferir una conclusión general o universal (G) con base en algunas premisas particulares (P), las cuales son el resultado de observaciones o de experiencias; la conclusión que se infiere no es necesariamente verdadera (Dávila, 2006).

En esta ciencia, el término *general* o *universal* se emplea para referir a enunciados del tipo “Todos los A son B”, por ejemplo, “Todos los ángulos rectos miden 90°”; y el término *particular* alude a cosas específicas o seres singulares, así como a alguno(s) de los elementos de un conjunto dado (Hernández y Parra, 2013). Por ejemplo, “7 es un número primo” (enunciado que refiere a algo singular), y “Algunos triángulos son isósceles” (elementos del conjunto “triángulos”). En la Figura 2.1 se muestran esquemas de ambas clases de razonamiento.

| **Razonamiento deductivo (con proposiciones universales)** | **Razonamiento inductivo** |
| --- | --- |
| Todos los *P* son *Q* (Premisas)<br>Todos los *R* son *P*<br>- - - - - - - - - - - - - -<br>Todos los *R* son *Q* (Conclusión) | El elemento *p* que pertenece a la clase *x* tiene la propiedad *z*<br>El elemento *q* que pertenece a la clase *x* *tiene* la propiedad *z*<br>El elemento *r* que pertenece a la clase *x* *tiene* la propiedad *z*<br>- - - - - - - - - - - - - -<br>Todos los objetos que pertenecen a la clase *x* tienen la propiedad *z* |

**Figura 2.1.** Esquemas del razonamiento deductivo y del inductivo en Lógica.

Si bien la anterior caracterización de razonamiento inductivo es comúnmente aceptada en Lógica, excluye algunos casos de inferencias de premisas particulares a conclusiones particulares (P-P), o de premisas generales a conclusiones generales (G-G), que también son de carácter inductivo. Bajo este argumento y la intención de contar con una postura unificada que se adecúe a los distintos casos típicos de dicho razonamiento para facilitar su enseñanza, Hernández y Parra (2013, p. 63) proponen la siguiente caracterización:

- Las premisas presentan una característica que los elementos de un conjunto inicial A tienen en común.
- En las premisas también se establece que algunos de los elementos de tal conjunto comparten una segunda característica.
- En la conclusión se generaliza la segunda característica (compartida por un subconjunto de elementos no necesariamente propio) a, por lo menos, un nuevo elemento del conjunto A del que no se sabe, a partir de la información dada en las premisas, si realmente la tiene.

Autores como Guetmanova (1989), consideran que el razonamiento por *analogía* también es parte de la lógica tradicional o aristotélica. Este razonamiento consiste en atribuir una propiedad o trasladar relaciones a un objeto (o conjunto de objetos homogéneos), por lo que implica hacer alguna inferencia sobre la pertenencia de cierta propiedad o relación a un objeto con base en la homología de indicios sustanciales con otro. En la Figura 2.2 se presenta un esquema de la analogía de propiedades:

El objeto *A* posee propiedades *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.
El objeto *B* posee propiedades *a*, *b*, *c*, *d*.
- - - - - - - - - - - - - -
Es probable que el objeto *B* posea propiedades *e, f*

**Figura 2.2.** Esquema de un razonamiento por analogía. Fuente: Guetmanova (1989, p. 204).

Un acercamiento entre la lógica y la matemática es creado por Charles Peirce (1883), fundador de la lógica deductiva moderna. Él muestra, por mencionar un ejemplo, que las operaciones con relaciones dan lugar a un álgebra de transformaciones lineales y que la notación y las operaciones matriciales permiten descubrir cuantificadores (Oostra, 2000). El aporte más relevante de Peirce a la lógica estuvo en proponer a la *abducción* como una clase fundamental de razonamiento en el proceso de investigación científica, y que era complementada por las concebidas en la lógica tradicional:

> La primera, que yo llamo *abducción* (...) consiste en examinar una masa de hechos y en permitir que estos hechos sugieran una teoría. De este modo ganamos nuevas ideas; pero el razonamiento no tiene fuerza. La segunda clase de razonamiento es la *deducción* (…) Sólo es aplicable a un estado ideal de cosas, o a un estado de cosas en tanto que puede conformarse con un ideal (...) El tercer modo de razonamiento es la *inducción* o investigación experimental (Peirce, como se citó en Hoffmann, 1998).

El concepto de abducción es central para Peirce. Lo define como el proceso de formar o adoptar una hipótesis explicativa de algún hecho observado (Hoffmann, 1998). Afirmaba que las hipótesis o teorías abducidas son inferencias muy plausibles. Oostra (2000) describe la relación de la abducción con los otros modos de razonamiento al señalar que, la inducción determina el grado de coincidencia entre la hipótesis y los hechos a través de experimentos; y la deducción establece las consecuencias necesarias de la validez de cierta hipótesis. Así, la inducción para Peirce no generaba un conocimiento nuevo, sino que ayuda a encontrar tendencias en resultados de eventos y generalizarlos en forma de reglas (Abe, 2003)

En relación con el proceso de generalización en matemáticas, Rivera (2013) identifica tres elementos que conforman la estructura de estas tres clases de razonamiento:

***Caso (C)**:* D es una colección de datos (hechos, observaciones,…)
***Ley (L)**:* H explica D (Si fuera cierta, explica D)
***Resultado (R)**:* H es probablemente verdadera [los casos siguen la ley H].

Cada clase de inferencia queda diferenciada de las demás por la manera en que se relacionan estos elementos, es decir, por la forma de la inferencia. Rivera indica que la deducción supone una *ley general* y un *caso (o casos)* observado, para *inferir lógicamente un resultado* válido. Los casos que menciona son sucesos específicos de la ley general. Esta es la estructura de la deducción e intercambiando el orden de esos elementos se obtiene la estructura de la inducción y la abducción (Figura 2.3):

| **Deducción** | **Abducción** | **Inducción** |
|---|---|---|
| **L y C** | **R y L** | **C y R** |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| **R** | **C** | **L** |

**Figura 2.3.** Estructura de la abducción, inducción y deducción (Rivera, 2013).

En este enfoque basado en la lógica de Peirce, la inducción tiene la función de probar y confirmar la viabilidad de la hipótesis abducida, observando tendencias en casos específicos para decidir si es razonable aceptar la conclusión general (Rivera & Becker, 2007).

### 2.2.3. Razonamiento inductivo desde una perspectiva psicológica

En términos generales, el razonamiento es el proceso de extraer conclusiones orientadas al cumplimiento de ciertos objetivos (Leighton, 2004). En Psicología, es entendido como "un proceso de pensamiento secuencial explícito de algún tipo, que consiste en representaciones proposicionales" (Evans & Over, 1996, p. 15). Según Stenning y Monaghan (2004), emerge o se produce cuando una persona transforma representaciones de información sobre alguna situación, incluso considerando información adicional, en otras formas de representación para expresar conclusiones sobre la misma situación.

A diferencia de la Lógica, desde una perspectiva psicológica se acepta que el razonamiento no siempre se basa en el empleo de reglas formales de inferencia, sino en otros mecanismos tales como el uso de modelos mentales. Estos son representaciones semánticas de alguna situación, elaboradas por las personas a partir de su entendimiento de la información disponible de la situación y de su propio conocimiento (Martín y Valiña, 2002). La teoría de modelos mentales de Johnson-Laird y Byrne (1991) postula que las personas razonan usando el significado de proposiciones y su conocimiento general para construir modelos mentales de las posibilidades de lo que podría ocurrir en la situación; y la conclusión emerge del modelo elaborado. La teoría funciona bajo los siguientes tres supuestos (Johnson-Laird, 2004):

(1) Cada modelo mental representa una posibilidad, que captura lo común en las diferentes maneras en las cuales algo podría ocurrir;
(2) Es icónico, las partes del modelo corresponden a las partes de lo que representan y, por tanto, su estructura corresponde a la estructura de lo que representa; y
(3) El modelo representa lo que es verdad, pero no lo que es falso.

En consecuencia, en esta teoría se considera que el conocimiento y las creencias de cada individuo influyen en la interpretación de proposiciones y en el proceso de razonamiento en sí mismo.

Filosófica y lógicamente, la deducción y la inducción se han distinguido según si se procede de lo general a lo particular, y viceversa, respectivamente. Sin embargo, como se mencionó en el apartado anterior, la inducción también puede ir de lo particular a lo particular y de lo general a lo general. Entonces, cognitivamente ¿en qué se parecen o qué los hace diferentes? Es complejo diferenciar o separar estos procesos mentales en la actividad diaria de los seres humanos; ambas coexisten en el pensamiento de las personas y son complementarios.

Desde una mirada psicológica, las diferencias y relaciones entre ambos razonamientos se han establecido con foco en distintos aspectos. Bajo la teoría de los modelos mentales, se diferencian en que el deductivo no va más allá de la información obtenida de las premisas; mientras que el inductivo implica obtener nueva información a partir de la dada, lo que conlleva apoyarse añadir información al modelo empleado y depender de nuestro conocimiento (Johnson-Laird, 2004). Por tanto, es posible que las conclusiones inductivas sean falsas aunque las premisas sean verdaderas.

Por otro lado, Heit (2007) señala similitudes y diferencias entre el razonamiento inductivo y el deductivo desde la visión del “problema” y la visión del “proceso”. En la *visión del problema*, suelen tipificarse los problemas como inductivos o deductivos de acuerdo a la forma de argumentar: de lo específico a lo general o de lo general a lo específico, respectivamente. Sin embargo, esta distinción puede resultar problemática al presentarse argumentos que no encajan en este esquema, tal como cuando se argumenta de lo general a lo general.

Desde la *visión del proceso*, inducción y deducción son comparadas respecto a los procesos psicológicos subyacentes y la cuestión a clarificar es si se trata del mismo proceso o corresponden a dos distintos. Si se consideran los planteamientos de la teoría de Johnson-Laird y Byrne (1991), podría decirse que las personas aplican un proceso (general) en la resolución de una variedad de problemas de razonamiento, a saber: la construcción de un modelo mental. En contraste, varios investigadores distinguen dos procesos o clases de razonamiento, cada uno con un sistema distinto de funcionamiento. Heit hace esta distinción al decir que:

> Existe un sistema que es relativamente rápido pero está muy influenciado por el contexto y las asociaciones, y otro sistema más deliberativo y analítico o basado en reglas […], la distinción tradicional entre estas dos formas de razonamiento puede no ser la mejor manera de dividir las cosas en términos psicológicos. Aun así, es plausible que la inducción dependería más del primer sistema, mientras que la deducción dependería más del segundo. Esta consideración de dos procesos se ha utilizado para explicar una variedad de hallazgos en el razonamiento, en relación con las diferencias individuales, los patrones de desarrollo y las relaciones entre el razonamiento y el tiempo de procesamiento (pp. 9-10).

La idea de que existen dos sistemas de razonamiento y que cada uno conduce a resultados cualitativamente diferentes, aun al resolver un mismo problema, también es apoyada por los datos de estudios neuropsicológicos (Heit & Rotello, 2010). Estos reportan que, anatómicamente, hay sistemas separados y áreas cerebrales distintas para la deducción y la inducción.

Stenning y Monaghan (2004) prestan atención a las representaciones externas y la semántica al hablar de razonamiento. Caracterizan al razonamiento deductivo como la reformulación de información considerada verdadera (premisas) y su expresión en una conclusión; el inductivo es descrito como la presentación de nuevos supuestos o proposiciones a partir de evidencia. En referencia a cada uno como proceso cognitivo, indican que la deducción concierne a la relación entre la forma y el significado de las representaciones; mientras que la inducción es acerca de la relación entre evidencia y generalización. Estos autores afirman que estos procesos son complementarios porque hacer proposiciones es una operación fundamental de la deducción y además, este tipo de razonamiento extrae lo que está contenido en los supuestos establecidos inductivamente.

Psicológicamente, las representaciones de información empleadas, las relaciones que se establezcan entre éstas y los significados que les sean atribuidos, determinan la forma de razonamiento de las personas ante una situación. De hecho, el razonamiento matemático necesita representaciones mentales, verbales, visuales u otras para su desarrollo y comunicación (Dreyfus, Nardi, & Leikin, 2012; Hiebert & Carpenter, 1992). En particular, el razonamiento inductivo involucra relacionar y transformar las representaciones de instancias particulares para inferir conclusiones generales sobre la base de esta evidencia. Es así que, está relacionado con actividades cognitivas tales como: categorización, elaboración de juicios sobre similitudes, resolución de problemas y toma de decisiones.

Desde una perspectiva cognitiva, se considera al razonamiento en general, y al inductivo en particular, como un proceso inferencial secuencial. Este carácter secuencial connota que a cada razonamiento subyacen una serie de procesos o subprocesos mentales para llegar a conclusiones generales con base en evidencia específica. En esta investigación, nos interesamos en reconocer los procesos cognitivos involucrados en el razonamiento inductivo de profesores con la intención de identificar el estatus y describir un cambio cognitivo en el razonamiento de ellos. Teniendo en cuenta que, una clase de situaciones donde es útil la inducción en matemáticas es la resolución de problemas, a continuación se presentan las fases del método inductivo en el trabajo del matemático George Pólya.

### 2.2.4. Razonamiento inductivo y resolución de problemas

En el campo de las matemáticas, Pólya (1957) concibió al razonamiento inductivo como "el proceso de descubrir leyes generales mediante la observación y la combinación de casos particulares" (p.114). Con el término "combinación" se refiere a la conexión de casos a partir de percibir las características que comparten, independientemente de su variación; y en gran cantidad de ejemplos mostró que esto es parte esencial para detectar patrones y descubrir algo general. Pólya consideró a la inducción no solo como una forma de generar conocimiento científico, sino también como una heurística. Es decir, como un método o serie de pasos generalizados a seguir para lograr resolver problemas de cierta clase.

Para sistematizar el descubrimiento de propiedades, principios y reglas generales en matemáticas, Pólya (1966) propuso las siguientes cuatro fases del razonamiento inductivo:

(1) **Observar casos particulares**. La inducción inicia con la observación de casos específicos de objetos o experiencias para reconocer alguna propiedad, semejanza o relación entre estos. Por ejemplo, al observar las siguientes tres secuencias numéricas se puede reconocer que los sumandos son números impares positivos y que la suma es un número al cuadrado:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

(2) **Formular una conjetura.** Se trata de elaborar un juicio sobre la semejanza observada en los casos particulares. En el ejemplo dado, una conjetura que podría formularse es: la suma de los primeros números impares positivos aparentemente es un número al cuadrado.

Según Pólya (1966) una conjetura se obtiene examinando y comparando observaciones relevantes de casos concretos, observando regularidades, dudando de lo que se percibe, y combinando con éxito los aspectos dispersos en un todo que pudiera significar algo.

(3) **Verificar la conjetura.** Dado que la conjetura es sugerida por la observación y ejemplos particulares, su certeza todavía no podría afirmarse y requeriría ser probada. Una forma de verificarla es ensayando con otros casos. Probando la conjetura anterior para los casos $n = 5$, $n = 6$ y $n = 7$, resulta que es verdadera:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \quad = \; 25 = \; 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \quad = \; 36 = \; 6^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 \quad = \; 49 = \; 7^2$$

En la medida que una conjetura no es refutada y se vaya verificando en nuevos casos, se hace más plausible y podría generalizarse. Así, un juicio más general puede emerger al cuestionarse y responderse si la regularidad observada se cumplirá para otros casos. Por ejemplo, ¿Qué pasa con otros números impares? ¿Seguirán un comportamiento similar al sumarse?

Reconocer el *patrón* de las características comunes y variaciones entre tales casos, es señalado por Pólya como un proceso clave para alcanzar una generalización apropiada.

**(4) Generalización.** Pólya (1966) define la generalización como "pasar de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contiene a la primera" (p. 37). De manera análoga, también se generaliza al pasar de un objeto a una clase total de objetos que contiene al primero.

Siguiendo con el mismo ejemplo, para llegar a la generalización uno podría preguntarse ¿Por qué todas estas sumas son cuadrados? ¿Qué puede decirse acerca de estos cuadrados? Y llegar a la conclusión de que, en cada caso, la suma es igual al número de sumandos elevado al cuadrado. De allí puede establecerse la siguiente ley general: *La suma de los primeros números impares positivos es igual al número de sumandos elevado al cuadrado.* Otra forma de expresarla, es:
Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se cumple que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

En contraste con las ciencias físicas que emplean métodos experimentales de validación, Pólya remarca que las leyes generales matemáticas descubiertas de manera inductiva deben demostrarse o probarse rigurosamente para validar su veracidad, pero este proceso es complementario a la inducción.

### 2.2.5. Teorías y modelos del razonamiento inductivo

La primera teoría del razonamiento inductivo es de tipo prescriptiva y desarrollada por el psicólogo alemán Karl J. Klauer, quien lo define como un proceso mental requerido para descubrir reglas, leyes o regularidades (Klauer, 1990; 1996). La teoría es prescriptiva en el sentido de establecer cómo deberían organizarse una serie de tareas en la enseñanza, para la aparición y mejora de dicho razonamiento en niños de cinco a ocho años. Está basada en el supuesto de que el razonamiento inductivo tiene lugar al intentar detectar regularidades y que éstas son descubiertas por la estrategia de comparación, esto es, escrutando objetos con respecto a los atributos y a las relaciones entre objetos. En la Tabla 2.1 se indican los seis tipos de tareas propuestas en la teoría:

**Tabla 2.1.** Tipos de tareas del razonamiento inductivo (Klauer, 1996, p. 39)

| Proceso | Operación cognitiva requerida |
|---|---|
| Generalización | Similitud de *atributos* |
| Discriminación | Discriminación de *atributos* |
| Clasificación transversal (Cross classification) | Similitud y diferencia entre *atributos* |
| Reconocimiento de relaciones | Similitud de *relaciones* |
| Diferenciación de relaciones | Diferencias en *relaciones* |
| Construcción de sistema | Similitud y diferencia en *relaciones* |

La teoría de Klauer se enfoca en el entrenamiento del razonamiento inductivo en los primeros años de educación primaria, y su relación con la inteligencia, el aprendizaje en general y la resolución de problemas, más no es específica de algún dominio específico de conocimiento. La aplicación de esta teoría a la resolución de problemas matemáticos es realizada por Christou y Papageorgiou (2007) en la formulación y validación de un marco de referencia para promover y evaluar el razonamiento inductivo en niños de quinto grado (10 años en promedio). Este marco incorpora tres procesos cognitivos para detectar similitudes y/o diferencias entre los atributos y las relaciones de objetos matemáticos en problemas de tipo inductivo, tales como clasificación, analogía, series y matrices. Estos procesos son:

- *Similitud*. Refiere a la identificación de similitudes de atributos de números o formas, así como de relaciones entre números u objetos.
- *Disimilitud*. Consiste en notar diferencias entre objetos con respecto a sus atributos o relaciones, para reconocer el objeto que no encaja con los demás de un conjunto o para excluir el objeto de una serie a fin de conservar un patrón.
- *Integración*. Implica determinar simultáneamente tanto los atributos comunes como los diferentes de al menos dos objetos. Asimismo, involucra encontrar equivalencia o diferencia entre relaciones, es decir, determinar si hay una relación común entre un par de números o formas con al menos otro par de estos, y esta relación es diferente de una relación con al menos otro par.

A diferencia del trabajo de estas investigadoras, Reid (2002) presenta una caracterización del patrón de razonamiento inductivo de estudiantes de quinto grado, centrando la atención en las fases y no en los procesos cognitivos subyacentes. Otra diferencia con respecto al marco presentado por Christou y Papageorgiou (2007) es la clase de tarea usada para describir cómo razonan los niños, en lugar de utilizar problemas cerrados de clasificación o series, considera uno de tipo abierto que involucra conjetura y generalización. De este modo, identificó las siguientes cinco fases que siguen en su razonamiento:

- *Observar un patrón*. Consiste en observar que varios casos específicos comparten una característica común. Reid y Knipping (2010) señalan que esta fase coincide con la que Pólya denomina "notar u observar" similitudes entre casos.
- *Conjeturar que el patrón aplica generalmente,* es decir, a todos los casos del problema.
- *Probar la conjetura.* Involucra una especialización y una comparación. La primera es una deducción de la conjetura aplicada a un caso específico; y la segunda, es una examinación de por lo menos una especialización con otra para establecer si coinciden o difieren.

- *Generalizar la conjetura*. Implica la generalización de la conjetura como una regla, la cual sea aceptada como verdadera por alguien. Reid aclara que, a diferencia de la generalización,  la conjetura se presenta sin ser considerada verdaderas o falsas, sino con duda y sujeta a prueba.
- *Usar la generalización* como la base para hacer deducciones simples acerca de otros aspectos de la situación.

El estudio realizado por Reid proporciona evidencia empírica de que las fases distintivas del razonamiento de los estudiantes se corresponden de alguna manera con las propuestas por Pólya (1966). Posteriormente, Reid and Knipping (2010) señalan que entre las fases de observación del patrón y la conjetura, ocurre una predicción del patrón al razonar de casos particulares a otros casos particulares. Estos autores argumentan que, cognitivamente, tal predicción conduce a una conclusión que podría ser una conjetura o una generalización, según si una verificación adicional es requerida o no, respectivamente.

Partiendo del trabajo de Pólya e incorporando las nociones de predicción del patrón y el elemento de duda atribuido a la conjetura en las fases identificadas por Reid (2002), Cañadas y Castro (2007) formulan un modelo empírico de siete fases que describen el razonamiento inductivo de estudiantes de secundaria al resolver problemas sobre sucesiones. Este modelo extiende las fases mencionadas por Pólya debido a que incorpora una fase de organización de particulares, otra de búsqueda y predicción del patrón en relación a la formulación de una conjetura, y también considera a la demostración de la generalización. Las siete fases del modelo se describen a continuación:

- *Trabajo con casos particulares*. Acción inicial en el proceso de razonamiento y consiste en tener experiencias u obtener casos específicos de un problema dado.
- *Organización de casos particulares.* Colocar los casos particulares en alguna manera que favorezca sistematizar el trabajo con estos para percibir algún patrón, por ejemplo, ordenando los casos en una tabla.
- *Búsqueda y predicción de patrones*. Reconocer un posible patrón en los casos observados y considerar su aplicación a alguno desconocido. En este modelo, el patrón es considerado como "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes

hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57).

- *Formulación de conjeturas.* Elaborar una proposición sobre todos los posibles casos del problema, con base en algunos casos específicos. Esta proposición se supone verdadera, con duda, pues no ha sido validada.
- *Justificación de las conjeturas*. Intentar justificar o verificar la conjetura para nuevos casos particulares, pero no en general. De manera que, esta justificación podría ser empírica. La verificación o no de la veracidad de la conjetura en esos casos conduciría a su aceptación o rechazo, respectivamente.
- *Generalización*. La conjetura es considerada como verdadera en general, esto es, para todos los casos de cierta clase y no solo para algunos particulares. Involucra relacionar y expresar el patrón con una regla general (Castro, et al., 2010).
- *Demostración.* Proporcionar una justificación que garantice la veracidad de la conjetura mediante una prueba formal.

En el razonamiento de los estudiantes, estas fases no siguen necesariamente un orden lineal en el paso de lo particular a lo general, incluso algunas podrían demandar mayor esfuerzo cognitivo que otras o no llevarse a cabo (Cañadas, Castro y Castro, 2009; Castro, Cañadas y Molina, 2010).

De los marcos de referencia antes descritos, solamente el propuesto por Christou y Papageorgiou refiere a procesos cognitivos asociados al razonamiento inductivo. Dichos procesos caracterizan el razonamiento de niños al iniciar la educación primaria y al nivel de descubrir regularidades entre objetos específicos y sus atributos, pero no aplican para la generalización de patrones con el uso de estructuras matemáticas algebraicas, como las tratadas en educación secundaria. Por tal razón, se descarta este marco como referente en nuestro trabajo para analizar los procesos inductivos de los profesores, aunado al hecho de que existen diferencias cualitativas en el razonamiento de niños con respecto al de jóvenes y adultos al inducir (Rivera & Becker, 2003).

Las fases del patrón de razonamiento inductivo descrito por Reid (2002) y del modelo de Cañadas y Castro (2007) clarifican los pasos seguidos por niños y jóvenes, respectivamente, para transitar de lo particular a lo general. El objetivo en estos trabajos es cercano al de nuestro estudio, en tanto buscan entender y describir la forma inductiva de razonar y se comparte la idea de hacerlo a través de tareas de generalización a partir de instancias particulares.

Se coincide con estos autores en considerar el trabajo de Pólya como un referente para estudiar el razonamiento inductivo de profesores, pero nos interesamos no solo en conocer la forma en que ellos razonan, sino también entender por qué algunos alcanzan a generalizar y otros no. Es así que nos enfocamos en esclarecer los procesos cognitivos que subyacen al razonamiento de profesores de secundaria y en cómo se conectan para producir generalizaciones, máxime si se considera la existencia de problemas para generalizar patrones cuadráticos por parte de profesores de secundaria, como se reportó en el Capítulo 1.

Para cerrar este capítulo, en el siguiente apartado se plantean algunos posicionamientos teóricos de este estudio y se presenta un marco de referencia de los procesos inductivos considerados para investigar el estatus y cambio cognitivo del razonamiento inductivo de los profesores.

## 2.3. Características y procesos subyacentes al razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es un método y proceso de razonamiento que procede de lo particular para concluir leyes o reglas generales (Reid & Knipping, 2010). Como método en la investigación del conocimiento científico, ha sido la vía de estudio de hechos particulares para establecer principios universales; que consiste en buscar relaciones invariantes en hechos, objetos o fenómenos para descubrir las leyes que lo rigen.

Si bien existen varias conceptualizaciones del razonamiento inductivo, desde una perspectiva cognitiva, en este trabajo se concibe al razonamiento inductivo como el proceso mental orientado a inferir leyes o conclusiones generales por medio de la observación y conexión de instancias particulares de una clase de objetos o situaciones.

### 2.3.1. Relación entre razonamiento inductivo y generalización

Es ampliamente aceptado que el razonamiento inductivo facilita notar patrones para transitar de lo particular a lo general, por tanto, es útil si es necesario descubrir algo general o una regularidad (Klauer, 1990). En efecto, distintos procesos de generalización en matemáticas se llevan a cabo mediante la inducción. Por ejemplo, Sriraman (2004) menciona que los teoremas matemáticos son el resultado final de un proceso inductivo que inicia con la construcción de ejemplos, en los cuales se detectan patrones. Cañadas, Castro y Castro (2008) muestran que la generalización de patrones precisa acciones asociadas al razonamiento inductivo tales como observar casos particulares, buscar un patrón y extenderlo a una clase de casos, incluso desconocidos. Asimismo, la generalización de una conjetura basada en la observación de un número finito de casos discretos o dinámicos, puede hacerse por medio de inducción empírica (Cañadas, Deulofeu, Figueras, Reid & Yevdokimov, 2007).

Por este hecho, varios estudios (e.g., Cañadas, Castro, & Castro, 2009; Haverty et al., 2000; Christou & Papageorgiou, 2007; Rivera & Becker, 2003; Manfreda et al., 2012) han examinado dicho razonamiento en estudiantes y profesores en formación usando tareas de generalización. De acuerdo con Dreyfus (2002), generalizar es "derivar o inducir desde instancias particulares, identificar características compartidas o atributos, para expandir dominios de validez" (p. 35). Tales estudios coinciden en señalar que el razonamiento inductivo y la generalización son dos procesos cognitivos conectados. Klauer (1996) refiere esta conexión al decir que "el producto final de un proceso de razonamiento inductivo es el descubrimiento de una generalización…" (p. 38).

Cognitivamente, hacer una generalización implica detectar una interconexión entre lo general y lo individual, donde lo general abarca la diversidad de lo individual (Davýdov, 1990). Para este autor, esto significa hacer una conexión necesaria de un fenómeno o hecho individual dentro de cierta totalidad. Cuando esta conexión involucra ver lo general en lo particular, la generalización se asocia con el razonamiento inductivo; en sentido contrario, se relaciona con el deductivo (Hodnik & Manfreda, 2015).

El razonamiento inductivo es un medio o ruta para realizar generalizaciones desde casos particulares, ya que este tipo de generalización implica reconocer una propiedad o característica invariante en una clase de objetos o casos específicos y extenderla al caso general (Bills & Rowland, 1999; Davýdov, 2008). Esta generalización puede ser expresada con una regla que describa lo invariante. En adición, un tipo de tareas que evocan razonar de manera inductiva son aquellas en las que se requiere inducir u obtener una regla que gobierne a un conjunto de elementos específicos (Glaser & Pellegrino, 1982).

Por tanto, en esta investigación se consideró que el razonamiento inductivo de los profesores de matemáticas puede detonarse y movilizarse a través de tareas de generalización (de lo particular a lo general). Así, usamos esta clase de tareas para examinar los procesos cognitivos involucrados en su razonamiento y analizar cómo desarrollarlo a fin de que lleguen a producir generalizaciones adecuadamente.

### 2.3.2. Procesos inductivos

Aun cuando en las investigaciones en Matemática Educativa se carece de algún marco de referencia sobre los procesos que involucra el razonamiento inductivo en personas adultas, tal como los profesores, los estudios previos dejan entrever que este razonamiento inicia con el proceso de observar regularidades en casos particulares y, si se desarrolla adecuadamente, conduce a la producción de generalizaciones (Cañadas, Castro y Castro, 2008; Haverty et al. 2000; Klauer, 1996). En estos trabajos también es posible reconocer que, en el paso de los casos particulares a la inferencia de una regla general, el proceso de establecer patrones matemáticos es clave.

Por lo anterior, en las fases propuestas por Pólya para la realización de generalizaciones matemáticas, se reconoce que éstas implican desplegar y articular tres procesos cognitivos subyacentes al razonamiento inductivo: *la observación de una regularidad*, *el establecimiento de un patrón* y *la formulación de una generalización*. Se considera que validar formalmente la veracidad de la generalización, no corresponde propiamente al proceso de desarrollo del razonamiento inductivo, sino a un proceso de prueba. La conclusión o regla general obtenida del proceso inductivo puede ser comprobada con una argumentación empírica o, con mayor rigor matemático, validada por una prueba deductiva (Cañadas, Castro y Castro, 2009; Davýdov, 1990; Pólya, 1966).

Con base en Pólya (1966) y la literatura sobre el tema, se configuró un marco de referencia que permita entender cómo los profesores razonan de manera inductiva para obtener una regla general y cómo tales procesos se interconectan. Así, para examinar su estado de razonamiento y un posible cambio cognitivo, se consideraron los siguientes procesos inductivos descritos en Sosa, Aparicio y Cabañas (2019, p. 566):

### *a. Observación de una regularidad*

La observación de una regularidad la entendemos como un proceso cognitivo que se basa en la acción mental de comparar con el fin de identificar alguna similitud, diferencia o lo que permanece invariante en un conjunto de objetos o casos particulares (Pólya, 1966; Klauer, 1990). El razonamiento inductivo inicia con el análisis de casos particulares de una situación y se dirige a la observación de alguna regularidad (Pólya, 1966), es decir, "trata de encontrar regularidad y coherencia detrás de las observaciones" (p. 17). Klauer y Phye (1994) afirman que las regularidades son parte esencial para establecer categorías y descubrir una regla general.

### *b. Establecimiento de un patrón*

Establecer un patrón es un proceso cognitivo esencial para obtener una regla general desde casos particulares (Pólya, 1966; Haverty et al, 2000). El patrón representa lo que se repite con regularidad en un conjunto de casos o hechos específicos (Castro, Cañadas, & Molina, 2010). Este proceso se corresponde con la fase de formulación de una conjetura mencionada por Pólya, dado que involucra hacer una proposición sobre el patrón matemático y su aplicación a otros posibles casos de la situación, incluso aquellos desconocidos. Por tanto, para formular una conjetura se precisa reconocer un posible patrón en los casos observados y expresarlo de forma verbal, numérica u otra (Cañadas & Castro, 2007).

Según Clements y Sarama (2009): "Identificar y aplicar patrones ayuda a llevar orden, cohesión y previsibilidad a situaciones aparentemente desorganizadas y permite hacer generalizaciones más allá de la información que tiene frente a usted" (p. 190). Para estos autores, establecer un patrón implica conectar regularidades y estructuras matemáticas. Así, reconocer lo que se repite con regularidad es necesario para establecer un patrón, sin embargo, esto no es suficiente. Además, se precisa de reconocer las relaciones matemáticas subyacentes a tal regularidad, por ejemplo, las relaciones numéricas, espaciales o lógicas implicadas en el patrón (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

### *c. Formulación de una generalización*

Pólya (1966) propone hacer una generalización como parte culminante de la inducción, es decir, pasar de un objeto o serie específica de objetos a una serie mayor que los contiene. Cognitivamente, la formulación de una generalización es un proceso que requiere abstraer lo general de un conjunto de instancias particulares, a través de hacer una conexión del fenómeno individual dentro de cierta totalidad (Davýdov, 1990). Este proceso consiste en la extensión del patrón a una totalidad de casos (Cañadas y Castro, 2007), por tanto, ayuda a transitar del patrón a la expresión de una regla general. Adicionalmente, la generalización de un patrón matemático requiere usar y describir relaciones estructurales o estructuras (Küchemann & Hoyles, 2009), por ejemplo, describir relaciones entre variables usando estructuras matemáticas lineales, cuadráticas, etc.

Cada uno de estos tres procesos fue considerado como un nivel o estado de desarrollo del razonamiento inductivo, desde el trabajo con casos particulares hasta la producción de generalizaciones. De manera que, el tránsito de la observación de regularidades al establecimiento del patrón o de este proceso a la formulación de una generalización fueron indicadores del cambio cognitivo en los profesores. Para propiciar, examinar y describir el cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores se adoptaron elementos de la teoría del desarrollo humano de Vygotsky y de la actividad de Leontiev. Los constructos y fundamentos teóricos de la investigación relativos al cambio cognitivo y desarrollo profesional docente se presentan en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Fundamentos y elementos teóricos

En este capítulo se presentan las perspectivas teóricas del cambio cognitivo y el desarrollo profesional docente desde las que se abordó el objeto de la investigación. Considerando que el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo susceptible de ser desarrollado en las personas y que tal desarrollo puede lograrse a través de la interacción social y la mediación semiótica, se adoptó el posicionamiento histórico-cultural del desarrollo humano de Vygotsky (1978) para analizar y sustentar una forma de favorecer un *cambio cognitivo* en el razonamiento de profesores de secundaria. Por otro lado, desde la perspectiva del desarrollo profesional docente como un proceso de cambio y crecimiento profesional (Richardson y Placier 2001; Fraser, Kennedy, Reid y Mckinney, 2007), se propone la noción de *sensibilidad didáctica* como un elemento descriptor del cambio profesional docente y su marco conceptual. Así, dos constructos centrales en este trabajo para analizar el cambio docente respecto al razonamiento inductivo fueron: *cambio cognitivo* y *sensibilidad didáctica*.

### 3.1. Desarrollo cognitivo en la teoría de Vygotsky

El principio fundamental en la teoría histórico-cultural de Vygotsky, es que el desarrollo del ser humano es definido culturalmente (Vygotsky, 1978). Si bien desde el nacimiento del ser humano, el desarrollo es primero determinado por procesos de maduración de naturaleza biológica, son los procesos de aprendizaje los que detonan el proceso de desarrollo cognitivo de naturaleza sociocultural (Wertsch, 1988). El papel de las relaciones sociales en el desarrollo cultural del niño es referido por Vygotsky en la ley genética general del desarrollo:

> Cualquier función, presente en el desarrollo cultural del niño, aparece dos veces o en dos planos distintos, en primer lugar aparece en el plano social, para hacerlo, luego, en el plano psicológico. […] Las relaciones sociales o relaciones entre personas subyacen genéticamente a todas las funciones superiores y a sus relaciones (Vygotsky, en Wertsch, 1988).

A cada línea de desarrollo en el ser humano, la natural (biológica) y la sociocultural, están asociados procesos cognitivos que Vygotsky denomina como elementales y superiores, respectivamente (Vygotsky, 1978). Como se dará cuenta en el siguiente apartado, el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo de orden superior. Para hablar del desarrollo de este tipo de procesos en el marco de la teoría de Vygotsky se hace necesario primero, identificar la génesis de los procesos cognitivos elementales y superiores; segundo, entender la noción de desarrollo cognitivo como un proceso continuo consistente de cambios evolutivos y su relación con el aprendizaje. Estos tópicos se tratarán en los dos apartados siguientes como preámbulo a la noción de cambio cognitivo.

### 3.1.1. Procesos cognitivos elementales y superiores

En la teoría de Vygotsky (1978) se establece que en el ser humano co-existen dos líneas de desarrollo, una natural y la otra sociocultural. El desarrollo natural produce funciones cognitivas tales como la memoria, la percepción y el pensamiento; mientras que el desarrollo sociocultural transforma esas funciones que aparecen en forma primaria (procesos elementales), a formas superiores (Wertsch, 1988).

Desde esta perspectiva sociocultural, las relaciones sociales son el origen de las funciones cognitivas superiores. En la interacción social se originan *signos*, que los seres humanos emplean para comunicarse. Estos signos, median la relación entre personas, convirtiéndose en instrumentos para operar en la realización de actividades propias o con otras personas (Rodriguez, 2003). La mediación con instrumentos o signos en la realización de cualquier actividad humana (dígase recordar, comparar algo, elegir u otra), es un factor que transforma a los procesos cognitivos elementales en superiores (Vygotsky, 1978).

Para ejemplificar lo anterior, considérese la coexistencia de una memoria natural y una memoria culturalmente elaborada en el ser humano, donde la primera precede a la aparición de la segunda. Vygotsky, citado en Wertsch (1988) las describe como sigue:

> …[La memoria natural] domina el comportamiento de las personas sin formación, caracterizada por la impresión no-mediada de materiales y por la retención de experiencias actuales como fundamento de las huellas mnémicas (de memoria) […] se caracteriza por su inmediatez. […] otros tipos de memoria pertenecientes a una línea evolutiva completamente

> diferente coexisten con la memoria natural. La utilización de nudos y palos marcados con muescas, los comienzos de la escritura y las ayudas memorísticas, demuestran que, incluso en sus primeros estadios de desarrollo histórico, los humanos fueron más allá de los límites de las funciones psicológicas otorgadas por la naturaleza, procediendo a una nueva forma de organización de su comportamiento elaborada culturalmente. […] estas operaciones con signos son el producto de condiciones específicas del desarrollo social. (Wertsch, 1988, p. 42)

En este ejemplo acerca de la memoria, las operaciones de hacer un nudo y marcar señales en un palo fungen como *instrumentos* para recordar algo, provocando que se extienda la operación de la memoria biológica y cambie su estructura a la de una memoria culturalmente elaborada. Estas operaciones permiten incorporar estímulos artificiales o autogenerados que orienten la conducta de las personas (en la actividad de recordar), los cuales Vygotsky denominó *signos*[1] (Cole, John-Steiner, Scribner y Souberman, 2009). De esta manera, se transforma el "recordar" en una actividad externa, y se construye el proceso de memorización a través de operaciones externas.

Puesto que el uso de instrumentos y signos (particularmente, el lenguaje) introducen cambios cualitativos en el desarrollo de los procesos cognitivos elementales, tal desarrollo está en continuo movimiento y evoluciona para constituir procesos superiores (Wertsch, 1988). Al respecto, Vygotsky (1978) estableció que:

> El uso de medios auxiliares, la transición a la actividad mediada, cambia fundamentalmente todas las operaciones mentales, del mismo modo que el uso de herramientas amplía ilimitadamente el rango de actividades en el cual pueden operar las nuevas funciones psicológicas. (p. 55)

Los cuatro criterios de Vygotsky para distinguir las funciones psicológicas elementales y superiores son (Wertsch, 1988, pp. 42-44):

1) *El paso del control del entorno al individuo, es decir, la emergencia de la regulación voluntaria o autorregulación*. Una característica que distingue a las formas superiores de comportamiento, respecto a las elementales, es la creación y uso de estímulos

[1] El sentido que le otorga al término *signo* es como poseedor de significado (Wertsch, 1988).

artificiales como medios auxiliares para orientar o regular la acción del individuo ante una nueva situación.

2) *La realización consciente de los procesos psicológicos*. Este criterio se refiere a la intelectualización de las funciones psicológicas superiores, esto es, a que se fundamentan en el pensamiento.
3) *Ser de origen y naturaleza social*. La sociedad es el factor determinante del comportamiento humano. La interacción social conduce a la aparición y desarrollo de procesos cognitivos superiores.
4) *El uso de signos como mediadores*. Los procesos psicológicos superiores presuponen la existencia de instrumentos (herramientas psicológicas) o de signos que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás.

### 3.1.2. Desarrollo y aprendizaje

La actividad mediada por signos hace a los procesos psicológicos superiores específicos de los humanos y marca la pauta de su desarrollo (Rodríguez, 2003). En la teoría de Vygotsky, el desarrollo es:

> (…) el movimiento progresivo y lógico por línea ascendente de lo inferior a lo superior, avanzando de un estado a otro más elevado. El desarrollo es un proceso de transformación de posibilidades en realidades. La posibilidad es una tendencia con existencia real y que permanece latente en objetos y fenómenos, convirtiéndose en realidad sólo cuando se dan determinadas condiciones para ello (Castillo, 2011, p. 24).

La perspectiva del desarrollo humano de esta teoría, se basa en la idea del materialismo dialéctico de Marx de que los fenómenos están en continuo movimiento y se caracterizan por sus cambios y, por tanto, poseen historia. Se considera que los procesos cognitivos sufren cambios en el curso del aprendizaje y el desarrollo, luego pueden comprenderse determinando su origen y trazando su historia (Cole et al., 2009, p. 33). Sobre esto, Vygotsky afirmaba que el aprendizaje en los niños comienza antes de que asistan a la escuela y que todo aprendizaje escolar tiene una historia previa, por ejemplo, ellos han tenido cierta experiencia con la noción de cantidad antes de estudiar la aritmética. Señalaba que, a diferencia del aprendizaje generado antes de la escuela, el escolar es sistemático e introduce algo nuevo en el desarrollo del niño, porque hay una variación evolutiva en su grado de desarrollo a través de la resolución de problemas guiada por el profesor o trabajando con compañeros más capaces (Werstch, 1988). Entonces, el aprendizaje se interrelaciona con el desarrollo mental.

En este encuadre teórico, para descubrir las relaciones entre aprendizaje y el proceso de desarrollo, deben determinarse por lo menos dos niveles: *el nivel de desarrollo actual* y *el nivel de desarrollo potencial* (Vygostsky, 1978). El primero corresponde al nivel de desarrollo de las funciones mentales de un individuo que se ha establecido como resultado de ciertos ciclos de desarrollo ya completados. Este nivel puede determinarse mediante pruebas que permitan indicar solo aquello que los niños o personas pueden hacer por sí mismas, es decir, lo que pueden lograr hacer de manera independiente. El nivel de desarrollo potencial se establece a partir de mirar en prospectiva lo que las personas son capaces de realizar por medio de la asistencia o interacción con otras personas.

La interrelación entre aprendizaje y desarrollo es explicada por el concepto "*zona de desarrollo próximo*", el cual Vygotsky (1978) define como:

> La distancia entre el nivel de desarrollo actual, según lo determinado por la resolución independiente de problemas, y el nivel de desarrollo potencial, determinado mediante la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con pares más capaces. (p. 86)

La zona de desarrollo próximo proporciona una herramienta con la que puede entenderse el curso del desarrollo mental, ya que lo caracteriza prospectivamente. Por un lado, define procesos cognitivos en estado de formación que poseen las personas, pero que no han madurado o de los cuales no se ha tomado consciencia. Por otro, permite evidenciar lo que potencialmente una persona es capaz de desarrollar.

El aprendizaje antecede y apunta al logro de nuevos estados del proceso de desarrollo mental, que aún no se han consolidado o terminado de madurar. En palabras de Vygotsky (1978), "el aprendizaje organizado adecuadamente resulta en desarrollo mental y pone en movimiento una variedad de procesos de desarrollo que serían imposibles aparte del aprendizaje" (p. 90). En consecuencia, una característica esencial del aprendizaje es crear la zona de desarrollo próximo. Siendo así, las actividades de aprendizaje deben centrarse no en el nivel de desarrollo actual, sino teniendo como referencia los procesos en el nivel de desarrollo potencial. Castillo (2011) ilustra la relación entre aprendizaje y desarrollo con el siguiente esquema:

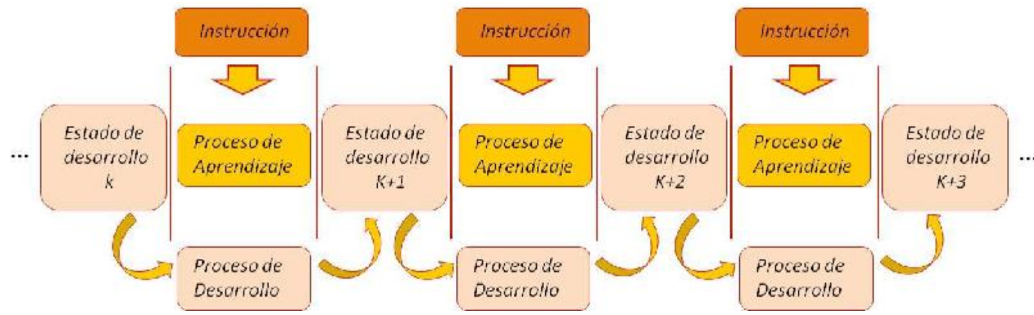



**Figura 3.1.** Relación entre aprendizaje y desarrollo. Fuente: Castillo (2011, p. 21).

Desde esta perspectiva teórica, la interacción social y la mediación semiótica proveen el soporte de la relación de interdependencia aprendizaje-desarrollo, pues promueven el surgimiento de funciones cognitivas internas (Rodríguez, 2003). Si bien el lenguaje se origina en la comunicación de una persona con otras en su ambiente, solo hasta que éste se convierta en un discurso interno, fungirá como organizador del pensamiento, es decir, como una función cognitiva interna (Vygotsky, 1978). Para ejemplificar lo anterior, Vygostky se apoya en un resultado de Piaget, quien evidenció que el razonamiento en un grupo de niños emerge como un argumento destinado a probar su propio punto de vista, previo a su aparición como una actividad interna de verificar y confirmar sus pensamientos.

En síntesis, el aprendizaje provoca una variedad de procesos internos de desarrollo que son capaces de operar solo cuando una persona interactúa con otras en su ambiente o coopera con sus pares. Una vez que estos procesos se internalizan, se convierten en parte del logro de desarrollo independiente de la persona. Vygotsky denominó *internalización* a la reconstrucción interna (cognitiva) de una operación externa (social) mediada por signos (Vygotsky, 1978, p. 56). En palabras de Wertsch (1988), es "el proceso implicado en la transformación de los fenómenos sociales en fenómenos psicológicos" (p. 79).

Por tanto, en esta investigación se asume que el proceso de desarrollo cognitivo es dinámico y progresivo. Asimismo, que el aprendizaje pone en movimiento la transformación de cierto estado de desarrollo cognitivo y su ascenso a un estado potencial superior. De acuerdo con Vygotsky, el proceso de desarrollo consiste en la internalización de operaciones externas mediante el uso de instrumentos culturales o signos.

### 3.1.3. Cambio cognitivo

Se ha mencionado que el desarrollo cognitivo es un proceso de naturaleza cambiante y evolutiva. Este es susceptible describirlo a partir de los *cambios cognitivos* que acontecen durante la trayectoria del mismo, según las siguientes consideraciones teóricas. Tanto la teoría de Vygotsky como el método genético que elabora para explicar la transformación de procesos psicológicos elementales en formas superiores, se enfocan en el análisis y descripción de los *cambios* cualitativos que se producen en el curso del aprendizaje y del desarrollo (Cole et al., 2009). El argumento de Vygotsky (como se citó en Wertsch, 1988) es que los procesos psicológicos solamente pueden explicarse si se estudian en el proceso de su desarrollo, es decir, cuando estos se movilizan en alguna actividad:

> Necesitamos concentrarnos, no en el producto del desarrollo, sino en el proceso mismo mediante el que las formas superiores se constituyen […] Plantear una investigación sobre el proceso de desarrollo de un objeto determinado con todas sus fases y cambios – desde el nacimiento hasta la muerte – significa fundamentalmente describir su naturaleza, su esencia, de manera que «es solamente en movimiento cuando un cuerpo muestra lo que es». Por ello, el estudio histórico […] del comportamiento no es un aspecto auxiliar del estudio teórico, sino que, más bien, forma su auténtica base (Wertsch, 1988, p. 35).

Vygotsky definía el desarrollo en términos de "saltos cualitativos revolucionarios" fundamentales, y no como incrementos cuantitativos constantes. Estos saltos fungen como puntos de inflexión del desarrollo y dan cuenta de su naturaleza cambiante. Cada salto se produce cuando en determinados momentos de la aparición de un proceso cognitivo, los principios que anteriormente explicaban el desarrollo, requieren reorganizarse y conjuntarse con nuevos principios para incorporarse en una estructura explicativa general, pues por sí solos ya no podrían explicarlo (Wertsch, 1988).

Por lo anterior, desde la perspectiva sociocultural del desarrollo de Vygotsky, el estudio y explicación del desarrollo de un proceso cognitivo superior debe analizar la historia de todos los estados de desarrollo y sus cambios durante la movilización de este proceso en una actividad. Es decir, considerando su estado actual y su tránsito a estados potenciales. El *cambio cognitivo* es "una transición de un estado, condición o fase menos organizada [del desarrollo] a una más organizada" (Fowler, 1992, p. 1239), por lo que el cambio procede en la dirección de alcanzar un estado final y es un descriptor del desarrollo. Siegler (2006) establece cinco dimensiones del cambio cognitivo:

- **Trayectoria** (*path*): Es la secuencia de estados, representaciones o comportamientos predominantes que usan las personas mientras adquieren una competencia. El cambio integra aspectos cuantitativos y cualitativos que describen cómo este ocurre a través del aprendizaje.
- **Tasa del cambio** (*rate*): Se refiere a cuánto tiempo o experiencia separa el uso inicial de un nuevo enfoque o competencia de su uso en una manera consistente. Involucra indicar si el cambio es repentino o lento (Flynn, Pine, & Lewis, 2006).
- **Amplitud** (*breadth*): La amplitud del cambio implica cuán ampliamente se generaliza el nuevo enfoque a otros problemas y contextos. Es decir, establecer si el cambio es específico de un dominio (resolución de problemas, razonamiento matemático, memoria, lenguaje, etc.) o generalizable a otros dominios (Flynn et al., 2006).
- **Variabilidad** (*variability*): Se refiere a qué tan variable es el comportamiento de una persona ante tareas similares en un mismo dominio y si existen patrones comunes o diferencias en el cambio de varias personas, por ejemplo, en las estrategias utilizadas por cada una al resolver cierta tarea.
- **Fuente** (*source*): Concierne a las causas que ponen el cambio en movimiento, es decir, cuál fue el origen o fuente del cambio.

Estas dimensiones que describen el cambio cognitivo reflejan que, durante el desarrollo hay cambios en la forma, estructura u organización de un proceso, los cuales son esenciales para el desarrollo y lo describen (Fowler, 1992).

En esta investigación se asume que el razonamiento inductivo, al igual que otros procesos como el pensamiento crítico-creativo, la deducción y la metacognición, es un proceso cognitivo superior (Ledesma, 2014). Entonces, es susceptible de desarrollo y análisis. Por consiguiente, el desarrollo de esta forma de razonamiento en los profesores involucra que transiten del *estado actual* que guarda su razonamiento a un *estado potencial*. El producto de la transformación de un estado inicial de razonamiento a otro superior es considerado una manifestación de un *cambio cognitivo* (Figura 3.2):

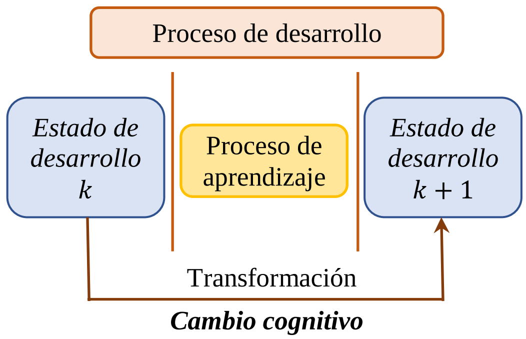



**Figura 3.2.** Cambio cognitivo como descriptor del desarrollo del razonamiento inductivo.

Con base en la teoría de Vygotsky, se asumió que el desarrollo de un proceso cognitivo en matemáticas, tal como el razonamiento inductivo, puede propiciarse y analizarse como producto de una actividad en un ambiente sociocultural específico, mediada por el uso de sistemas de signos. Luego, para entender cómo promover un cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores, se consideraron elementos y planteamientos de la Teoría de la Actividad de Leontiev, los cuales se exponen en el siguiente apartado.

### 3.1.4. Actividad y desarrollo cognitivo en la teoría de Leontiev

En la teoría de Vygotsky se establece que, los procesos cognitivos superiores aparecen primero como procesos en un plano social y, tras una interiorización, son transformados en procesos internos de cada individuo. Para Leontiev (1984), los procesos cognitivos se desarrollan por medio de la realización de actividades humanas sujetas a un motivo. Se entiende por ***actividad,*** los procesos que provocan una relación activa de los seres humanos con la realidad objetiva. La relación es activa en el sentido de que el sujeto transforma su realidad, mediante la interacción con el objeto de la actividad y su entorno (Leontiev, 1984). Por ejemplo, las actividades profesionales, de estudio y de ejercitación física son específicas de las personas y le ayudan a entender su entorno, crecer en lo personal y profesional, etc. (Brito y Castellanos, 1987).

En la teoría de Leontiev (1984), la actividad humana se origina en la acción práctica con objetos materiales, por lo que inicialmente es una actividad externa, y luego es interna cuando se realizan acciones mentales con esos objetos en un plano representativo (Montealegre, 2005). Por tanto, el desarrollo de los procesos cognitivos inicia con la formación de acciones externas con los objetos de la realidad y la actividad humana es justo la vía de interacción de las personas con su medio (Patiño, 2007).

#### 3.1.4.1. Estructura de la actividad

Para Leontiev (1984), la actividad se constituye de procesos específicos en los que acontece una relación activa con la realidad objetiva, y en ésta tiene lugar la interacción del sujeto con un objeto cognoscente. El ***objeto*** de la actividad es lo que constituye su ***motivo***, y puede ser material o ideal. Un ejemplo es la actividad profesional docente en matemáticas; el objeto puede decirse que es el aprendizaje matemático en los estudiantes (Dolores, 2014), aunque también pueden haber otros motivos de la misma. Otro ejemplo de actividad es la modelación matemática y su objeto es el modelo de las relaciones entre variables que describen cierta situación (e.g., Arrieta y Díaz, 2015; Suárez, 2014). El objeto primero aparece de manera independiente al sujeto, transformando su actividad, y después como su imagen, la cual se produce como resultado de la actividad del sujeto y del conocimiento generado en ésta.

La actividad es un sistema que tiene su propia estructura, es decir, está formado por componentes que se interrelacionan como un todo (Leontiev, 1984). Los componentes estructurales de la actividad son: motivo, objetivo, base orientadora, medios de ejecución y resultado. Estos se organizan en dos grupos: ***componentes de orientación*** y ***componentes de ejecución***, los cuales se describen a continuación:

a. **Componentes de orientación.** Leontiev (1984) establece que las ***necesidades*** y los ***motivos*** son componentes de la actividad que orientan el actuar de las personas. La *necesidad* dirige y regula la actuación de una persona en la actividad. La función de regulación aparece hasta que la necesidad entra en contacto con el objeto de la actividad (Brito y Castellanos, 1987; Montealegre, 2005). Para Leontiev (1984), “el objeto de la actividad [sea material o ideal], es su verdadero *motivo*” (p. 82). El *motivo* responde a una necesidad, orienta y da sentido a la actividad (Brito y

Castellanos, 1987). Por tanto, la actividad no existe sin un objeto o motivo. El resultado o producto que podría alcanzarse con la realización de la actividad es su ***objetivo*** (Talizina et al., 2010).

**b. Componentes de ejecución.** Uno de los componentes principales de la actividad son las ***acciones*** para su ejecución. Leontiev (1984) denomina ***acción*** al proceso que está orientado al logro del fin consciente u objetivo de la actividad. Enfatiza que la actividad es una cadena de acciones; sin acción no hay actividad. Talizina, Solovieva y Quintanar (2010) afirman que el resultado de las acciones es un objeto material, una imagen, un concepto, una expresión artística o la solución de un problema matemático.

Las acciones de la actividad pueden ser externas o internas. Algunas formas de las acciones en el plano externo son: material, verbal escrita u oral y visual; la verbalización interna y la imagen mental son ejemplos de formas de las acciones internas (Talizina et al. 2010). La acción para Leontiev (1984), además de tener una intención (qué debe lograrse), tiene un aspecto operacional relativo a cómo o por qué medio lograrlo. Las ***tareas*** son las condiciones determinadas, según el fin de la actividad, para la ejecución de las acciones.

Los medios o procedimientos con los cuales se ejecuta cada acción los llamó ***operaciones***. Por ejemplo, la acción de graficar una relación funcional entre variables, en un plano cartesiano, puede realizarse por distintas operaciones tales como:

- la tabulación de pares de valores de las variables y trazar puntos en el plano,
- determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva con los ejes, así como puntos máximos, mínimos y de inflexión, y ubicarlos en el plano.

A diferencia de las acciones, las operaciones son automatizadas (Talizina et al., 2010). En la estructura de la actividad, las acciones están ligadas a los fines de la actividad y las operaciones con las tareas (Figura 3.3).

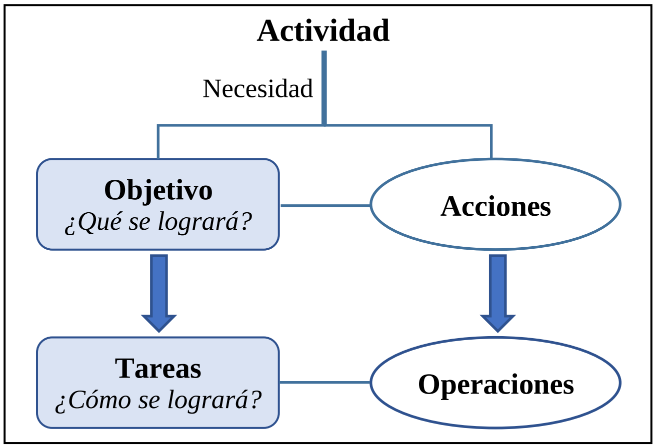



**Figura 3.3.** Estructura de la actividad en la Teoría de Leontiev.

En síntesis, la actividad de los individuos mediada por instrumentos o signos es el motor para el surgimiento y desarrollo de los procesos cognitivos superiores. Bajo este posicionamiento teórico, se adoptó la noción de actividad de Leontiev para estructurar actividad de generalización, la cual se propuso a los profesores para propiciar un cambio cognitivo en su razonamiento inductivo, y así explorar una forma de contribuir a su desarrollo profesional.

## 3.2. Desarrollo profesional docente y sensibilidad didáctica

El desarrollo profesional docente es concebido en esta investigación como un proceso de cambio y crecimiento docente en dos niveles: el personal (individual) y el profesional (social) del profesor, de acuerdo con las siguientes consideraciones sobre el tema.

### 3.2.1. Desarrollo profesional docente como cambio y crecimiento

El desarrollo profesional docente consiste en las experiencias de aprendizaje y actividades conscientes y planificadas que tienen por objetivo beneficiar a un individuo, grupo o escuela y, por este medio, contribuir a la calidad de la educación en el aula (Day, 1999). Para Day, es el proceso mediante el cual los profesores, de manera individual y colectiva, desarrollan conocimiento, habilidades e inteligencia emocional que se requieren para un pensamiento profesional.

En Guskey (2000, 2002), el desarrollo profesional docente se refiere como aquellos procesos y actividades diseñados con el propósito de cambiar y mejorar el conocimiento profesional, las prácticas docentes en el aula, las habilidades y actitudes de los profesores y, a su vez, el aprendizaje de los estudiantes. Los autores antes mencionados, coinciden al señalar a las actividades y experiencias de aprendizaje como parte del proceso de profesionalización, y a la idea de cambio en los entendimientos de los profesores respecto a su práctica, conocimientos y habilidades, como un indicador o resultado de dicho proceso. De hecho, en este contexto, Guskey (2002) se refiere al cambio profesional docente como un proceso de aprendizaje experiencial.

Según Richardson y Placier (2001), el cambio del docente puede describirse en términos de aprendizaje, crecimiento, mejora, implementación de algo nuevo o diferente y cambio cognitivo. A decir de estas autoras, las investigaciones en el tema se han focalizado en examinar aspectos relativos a la cognición del profesor, tales como su conocimiento de la práctica, del contenido y la reflexión sobre la práctica, a fin de determinar sus efectos en procesos de cambio en el docente. En tal sentido, se admite que un cambio docente es primeramente, desde una mirada de las teorías del aprendizaje constructivista, un cambio cognitivo.

Por su parte, Clark (como se citó en Roesken, 2011), señala que el desarrollo profesional docente en matemáticas inviste un cambio en cualquier combinación de los siguientes elementos, y no sólo en uno: las creencias y actitudes, el conocimiento y la práctica de los profesores. Al respecto, Day (1999) afirma que un cambio a nivel más profundo implica la modificación o transformación de las actitudes, emociones y percepciones del profesor que toman parte en la práctica docente. En adición, menciona que un cambio requiere ser internalizado para que no sea temporal o superficial.

Si bien el desarrollo profesional docente involucra una mejora personal del profesor, las diferentes perspectivas en la literatura están coincidiendo hoy en día en ubicar al cambio docente a nivel de un crecimiento profesional. En esta dirección, Clarke y Hollingsworth (2002) consideran que el cambio profesional docente concierne tanto a un *desarrollo personal* como a un *crecimiento profesional*. Según estos autores, el cambio como desarrollo personal está orientado a mejorar el desempeño, desarrollar habilidades o estrategias adicionales del docente; el cambio como crecimiento, involucra aprendizaje docente en una comunidad y cambio en la actividad profesional.

Fraser, Kennedy, Reid y Mckinney (2007) argumentan que un cambio profesional se entiende mejor si se describe como “resultado de un proceso de aprendizaje en términos de transacciones entre el conocimiento, la experiencia y las creencias de los docentes, por un lado, y sus acciones profesionales, por el otro” (p. 157). De este modo, el desarrollo profesional del profesor puede entenderse como un cambio cognitivo que trasciende a lo personal y se sitúa en mejoras a la práctica, por ende, en el aprendizaje de sus estudiantes (nivel micro) y en la mejora de la calidad educativa (nivel macro).

Entonces, el *desarrollo profesional docente* en matemáticas es un proceso progresivo de *transformación,* tanto en el docente como en sus actividades profesionales, hacia la mejora de la práctica y el aprendizaje matemático de los estudiantes. Es en este sentido, que en este trabajo se habla del cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo de los profesores matemáticas como una forma de desarrollo profesional. Es decir, un cambio cognitivo en el razonamiento del profesor que trascienda a alguna acción para la mejora de su práctica profesional, tal como el rediseño de una actividad de aprendizaje.

Para analizar si el resultado de la experiencia de aprendizaje sobre el razonamiento inductivo que se hizo vivir a los profesores en este estudio, fue transferido a esa acción profesional, se consideró que una sensibilización didáctica debía actuar como una mediadora para la transacción de lo personal a lo profesional.

### 3.2.2. Sensibilidad didáctica docente

Hopwood (2016) afirma que, el traspaso del aprendizaje profesional a la práctica, no es transferencia de información, sino “un sitio de aprendizaje sobre las formas cambiantes de conocimiento y sobre la conexión del conocimiento de una persona a otra”. Este autor argumenta que el traspaso puede entenderse en términos de dos funciones del aprendizaje profesional: *conexión* y *sensibilización*.

La función de *conexión* se refiere a modificar o restaurar las conexiones entre los tipos de conocimientos que sustentan el aprendizaje y la práctica, porque el aprendizaje toma la forma de y cambia la acción en la práctica. Esta conexión no ocurre por sí misma, sino de forma deliberada en el aprendizaje profesional. Como lo que se aprende puede ser inestable y tener implicaciones para los conocimientos que sostienen a las prácticas, se requieren mantener las conexiones en la acción. Hopwood establece que la función de *sensibilización* garantiza que las conexiones permanezcan de forma flexible y sean reforzadas, permitiendo cambiar la forma de interpretar y abrir nuevas posibilidades de la acción en la práctica. Asimismo, esta función del aprendizaje permite que las prácticas se ajusten más pronto a los cambios y las hace más sensibles a tener sutiles variaciones.

Considerando que la conexión se puede propiciar intencionalmente en experiencias de aprendizaje profesional, se centró la atención en la sensibilización porque representa una función importante para traspasar el aprendizaje profesional a la práctica y mantener las conexiones en la acción. Sin embargo, se desconoce cómo ocurre y qué caracteriza tal sensibilización. Por ello, la noción de *sensibilidad didáctica* es utilizada en este trabajo como una herramienta conceptual para analizar si los profesores perciben qué es el razonamiento inductivo, así como los procesos que subyacen, y los convierten en un conocimiento para realizar una acción de la práctica docente relacionada con lo inductivo, en particular, el rediseño de una actividad de generalización.

Según la filosofía del materialismo dialéctico, el proceso de conocimiento es sensorial y racional. Es decir, en un primer momento (sensorial) el conocimiento transita de lo sensorial a lo racional, de lo percibido sensorialmente al pensamiento; en un segundo momento de conocimiento (racional), el pensamiento reorganiza el reflejo de las características de los objetos y fenómenos captados de forma sensorial y lo hacen consciente y generalizado (Brito y Castellanos, 1987). El conocimiento sensorial tiene un papel fundamental en la organización de la actividad práctica de las personas y sirve de base a la formación del conocimiento racional. Según Kant (en Hegedus y Moreno, 2011), lo percibido sensorial o empíricamente se transforma y adquiere forma de conocimiento a través de formas innatas de sensibilidad.

Las formas de sensibilidad suelen ser intrínsecas a las personas, aunque también pueden detonarse por una acción de percepción guiada mediante interacciones que produzcan un cambio en la estructura del individuo (Preciado, Metz y Marcotte, 2015). Al hablar de los aspectos del conocimiento desde una perspectiva psicológica, Brito y Castellanos (1987) definen la sensibilidad como la capacidad para captar estímulos. Afirman que la sensibilidad varía en cada persona e incluso para la misma en diferentes momentos y circunstancias. La variación puede ocurrir por el contenido de la actividad que se realiza, por el interés de la persona hacia la tarea o por la adaptación de nuestros sentidos a ciertos estímulos. El aumento de sensibilidad es denominado por estos autores como *sensibilización*.

Al inspeccionar la acepción de sensibilidad en diversos ámbitos de la vida, el arte y las ciencias (medicina, moral, política, etc.), puede concluirse que es la capacidad de percibir y reaccionar, ya sea fisiológica o psicológicamente, a lo captado por nuestros sentidos o por la influencia de opiniones y juicios racionales (Vermeir & Deckard, 2012). El término "sensibilidad emocional", por citar un ejemplo, es utilizado en psicología para medir y explicar el grado en que una persona es capaz de identificar y reaccionar a emociones, tanto propias como ajenas (Herrera y Guarino, 2008). En general, se acepta que la *sensibilidad* es la capacidad para captar la cualidad de un objeto, hecho o situación, y tener algún tipo de reacción ante ello.

Regresando al tema del desarrollo profesional docente, lo anterior significa que las personas, incluyendo al profesor de matemáticas, son susceptibles de cambiar en la medida que son sensibles y toman consciencia de algo. En relación al ejemplo de la sensibilidad antes mencionado, las personas cambian de estado de ánimo cuando son sensibles emocionalmente a una demanda ambiental (relacionada con él).

En ese orden de ideas, para que un cambio en el desarrollo personal del profesor se transforme en una mejora de su práctica profesional, se hace necesario que sea sensible a reconocer formas distintas de enseñanza que le permitan promover aprendizajes matemáticos. Así, se denomina *sensibilidad didáctica docente* a la capacidad para percibir la ausencia o presencia de formas distintas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por parte del docente, así como las implicaciones didácticas en la práctica. La sensibilidad didáctica refiere a la facultad que adquiere un docente para reconocer los alcances y limitaciones de su práctica, en función del tipo de conceptualización matemática y pedagógica (instruccional) en él presente (Sosa y Aparicio, 2017).

En el caso que nos ocupa, la sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo se interpreta como la capacidad para percibir este tipo de razonamiento como una forma de generar conocimiento matemático y un medio para generalizar, esto es, como una forma de organizar y otorgar un tratamiento didáctico los objetos matemáticos a fin de potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Tener dicha sensibilidad implica que los profesores reconozcan qué caracteriza al razonamiento inductivo y los procesos cognitivos asociados para promoverlo en el aula de matemáticas, particularmente en una actividad de generalización. Debido a esto, la sensibilidad didáctica se consideró como una variable a analizar con la intención de dar cuenta de un cambio en una acción de la actividad profesional docente.

Por tanto, para determinar si un cambio cognitivo docente se traduce en una forma de desarrollo profesional, se utilizaron dos categorías de análisis correspondientes a cada nivel de cambio docente: el personal y el de actividad profesional. Estas categorías son el *cambio cognitivo* y la *sensibilidad didáctica* al razonamiento inductivo, respectivamente (Figura 3.4).

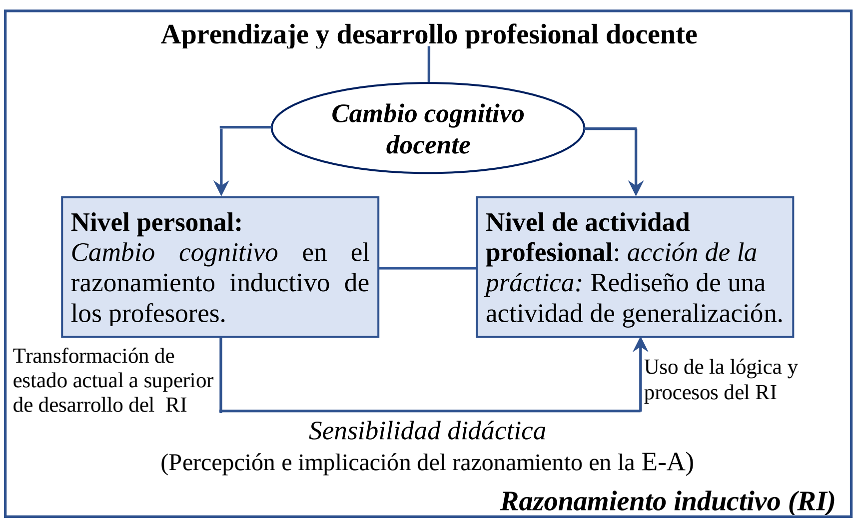



**Figura 3.4.** Esquema del estudio de un cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo.

# Capítulo 4

## Marco metodológico

La investigación sobre el cambio cognitivo docente en el razonamiento inductivo se desarrolló por medio de un *Experimento de enseñanza* (*Teaching Experiment*), en la modalidad de "*Experimento de Desarrollo del Profesor*" (Simon, 2000). Este tipo de estudios se inscribe en la metodología denominada *Investigación de diseño* (*Design Research*) o Investigación basada en diseño, caracterizada por la interrelación entre el diseño instruccional y el desarrollo o la validación de teoría (Bakker y Van Eerde, 2015). En este capítulo, se describen las acciones de la investigación, el marco de una investigación de diseño, las características generales y fases de un experimento de enseñanza y de desarrollo del profesor, así como las categorías y métodos utilizados para el análisis de los datos recabados.

### 4.1. Acciones de la investigación

Para el logro de los objetivos de la investigación, se realizaron las siguientes acciones:

1. *Se examinó el estado del razonamiento inductivo de un grupo de profesores de matemáticas en educación secundaria*, para caracterizar los procesos inductivos que emplean en la generalización de un patrón de comportamiento cuadrático y así identificar estados potenciales del desarrollo de este tipo de razonamiento. Este estudio también tuvo como propósito reconocer el tipo de dificultades que enfrentan para generalizar razonando de manera inductiva.

2. *Se diseñó y ejecutó un Experimento de Desarrollo del Profesor para promover el desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores*, con el propósito de analizar el cambio cognitivo y la sensibilización didáctica en ellos.

## 4.2. Investigación de diseño

La *Investigación de diseño* es una metodología de corte cualitativo que consiste en el desarrollo de diseño instruccional y de teoría de manera paralela, mediante el estudio sistemático de procesos o ambientes de aprendizaje y los medios que los soportan, considerando el contexto natural en que acontecen (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003; Cobb, Zhao & Dean, 2009). Es decir, el diseño instruccional está orientado al desarrollo de teoría con fundamento empírico y, a su vez, ésta se genera para entender los procesos de aprendizaje, con miras a la mejora en el diseño de las experiencias de instrucción.

Fue desarrollada en el campo de las Ciencias del aprendizaje, el cual se enfoca en el estudio de los procesos de aprendizaje desde una perspectiva multidisciplinar, que comprende a la psicología, sociología, pedagogía, antropología y otras disciplinas relacionadas con el aprendizaje (Confrey, 2006). El término "Investigación de diseño" engloba a un conjunto de diseños de investigación educativa con este carácter práctico-teórico, pero que varían en motivos, tipo de resultados, teoría base (de aprendizaje), y escala (Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015). Entre estos se encuentran los experimentos de diseño (Cobb et al. 2003), la investigación basada en diseño (Barab & Squire, 2004), los estudios de diseño (Shavelson, Phillips, Towne, & Feuer, 2003; Walker, 2006) y la investigación de implementación basada en diseño (Penuel, Fishman, Cheng, & Sabelli, 2011).

Se optó por esta metodología para diseñar un ambiente de aprendizaje con fundamento teórico, que promueva un cambio cognitivo docente respecto a este tipo de razonamiento en profesores de secundaria y, en paralelo, ayude a entender la forma de propiciarlo.

### 4.2.1. Orígenes, fundamentos y propósito de la metodología

Son dos las circunstancias que en conjunto se asocian a los orígenes de la investigación de diseño. Por un lado, el interés por nuevos enfoques de investigación que reduzcan la brecha teória-práctica para resolver los problemas de la práctica educativa; por otro, la atención en los procesos de aprendizaje en relación con el papel del contexto en que se sitúan, enfatizado por las teorías sociocultares sobre la cognición humana (Plomp & Nieveen, 2013; Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015).

Durante las décadas 60's – 90's en el siglo pasado, la investigación básica y las teorías del aprendizaje, conductuales en un primer momento y después cognitivistas, precedieron el desarrollo en materia de currículo (planes y programas de estudio, innovación educativa, materiales didácticos, y similares) para la atención de problemas educativos. Sin embargo, las propuestas curriculares en varias ocasiones resultaban inadecuadas por su desapego a la realidad del escenario educativo donde se implementaban. Además, proporcionaban poca o nula comprensión de su éxito o fracaso (Prediger et al. 2015).

En palabras de Stoke (1997), para reducir la brecha entre la investigación y un uso práctico que refleje mejor la realidad, se debía "avanzar en las fronteras de la comprensión, pero movidos por las consideraciones de uso" (p. 74). Emergió entonces la necesidad de enfoques de investigación que ajustaran las variables del contexto de enseñanza aprendizaje al diseño de intervenciones educativas para resolver problemas de la práctica. Por tanto, para producir intervenciones educativas, habría que entender las formas de aprendizaje y su contexto, y viceversa. Es bajo esta filosofía que surge la *Investigación de diseño*, la idea de fondo es "entender algo para cambiarlo, y cambiarlo para entenderlo" (Gravemeijer & Cobb, 2013). De este modo, se origina como una metodología alternativa con la cual investigar sistemáticamente cambios en las variables de contexto, para examinar cómo esos cambios influyen en el aprendizaje y en la práctica (Barab, 2014).

Por otra parte, justo por la importancia del contexto sociocultural en la cognición de las personas, en las ciencias del aprendizaje empezaba a adquirir mayor relevancia el estudio del aprendizaje como un proceso sociocognitivo dinámico, y la necesidad de alcanzar una comprensión más completa de su producción en escenarios reales (Plomp, 2013). Diferentes perspectivas teóricas socioculturales coincidían en la idea de que los procesos de interacción y comunicación son mediadores del aprendizaje. En consecuencia, se hacía necesario disponer de mayor conocimiento científico para generar procesos de diseño instruccional que propiciaran formas más activas de aprendizaje, tanto en lo individual como en lo colectivo, y que consideraran la complejidad de los escenarios escolares (Prediger et al. 2015).

En este sentido, el surgimiento de la investigación de diseño también fue alentado por el interés en diseñar tareas o ambientes de aprendizaje, con fundamento teórico, que promuevan el pensamiento de los estudiantes en interacción con otros estudiantes y el profesor. Se hacía imprescindible contar con nuevo conocimiento científico que apoye a los profesores en interpretar cómo actúan y razonan sus estudiantes en contextos de aprendizaje activo.

Los fundamentos de la investigación de diseño se encuentran principalmente en posicionamientos socioculturales sobre el aprendizaje, tales como los de Vygotsky y Dewey. Tres principios teóricos que sustentan la mayoría de los estudios con esta metodología son (Prediger et al., 2015):

i. Los sujetos en un proceso de aprendizaje, son agentes epistémicos que incorporan sus experiencias personales y culturales, y sus propios recursos cognoscitivos. Ambos influyen en qué y cómo aprenden.
ii. A medida que se aprenden ideas, concepciones o estrategias en algún dominio de conocimiento, ocurren cambios en el pensamiento. Por ejemplo, cambios conceptuales o cognitivos.
iii. El pensamiento y la acción están interconectados e influyen entre sí.

Acorde a esta metodología, este estudio sobre un cambio cognitivo docente en el razonamiento inductivo de profesores se sustenta en los tres principios anteriores. Según los fundamentos teóricos establecidos en el Capítulo 3, en la investigación se asume que:

i. Los profesores son agentes epistémicos, cuyas experiencias personales y culturales, así como sus formas propias de conocer, influyen en su aprendizaje.
ii. Ocurrirá un cambio cognitivo en su razonamiento inductivo a medida que aprendan ideas y desarrollen procesos inductivos en matemáticas, mediante la interacción social y el uso de representaciones semióticas.

iii. El pensamiento y la acción están interconectados e influyen entre sí por lo que, para analizar el cambio cognitivo, se presta atención al discurso y representaciones utilizadas por los profesores para explicar y justificar su razonamiento.

En síntesis, esta metodología se originó como una forma de producir y experimentar diseños instruccionales e ir ajustando sistemáticamente variables del contexto, con el propósito de generar y validar teorías sobre procesos de aprendizaje en escenarios naturalistas (Plomp, 2013). El aprendizaje, en este enfoque de investigación, es concebido como un proceso constructivo por los estudiantes y se atribuye un papel importante al contexto en que se sitúa la actividad de aprender. De allí que, varios estudios con esta metodología se orienten al pensamiento de los estudiantes y a los medios que lo hacen evolucionar. Una muestra de esto es la gran cantidad de investigaciones que se han enfocado en estudiar patrones de razonamiento de los estudiantes en un dominio específico de conocimiento (e.g., Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Cobb & Gravemeijer, 2008). El objetivo de la investigación de diseño es:

> Desarrollar una clase de teorías sobre el proceso de aprendizaje y los medios que están diseñados para apoyarlo, ya sea el aprendizaje de estudiantes individuales, de una comunidad de aula, de una comunidad profesional de docentes o de una escuela o distrito escolar visto como una organización. (Cobb et al., 2003, p. 10)

El contexto natural y multivariable en que tienen lugar el aprendizaje es una variable importante en los estudios con esta metodología. Su función consiste en el estudio sistemático del diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas, tales como programas, procesos y ambientes de aprendizaje, para desarrollar soluciones a problemas complejos en la práctica educativa basadas en la investigación (Plomp, 2013).

Los estudios en que se emplea esta metodología tienen tanto un carácter pragmático como una orientación teórica, pues ponen a funcionar en paralelo el diseño instruccional y la investigación. Al respecto Cobb et al. (2003) afirman que:

> Prototípicamente, los experimentos de diseño implican tanto "ingeniería" [diseño y producción] de formas particulares de aprendizaje, como el estudio sistemático de esas formas de aprendizaje dentro del contexto definido por los medios para apoyarlas. Este

> contexto diseñado está sujeto a prueba y revisión, y las iteraciones sucesivas que resultan desempeñan un papel similar al de la variación sistemática en el experimento. (p. 9)

Las investigaciones de diseño pueden dirigirse hacia el diseño y desarrollo de intervenciones educativas, ya sea ambientes, estrategias, materiales de aprendizaje o similares, para solucionar problemas educativos complejos; o bien, al desarrollo y validación de teoría (van den Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieven, 2006). Más adelante, se describe de manera más amplia estos tipos de investigaciones.

La interacción teoría-práctica es una característica de los estudios con esta metodología. De la práctica a la teoría, el diseño de ambientes de aprendizaje sirve de contexto para la investigación y mediante análisis continuos de su implementación se generan explicaciones teóricas sobre el aprendizaje; de la teoría a la práctica, la teoría así desarrollada informa sobre los procesos de aprendizaje y orienta la mejora del diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Esta es una característica del estudio aquí reportado, pues se diseñaron experiencias de aprendizaje para promover un cambio cognitivo docente en el razonamiento inductivo de profesores de secundaria, con base en supuestos teóricos sobre los procesos cognitivos que les permitirían transitar de lo particular a lo general, por mencionar un ejemplo. Y de manera simultánea, se fue examinando continuamente cómo ocurría este cambio y generando explicaciones sobre el fenómeno de estudio, lo cual servía de base para la toma de decisiones y el diseño de otras intervenciones instruccionales con los profesores.

El foco de atención de estos estudios no se centra en verificar si cierto diseño instruccional funciona para algún objetivo específico de aprendizaje y qué funciona, sino en explicar por qué y bajo qué condiciones funciona. Se realizan para desarrollar “teorías” específicas o locales que permitan comprender los procesos de aprendizaje y los medios que los producen y sustentan. Las investigaciones de diseño, entonces, son un medio para comprender la complejidad y la forma en que interactúan los distintos elementos de un contexto de aprendizaje, tales como las tareas a resolver, los discursos que se promueven, las herramientas y medios materiales que se proveen para el aprendizaje, etc. (Cobb et al., 2003).

Según Kelly (2013), esta metodología es apropiada en estudios en los que se dispone de pocas o nulas directrices para enfrentar algún problema complejo de enseñanza y aprendizaje, cuando las soluciones aplicadas en otros escenarios son infructuosas o no se adaptan al contexto del problema. Asimismo, si se desconoce o hay pocos acuerdos de los especialistas sobre cómo proceder para su resolución e, incluso, cuando los indicadores de éxito para el logro de algún objetivo educativo todavía deber ser delineados.

La investigación de diseño se dirige a un objetivo educativo, a nivel macro, o a uno de aprendizaje, a nivel micro; y apuntan a describir o explicar las condiciones bajo las cuales dicho objetivo es alcanzable mediante cierto diseño instruccional implementado en un contexto específico. Esto es, se realizan para discernir cuáles son las características de un diseño instruccional que lo hacen funcional para un objetivo educativo en cierto contexto (Plomp, 2013).

En términos generales, la investigación de diseño es *ad doc* para el estudio de problemas *abiertos* y *complejos*. Los *abiertos* son aquellos en que se desconocen o no son claras estas tres componentes; los *complejos*, además de estas características, acontecen en contextos únicos, involucran factores interconectados de manera sistémica que inciden en el progreso para el logro del objetivo y tienen indicadores pocos claros de una solución viable (Rittel & Webber, 1977).

En síntesis, la metodología es apropiada para el estudio de problemas en los que permea por lo menos una de las condiciones siguientes (Kelly, 2013, p. 138):

- El conocimiento del contenido a aprender es nuevo o está siendo descubierto por los expertos.
- El conocimiento pedagógico del contenido a enseñar es escaso.
- No se dispone de materiales adecuados de instrucción o son poco favorables para el objetivo.
- Los conocimientos y habilidades de los profesores son insatisfactorios.
- Los investigadores educativos disponen de poca información sobre el contenido y las estrategias de instrucción.
- Existen factores contextuales que pueden complicar o afectar negativamente el progreso hacia el logro del objetivo de la instrucción.

Dadas las características de los problemas que se estudian bajo esta metodología, tres componentes a clarificar para implementarla son (Kelly, 2013):

a. **Estado inicial del objetivo**: Conocimiento inicial del objetivo educativo y estado de conocimiento de los participantes.
b. **Estado meta o final**: Estado e indicadores de logro del objetivo.
c. **Operadores**: Medios para moverse del estado inicial al estado meta (diseños, recursos, ambiente de aprendizaje…).

En el presente estudio se aborda la problemática de cómo movilizar el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria, para que puedan transitar del trabajo con casos particulares a la formulación de generalizaciones y además, reconocerlo como una vía para de enseñanza y aprendizaje. Como se ha documentado en el Capítulo 1, poco o nada se conoce acerca de la forma en que los profesores usan el razonamiento inductivo para hacer una generalización o en procesos didácticos en matemáticas (Sosa & Cabañas, 2017), ya que la mayoría de las investigaciones previas se había enfocado en tipificar el razonamiento matemático de profesores en formación al resolver problemas o en las acciones del razonamiento inductivo de los estudiantes. Debido a la escasa o nula información que se disponía para atender este problema complejo relacionado con el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, se consideró apropiado utilizar esta metodología.

En otro orden de ideas, por la función y la dualidad “diseño instruccional-desarrollo teórico” de las investigaciones de diseño, son varias las configuraciones que tiene en cuanto a participantes, escenarios y objetivos (Cobb et al. 2003; Valverde, 2014):

***a. Escenarios de aprendizaje con estudiantes:***

*Modalidad 1*: Un profesor (investigador) conduce sesiones de enseñanza con un pequeño número de estudiantes con el objetivo de crear un ambiente de aprendizaje a escala, a manera de laboratorio, para estudiarlo con profundidad (e.g., Steffe & Thompson, 2000).

*Modalidad 2*: Un equipo de investigadores colabora con un profesor para implementar y analizar un diseño instruccional en un aula de clases. El rol del profesor puede ser asumido por uno de los investigadores (e.g., Bakker and van Eerde, 2015; Confrey & Lachance, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006).

***b. Escenarios de aprendizaje con profesores:***

*Modalidad 1*: Experimentos de enseñanza con profesores en formación en el cual uno o más investigadores organizan y estudian la formación de futuros profesores (e.g., Valverde, 2014).

*Modalidad 2*: Estudios con profesores en servicio con el objetivo de apoyar el desarrollo de una comunidad profesional (e.g., Cobb, Zhao & Dean, 2009; Pape, Bell & Yetkin, 2003).

La investigación de diseño en este trabajo corresponde a la modalidad “estudio con profesores en servicio para apoyar su desarrollo profesional”, porque se estudia una forma de favorecer el desarrollo profesional docente en un escenario de aprendizaje con profesores de matemáticas en servicio, a través de promover un cambio cognitivo docente en su razonamiento inductivo.

En particular, esta investigación se llevó a cabo en la modalidad de un *Experimento de Enseñanza*, que corresponde a un *estudio de desarrollo de teoría*. Este es uno de los dos tipos de estudios que engloban las investigaciones de diseño, los cuales se describen en el apartado siguiente.

### 4.2.2. Tipos de estudios de diseño y características genéricas

Se distinguen dos tipos de investigaciones de diseño según sus objetivos y productos: ***estudios de desarrollo*** para el diseño de intervenciones educativas y ***estudios de validación o desarrollo de teoría*** (Plomp, 2013; Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015).

**a. Estudios de desarrollo.** El objetivo de este tipo de estudios es desarrollar intervenciones educativas (programas, estrategias, materiales de aprendizaje, etc.) basadas en la investigación para abordar problemas complejos en la práctica educativa. Consiste en el análisis sistemático, diseño y evaluación de las intervenciones con una doble intencionalidad: resolver el problema al tiempo que se genera conocimiento sobre las características y el proceso de diseño de intervenciones educativas en un dominio específico (Plomp, 2013).

El carácter y uso práctico de los estudios de desarrollo se refleja en su doble producto: la intervención educativa y los principios de diseño. Se denomina principios de diseño a proposiciones heurísticas acerca de las características esenciales y metodológicas de la intervención. Los principios articulan los fundamentos teóricos del diseño de la intervención con la evidencia empírica de su funcionamiento y eficacia con un grupo de personas en un contexto específico (Van den Akker, 2013). Pueden ser principalmente de dos tipos (Van den Akker, 1999):

i. *Principios de diseño de procedimiento*: Características del enfoque o perspectiva del diseño.
ii. *Principios sustantivos de diseño*: Características del diseño (intervención) en sí.

Los principios de diseño constituyen el producto teórico de los estudios de desarrollo, y solamente son generalizables sobre la base de las características de la intervención real (Prediger et al., 2015). Por tanto, estos estudios son pertinentes para atender problemas educativos en los que no se dispone de directrices o principios para el diseño y desarrollo de actividades de instrucción.

**b. Estudios de validación o desarrollo de teoría.** El término estudios de validación se usa para referirse a experimentos de diseño, es decir, experimentos (en laboratorios o aulas de clase) que se centran en los procesos de aprendizaje y en la forma en que progresa el razonamiento de las personas. Su objetivo apunta al desarrollo y validación de teorías locales sobre procesos de aprendizaje en dominios específicos y los medios que son diseñados para apoyar ese aprendizaje (Plomp, 2013). Con tal objetivo, se diseñan trayectorias o ambientes de aprendizaje con sustento en teorías (por ejemplo, la epistemología genética, el constructivismo, las perspectivas socioculturales y el aprendizaje situado) enfocadas en la construcción del conocimiento, que susciten el desarrollo del pensamiento en estudiantes o profesores, en lo individual y colectivo (Prediger et al., 2015).

A diferencia de los estudios de desarrollo, el objeto de los de validación no es la implementación de un diseño de instrucción y sus características, sino utilizar el diseño para incentivar formas activas de aprendizaje, previstas y no, con la intención de analizar su progreso durante el experimento (Ball & Cohen, 1996, como se citó en Prediger, et al., 2015).

La palabra “validación” no se refiere a la verificación o confirmación de una teoría, sino al desarrollo de teoría acerca de un proceso de aprendizaje en cierto dominio de conocimiento, mediante la experimentación y análisis de diseños de instrucción. La realización de análisis sobre el proceso de forma continua y retrospectiva, permite probar conjeturas acerca de la evolución del razonamiento de los estudiantes y las interacciones en el aula (Gravemeijer & Cobb, 2013). Así, el producto de los estudios de validación adquiere la forma de teorías locales sobre el aprendizaje (Cobb et al., 2003).

En el caso de problemas muy complejos o persistentes, Plomp (2013) afirma que es posible combinar estos dos enfoques de la investigación de diseño, dando lugar a *estudios de implementación*. Estos se caracterizan por implementar una intervención educativa basada en la aplicación de principios de diseño obtenidos de otros estudios. De esta manera, al tiempo que se desarrolla una intervención, se investiga la validez de tales principios en un nuevo contexto, a través del análisis sistemático de su implementación. Se produce entonces un conjunto de procedimientos y condiciones para implementar con éxito la intervención educativa. En la Tabla 4.1, se resumen los objetivos y productos de los tipos de investigaciones de diseño:

**Tabla 4.1.** Tipos de investigaciones de diseño según su objetivo y producto (Plomp, 2013, p. 23).

| Tipo de estudio | Objetivo | Producto |
|---|---|---|
| Estudios de desarrollo | Desarrollar una intervención educativa | i) Desarrollo de una intervención basada en la investigación como solución a un problema complejo, y<br>ii) Principios de diseño re-utilizables. |
| Estudios de validación | Validar o desarrollar teoría | i) Diseño de ambientes de aprendizaje para generar teorías.<br>ii) Desarrollo y validación de teorías acerca del aprendizaje y ambientes de aprendizaje, o validación de principios de diseño. |
| Estudios de implementación | Implementar o ampliar a escala | i) Implementar un programa particular y,<br>ii) Estrategias y condiciones bajo las cuales puede hacerse la implementación (principios de diseño). |

Las cinco características genéricas de la investigación de diseño son (Van den Akker et al., 2006, p. 5):

1. *Intervencionista*: La investigación tiene como objetivo diseñar una intervención educativa en un escenario real.
2. *Iterativa*: Incorpora ciclos de análisis, diseño y desarrollo, evaluación y revisión.
3. *Orientada al proceso*: La atención se centra en comprender y mejorar las intervenciones.
4. *Orientada a un uso práctico*: La utilidad del diseño se mide, en parte, por la practicidad de su uso para los usuarios en contextos reales de enseñanza aprendizaje.
5. *Orientada a la teoría*: El diseño está basado en un marco conceptual y en proposiciones teóricas. Asimismo, la evaluación sistemática de la intervención contribuye a determinar principios de diseño o a construir teoría.

En general, los principios de diseño o teorías "locales" generados sobre la intervención en las investigaciones de diseño, se expresan en el siguiente formato (Plomp, 2013, p. 33): *"En el contexto Z, la intervención X (con ciertas características) conduce a los resultados $Y_1$, $Y_2$,..., $Y_n$"*.

### 4.2.3. Procedimiento y evaluación de calidad de la investigación de diseño

La producción de resultados en la investigación de diseño, conlleva un proceso de teorización. A diferencia de la investigación experimental en las ciencias naturales con métodos estandarizados de recolección y análisis de datos, la teorización no se reduce a validar teorías con base en la aceptación o refutación de hipótesis. En los estudios que emplean la investigación de diseño, la teorización refiere a la emergencia de teorías de instrucción local que evolucionan tras la revisión y refinamiento de conjeturas acerca del aprendizaje (Confrey y Lachance, 2000, como se citó en Prediger et al., 2015).

La formulación y refinamiento de las conjeturas de la investigación requiere de ciclos iterativos de experimentación. Asimismo, precisa de realizar actividades de documentación, reflexión y análisis continuos sistemáticos, mediante la colaboración entre investigadores y profesionales en su campo, para producir los principios de diseño y las teorías locales de instrucción (Plomp, 2013). Para la consecución de los objetivos y resultados de las investigaciones de diseño, estas deben realizarse mediante las siguientes tres etapas (Nieveen & Folmer, 2013):

(1) ***Investigación preliminar***: Esta etapa tiene un doble objetivo: i) Conocer la situación problemática más a fondo y las posibilidades de mejora, y ii) especificar principios de diseño tentativos y cómo se pueden desarrollar. Consiste en el análisis de las necesidades y contexto de la situación, así como en la exploración del conocimiento científico existente sobre la problemática mediante la revisión de la literatura. Estas acciones se traducirán en la delimitación de un marco conceptual o teórico para el estudio.

(2) ***Desarrollo o creación de prototipos***: Es una etapa iterativa que apunta al diseño y desarrollo de varios prototipos. Con el término prototipo se denomina a una versión provisional de la intervención educativa o de una parte de ésta, que se crea con base en las pautas de diseño obtenidas en la etapa anterior. Es iterativa porque cada prototipo corresponde a un ciclo de la investigación, y se evalúan y refinan durante toda la intervención.

(3) ***Evaluación***: La última etapa consiste en una evaluación sumativa, que se realiza con el propósito de determinar en qué medida la implementación de la intervención educativa conduce al logro de su objetivo o resultado esperado. Plomp (2013) denomina a esta evaluación semi-sumativa, ya que no solo mide la efectividad de la intervención, sino que frecuentemente deriva en recomendaciones para su mejora.

Estas son fases generales para la realización de investigaciones de diseño, pero los métodos en cada estudio pueden variar bastante por los diferentes objetivos, resultados, funciones y escala de cada uno. Especialmente en los estudios con foco en los procesos de aprendizaje, se usan gran variedad de métodos de análisis de datos debido a las adaptaciones (o nuevas invenciones) de los procedimientos de análisis en relación con el dominio específico de conocimiento y el contexto de aprendizaje. Independientemente de esta variedad, cada estudio debe proporcionar una justificación propia de sus métodos y hacer transparente el proceso de generación de resultados (Prediger et al., 2015).

Al respecto, Bakker y van Eerde (2015) señalan que dos indicadores para un análisis confiable de datos y obtención de resultados válidos son la *confiabilidad* y la *validez* de la investigación, tanto interna como externamente. La primera concierne al trabajo con los datos sin interferencia del investigador. La segunda se refiere a si realmente se mide lo que se pretendía medir. La verificación de tales indicaciones puede hacerse bajo las consideraciones siguientes:

- Se dice que hay confiabilidad *interna* cuando la recolección y análisis de datos se hace de manera objetiva, con independencia del investigador. Esta puede mejorarse usando dispositivos para registros de datos en audio y video. La *externa* connota replicabilidad, es decir, transparencia en el proceso de generar conclusiones a partir de los datos y las condiciones del estudio.
- La validez *interna* se refiere a la calidad de los datos y a la consistencia del razonamiento que ha llevado a las conclusiones. La *externa* implica la generalización de los resultados, pero no en un sentido estricto. Considerando que la especificidad del contexto en que se desarrollan las investigaciones de diseño es una de sus características, la generalización es relativa al uso de los productos de la investigación para el estudio de problemáticas similares en otros contextos, de manera que pueda establecerse bajo qué condiciones son aplicables los resultados.

Estos indicadores se relacionan con los criterios mencionados por Nieveen y Folmer (2013) sobre el desarrollo de intervenciones de alta calidad con esta metodología, en particular con los criterios de consistencia y factibilidad. Plomp (2013) organiza y describe estos criterios de calidad como se muestra en la Tabla 4.2:

**Tabla 4.2.** Criterios para intervenciones de alta calidad en investigaciones de diseño.

| Criterio | Descripción |
| --- | --- |
| *Relevancia* (también referido como validez de contenido) | Hay una necesidad para que se lleve a cabo la intervención y su diseño está basado en el estado de arte del conocimiento (científico). |
| *Consistencia* (también referido como validez de constructo) | La intervención está "lógicamente" diseñada. |
| *Practicidad* | Esperada: Se espera que la intervención sea utilizable en los escenarios para el que ha sido diseñada y desarrollada.<br>Real: La intervención es utilizable en los escenarios para los cuales ha sido diseñada y desarrollada. |
| *Eficacia* | Esperada: Se espera que al usar la intervención produzca los resultados deseados.<br>Real: El uso de la intervención produce los resultados deseados. |

Fuente: Plomp (2013, p. 29).

La investigación aquí desarrollada se tipifica como un *estudio de desarrollo de teoría*, porque se diseñó una intervención en un escenario presencial de trabajo con profesores, con la intención de favorecer experiencias de aprendizaje profesional que permitan examinar el progreso de su razonamiento inductivo durante estas experiencias. Asimismo, con la experimentación y análisis continuo y retrospectivo de la intervención se prueban conjeturas acerca de la evaluación del razonamiento de los profesores y los medios que lo propiciaron, tal como las actividades de generalización inductiva implementadas.

Para la realización de la investigación, se consideraron las tres etapas de Nieveen y Folmer (2013), antes referidas. Así, el estudio del cambio cognitivo docente se estructuró en las etapas y los objetivos siguientes:

A. Diagnosticar el razonamiento inductivo de un grupo de profesores de matemáticas de secundaria al intentar generalizar y respecto a su sensibilidad didáctica.

B. Promover el razonamiento inductivo en los profesores en la resolución de una actividad de generalización y el reconocimiento de procesos inductivos en la estructura de las tareas de la actividad.

C. Evaluar en qué medida se produjo un cambio cognitivo y la sensibilización didáctica en los profesores respecto al razonamiento inductivo.

Este estudio se realizó en la modalidad de un *Experimento de enseñanza*, específicamente, de *Desarrollo del profesor*.

## 4.3. Experimentos de Enseñanza y de Desarrollo del profesor

El *Experimento de enseñanza* es un tipo de investigación de diseño, que se ubica en la categoría de estudios para el desarrollo de teoría. Se basa en el establecimiento de hipótesis o conjeturas teóricas provisionales sobre el aprendizaje de estudiantes o profesores, las cuales pueden ser verificadas o declinadas de manera empírica, mediante la configuración e implementación de diseños instruccionales (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

### 4.3.1. Características de un experimento de enseñanza

Los experimentos de enseñanza comparten las características de los estudios para el desarrollo de teoría, empero se centran particularmente en examinar cómo progresa el razonamiento de las personas en contextos de enseñanza. Las características de estos experimentos son:

a. El objetivo de esta metodología es experimentar el aprendizaje matemático y el razonamiento de estudiantes, o profesores en el caso que nos ocupa, en el contexto de episodios reales de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000). Se orienta al establecimiento de principios de diseño o al desarrollo de modelos sobre formas específicas de aprendizaje y razonamiento.

b. Se centran en procesos de aprendizaje de un contenido específico y la forma en que se desarrolla el razonamiento de estudiantes y profesores. Es decir, se enfocan en examinar cómo ellos explican, desarrollan y justifican su razonamiento, con sus compañeros de clase o pares, al resolver situaciones matemáticas (Steffe & Thompson, 2000; Pape & Bell, 2003).

c. La investigación y el diseño instruccional se basan en perspectivas sociales del aprendizaje, en las cuales el aprendizaje es concebido como un proceso cognitivo del individuo y como un proceso social de un grupo (Cobb, 2000). Por ello, los experimentos se realizan mediante el diseño de trayectorias o experiencias de aprendizaje que propicien el desarrollo del razonamiento, la interacción social y la participación en actividades en el aula, a través de tareas matemáticas caracterizadas por una demanda fuerte de estrategias para su solución.

d. El experimento consta de un ciclo continuo con un "refinamiento progresivo" (Molina, Castro y Castro, 2007). Este ciclo inicia con el establecimiento de hipótesis o conjeturas sobre el problema a abordar y un proceso específico de aprendizaje, seguido del diseño de una intervención en el aula, su puesta en práctica, análisis y el diseño de nuevas intervenciones. Las conjeturas son refinadas o reformuladas tras el análisis de cada intervención para el diseño de un nuevo episodio de enseñanza y, de manera global, al final del experimento mediante un análisis retrospectivo. Esto permitirá explicar cómo y porqué funciona el diseño (Cobb et al., 2003).

e. Ruptura de la diferenciación entre profesores e investigadores (Molina et al., 2011). Cada episodio incluye un agente de enseñanza, los sujetos bajo investigación (estudiantes/profesores), un observador de los episodios de enseñanza y los medios para el registro de lo acontecido en cada episodio (Engelhardt, Corpuz, Ozimek, & Rebello, 2004). El *agente de enseñanza* o instructor es una persona del grupo de investigación, quien participa en el contexto de enseñanza de acuerdo con los objetivos de aprendizaje e interactúa con los estudiantes para comprender lo ocurrido en el proceso de enseñanza aprendizaje a partir de su vivencia (Molina et al., 2011). La función del *observador* es ayudar al instructor a entender a los estudiantes y el proceso mediante una visión más objetiva de las interacciones en cada episodio de enseñanza (Engelhardt et al., 2004). En particular, los experimentos de desarrollo del profesor involucran a investigadores, formadores de profesores y profesores en activo en sesiones de un programa de desarrollo profesional (Valverde, 2014).

### *4.3.2. Fases para el desarrollo del experimento*

Los experimentos de enseñanza se desarrollan mediante un ciclo de investigación que conjuga la planeación y desarrollo de un diseño instruccional, basado en conjeturas teóricas provisionales sobre algún proceso de aprendizaje, y el análisis continuo de las actividades y eventos en el aula, el cual es guiado por un marco interpretativo emergente (Cobb, 2000).

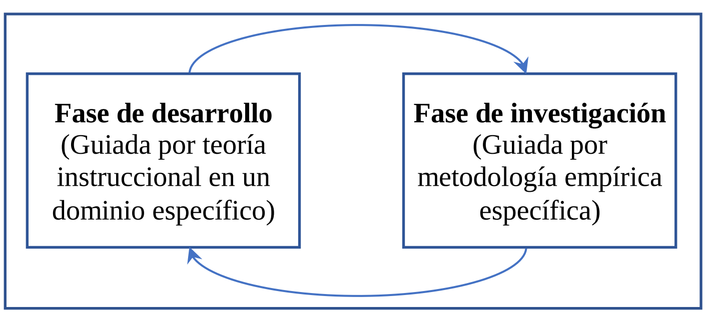



**Figura 4.1.** Aspectos del ciclo de investigación en estudios de desarrollo.
Fuente: Cobb (2000, p. 315).

El ciclo comienza con la planeación y puesta en escena de actividades de aprendizaje; y continua con un análisis de lo sucedido en la implementación de cada actividad, el cual proporciona información para planear la siguiente. Estos análisis continuos y uno retrospectivo de la experimentación completa de la secuencia de actividades, permiten reafirmar, refinar o refutar las conjeturas para el desarrollo de teoría sobre el proceso de aprendizaje. Y de nuevo se regresa al punto de partida del ciclo, pues este conocimiento teórico generado informa para la mejora del diseño instruccional (Cobb, 2000; Molina et al., 2011).

La conducción de un experimento se realiza mediante tres fases (Bakker y Van Eerde, 2015): (1) preparación del experimento y diseño instruccional; (2) ejecución del experimento; y (3) análisis retrospectivo de lo sucedido en la experimentación. A continuación se describe cada fase y se indican las acciones para llevarlas a cabo. Estas acciones se determinaron con base en una integración y adaptación de las referidas en Molina et al. (2011) y Valverde (2014).

***Fase 1: Preparación y diseño***

La preparación del experimento inicia con la delimitación de objetivos de aprendizaje y la intención teórica de la investigación, es decir, cuál es el objeto del estudio. A su vez, esto supone que el los investigadores conceptualicen cómo se llevará a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje para la consecución de tales objetivos, con base en las ideas que soportan los procesos de aprendizaje en algún dominio específico de conocimiento según la literatura especializada en el tema (Cobb, 2000). Por ejemplo, la noción de distribución para la comprensión de medidas de tendencia central en estadística o la idea de variación para el estudio del Cálculo.

En esta fase también se formulan conjeturas sobre los elementos cognitivos y sociales que darán lugar a posibles formas de aprendizaje. Según Cobb et al. (2003), en algunos casos, estas conjeturas pueden establecerse con base en la literatura, pero cuando se dispone de poca o insuficiente investigación sobre un tema, se necesita realizar un estudio piloto para entender más a fondo la problemática y los procesos de aprendizaje asociados, e incluso podría ser útil para identificar aspectos del razonamiento de los estudiantes y desarrollar nuevos métodos de evaluación.

Para elaborar el diseño instruccional se requiere configurar una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* (HLT, por sus siglas en inglés), tener en cuenta lo mencionado en los dos párrafos anteriores. Las HLT son descripciones del pensamiento y aprendizaje de los participantes en un dominio matemático específico, las cuales involucran conjeturas sobre cómo evolucionarán, así como un conjunto de tareas diseñadas con la intención de detonar procesos mentales y acciones para desarrollar progresivamente sus niveles de pensamiento (Clements & Sarama, 2004). Así, una HLT se compone de tres elementos: el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y el proceso de pensamiento y aprendizaje en el que estarían involucrados los participantes (Simon, 1995).

Clements y Sarama (2004) establecen que para determinar una forma de hacer progresar el desarrollo del pensamiento de los participantes, es necesario emplear modelos con fundamento teórico y empírico sobre el pensamiento, aprendizaje y desarrollo de niños y adultos (Clements & Sarama, 2004), a fin de especificar los procesos involucrados para alcanzar el objetivo de aprendizaje. Asimismo, señalan que las actividades de aprendizaje se componen de tareas claves diseñadas para promover el aprendizaje y llegar a niveles superiores de pensamiento. Estas tareas deben estar secuenciadas y favorecer que los participantes apliquen, externa y mentalmente, las acciones correspondientes al nivel de pensamiento establecido como meta.

En síntesis, se indican a continuación las acciones a seguir en la fase de preparación del experimento y diseño (Molina et al., 2011; Valverde, 2014):

- Definir el problema de investigación
- Justificar el interés y la necesidad de realizar este estudio
- Identificar los objetivos concretos de la intervención por realizar.
- Describir y justificar la elección de los participantes en el estudio.
- Diseñar la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización de manera justificada.
- Identificar metodologías de enseñanza adecuadas para el contenido a abordar en el aula, según los objetivos de investigación planteados.
- Elaborar hipótesis de investigación relativas al problema en estudio, que puedan ser contrastadas a partir de las intervenciones en el aula.

- Intentar prever las posibles reacciones de los participantes y las dificultades que puedan presentarse.
- Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.
- Diseñar la recolección de datos.

***Fase 2: Ejecución del experimento***

Esta segunda fase del experimento de enseñanza consiste en su ejecución a través de la implementación de las actividades para la intervención en el aula, así como de la realización de *análisis continuos* (Molina et al., 2011), sesión tras sesión, para revisar y efectuar los ajustes que se consideren pertinentes en las actividades de la siguiente intervención y en su caso, se reformulan las conjeturas establecidas en la primera fase del experimento. Las acciones para la ejecución, son:

- Implementar las actividades de la intervención y recolectar los datos de lo acontecido en la sesión mediante grabaciones de audio, hojas de trabajo, notas del observador, etc.
- Modificar el diseño de la intervención si fuera necesario según el objetivo de la misma.
- Analizar los datos recolectados en la intervención.
- Revisar y, en su caso, reformular las conjeturas de la investigación a partir de contrastarlas con los resultados obtenidos en cada intervención.
- Ajustar el diseño de cada intervención con base en la información empírica obtenido en la realizada previamente.

***Fase 3: Análisis retrospectivo***

Esta fase consta de un ***análisis retrospectivo*** global de los datos del experimento, en el cual se contrasta la trayectoria hipotética con el aprendizaje observado (Molina et al., 2011). Las acciones para realizar este tipo de análisis, son:

- Organizar todos los datos recolectados.

- Analizar los datos para identificar la ruta conceptual o de razonamiento seguida por el grupo y por cada participante, considerando los cambios en cada uno y las acciones o situaciones que contribuyeron a tales cambios.

Según Cobb, Jackson y Dunlap (2015), formar una argumentación que relacione los datos con el análisis y del análisis con las afirmaciones finales en investigaciones de diseño, involucra los siguientes pasos:

- Mostrar que los sujetos desarrollaron formas particulares de razonamiento matemático, y que fue por su participación en el experimento.
- Documentar cómo emergió cada forma sucesiva de razonamiento.
- Identificar los aspectos específicos del entorno de aprendizaje en el aula que fueron necesarios, más que contingentes, para apoyar el surgimiento de estas formas de razonamiento.

El **Experimento de Desarrollo del Profesor** (TDE, por sus siglas en inglés) comparte las características esenciales y fases antes descritas de un experimento de enseñanza, pero se distingue por utilizarse específicamente para promover y estudiar el desarrollo del conocimiento o el razonamiento matemático de profesores en formación o en servicio (Simon, 2000). Además, a diferencia de los experimentos de enseñanza que se enfocan principalmente en el conocimiento matemático, los TDE se centran en indagar el conocimiento didáctico y otros aspectos relativos al desarrollo del profesor (Valverde, 2014).

Para nombrar esta clase de experimento de enseñanza, Simon (2000) emplea el término *desarrollo del profesor* en el sentido de *desarrollo profesional*, es decir, refiriéndose a: "los cambios en el conocimiento, las creencias, disposiciones y habilidades que apoyen el incremento de la capacidad de los profesores para implementar con éxito los principios de la reforma actual de la educación matemática" (p. 335). De acuerdo con este autor, en los TDE se busca fomentar el desarrollo del profesor al tiempo que se estudian y comprenden los procesos de este desarrollo. De manera que, cada intervención con los profesores es seguida por un análisis de sus actuaciones en las sesiones del experimento, y cada sesión de análisis conduce a la configuración de la próxima intervención (Tzur, Simon, Heinz & Kinzel, 2001).

El TDE en este trabajo tuvo como objetivo: promover y analizar el cambio cognitivo de profesores de matemáticas de secundaria respecto a su razonamiento inductivo. El experimento consistió en el diseño e implementación de actividades de generalización de lo cuadrático, de manera que al tiempo que se buscó propiciar el desarrollo del razonamiento de los profesores, se examinó cómo ocurre el cambio cognitivo y en qué medida favorece que rediseñen una actividad. Con tal intención, se establecieron supuestos teóricos sobre los procesos inductivos que los profesores requerían conectar y asimilar para llegar a generalizar, los cuales se contrastaron con la evidencia empírica obtenida en cada sesión de ejecución del experimento. Para el establecimiento de estos supuestos, se examinó previamente la forma en que un grupo de profesores conectan procesos subyacentes al razonamiento inductivo para generalizar con éxito y la naturaleza de las dificultades que enfrentaron quienes no lo lograron. Estos resultados se presentan en el Capítulo 5.

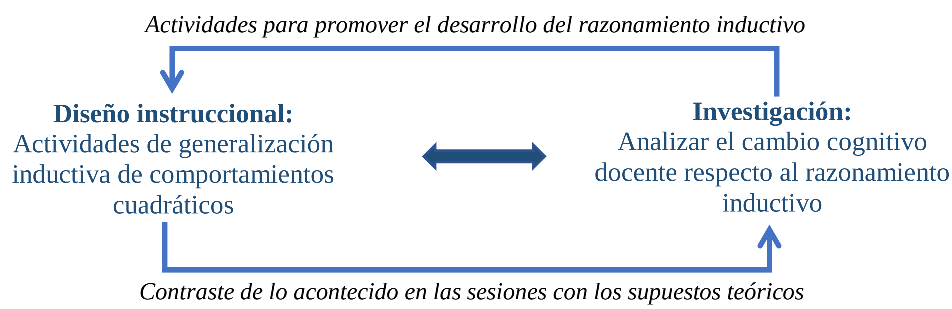



**Figura 4.2**. Esquema general del TDE respecto al razonamiento inductivo.

## 4.4. Categorías y métodos de análisis de datos

El objeto del estudio es el *cambio cognitivo docente* en relación con el razonamiento inductivo. Este cambio se analizó tanto a *nivel personal* como a *nivel de la actividad profesional docente*, bajo el supuesto de que es resultado de un proceso de aprendizaje e implica la transacción del conocimiento y la experiencia adquirida por los profesores en este proceso a sus acciones profesionales (Fraser, Kennedy, Reid, & Mckinney, 2007).

En el nivel personal la atención se centró en entender el tránsito de un estado inferior a uno superior en el razonamiento inductivo de los profesores; a nivel de la actividad profesional, el interés estuvo específicamente en examinar si una evolución en el razonamiento de los profesores se transfiere a la acción de rediseñar adecuadamente una actividad de generalización, mediante una mejor percepción del papel de la inducción en el aprendizaje y de los procesos subyacentes. Por tanto, de acuerdo con el objetivo y el marco teórico de la investigación, para el TDE se determinaron como categorías de análisis de los datos: el *cambio cognitivo* y la *sensibilidad didáctica* respecto al razonamiento inductivo.

El *cambio cognitivo* se ha definido previamente como la transformación de un estado inferior a otro superior en el desarrollo de un proceso cognitivo. De manera que, la variable en esta categoría son los *estados* de desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores. Estos estados se determinaron con base en los procesos inductivos descritos en el marco de referencia (Capítulo 2), estos son: *observación de regularidades*, *establecimiento de un patrón* y *formulación de una generalización*. Así, por ejemplo, se determinó que el estado de razonamiento inductivo de un profesor al resolver una tarea de generalización estaba en el nivel de observar regularidades, si solamente lograba percibir similitudes o relaciones invariantes entre casos particulares, pero no llegaba a establecer un patrón. Por lo que, el tránsito de la observación de regularidades al establecimiento de un patrón fue reconocido como un cambio cognitivo en su razonamiento.

La descripción del cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores se realizó con base en las dimensiones establecidas por Siegler (2006): *trayectoria, tasa, amplitud, variabilidad* y *fuente* del cambio. Para el análisis de los datos concernientes a esta categoría, se empleó el método del *análisis microgenético*.

La *sensibilidad didáctica* al razonamiento inductivo se refiere a la capacidad para percibirlo como una forma de enseñanza y un medio para la generalización en matemáticas. Esta fue medida en términos de la percepción que tienen los profesores sobre qué es el razonamiento inductivo y los procesos cognitivos asociados para resolver y estructurar una actividad de generalización razonando de manera inductiva. Para analizar la sensibilidad didáctica como mediadora para que el cambio cognitivo se transfiera a la acción de rediseñar una actividad de generalización, se identificaron los criterios que los profesores utilizaron para ello.

Con la intención de evitar que otras variables didácticas o conocimientos de los profesores pudieran interferir de alguna manera en los criterios que emplearían al rediseñar la actividad, se decidió que el rediseño sea relativo a la estructura de la actividad. Este consistió en ordenar las tareas de una actividad de generalización de un patrón cuadrático con base en la estructura del razonamiento inductivo, es decir, de lo particular a lo general y teniendo en cuenta los procesos inductivos necesarios para generalizar. Además, ellos podían modificar, complementar o eliminar alguna tarea.

Los datos relativos a la *sensibilidad didáctica* se recolectaron en tres momentos. El primero fue antes de la implementación de una actividad para promover el desarrollo de este razonamiento en los profesores, a fin de detectar su percepción inicial sobre lo inductivo y de qué manera lo interpretan para la enseñanza de un concepto matemático. El segundo, después de dicha actividad, para reconocer qué acciones o procesos subyacentes al razonamiento inductivo asimilaron tras su resolución. El tercero, cuando se les solicita a los profesores rediseñar la actividad de generalización y enunciar los criterios que emplearon; esto se hizo para identificar cuáles de los procesos inductivos toman en cuenta en la acción de rediseño.

Estos datos se registraron con base en el discurso escrito y oral de los profesores, a través de las respuestas escritas dadas a cuestionarios y de las grabaciones de audio del diálogo con ellos sobre sus respuestas. Para analizar estos datos y caracterizar la sensibilidad didáctica los participantes en el estudio, se utilizó el método del análisis temático. La razón de la elección de este método fue identificar patrones de significados en las características y procesos en común que el colectivo de profesores asociaron al razonamiento inductivo, así como los criterios compartidos y diferentes que consideraron en el rediseño de la actividad.

### 4.4.1. Análisis microgenético

Un método para observar el cambio cognitivo, sus mecanismos y la forma en que se produce es el análisis microgenético (Catán, 1986; Siegler y Crowley, 1991; Siegler, 1995). Este método consta de una serie de ensayos de los participantes sobre la misma o similares tareas y circunstancias, para acelerar el proceso de cambio y observarlo de cerca a medida que se produce (Bermejo, 2005; Flynn, Pine & Lewis, 2006). Puche y Ossa (2006) señalan que la observación, tanto de las variaciones como de las consistencias, en los procesos de resolución de las tareas, proporciona información sobre el funcionamiento mental de los participantes y, por tanto, del cambio.

El método microgenético se enfoca en los procesos de desarrollo cognitivo y en los contextos específicos donde se desarrollan estos procesos (Ortiz, 2014), tal como el razonamiento inductivo de los profesores, con atención en las acciones que realizan los participantes durante la transición de la capacidad o proceso a desarrollar. Según Siegler (2006), los procesos de cambio "solo pueden inferirse a partir de observaciones del comportamiento en diferentes puntos en el tiempo" (p. 86). Se emplea para estudiar cambios en un individuo o en grupos de participantes, los cuales pueden ser espontáneos o facilitados (Flynn et al., 2006).

La microgénesis estudia los cambios cognitivos en plazos relativamente cortos (semanas o meses), y la examinación de la transición para identificar los mecanismos del cambio se basa en los tres principios siguientes (Calais, 2008, p. 3):

i. Los investigadores observan a los participantes a lo largo de un período de cambio en el desarrollo, y los participantes operan como la unidad básica de análisis. Los análisis deben incorporar descripciones cualitativas y cuantitativas del cambio (Siegler, 2006).
ii. Las observaciones no solo se realizan antes y después de que ocurra un cambio; más bien, los períodos caracterizados por un cambio rápido en un dominio específico se observan antes, durante y después de que ocurra dicho cambio.
iii. La densidad de las observaciones debe ser alta en relación con la tasa de cambio, es decir, los intervalos de tiempo de las observaciones deben ser significativamente más cortos que los intervalos de tiempo necesarios para un cambio en el desarrollo.

Respecto al tercer principio, en los estudios con análisis microgenéticos, la "densidad de observaciones" ha tenido dos interpretaciones. Para Siegler y Crowler (1991) significa una gran cantidad de ensayos de un experimento para analizar cambios particulares en cierto momento. En cambio, desde una perspectiva instruccional y de aprendizaje, es interpretado por Kuhn (1995) en términos de "densidad de la experiencia", esto es, las oportunidades para activar las estrategias o procesos cognitivos que suscitarán y permitirán analizar el cambio de un periodo de tiempo de semanas o meses (Bermejo, 2005). En este trabajo, se consideró la densidad de observaciones en el sentido de Kuhn.

En general, se tiene como regla del método que: “cuanto mayor sea la tasa de cambio del fenómeno en las condiciones experimentales, mayor será la densidad de las observaciones” (Siegler, 2006, p. 21). En ese sentido se suele hacer una compensación entre la cantidad de participantes y la cantidad de sesiones en relación con la densidad de observaciones; mientras mayor sea el número de sesiones, menor será el de participantes. Asimismo, si la densidad de observaciones es alta, el número de participantes, de sesiones o ambos tiende a ser pequeño.

En el proceso de transición del cambio, el análisis microgenético permite identificar saltos repentinos, regresiones y periodos de equilibrio, proporcionando información sobre cómo el conocimiento o la capacidad de una persona progresa de un nivel a otro, a menudo a un nivel más sofisticado (Flynn et al., 2006). Para la realización del análisis, deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones (Siegler y Crowley, 1991):

a) Las observaciones deben abarcar todo el período del cambio, desde el principio hasta el momento en que se alcance una relativa estabilidad.
b) La densidad de observaciones debe ser alta en relación con la tasa de cambio.
c) Hacer un análisis, ensayo por ensayo (o sesión por sesión), del comportamiento observado con el objetivo de inferir los procesos que dan lugar a los aspectos cuantitativos y cualitativos del cambio. Para esto, se registra el desempeño de los participantes en grabaciones de audio o video, se transcriben las declaraciones verbales y se clasifica cada ensayo con respecto al enfoque empleado por cada participante en la tarea.

La operatividad del análisis microgenético en esta investigación se realizó de la siguiente manera:

- Como parte del experimento de enseñanza, se observó el cambio cognitivo de los profesores al resolver tareas que demandaban razonar inductivamente para generalizar. Con tal objetivo, en las actividades del Experimento de Desarrollo del

Profesor se proporcionaron tareas para analizar el cambio en su razonamiento en los siguientes momentos:

i. *Antes del cambio*: Tarea de diagnóstico del estado de razonamiento inductivo (Actividad II), que consistió en la generalización de un patrón cuadrático en un contexto de variación discreta.
ii. *Desarrollo del razonamiento para propiciar el cambio cognitivo*: Tareas de la Actividad III: "Secuencias de figuras y números".
iii. *Integración*: Tarea de la Actividad IV, que tuvo como propósito reforzar la asimilación de los procesos inductivos por parte de los profesores.
iv. *Después del cambio -evaluación*: Tareas de la Actividad V, las cuales tienen la misma estructura que la tarea de diagnóstico, pero se sitúa en un contexto de variación continua.

- En cuanto a la densidad del cambio, se realizaron cinco sesiones con frecuencia de cada quince días durante tres meses aproximadamente (octubre a diciembre de 2017). En cuatro de estas sesiones, se trabajaron las tareas directamente relacionadas con el cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores.

- Se analizaron las acciones de los profesores en cada tarea y, a partir de los registros escritos de sus soluciones y grabaciones de audio, se llevaron a cabo mediciones cuantitativas y cualitativas de su desempeño en cada una. Esto es, se observaron los procesos inductivos movilizados por los profesores en la resolución de cada tarea y se registró la frecuencia de cada proceso por tarea. Para analizar el cambio cognitivo en los profesores y describirlo, se compararon los datos así obtenidos entre una tarea y otra. Fue de esta manera que se realizó el análisis retrospectivo del Experimento de Desarrollo del Profesor, correspondiente a la categoría "cambio cognitivo".

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el cambio cognitivo se puede analizar respecto a cinco dimensiones: trayectoria, razón, amplitud, variabilidad y fuente (Siegler, 2006). Particularmente para describir la trayectoria del cambio (secuencia de estados, representaciones o comportamientos que se usan predominantemente en la transición), se requiere identificar los aspectos cuantitativos y cualitativos que describen cómo ocurre a través del aprendizaje (Siegler, 2006). En relación con ello, un referente a definir para informar sobre el cambio cognitivo, son los estados actual y potencial de desarrollo de los participantes antes de la implementación de una experiencia de aprendizaje (Bermejo, 2005). En este trabajo, estos estados se determinaron a partir de una tarea de diagnóstico del razonamiento inductivo de los profesores. El estado actual de razonamiento de la mayoría de los profesores se ubicó en la *observación de regularidades*, por lo que se consideró que el estado potencial de desarrollo sea la *formulación de una generalización*.

### 4.4.2. Análisis temático

El análisis temático es un método para identificar, analizar, organizar y obtener sistemáticamente patrones (temas) en un conjunto de datos (Braun & Clarke, 2006). Permite al investigador notar y dar sentido a las experiencias y los significados compartidos o colectivos en un grupo de personas, dado que ofrece una manera de identificar las características o atributos comunes en la forma en que se habla o se escribe acerca de un tema (Braun & Clarke, 2012). Con este método se reconocen patrones de significado que son importantes en relación con el tema específico y la pregunta de investigación a responder, mediante la codificación y el análisis de datos cualitativos de forma sistemática.

Por lo anterior, el método se empleó para identificar patrones de significado en las características y procesos comunes que el grupo de profesores atribuye al razonamiento inductivo. Los resultados del análisis se utilizaron para responder la segunda pregunta de investigación: ¿Qué caracteriza la sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo asociada al cambio cognitivo en los docentes?

De acuerdo con Braun y Clarke (2006), los patrones en los datos se identificaron de manera inductiva, de modo que el análisis fue conducido por los datos en sí mismos, sin tratar de ajustarlos a un marco preexistente de codificación o preconcepciones analíticas del investigador. Estos autores señalan que la mecánica del análisis involucra un ir y venir entre todo el conjunto de datos, los extractos codificados y el análisis de los datos que se está produciendo. El análisis temático de los datos proporcionados por los profesores se llevó a cabo según las seis fases descritas por Braun y Clarke (2012):

### *Fase 1: Familiarizarse con los datos*

Esta fase involucra la inmersión del investigador en el conjunto de datos recolectados con el objetivo de estar familiarizado con la profundidad y amplitud del contenido y comenzar a notar cosas que podrían ser relevantes para la pregunta de investigación. Consiste en leer y releer cada uno de los datos textuales y escuchar las grabaciones de audio u observar videos más de una vez. Complementariamente, se toman notas sobre aspectos que podrían ser de interés. Estas ayudan a leer las palabras de forma activa, analítica y crítica, e ir pensando qué significan los datos.

Por consiguiente, en esta fase se leyeron una y otra vez las respuestas escritas y orales proporcionadas por los profesores sobre cuáles son las características del razonamiento inductivo, cómo sería la enseñanza de un concepto matemático con eje en la inducción y los criterios empleados en el rediseño de una actividad de generalización inductiva.

### *Fase 2: Generar códigos iniciales*

En esta fase empieza el análisis sistemático de los datos con la codificación. Los códigos proporcionan una etiqueta para una característica de los datos que es potencialmente relevante para la pregunta de investigación. Los códigos pueden ser semánticos o latentes de significado. Los primeros proporcionan un resumen conciso de una parte de los datos o describen el contenido de estos, y son cercanos a los significados de los participantes; los segundos, van más allá de los significados de los participantes y proporcionan una interpretación del contenido de los datos, algunos reflejan el lenguaje y los conceptos de los participantes y otros invocan marcos conceptuales o teóricos de los investigadores.

Para la codificación se marcaron extractos de las respuestas de los profesores y se escribieron códigos para abreviar o denotar características y procesos del razonamiento inductivo, así como aquello relevante para responder la segunda pregunta de la investigación relativa a la sensibilidad didáctica. Se realizó una lectura exhaustiva de cada dato, y se codificó cada dato antes de codificar otro. En cada extracto de los datos se decidía si se aplicaba un código ya asignado o si se asignaba uno nuevo. En algunos extractos de distintos profesores se aplicó el mismo código y las respuestas de algunos profesores tuvieron más de un código.

Para el proceso de codificación y definición de temas, en el análisis se utilizó el software MAXQDA (2018.2). En la Figura 4.3 se muestran el sistema de códigos generados sobre las características que inicialmente los profesores atribuyeron al razonamiento inductivo y en la Figura 4.4 se presentan algunos extractos de datos y el código asignado utilizando dicho programa.

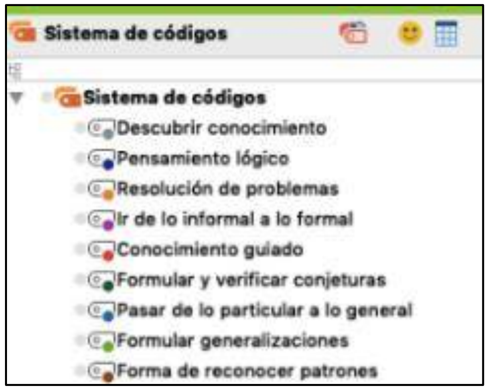



**Figura 4.3.** Codificación de las características del razonamiento inductivo con MAXQDA.

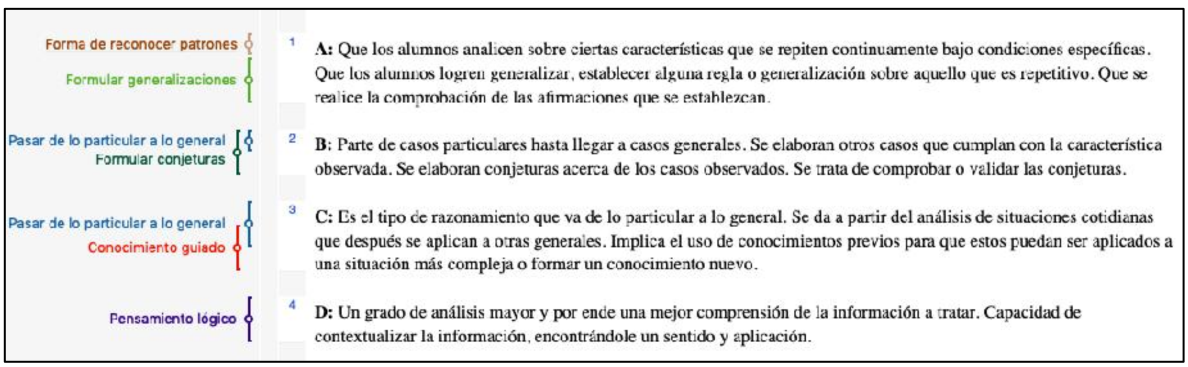



**Figura 4.4.** Algunos extractos de datos y códigos asociados con MAXQDA.

### *Fase 3: Buscar temas*

La búsqueda de temas involucra la agrupación de códigos que compartan alguna característica unificadora. Un tema representa algún patrón de respuesta o significado en los datos y se generan al captar algo importante sobre los datos en relación con la pregunta de investigación (Braun & Clarke, 2006). En la búsqueda se revisan los datos codificados para identificar áreas de similitud y superposición entre los códigos. En esta fase también se explora la relación entre los temas para determinar si pueden conjuntarse y contar una historia general sobre los datos. En esta parte del análisis, un tema puede apuntalar todos o la mayoría de los otros temas o bien, puede haber un tema variado que incluya aquellos códigos no claramente asociados a un tema provisional.

Esta fase se realizó agrupando los códigos cuyos extractos compartían palabras, características similares o aludían a procesos comunes del razonamiento inductivo. Por ejemplo, se consideró el tema provisional “conocimiento guiado”, en el cual se agruparon extractos de respuestas con expresiones comunes referentes al uso de conocimientos previos por parte de los estudiantes y preguntas guía (Figura 4.5), que algunos profesores señalaron como características del razonamiento inductivo al inicio del TDE.

| Color | Código | Final | Segmento |
|---|---|---|---|
| ● | Conocimiento guiado | 3 | Implica el uso de conocimientos previos para que estos puedan ser aplicados a una situación más compleja o formar un conocimiento nuevo. |
| ● | Conocimiento guiado | 5 | Emplea los saberes previos del alumno. |
| ● | Conocimiento guiado | 6 | Utiliza los conocimientos previos de los alumnos. |
| ● | Conocimiento guiado | 12 | Darle un ejercicio y con base a sus conocimientos previos saquen su propio conocimiento. Realizar una lluvia de ideas para conocer lo que el alumno sabe. |
| ● | Conocimiento guiado | 13 | Se piensa en ello como parte de un conocimiento guiado |
| ● | Conocimiento guiado | 16 | Preguntas introductorias. Logran el razonamiento inicial de los alumnos al tema y pueden visualizarse los conocimientos previos. Preguntas guía. Durante el proceso de la clase pueden surgir dudas sobre cómo llevar a cabo alguna parte y pueden realizarse preguntas que fuercen el razonamiento del alumno. Con el razonamiento inductivo se puede lograr que el alumno se apropie de conceptos, momentos, procedimientos personales. Al guiar con preguntas se movilizan saberes y recuerdos previos y se propician deducciones propias que les son más fáciles de apropiarse. |

**Figura 4.5.** Agrupación de códigos en un tema provisional.

### *Fase 4: Revisar temas potenciales*

Consiste en un proceso recursivo de revisión de los temas en desarrollo, en relación con los datos codificados y el conjunto de datos completo. Es una fase de control de calidad del análisis, pudiendo dar lugar a la creación de temas adicionales, a la modificación o descarte de algunos existentes, y a la división de un tema amplio en otros más específicos. Las preguntas claves a seguir para la revisión de temas potenciales son:

- ¿Este tema es clave o podría ser solo un código?
- Si es un tema, ¿cuál es la calidad de este tema? Se refiere a si el tema dice algo útil sobre el conjunto de datos y la pregunta de investigación.
- ¿Cuáles son los límites de este tema (qué incluye y qué excluye)?
- ¿Hay suficientes datos (significativos) para apoyar este tema?
- ¿Los datos son demasiado diversos y de amplio rango? Si fuera así, el tema podría carecer de coherencia.

Siguiendo el método, en esta fase se verificó que cada tema funcionara (es decir, que represente un patrón de significado o captura una característica unificadora) en relación con los extractos de datos asociados y, en caso contrario, se descartaron códigos o reubicaron bajo otro tema. Posteriormente, se revisaron los temas en relación con todo el conjunto de datos para determinar si capturan los aspectos más relevantes y la globalidad de los datos.

### *Fase 5: Definir y nombrar temas*

En la definición de un tema se describe lo que es específico de cada uno de manera sintética. Cada tema debe tener un enfoque, alcance y propósito claro; y juntos proporcionar una historia general coherente de los datos. Después de definirlo, se nombra el tema con un título corto que sea conciso e informativo de lo que se trata en este.

Para definir un tema se presentan y analizan los extractos que muestran su cobertura, con el objetivo de buscar un patrón de significado en las características relevantes de cada extracto. Para ello se requiere hacer dos tipos de análisis: uno descriptivo, en el que los datos se usan de manera ilustrativa del tema; y otro conceptual, en el que se interpreta el contenido de los extractos para encontrar significados latentes. Al definir y nombrar un tema se proporciona una narración analítica de algún extracto que lo ilustre, indicando qué es interesante en su contenido y porqué.

Esta fase implica un trabajo analítico profundo en el que los datos deben interpretarse y conectarse a la(s) pregunta(s) de investigación y al campo disciplinar donde se ubica el estudio. Según Braun y Clarke (2012), un buen análisis es aquel que tiene temas con un enfoque único o no abarcan demasiado, están relacionados pero no se traslapan y se dirigen a la pregunta de investigación.

### *Fase 6: Producir el reporte*

Comprende la redacción de un informe escrito u oral del análisis para un artículo o disertación. El informe debe proporcionar una historia convincente de los datos basada en el análisis y presentarse de manera argumentativa más que descriptiva. Por tanto, las afirmaciones que se realicen a partir de los datos deben estar justificadas y ajustarse a la posición teórica del trabajo.

Los resultados obtenidos del análisis temático de los datos en la categoría “sensibilidad didáctica, antes y después de la actividad para propiciar un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores, se utilizaron para describir la sensibilidad al razonamiento de los profesores y los criterios que emplearon para el rediseño de una actividad (Objetivo específico 2). Estos análisis ayudaron a conocer la percepción global de los profesores acerca del razonamiento inductivo en la enseñanza de las matemáticas, (particularmente para favorecer la generalización en sus estudiantes), qué procesos inductivos asimilaron durante el experimento y en cuáles de estos basaron sus criterios para el rediseño de una actividad. Así, para responder qué caracteriza la sensibilidad didáctica asociada al cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores, se realizó un análisis retrospectivo de los datos del TDE mediante la comparación de esos resultados.

# Capítulo 5

## Examinación del razonamiento inductivo de profesores de secundaria

Se examinó la forma en que profesores de matemáticas de secundaria razonan inductivamente para generalizar desde casos particulares. El interés estuvo en reconocer los procesos inductivos que conectan al generalizar (Sosa, Aparicio y Cabañas, 2019) y las dificultades presentes en los profesores en la generalización de patrones cuadráticos (Sosa, Cabañas y Aparicio, 2019b). Así, se indagó ¿Qué procesos del razonamiento inductivo usan profesores de secundaria para obtener la regla general de un patrón cuadrático? ¿Qué dificultades enfrentan los profesores para pasar de la observación de regularidades a la obtención de la regla general? Los resultados de este estudio se presentan de manera sintética con base en los artículos publicados antes citados, por lo que se recomienda consultarlos para mayor información sobre la fundamentación y los análisis realizados en los datos.

### 5.1. Participantes en el estudio

Este estudio se realizó con diecinueve profesores de matemáticas (9 mujeres y 10 hombres) de educación secundaria, quienes laboran en escuelas públicas de México. Ellos contaban con 5 a 20 años de experiencia docente y tenían formación para profesor en escuelas normales y otros con formación profesional en ingenierías, de modo que todos habían estudiado conceptos matemáticos tales como sucesiones, funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas. El criterio de selección de los profesores fue que tuvieran por lo menos un año de experiencia enseñando sucesiones y ecuaciones cuadráticas.

## 5.2. Instrumento para la recolección de datos

Obtener la regla general que describa el comportamiento de patrones cuadráticos, es uno de los objetivos del currículo matemático de educación secundaria en México (SEP, 2011), su enseñanza se aborda como parte del estudio de las sucesiones y ecuaciones cuadráticas en el tercer año de estudios (edades de 14 – 15 años), apoyada en el uso de tareas sobre patrones numéricos y figurales en los libros de textos oficiales. Considerando lo anterior, se diseñaron y aplicaron dos tareas que involucraban sucesiones de valores específicos, que crecían o decrecían con un comportamiento cuadrático, es decir, la variación entre las variables era lineal (Villa, 2008).

El objetivo de las tareas fue analizar los procesos inductivos que permiten a los profesores hacer generalizaciones de comportamientos cuadráticos de variables con éxito e identificar el tipo de dificultades que podrían enfrentar para alcanzar la generalización. Estas se diseñaron con base en la propiedad genérica de las tareas del razonamiento inductivo: "requerir que el individuo induzca una regla que gobierna un conjunto de elementos" (Glaser & Pellegrino, 1982, p. 200). Por tanto, cada una demandaba obtener la regla general de patrones cuadráticos a partir de casos particulares, y se requería razonar inductivamente para reconocer una relación funcional entre tales valores, la cual correspondía a una función polinomial de segundo grado.

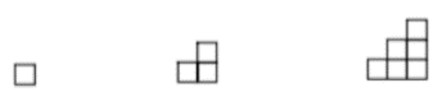
Los casos particulares podían ser expresados en los distintos sistemas de representación de las funciones polinomiales de segundo grado: verbal, numérico, gráfico, algebraico y pictórico (Cañadas y Castro, 2013), y la regla podía representarse ya sea de manera verbal o algebraica. De este modo, en la resolución de las tareas era posible utilizar diferentes sistemas de representación y no había solución única, de manera que las estrategias empleadas para pasar de los casos particulares a la obtención de la regla general, podían ser distintas e incluso, complementarias (Cañadas, Castro & Castro, 2009), por ejemplo, una estrategia basada en cálculos aritméticos y otra en el análisis visual de los casos particulares.

Tras la resolución de cada tarea, se realizaron entrevistas a los participantes para obtener información más detallada de los procesos de razonamiento que siguieron para generalizar desde los casos particulares considerados por ellos y la naturaleza de las dificultades que podrían presentar para producir generalizaciones. La Tarea 1 (T1) involucraba variables discretas y los profesores disponían del apoyo visual de casos particulares representados con figuras, y en la Tarea 2 (T2) se trataba con variables continuas y un contexto más abstracto. Por ello, se consideró que la primera tarea resultaría más propicia para examinar los procesos subyacentes al razonamiento inductivo de los profesores y la manera en que los conectan, y la segunda tarea permitiría profundizar en las dificultades.

### 5.2.1. Tarea 1: Construcción de escaleras de palillos

En la Tarea 1 se mostró una secuencia de figuras de escaleras de uno, dos y tres pisos, respectivamente, las cuales están formadas con palillos (Figura 5.1). La tarea consistía en inducir una regla para determinar la cantidad de pisos ($n$) que pueden formarse con cierta cantidad de palillos ($c$). Esta es una adaptación de la tarea de razonamiento inductivo propuesta por Cañadas, Castro y Castro (2009, p. 270), en la cual se pedía determinar la cantidad de palillos para la cuarta, quinta y sexta escalera. La adaptación consistió en solicitar la cantidad de pisos de una escalera formada por 180 palillos, en lugar de la cantidad de palillos. Además, tal escalera corresponde a un término lejano en la secuencia de figuras, para de ahí formular una regla general y evitar un pensamiento recursivo.

T1. Las siguientes figuras representan escaleras de uno, dos y tres pisos, formadas por palillos.



Determine cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.

**Figura 5.1.** Tarea 1 para la recolección de datos.

La tarea demandaba examinar el patrón asociado al número total de palillos en cada figura y determinar una relación funcional entre la cantidad de palillos en cada figura y su posición. Una forma en la que verbalmente podía expresarse el patrón era estableciendo que la cantidad de palillos en una figura corresponde al cuadrado del valor de la posición que ocupa, más el valor de dicha posición multiplicado por tres. Tal patrón también podría ser expresado mediante un arreglo numérico como los siguientes:

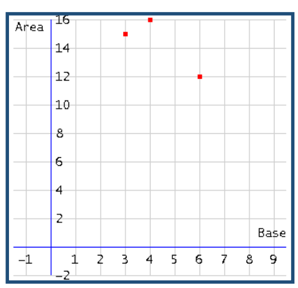
| $n$ | $c$ | $n$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $4 = 1 + 3(1)$ | 1 | $4 = 1(1 + 3)$ |
| 2 | $10 = 4 + 3(2)$ | 2 | $10 = 2(2 + 3)$ |
| 3 | $18 = 9 + 3(3)$ | 3 | $18 = 3(3 + 3)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Otra forma de proceder era que en lugar del número de la posición de la figura, se considerara el número de pisos como variable. En ambos procedimientos, los valores específicos de $n$ y $c$ constituyeron los casos particulares en la tarea, y la regla general podía expresarse algebraicamente con alguna de las siguientes formas u otra, dependiendo de la estructura subyacente al patrón: $c = n(n + 3)$; $c = n^2 + 3n$; $c = 4n + (n - 1)n$.

### 5.2.2. Tarea 2: Medida del área de rectángulos

En el planteamiento de Tarea 2, se mostraron tres puntos en un plano cartesiano (Figura 5.2). Los valores de las coordenadas de estos puntos representan la medida de la base ($b$) y del área ($A$) de tres rectángulos. La tarea consistió en inducir una regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia a la que pertenecían dichos rectángulos. La característica de la familia de rectángulos era que el semiperímetro de cada uno mide ocho unidades.

T2. En la gráfica se representan las medidas de la base y el área de tres rectángulos de una familia de estos.




A partir de dicha información, genere una expresión algebraica para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de esa familia. Argumente detalladamente el proceso de solución.

**Figura 5.2.** Tarea 2 para la recolección de datos.

Los primeros casos particulares podían obtenerse de las coordenadas de los puntos dados en el plano cartesiano y representarse de manera verbal, numérica o geométrica. Las coordenadas de estos puntos son: (3, 15), (4, 16) y (6, 12). Las abscisas corresponden a los valores de la base (3, 4 y 6 unidades) de tres rectángulos de la familia y las ordenadas a las medidas de sus áreas (15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente). Asimismo, se podría utilizar la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$, con la intención de obtener los valores de las alturas $(h)$ de los rectángulos y trabajar con estos en los casos particulares.

La regla general podía inducirse a partir de reconocer un patrón entre los primeros casos particulares y determinar una relación funcional entre los valores de la base y del área de los tres rectángulos conocidos u otros. Por ejemplo, notar que los valores del área pueden descomponerse en dos factores multiplicativos (el valor de la base y la diferencia de 8 menos la base), como se muestra en la tabla siguiente:

**Tabla 5.1.** Patrón en los valores del área de los rectángulos de la Tarea 2

| Base | Área |
|---|---|
| 1 | $7 = (1)(7) = (1)(8-1)$ |
| 2 | $12 = (2)(6) = (2)(8-2)$ |
| 3 | $15 = (3)(5) = (3)(8-3)$ |
| 4 | $16 = (4)(4) = (4)(8-4)$ |
| 5 | $15 = (5)(3) = (5)(8-5)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

En caso de trabajar con las variables $b$ y $h$, un patrón a notar era que la suma de las medidas de la base y de la altura de la familia de rectángulos mide 8 unidades $(b + h = 8)$. La regla general para determinar el área de los rectángulos podía representarse de manera verbal o algebraica. Una expresión algebraica de la regla general es: $A = b(8 - b)$, con $0 < b < 8$.

## 5.3. Recolección y análisis de datos

Las tareas fueron respondidas de manera individual y por escrito, aproximadamente en un periodo de entre 20 a 30 minutos por cada una. La información fue recolectada por medio de las hojas de respuestas de los profesores. En cada tarea se les pidió mostrar y justificar su procedimiento completo de solución. Posterior al análisis de las hojas de respuestas, se entrevistó a los participantes con la intención de entender con mayor profundidad su proceso de razonamiento inductivo, desde el trabajo con casos particulares hasta la generalización y, dialogar sobre las dificultades enfrentadas para obtener la regla general. En la entrevista, se les solicitó explicar en voz alta el razonamiento seguido en su resolución. Finalmente, se les plantearon preguntas para que proporcionaran las razones de sus proposiciones o decisiones no argumentadas en sus respuestas. Toda la información se registró en audio y fue complementada con notas sobre aspectos relevantes del razonamiento de los participantes.

Se sabe que el razonamiento emerge o se produce cuando las representaciones de información que una persona posee acerca de una situación, son transformadas en otras formas de representación para expresar una conclusión (Stenning & Monaghan, 2004). De hecho, el razonamiento matemático requiere de representaciones mentales, verbales, visuales u otras para su desarrollo y comunicación (Dreyfus, Nardi & Leikin, 2012; Hiebert & Carpenter, 1992). Por tanto, las expresiones usadas por los participantes para expresar su razonamiento fueron analizadas bajo esta consideración con el fin de identificar y describir sus procesos inductivos. Al respecto, cabe reiterar que en las tareas, tanto los casos particulares como la regla general podían expresarse o representarse de forma numérica, geométrica, verbal o algebraica.

Las soluciones de los participantes fueron organizadas y analizadas en dos etapas. En la primera, se seleccionaron las soluciones que incluyen la expresión de una generalización, sea de manera verbal o algebraica. Las soluciones fueron organizadas en dos categorías, C1 y C2, según si la regla general fue obtenida o no en cada tarea, respectivamente. En la segunda etapa se analizaron y compararon los procesos de razonamiento presentes en la categoría C1. Esto para identificar similitudes y diferencias entre ellos en la generalización. Posteriormente se contrastaron los procesos identificados en C1, con las respuestas obtenidas en la categoría C2 para identificar el tipo de dificultades relacionadas con dichos procesos.

Para respetar el anonimato de los profesores, en la presentación de los resultados se hace mención a ellos usando las letras del alfabeto: Profesor A, Profesor B, etc. a modo de referencia. La distribución de las respuestas de los profesores en cada categoría quedó de la siguiente manera:

**Tabla 5.2.** Clasificación de las respuestas de los profesores por tarea

| Tarea (T) | C1 | C2 |
|---|---|---|
| T1 | A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y K | L, M, N, O, P, Q, R, y S |
| T2 | A, C, G e I | B, D, E, F, H, J, K L, M, N, O, P, Q, R, y S |

## 5.4. Procesos inductivos de los profesores para generalizar

Se identificó que de los 19 profesores, 11 obtuvieron la regla general en la Tarea 1 y 4 en la Tarea 2. Su razonamiento se caracterizó por seguir tres procesos: *observar una regularidad*, *establecer un patrón* y *formular una generalización*. En los profesores que no alcanzaron a determinar la regla general de los patrones cuadráticos, se detectaron problemas para transitar entre los tres procesos observados en sus compañeros. En la Tabla 5.3, se presenta la frecuencia de profesores que usaron cada proceso inductivo:

**Tabla 5.3.** Frecuencia de profesores por proceso inductivo en cada tarea

| Proceso inductivo | Tarea 1 | Tarea 2 |
|---|---|---|
| Observar una regularidad | 19 | 19 |
| Establecer el patrón | 11 | 5 |
| Formular una generalización | 11 | 4 |

A continuación se describen los procesos subyacentes al razonamiento inductivo de los profesores que alcanzaron a generalizar con éxito (profesores en la categoría C1). Para ilustrar y evidenciar cada proceso, se emplearon los datos de la Tarea 1 debido a que una mayor cantidad de profesores obtuvo la regla general en comparación con la Tarea 2.

### a. Observación de regularidades

La observación de regularidades fue el proceso inicial del razonamiento inductivo de los profesores. Este proceso consistió en comparar y buscar relaciones entre los casos particulares con base en sus características invariantes y diferentes. Se detectó la observación de regularidades tanto a nivel local como a nivel global. La *observación local* se concretó al establecer una relación entre un caso particular y otro; mientras que la *observación global* se dio con el reconocimiento de alguna característica común entre todos los casos particulares y las relaciones entre ellos.

Si bien todos los profesores observaron algún tipo de regularidad, aproximadamente la mitad de los profesores lo hicieron a nivel global, algunos mediante un tratamiento numérico y otros con apoyo de lo visual. De este modo, el uso de cálculos aritméticos y de la percepción visual, fueron elementos centrales en el proceso de observación de regularidades. En la Tarea 1, la observación de regularidades inició con la obtención de algunos casos particulares de las figuras dadas. Los profesores contaron de manera puntual: 4, 10 y 18 palillos en las escaleras de 1, 2 y 3 pisos, respectivamente. Luego organizaron esos datos numéricos en tablas o en arreglos de filas horizontales o verticales. La representación geométrica de los nuevos casos particulares, tal como la escalera de cuatro pisos, ayudó en la observación y verificación de regularidades.

Las regularidades locales que fueron observadas y tratadas numéricamente se expresaron de la manera siguiente:

i. la cantidad de palillos aumentaba de una escalera a la otra, con variación no constante y;
ii. las segundas diferencias entre esas cantidades son siempre iguales al valor 2.

La estrategia utilizada por la mayoría de los profesores para observar estas regularidades, consistió en el cálculo recursivo de diferencias entre las cantidades de palillos de cada figura y la anterior. Por ejemplo, el profesor A (C1-T1) calculó la cantidad de palillos de las escaleras de la cuarta, quinta, sexta posición, y así sucesivamente, etc., por medio del cálculo de las primeras diferencias entre las cantidades de palillos que forman las escaleras de 1, 2, 3 y 4 escalones, y así sucesivamente (Figura 5.3). Es decir, $10 - 4 = 6$, $18 - 10 = 8$ y $28 - 18 = 10$. Después, calculó las segundas diferencias y determinó que siempre se obtenía un valor constante e igual a 2. Posteriormente, aplicó operaciones inversas (sumas) para determinar el número de palillos que conforman a las siguientes escaleras en la secuencia de figuras: 40, 54, 70, ...

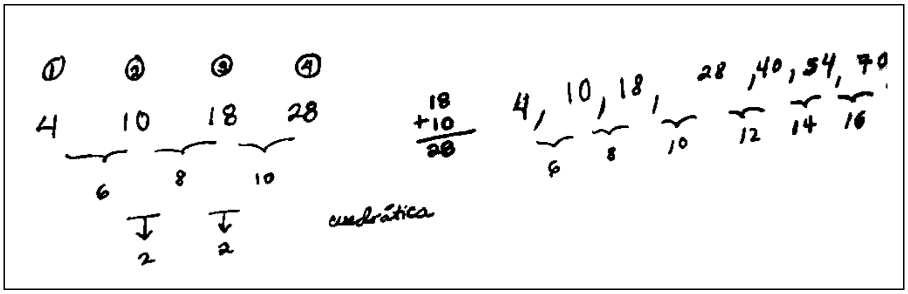


**Figura 5.3.** Organización de casos y observación local de regularidades por el profesor A (T1).

La observación de una *regularidad global* consistió en reconocer una relación entre varios casos particulares que describiera una característica invariante en todos ellos. Al respecto se detectaron tres tipos de regularidades observadas por los profesores en el comportamiento global del número de palillos en las figuras. Así, fue por medio de buscar relaciones multiplicativas y aditivas entre los valores numéricos de los primeros casos, que se logró ir más allá de una estrategia recursiva de cálculo de diferencias para centrarse en analizar el tipo de comportamiento creciente de los valores.

Una regularidad global observada por los profesores para describir el comportamiento del número de palillos fue que, en las primeras figuras, este número es igual al producto de dos números: el número de pisos y ese mismo número aumentado en tres. Así, el profesor B (C1-T1) observó esta regularidad al buscar una relación multiplicativa entre el número total de palillos en términos del número de pisos de las figuras en la primera, segunda y tercera posición de la secuencia (Figura 5.4).

*1) Conté el número de palillos en cada figura que formaba cada escalera:*

1 piso = 4 palillos
2 pisos = 10 palillos
3 pisos = 18 palillos

*2) Busqué alguna regularidad en el total de palillos, es decir, entre 4, 10 y 18. Lo primero que se me ocurrió fue descomponer en factores primos cada número de palillos, pero no lo hice porque decidí usar el número de pisos y tratar de relacionarlo con cada total de palillos.*

*3) De esta forma, busqué un número que al multiplicarlo por el número de pisos me diera como resultado el número de palillos que se usaron para construirlos.*

*4) Después de encontrar los números, las multiplicaciones quedaron:*

1 piso → $1 \times 4$
2 pisos → $2 \times 5$
3 pisos → $3 \times 6$

**Figura 5.4**. Proceso para observar regularidades globales por el profesor B (T1).

El profesor B describió su razonamiento durante este proceso como sigue:

> *[…] Pensando en que la incógnita del problema es el número de pisos que tiene la escalera o que se puede construir con 180 palillos, entonces pensé en que tenía forzosamente que utilizar el número de pisos de la escalera para encontrar alguna regularidad con los números del total de palillos. […] en el primer caso, un piso, traté de que aplicándole alguna operación con algún otro número obtuviera el número total de palillos. […] y dije voy a utilizar la multiplicación, y utilizando el número de pisos que es 1, busqué alguna cantidad para que resultara 4, y fue 4. Entonces hice lo mismo para el segundo caso, busqué algún número que al multiplicarlo por 2 resultara 10, y fue 5. Y en el tercer caso hice lo mismo, un número que al multiplicarlo por 3, que era el número de pisos, diera 18 como resultado, y fue 6. Entonces los anoté y vi que* $1 \times 4, 2 \times 5$ *y* $3 \times 6$ *dan como resultado los números del total de palillos.*

Los profesores que solo emplearon la estrategia recursiva en su resolución, hicieron una observación local de una regularidad, por lo que para determinar un nuevo caso particular, siempre dependían de conocer el anterior. Por consiguiente, su llegaron a observar alguna regularidad que englobara todos los casos particulares. Solamente lograron establecer el patrón cuadrático, quienes realizaron una observaron global de alguna regularidad, en contraste con quienes solamente hicieron una observación local.

### b. Establecimiento de un patrón

Se identificó que los profesores establecieron un patrón a partir de reconocer y asociar a las regularidades observadas, una estructura que describa y norma el comportamiento global de los casos particulares. Los profesores establecieron el patrón correspondiente al aumento del número de palillos en las figuras, al asociar y describir la regularidad numérica observada con una estructura cuadrática. Al identificar que las segundas diferencias en las cantidades de palillos por cada figura, eran siempre iguales al valor contante 2, reconocieron que los valores del número de palillos corresponden a una sucesión cuadrática o que pueden representarse con un modelo cuadrático. Entonces determinaron una relación funcional entre el número de palillos y el número de pisos (o el número de la posición de la figura), logrando reconocer un patrón cuadrático para luego obtener la regla general de la sucesión.

Una vez reconocido que el número de palillos en las figuras correspondían a valores de una secuencia cuadrática, el proceso para establecer el patrón consistió en conectar los casos particulares de manera global mediante relaciones aditivas y multiplicativas, y considerar si otros casos particulares, que no se presentaban en la secuencia original de figuras, satisfacían la relación encontrada. El patrón detectado por algunos profesores fue que el número de palillos es igual al producto del número de pisos y este número aumentado en tres unidades, tal fue el caso del profesor B (Figura 5.5). Se dice que este patrón es de tipo cuadrático, porque es el producto de dos cantidades con variación lineal. El proceso para establecer este patrón cuadrático consistió en hallar y utilizar una relación multiplicativa para determinar el número de palillos en función del número de pisos.

(a)

1 piso → $1 \times 4$
2 pisos → $2 \times 5$
3 pisos → $3 \times 6$

→ *Así que el número de pisos se multiplica por él mismo aumentado en tres.*

(b) *Ahora encontré que podía usar el dato del total de palillos para resolver la interrogante [de la tarea], modelando la regularidad que determiné:*

$1 \times (1+3)$
$2 \times (2+3)$
$3 \times (3+3)$
.
.
.
$n \times (n+3)$

**Figura 5.5**. Establecimiento del patrón con una estructura multiplicativa por el profesor B (T1).

El profesor B recurrió a representar el comportamiento global del número de palillos en distintos casos particulares mediante una estructura multiplicativa, según explicó:

> *[…] decidí buscar la regularidad entre los números que había multiplicado* (Figura 5.5-a) *por el número de pisos, entonces la regularidad entre esos números es que era el mismo número de pisos en cada caso pero aumentados en 3* (Figura 5.5-b). *Por ejemplo, en el caso uno, era el número de piso, que era 1, más 3, resultaba 4, que era el número que había encontrado para multiplicarlo con el 1 y que me diera el total de palillos (4). En el caso dos fue lo mismo, el número de piso era 2 y aumentado en 3 dio como resultado 5, y ese era el número que había utilizado para multiplicarlo por el número de piso y me dio el total de palillos. […] Hay un patrón porque puedo construir su comportamiento mediante una regla. Para encontrar el total de palillos voy a tomar el número de pisos y ese número lo voy a multiplicar por él mismo aumentado en tres.*

Se detectaron tres estructuras aritméticas en la representación que utilizaron los profesores para expresar el patrón cuadrático (Tabla 5.4): una estructura multiplicativa de dos factores lineales variables, una estructura aditiva formada por el cuadrado de una cantidad variable y un múltiplo de ésta; y una estructura aditiva que combina relaciones multiplicativas de una variable.

**Tabla 5.4**. Estructura general de los patrones establecidos por los profesores en la Tarea 1.

| | Estructura del patrón cuadrático | Descripción |
|---|---|---|
| a) | $a_n = pn^2 + qn$ | Relación aditiva del cuadrado de los valores de una variable y un múltiplo de estos valores |
| b) | $a_n = pn\left(n + \frac{q}{p}\right)$ | Relación multiplicativa entre dos factores lineales de una variable |
| c) | $a_n = pn(n+1) + (q-p)n$ | Yuxtaposición de relaciones aditivas y multiplicativas de una variable |

Observar en forma puntual o aislada los casos particulares y lo que en ellos se repite con regularidad, fue insuficiente para llegar a establecer el patrón. Los profesores que establecieron el patrón cuadrático, fueron quienes además reconocieron las relaciones matemáticas que describían el comportamiento de los valores en la situación.

## c. Formulación de una generalización

Un aspecto común evidenciado por los profesores que pasaron del establecimiento del patrón a la generalización, fue el descontextualizar o aislar el patrón de los casos particulares analizados y extenderlo a un conjunto que englobe una totalidad de casos. El proceso de formular una generalización consistió en abstraer una relación matemática invariante entre todos los casos de la tarea, por encima de percibir lo común entre casos particulares. Los profesores que alcanzaron la generalización concretaron este proceso con la obtención de una regla general para determinar el número de palillos de cualquier figura; esta regla fue expresada de manera verbal o algebraica. Ellos abstrajeron que aunque varíen la posición de la figura o el número de pisos, hay una manera general de determinar la cantidad de palillos en cualquier escalera.

Por ejemplo, el profesor B consideró que el número de palillos puede obtenerse en función del número de pisos ($n$), y enunció verbalmente la regla verbal como sigue: "*Para encontrar el total de palillos voy a tomar el número de pisos y ese número lo voy a multiplicar por él mismo aumentado en tres*". Con el propósito de determinar la solución de la tarea, este profesor también expresó la regla general de forma algebraica: $n \times (n + 3)$, y utilizó esta expresión para plantear y resolver la ecuación $n^2 + 3n = 180$ (Figura 5.6).

*Usé una igualdad para determinar el número de pisos:*

$$n(n+3)=180$$

*Al resolver la ecuación de segundo grado, obtengo dos soluciones:*

$$n_1=12 \qquad n_2=-15$$

*Elijo* $n = 12$, *ya que* $-15$ *pisos no sería posible.*
*Por lo tanto, se puede construir una escalera de* 12 *pisos con* 180 *palillos:*

12 pisos $\rightarrow (12)(12+3) = 12 \times 15 = 180$

**Figura 5.6**. Expresión algebraica de la regla general y solución dada por el profesor B (T1).

El profesor describió la formulación de la generalización como sigue:

*Noté que sí se cumplía la regularidad en los tres (primeros casos), y entonces decidí escribir de manera general esa regularidad. Llamé* $n$ *al número de pisos y escribí cada uno (el número de palillos) en términos de* $n$ *y resultaba que era* $n$ *por* $n+3$ *en los tres casos. Entonces lo mismo debería ser para el caso en que la escalera tuviera 180 palillos en total, y armé la igualdad:* $n$ *por,* $n$ *más tres, igual a 180* $[n(n+3) = 180]$ *y resultó una ecuación de segundo grado… Comprobé (la solución) con la regularidad que había encontrado en los números y efectivamente resulta 180.*

De acuerdo con los patrones cuadráticos establecidos por los profesores, también se identificaron otras dos expresiones algebraicas de la regla general, la primera (Figura 5.7-a) fue expresada en términos del número de la posición de la figura: $n^2 + 3n$; y la segunda (Figura 5.7-b) con base en el número de pisos: $n(n+1) + 2n$.

(a)

| 1 | 4 | 9 | 16 |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 |

*Cuadrado de posición*
*Múltiplo de 3*
*Múltiplo × posición*

$\boxed{n^2+3n}$

*n: posición*

(b)

| Piso | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Palillos | 4 | 10 | 18 | 28 | 40 | 54 | $n(n+1)+2n$ |

**Figura 5.7**. Expresión algebraica de la regla general dada por el profesor A (a) y el D (b) en T1.

Otro aspecto relevante para la formulación de la generalización fue extender el patrón a una categoría general de casos, en los cuales la regla obtenida fuera válida. Esto fue evidenciado por los profesores al determinar el conjunto de valores que puede asumir la variable $n$ en las expresiones algebraicas. Por ejemplo, el profesor B estableció que $n$ pertenece al conjunto de enteros positivos:

Investigador: *En la ecuación que obtuvo ¿qué valores puede tomar n?*

Profesor B: *Por el problema (situación en la tarea) y considerando que la escalera debe tener al menos un piso, entonces deben ser valores enteros positivos.*

En el estudio se encontró que en ambas tareas, una adecuada conexión de los tres procesos inductivos señalados, permitió establecer la regla general asociada al patrón cuadrático. El razonamiento usado por los profesores para inducir la regla general de un patrón cuadrático inició con el proceso de observar regularidades tanto locales como globales, entre casos particulares. Este proceso fue soportado por la estrategia de comparación (Klauer, 1990) y por la búsqueda de relaciones entre algunos casos particulares. Para la observación de regularidades locales, los profesores centraron la atención en identificar alguna relación entre un caso y el consecutivo o el antecedente, y para las regularidades globales, la atención estuvo puesta en las relaciones que tienen en común varios casos particulares. Mayormente, este proceso se basó en un tratamiento aritmético y visual de las características invariantes de las figuras.

La identificación de relaciones aritméticas entre los valores de un conjunto de casos específicos favoreció transitar de la observación de regularidades al establecimiento de un patrón, posibilitando reconocer el tipo de estructura matemática subyacente al patrón en cada tarea. De este modo, los profesores que describieron y asociaron las regularidades observadas con relaciones aditivas y multiplicativas para expresar el comportamiento cuadrático de los valores de distintos casos particulares, incluso casos no conocidos, fueron quienes llegaron a reconocer el patrón cuadrático. Es decir, el patrón fue expresado mediante una estructura matemática a partir de las relaciones funcionales entre tales valores. Por tanto, se reafirmó que determinar un patrón implica establecer tanto regularidades como estructuras matemáticas (Clements y Sarama, 2009).

Lograr reconocer el patrón asociado al comportamiento de los datos presentes en la tarea, se detectó que es un proceso esencial para pasar de lo particular a lo general. Este hecho coincide con lo reportado por Haverty, et al (2000) sobre el razonamiento inductivo en estudiantes universitarios, donde la detección de patrones fue de suma importancia para la obtención de fórmulas de funciones con base en datos numéricos. Cabe decir que, a pesar de que los casos particulares de las tareas se presentaron de manera figural (Tarea 1) y gráfica (Tarea 2), la mayoría de los profesores usaron estrategias numéricas basadas en relaciones aditivas y multiplicativas, para el análisis y la descripción del comportamiento creciente de los datos numéricos.

Esta fijación en las relaciones multiplicativas y aditivas entre los valores de cada variable, por encima de la percepción de las características comunes entre casos específicos, posibilitó extender el patrón a una clase general de elementos y, por tanto, obtener la regla general. En consecuencia, se concluye que descontextualizar el patrón de la tarea y centrarse en el estudio de las relaciones matemáticas que conectan varios casos particulares, favoreció transitar del establecimiento del patrón a la formulación de la generalización dado que fue posible abstraer el patrón presente en los datos de la tarea.

En contraste con estos procesos subyacentes al razonamiento inductivo, en las respuestas de los profesores que no llegaron a obtener la regla general (categoría C2), se reconocieron dificultades cognitivas que radicaron principalmente en el proceso de establecer un patrón.

## 5.5. Dificultades para generalizar patrones cuadráticos inductivamente

La ausencia o la complejidad de llevar a cabo adecuadamente el proceso de establecer un patrón, imposibilitó interconectar la observación de regularidades con la formulación de una generalización. Se identificaron tres tipos de dificultades para generalizar que están asociadas a los procesos inductivos antes descritos. Estas se reportan y evidencian con base en los datos obtenidos en las respuestas a la Tarea 2, dado que la mayoría de los profesores enfrentó dificultades para obtener la regla general del patrón cuadrático en esta tarea.

De manera similar que en la Tarea 1, todos los profesores iniciaron su proceso de razonamiento para la resolución de la Tarea 2 mediante la obtención de casos particulares y la observación de regularidades. Esto se realizó interpretando las coordenadas de los puntos en la gráfica cartesiana dada. Así, los profesores obtuvieron los valores 3, 4 y 6 unidades, como medida de la base ($b$) de tres rectángulos y los valores 15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente, como medida de su área ($A$). Después, determinaron los valores de las alturas ($h$), utilizando la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$. Dichos valores constituyeron los casos particulares observados, y se organizaron en tablas o en columnas de datos.

Tras la obtención de estos casos, la mayoría de los profesores se quedó en el proceso de observar regularidades y un número mínimo (4 de 19) alcanzaron a hacer una generalización correcta. A continuación, se describen las dificultades identificadas para generalizar razonando inductivamente, contrastando el proceso de razonamiento seguido por los profesores en la Categoría C1 con respecto a los de la Categoría C2.

### 5.5.1. Dificultad para observar de manera global una regularidad

Esta dificultad la presentaron profesores en la categoría C2, porque no lograron observar de manera global una regularidad que indique la relación entre los valores de una secuencia cuadrática, restringiéndose a usar la estrategia recursiva de diferencias para detectar alguna regularidad local entre los valores o enfocarse puntualmente en observar una regularidad entre un caso y su antecedente o consecuente.

Los profesores que reconocieron un patrón adecuado, se basaron en la observación global de regularidades. Por ejemplo, el profesor A (C1-T2) estableció numéricamente una relación aditiva entre los pares de valores (medidas de la base y la altura) obtenidos de la gráfica y comparó los resultados de la adición de esas medidas globalmente. De allí, observó que la suma es igual al valor 8 en todos los casos, independientemente de la variación en los valores de $b$ y $h$, como puede verse en la solución del profesor (Figura 5.8).

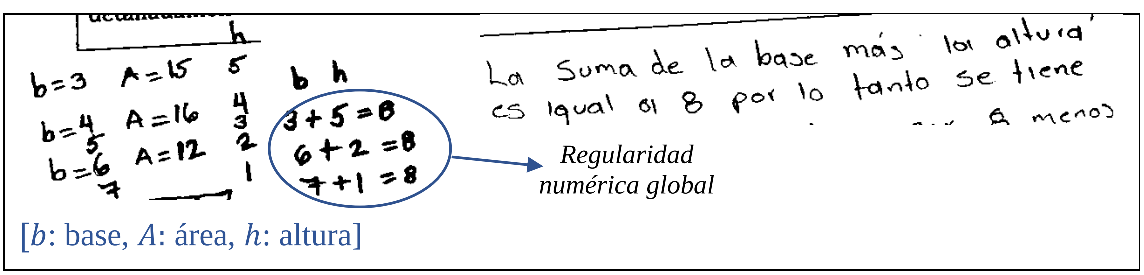



**Figura 5.8.** Regularidad global observada por el profesor A (T2).

Por el contrario, los profesores que solamente observan una regularidad localmente, no logran transitar hacia el establecimiento del patrón, pues no reconocen una regularidad entre varios casos particulares. Generalmente, su análisis dependía de conocer el caso anterior o siguiente y algunos realizaban análisis de casos por separado. Varios de estos profesores observaron regularidades mediante un trabajo aritmético con por lo menos tres casos particulares, utilizando principalmente la estrategia del cálculo recursivo de diferencias entre los valores de las variables. En este caso se encontró al profesor E (C2-T2), quien supone que el comportamiento de los valores del área de los rectángulos es cuadrático, y determina la medida del área ($A$) de otros rectángulos no conocidos, uno por uno, considerando que ésta es igual al cuadrado de la base ($B$) más una cantidad ($C$), sin precisar cuál era esa cantidad (Figura 5.9). Luego, procede al cálculo de diferencias, pero no llega a establecer correctamente el patrón.

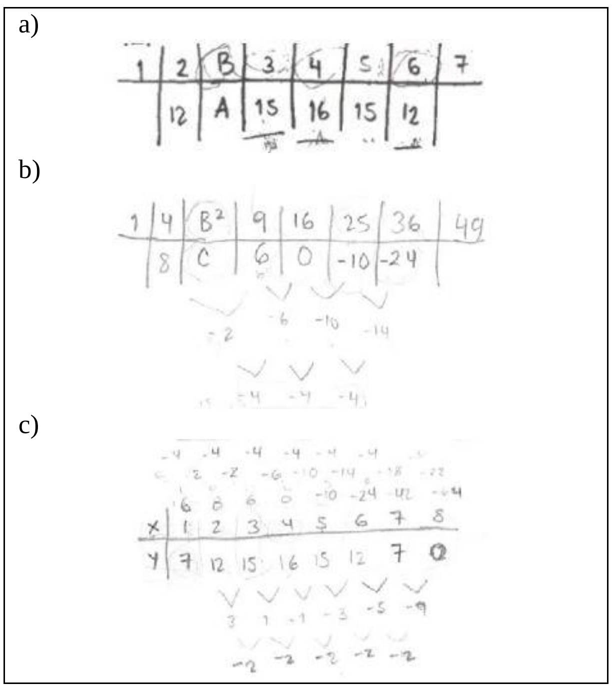


**Figura 5.9.** Análisis numérico de casos y cálculo de diferencias por el profesor E (T2).

El profesor E describió su análisis para observar regularidades como sigue:

*Me dieron tres datos: las bases 3, 4 y 6, y sus respectivas áreas* [subraya los valores 15, 16 y 12 en la tabla de la Figura 5.9-a]. *Suponiendo que es cuadrática, observo que al cuadrado de la base 3, el cuadrado es 9, le hacen falta 6 unidades para completar el área que comprende (A=15) ... En el caso de seis (B=6), su cuadrado sería 36 y la constante que le hace falta para completar el área (A = 12) es menos veinticuatro (−24) ... Completo la quinta posición (B=5) en la tabla con el mismo* *razonamiento, el cuadrado de B sería 25, para 15, le hace falta menos diez (−10). Entonces noto que la relación entre uno y otro término decae de -4 en -4: -2, -6, -10, -14* (Figura 5.9-b)*... Elevo al cuadrado ($B^2$), noto la diferencia ($C$), es decir, cuánto le hace falta para el área, y a esas diferencias las analizo aritméticamente cuánto están creciendo unas respecto a las otras* (Figura 5.9-c)*, hasta llegar a una constante (-2). [...] Observo que sí se trata de una ecuación cuadrática* [señala las segundas diferencias entre los valores del área en la tabla de la Figura 5.9-c]*, pero al momento de definirla es donde me atoro.*

El profesor F (C2-T2) también manifestó dificultad para observar numéricamente alguna regularidad global, aun cuando identificó una regularidad geométrica y numérica localmente en los casos particulares (Figura 5.10). Geométricamente, la regularidad observada fue que cada punto tenía uno simétrico en la gráfica respecto a un eje vertical. Consideró que los puntos correspondían a la gráfica de una parábola vertical y determinó el punto de coordenadas $(5, 3)$ simétrico a $(3, 5)$, y el punto $(2, 6)$ simétrico a $(6, 2)$, respecto al eje focal de la parábola (Figura 3). Numéricamente, observó que los valores de la base y la altura de algunos rectángulos son los mismos, pero intercambiados, y así obtuvo otros casos particulares tales como: $(7, 1)$ y $(1, 7)$.

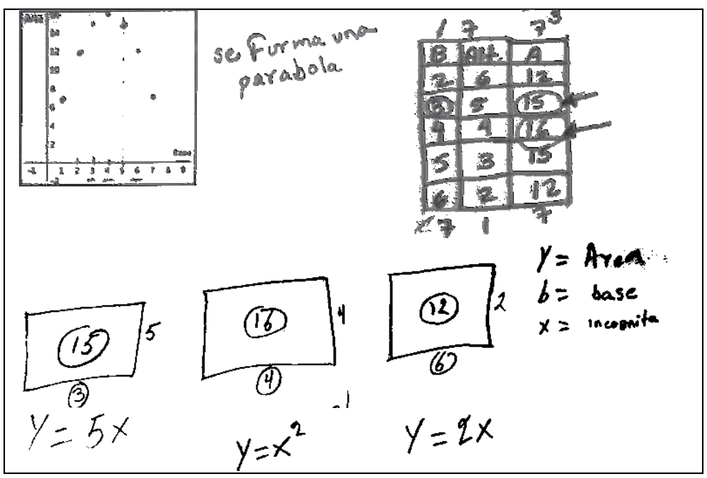



**Figura 5.10**. Solución del profesor F (T2).

El razonamiento del profesor F se caracterizó por un análisis puntual de los casos particulares, sin mostrar un análisis de qué y cómo se relacionan los pares de valores de diferentes casos. Si bien determinó expresiones para la medida del área, éstas eran distintas y no correspondían a la familia de rectángulos en general, sino a cada uno en específico, tal como la ecuación $y = 5x$ para el rectángulo que mide 3 unidades de base y 15 unidades cuadradas de área.

Esta dificultad imposibilitó transcender del trabajo con casos particulares a la observación de una regularidad global y por tanto, establecer el patrón cuadrático. Adicionalmente, como parte del proceso de observar regularidades, se notó que los profesores quienes no organizaron los casos particulares considerados, se enfocaron en un trabajo puntual, sin realizar un análisis sistemático que les permitiera relacionar e interconectar los casos en cada situación.

### 5.5.2. Dificultad para asociar las regularidades observadas con una estructura matemática

Esta dificultad la tuvieron algunos profesores que no pudieron reconocer y expresar una estructura matemática que describa el comportamiento cuadrático de los valores de la variable dependiente. Ellos solo intentaron identificar una posible relación entre los valores (variables) por ensayo y error, en lugar de recurrir al uso de relaciones aditivas, multiplicativas o ambas para expresar lo cuadrático.

En efecto, los profesores que llegaron a establecer un patrón fueron quienes lograron asociar una estructura matemática a las regularidades observadas. Este fue el caso del profesor G (C1-T2), quien supuso que el comportamiento de los puntos dados en la gráfica podría corresponder a una parábola. Estableció el patrón de comportamiento cuadrático, por medio de asociar y representar con una relación aditiva a la regularidad numérica observada entre las medidas de la base y la altura ($h$) de rectángulos específicos, y determinó la relación de igualdad: $8 - b = h$ (Figura 5.11). Él intentó encontrar una relación funcional entre los valores de la base ($b$) y el área ($A$) de los rectángulos con base en el siguiente análisis:

Profesor C: *A partir de los tres datos que me dieron,* […] *pensé que sería una parábola e hice una relación entre la base y el área, y a través de esos dos datos* [valores de la base y del área] *encontré otro dato que es la altura para obtener el área. Entonces habría que relacionar los datos de la base con la altura para obtener el área. Encontré que a un número fijo había que quitarle la variable base y, en este caso es el 8, nos da la altura* ($8 - b = h$)*. Y con la altura calculamos el área, e hice la relación, y efectivamente nos da una función cuadrática que corresponde a la gráfica (parábola) y quedaría que el área (A) tiene que ser igual a menos b cuadrada* ($-b^2$)*, en este caso b es la base, más ocho veces b* ($8b$)*,…*

Investigador: *¿Cómo obtuvo la relación* $8 - b = h$*?*

Profesor C: *Esa salió al encontrar un número, y digamos tomar otra variable en este caso la altura, que al variar la base me diera la altura.*

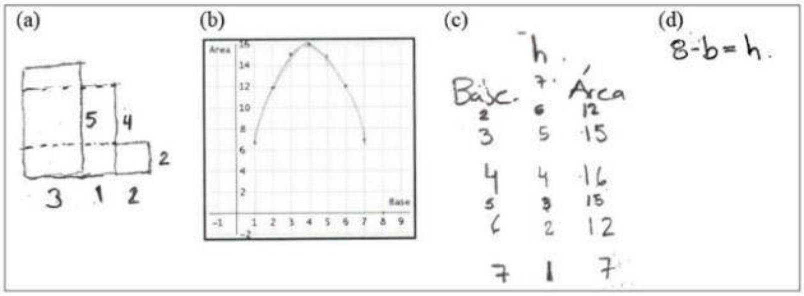



**Figura 5.11.** Extractos de la solución escrita del profesor G (T2).

Una de las razones por la que la mayoría de los profesores no alcanzan a establecer el patrón cuadrático, es porque no identifican una relación matemática que asocie lo variable con lo constante. Particularmente, mostraron dificultad para usar estructuras que describan la relación funcional entre variables con un comportamiento cuadrático. El profesor B (C2-T2), por citar un ejemplo, reconoció dicho comportamiento en los valores del área, pero se le complicó determinar el patrón (Figura 5.12). Explicó:

Profesor T: *No encuentro la relación entre el área y la base. Todo que he hecho es querer escribir la altura en términos de la base.*

Investigador: *En su opinión, ¿Qué está dificultando determinar esa relación?*

Profesor T: *Sí veo cómo varía la altura, conforme va creciendo el valor de la base, la altura va disminuyendo […] Lo que puedo ver es que algunos valores se repiten, algunos valores de las áreas, igual si me fijo en los puntos que están en la gráfica […] Entonces eso me da la idea de que podría ser tal vez una relación cuadrática la que se está representando allí, y según los valores que obtuve, sí eso es correcto, aquí también se refleja porque algunos valores del área se están repitiendo. Entonces quiere decir que tal vez podrían corresponder a ese comportamiento cuadrático.*

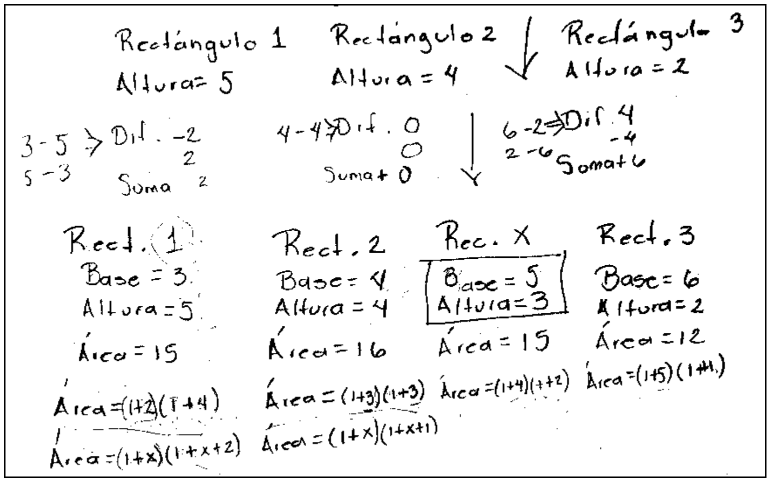


**Figura 5.12.** Solución del profesor B (T2).

Asimismo, se detectó que si la relación establecida entre las variables queda imprecisa, tampoco se llega a establecer un patrón adecuado. Por ejemplo, el profesor H (C2-T2) planteó una relación entre los valores de *b* y *h* que expresó como sigue: "*La b y h varían inversamente. Si la b aumenta una unidad, la h disminuye una unidad*" (Figura 5.13), pero resulta ambigua debido a que no establece con precisión la relación de dependencia entre tales variables.

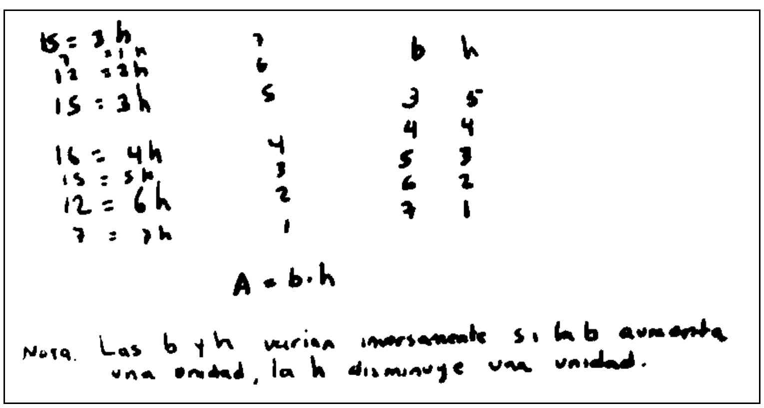


**Figura 5.13**. Relación entre los valores de *b* y *h* establecida por el profesor H (T2).

En general, al comparar las respuestas de los profesores en la Tarea 1 con respecto a la Tarea 2, se encontró que establecer un patrón cuadrático vía el trabajo numérico, es complejo para los profesores cuando se carece de algún referente visual que guíe la construcción de relaciones entre variables. Esta es una posible explicación de porqué disminuyó el número de profesores que establecen correctamente el patrón en la segunda tarea en relación con la primera.

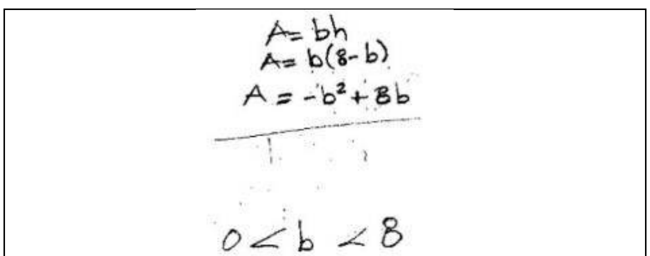
### 5.5.3. Dificultad para abstraer lo general en lo particular

La dificultad para abstraer lo general a partir de casos particulares la enfrentaron los profesores que se enfocaron en la particularidad de los casos analizados y no pudieron aislar o descontextualizar el patrón de la situación propia de cada tarea. Por ejemplo, el profesor F (ver Figura 5.10), si bien relacionó uno a uno cada par de medidas de la base y el área de los tres rectángulos con su área y, por ensayo y error, le asoció una expresión algebraica, ésta fue distinta para cada rectángulo (Figura 5.14):

| | |
|---|---|
| $(3, 15) \to y = 5x$ | $y$: Área |
| $(4, 16) \to y = x^2$ | $b$: base |
| $(6, 12) \to y = 2x$ | $y$: incógnita |

**Figura 5.14**. Asociación de casos particulares y expresiones algebraicas por el profesor F (T2).

Este profesor no consiguió abstraer las relaciones invariantes entre los datos ni una forma general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia. En cambio, los profesores que sí pasaron del establecimiento de un patrón a la formulación de una generalización, evidenciaron la abstracción de relaciones invariantes en las tareas. Por ejemplo, en la Tarea 2 abstrajeron que al variar las medidas de la base y la altura de los rectángulos, la medida de su semiperímetro permanece constante. Asimismo, infirieron que para calcular la medida de la altura de cualquier rectángulo, debían restar 8 unidades a la medida correspondiente a su base (Figura 5.15). La regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo la familia de rectángulos fue expresada de manera algebraica y verbal. Las expresiones algebraicas obtenidas fueron: $A = b(8 - b)$, $A = -b^2 + 8b$, o alguna ecuación equivalente.




*El área es igual a menos b cuadrada, más ocho veces la base.*

**Figura 5.15.** Expresión verbal y algebraica de la generalización por el profesor G (T2).

Por otra parte, como se mencionó en el Apartado 5.4, en los profesores que sí alcanzaron a formular una generalización se reconoció que, extender lo observado en los casos particulares a un conjunto que abarque la totalidad de los mismos es un aspecto importante en la formulación de la generalización, y conduce a la abstracción de lo general. Esto fue fundamental para que, junto con el conocimiento y el uso de estructuras cuadráticas, se lograra generar una regla general del patrón. En el caso de la Tarea 2, los profesores que generalizaron expresaron el rango de valores que puede asumir la variable $b$, es decir, el conjunto de números reales en el intervalo abierto de 0 a 8 (Figura 5.14). Por ejemplo, el profesor G mencionó que:

> *b sería mayor de cero, porque si b es cero el área sería cero, entonces b sería mayor que cero y hasta b igual a ocho. El área para b igual a ocho sería cero, después de esos valores el rectángulo no podría existir.*

Aun cuando algunos profesores descubrieron el patrón cuadrático, la falta de abstracción de lo general fue un factor para que su proceso de razonamiento no culminara en la producción de la generalización. De manera que, a pesar de identificar que medida del área de cualquier rectángulo de la familia se podría determinar con una fórmula o expresión cuadrática (indicado por las segundas diferencias iguales a una constante), no llegaron a obtener una expresión general. En específico, se les dificultó obtener la expresión algebraica cuadrática a partir de pares de valores y relaciones numéricas. El profesor E procedió por ensayo y error para intentar determinar la regla general (Figura 5.16), lo cual resultó infructuoso por esa vía. Al respecto, el profesor E (C2-T2) expresó:

> *… Sé que es cuadrática, sé que es negativa y que tiene un aumento constante de 16 por el punto máximo en la gráfica (ordenada del vértice de la parábola), entonces trato de ver cuál es el otro parámetro, el parámetro para moverla sobre el eje de las abscisas. Volví hacer el mismo análisis numérico…, ya no llegué a generalizar la expresión algebraica.*

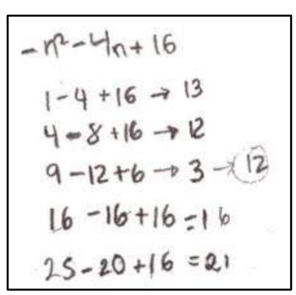



**Figura 5.16.** Intento de generalización del profesor E por ensayo y error (T2).

También, en quienes reconocieron un patrón cuadrático con base en los puntos de la gráfica, se encontró que carecen de estrategias y un conocimiento conceptual profundo para transitar de la representación gráfica a la algebraica de una ecuación cuadrática.

En síntesis, respecto a las dificultades en el razonamiento inductivo de los profesores para determinar la regla general asociada al patrón cuadrático, se detectó que una de ellas tiene que ver con el uso de la estrategia recursiva para reconocer regularidades numéricas entre casos particulares y que ha sido documentada en otros estudios (v.g. Rivera & Becker, 2007; Manfreda, Slapar & Hodnik, 2012). De hecho, dicha estrategia dificultó observar regularidades que engloben a varios casos particulares e identificar una relación entre estos, pues no logran reconocer alguna característica invariante en el comportamiento global de los datos.

Otra dificultad identificada fue el poder asociar las regularidades observadas con una estructura matemática que las describa. En este caso, alguna relación cuadrática. Esta dificultad se atribuye a carencias estratégicas para traducir la representación numérica del comportamiento cuadrático, a la expresión algebraica de una función polinomial. Por último, abstraer lo general de lo particular es complejo para algunos profesores, debido a que no logran reconocer lo que norma el comportamiento de los casos particulares, ni la estructura del patrón. Un factor en ello fue centrar demasiado la atención en el contexto de la tarea, en lugar de buscar relaciones funcionales entre las variables.

Cada uno de los tres procesos inductivos que conectaron los profesores quienes llegaron a generalizar en ambas tareas, fue considerado en este trabajo como un nivel de desarrollo del razonamiento inductivo, desde que se inicia el trabajo con casos particulares hasta la producción de generalizaciones matemáticas. Estos fueron utilizados como marco de referencia para propiciar y analizar un cambio cognitivo en el razonamiento de profesores de secundaria en la realización del Experimento de desarrollo del profesor. También, para el establecimiento de conjeturas en el experimento se tuvieron en cuenta la forma en que los profesores conectaron los procesos inductivos, así como los tipos de dificultades reportadas.

# Capítulo 6

## Diseño del experimento para un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo

En este capítulo se presenta la preparación y diseño del experimento de desarrollo del profesor para detonar y analizar un cambio cognitivo en su razonamiento inductivo. En el experimento se propone una manera de desarrollar el razonamiento de los profesores en relación con la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática, con enfoque en el estudio del comportamiento cuadrático. Para el diseño se construyó una trayectoria hipotética de aprendizaje fundamentada en los procesos inductivos y las dificultades detectadas en profesores de secundaria para producir generalizaciones, específicamente de patrones cuadráticos, así como en los resultados de investigaciones sobre ideas centrales y procesos cognitivos y sociales asociados al aprendizaje de la ecuación cuadrática. Adicionalmente, se indica la forma de recolección y análisis de datos en el experimento.

### 6.1. Descripción general del experimento

Esta investigación tiene como objetivo general describir el cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de profesores de secundaria y sus implicaciones en una acción de su actividad profesional, específicamente en el rediseño de una actividad de generalización matemática. El interés se ha puesto en el desarrollo de esta forma de razonamiento en los profesores, debido a la problemática que representa el movilizar procesos inductivos para llegar a generalizar patrones cuadráticos desde instancias particulares. Dado que hay pocos referentes teóricos y directrices para atender esta problemática, se optó por realizar el estudio a través de un experimento de desarrollo del profesor (TDE). El experimento se llevó a cabo en cinco sesiones de trabajo con profesores en un escenario de aprendizaje y desarrollo profesional.

### 6.1.1. Objetivo del experimento

El experimento se diseñó con el objetivo de promover y analizar un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de profesores de matemáticas de secundaria, mediante actividades de generalización. El principal supuesto en que se basa el experimento es que el razonamiento inductivo es un medio para generalizar. Más aún, se asume que el motor para detonar la movilización y desarrollo de esta forma de razonamiento en los profesores es la generalización.

Se espera que si evoluciona el razonamiento de los profesores y asimilan los procesos inductivos necesarios para generalizar, podrán reconocer a la inducción no solo como una vía de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino como una forma de construir su propio conocimiento. De ser así, tendrían mayor sensibilidad didáctica a lo inductivo en su práctica. Por tanto, con este experimento se pretende generar entendimientos sobre el desarrollo del razonamiento inductivo de los profesores y una forma de favorecer su desarrollo profesional docente.

### 6.1.2. Participantes

En el experimento participaron de forma regular 16 profesores de matemáticas (10 mujeres y 6 hombres) que impartían clases en escuelas secundarias públicas, con 4 a 22 años de experiencia docente. Algunos tenían formación profesional en escuelas normales y otros de ingeniería en diversas áreas (computación, construcción, etc.). Participaron de manera voluntaria como parte de un programa de desarrollo profesional docente en matemáticas, sin recibir algún tipo de remuneración económica o laboral.

El criterio de selección de los participantes fue ser profesor de secundaria y haber impartido tercer grado por lo menos durante un ciclo escolar, dado que en este grado se enseña el contenido matemático relacionado con los patrones cuadráticos, tales como las sucesiones y ecuaciones de segundo grado. Además, poseían conocimientos sobre estos contenidos, pues todos indicaron haber estudiado sucesiones y ecuaciones lineales y cuadráticas durante su formación profesional.

En las primeras dos sesiones del experimento, los profesores trabajaron de manera individual y en las tres restantes se organizaron en equipos de dos o tres integrantes. Para la organización y análisis de los datos, los profesores se etiquetaron con las letras del alfabeto y se distribuyeron en los equipos como sigue:

**Tabla 6.1.** Organización de los profesores por equipo en el TDE

| Equipo | Integrantes |
|---|---|
| 1 | A, B, C |
| 2 | D, E, F |
| 3 | G, H, I |
| 4 | J, K, L |
| 5 | M, N |
| 6 | O, P |

En cada sesión participaron la autora de este trabajo como instructora y dos colaboradores. La función de la instructora fue coordinar la implementación de las actividades en las sesiones y la discusión grupal de los participantes al compartir las respuestas dadas a cada actividad. También intervino para exponer conclusiones sobre los aspectos del razonamiento inductivo abordados en cada sesión.

Durante la intervención de la instructora y el diálogo con los profesores, los colaboradores tuvieron observación no participante. Ellos apoyaron con las grabaciones en audio de las discusiones en las sesiones y tomaron notas sobre las ideas relevantes expuestas por los participantes acerca del razonamiento inductivo, el proceso de resolución de las actividades y el contenido matemático. Asimismo, escribieron anotaciones sobre sus interpretaciones de lo acontecido en cada sesión. En el momento de resolución de las actividades, los colaboradores participaron aclarando dudas de los profesores sobre las instrucciones y observando su procedimiento de cerca.

### 6.1.3. Estructura general del experimento y organización de las sesiones

Para planificar las sesiones del experimento, este se estructuró considerando las tres etapas (preliminar, desarrollo y evaluación) de esta investigación de diseño, las cuales se definieron en el Capítulo 4:

**Etapa A:** Diagnosticar el estado del razonamiento inductivo de los profesores de secundaria al intentar generalizar y respecto a su sensibilidad didáctica.

**Etapa B:** Promover el razonamiento inductivo en los profesores en la resolución de una actividad de generalización y el reconocimiento de procesos inductivos en la estructura de las tareas de la actividad.

**Etapa C:** Evaluar en qué medida se produjo un cambio cognitivo y la sensibilización didáctica en los profesores respecto al razonamiento inductivo.

Cada etapa se desarrolló en una o dos sesiones de trabajo (Figura 6.1), en las que se implementaron actividades para recolectar datos sobre el *cambio cognitivo* y la *sensibilidad didáctica* de los profesores. En adelante, estas categorías se referirán como cognitiva y didáctica, respectivamente.

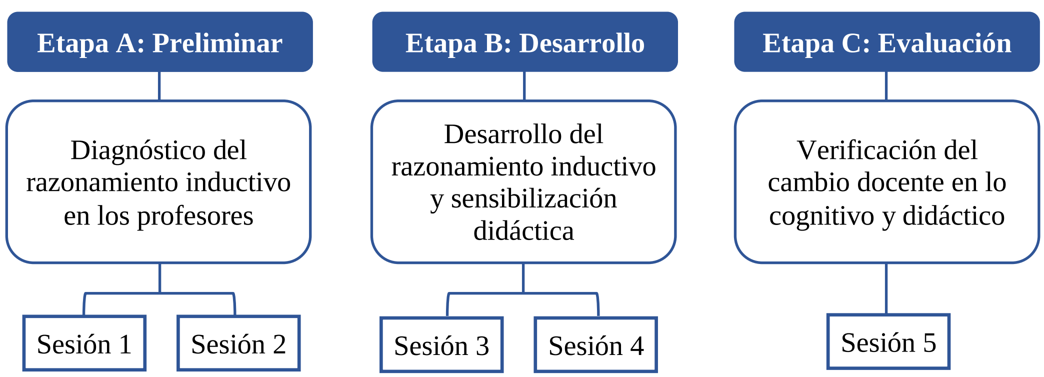



**Figura 6.1**. Esquema general del TDE por etapas y sesiones.

Para diseñar la secuencia de intervenciones en el experimento y su temporalización se establecieron objetivos investigativos en cada sesión, alineados al propósito de cada etapa y que en conjunto contribuyeran al logro del objetivo general del TDE. El experimento constó de cinco sesiones en total, con duración de 1.5 horas en promedio cada uno y se realizaron quincenalmente. El número de sesiones se delimitó en función de las actividades requeridas para el logro de los objetivos investigativos en cada etapa del experimento y el tiempo disponible para el desarrollo de cada sesión en el programa. En la Tabla 6.1 se muestra la organización de las sesiones en el experimento, indicando el objetivo de la sesión, la categoría de los datos recolectados y el nombre de la actividad utilizada como instrumento para la obtención de esos datos.

**Tabla 6.2.** Organización y objetivos de las sesiones en cada etapa del TDE

| Etapa | Sesión | Objetivos específicos | Categoría | Actividad |
|---|---|---|---|---|
| **A. Preliminar** | 1 | a. Caracterizar la percepción de los profesores del razonamiento inductivo. | Didáctica | Actividad I - Tarea A |
| | | b. Identificar cómo lo interpretan en la enseñanza de un contenido matemático. | | Actividad I - Tarea B |
| | 2 | Reconocer el estado del razonamiento inductivo en la cognición de los profesores al resolver una tarea de generalización matemática. | Cognitiva | Actividad II |
| **B. Desarrollo** | 3 | a. Analizar el desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores por medio de la resolución de la actividad de generalización inductiva. | Cognitiva | Actividad III – Parte 1 |
| | | b. Identificar la estructura y los procesos del razonamiento inductivo que perciben los profesores en la actividad de generalización inductiva. | Didáctica | Actividad III – Parte 2 |
| | 4 | Analizar si los profesores asocian adecuadamente los procesos inductivos con las acciones de solución de una tarea de razonamiento inductivo. | Cognitiva y didáctica | Actividad IV |
| **C. Evaluación** | 5 | Reconocer si hubo un cambio en el estado del razonamiento inductivo en los profesores en su proceso de resolución de una actividad de generalización. | Cognitiva | Actividad V |
| | 5 | Identificar qué procesos inductivos consideran los profesores en el rediseño de una actividad de generalización y los criterios de su elección. | Didáctica | Actividad VI |

## 6.2. Trayectoria hipotética de aprendizaje

El diseño del experimento consistió en la configuración de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el desarrollo del razonamiento inductivo y la sensibilización didáctica de los profesores acerca de este razonamiento, particularmente en contextos de generalización. En este apartado se exponen las conjeturas o supuestos teóricos de la investigación, que se tuvieron en cuenta para la trayectoria de aprendizaje y se contrastaron con lo acontecido en las sesiones. También se presentan las actividades utilizadas como medio para el logro del objetivo del experimento, las cuales se diseñaron con base en los resultados del estudio previo (Capítulo 5) y de los análisis por sesión. La realización de estos análisis y los resultados obtenidos son parte del desarrollo del experimento, por lo que se describen con detalle en el próximo capítulo.

### 6.2.1. Conjeturas de la investigación

En el estudio reportado en el capítulo anterior, se encontró que al resolver tareas matemáticas que demandan razonar inductivamente, la mayoría de los profesores de secundaria carecían de una forma sistemática de razonar para obtener la solución y se les dificultaba generalizar comportamientos cuadráticos a partir de casos particulares. El tipo de dificultades identificadas giraban en torno al proceso de establecer el patrón y fueron:

- Observar de manera global una regularidad que indique la relación entre una secuencia de valores o casos particulares;
- Asociar y expresar con una estructura matemática a las regularidades observadas en casos particulares;
- Abstraer lo general de un conjunto de instancias particulares.

En la Etapa A (Preliminar) del TDE, se conjeturó que el grupo de profesores participantes también enfrentaría este tipo de dificultades para llegar a una generalización y que predominaría el uso de la estrategia del cálculo recursivo de diferencias al intentar hacerlo. Asimismo, se consideró que estaría ausente o poco presente el razonamiento inductivo en ellos al resolver una tarea de generalización y en la enseñanza de un concepto matemático, por lo que se les cuestionó al respecto para probar o refutar esta hipótesis.

En la Etapa B de desarrollo del experimento, la conjetura central fue que los profesores pueden obtener la regla general de patrones cuadráticos si desarrollan su razonamiento inductivo al grado de conectar los tres procesos involucrados, estos son: observar regularidades, establecer un patrón y formular una generalización. De manera que, para lograr un cambio cognitivo en su razonamiento habría que promover la conexión entre tales procesos mediante actividades de generalización. Dada la naturaleza de las dificultades antes reportadas, se supuso que los profesores desarrollarían su razonamiento inductivo (RI) si se propicia que:

i. Para pasar de la *observación de regularidades* (O) al *establecimiento de un patrón* (P), reconozcan una relación matemática (RM) que describa el comportamiento global de varios casos particulares;

ii. Para pasar del *establecimiento del patrón* a la *formulación de la generalización*, abstraigan (A) lo general a partir de aislar el patrón del contexto específico de la situación a resolver y extenderlo a casos desconocidos.

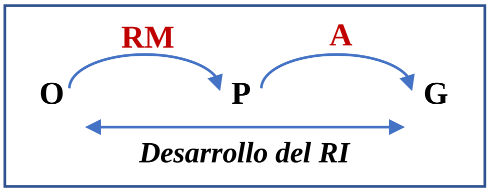



**Figura 6.2**. Esquema experimental de desarrollo del razonamiento inductivo.

En la Etapa C del experimento se esperaba verificar que, tras la experiencia de aprendizaje vivida en la etapa previa, los profesores podrían usar procesos inductivos de manera más sistemática cuando intentan generalizar y llegar a obtener la regla general de patrones cuadráticos, incluso en contextos en los que no fuera fácilmente discernible el patrón o no se dispusiera de la representación figural de casos particulares. Asimismo, se evaluaría si los profesores transfieren lo aprendido al rediseño de una actividad de generalización, al grado de proceder siguiendo una lógica inductiva y basar sus criterios para hacer el rediseño en los procesos involucrados en el razonamiento inductivo. Esto permitiría dar cuenta de en qué medida se produjo el cambio cognitivo docente, tanto en lo cognitivo como en lo didáctico.

### 6.2.2. Contenido matemático

En las actividades del TDE se decidió abordar el concepto de ecuación cuadrática. Por una parte, la elección de este contenido obedece a las dificultades detectadas en profesores de secundaria para la generalización de patrones cuadráticos y a que, matemáticamente, dicha ecuación es una de las estructuras implicadas en esta clase de patrones.

La ecuación cuadrática pertenece a la estructura de las funciones polinomiales de segundo grado, de la forma: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_0, a_{1,} a_2 \in \mathbb{R}$ (Lehmann, 1980). La relación entre las variables de esta expresión algebraica representa la generalización de un patrón de comportamiento cuadrático, es decir, un comportamiento en el que la variación entre los valores de las variables es lineal (Villa, 2008). Numéricamente, un indicador de lo cuadrático es que las segundas diferencias finitas de los valores de la variable $y$, para valores enteros consecutivos de la variable $x$, sean constantes.

En el currículo matemático de México, los patrones cuadráticos también están asociados a las ecuaciones de segundo grado. El estudio de los patrones numéricos y figurales de este tipo aparece en el tercer grado de educación secundaria, se entrelaza con la enseñanza de las sucesiones y ecuaciones de segundo grado. De hecho, en el plan y programas de estudio de educación básica (SEP, 2017), se estipula que uno de los propósitos de las matemáticas en este nivel educativo es que los estudiantes sean capaces de "Modelar situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; y definir patrones mediante expresiones algebraicas" (p. 300).

En los libros de texto oficiales de matemáticas para tercero de secundaria (https://libros.conaliteg.gob.mx/), la asociación de las ecuaciones cuadráticas (y lineales) con el estudio de patrones, se refleja en el nombre del tema donde se ubica este contenido matemático en los libros: "Patrones y ecuaciones" y en la declaración de los aprendizajes esperados. En la Tabla 6.3, se muestran estos aprendizajes esperados (Contenido) en el libro "Matemáticas 3. Por Competencias" de Editorial Pearson:

**Tabla 6.3.** Tema y aprendizajes esperados relativos a la ecuación cuadrática por bloque

| Bloque | Tema y aprendizajes esperados | |
|---|---|---|
| 1 | Eje temático | Sentido numérico y pensamiento algebraico |
| | Tema | Patrones y ecuaciones |
| | Contenido 1 | Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. |
| 2 | Contenido 1 | Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. |
| 3 | Contenido 1 | Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones. |
| 4 | Contenido 1 | Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión. |
| 5 | Contenido 1 | Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. |

Fuente: Libro "Matemáticas 3. Por competencias" (Arriaga y Benítez, 2014).

Por otra parte, la elección de este contenido fue resultado de indagar las ideas centrales y los procesos relativos al aprendizaje de la ecuación cuadrática en la literatura científica y el currículo. Esta indagación se hizo como parte del proceso para sustentar y definir la trayectoria hipotética de aprendizaje en lo concerniente al contenido matemático (Clements & Sarama, 2004; Cobb et al., 2003). Como resultado se obtuvo una forma alternativa de conceptualizar la ecuación cuadrática que consiste en el desarrollo y uso del razonamiento inductivo para abstraer una idea central en la estructura del concepto: el comportamiento cuadrático. Esto se sustenta en los hallazgos de orden epistemológico, fenomenológico, cognitivo y de análisis del contenido escolar de dicho concepto.

Epistemológicamente se encontró que, el desarrollo conceptual de las ecuaciones cuadráticas ha implicado un tránsito de su significación como una relación de igualdad entre cantidades fijas (incógnitas), en el contexto de resolución de problemas concretos y métodos particulares basados en lo numérico y geométrico, a su generalización en un sentido más dinámico, como relación de equivalencia entre cantidades (variables) en situaciones de comportamiento cuadrático (e.g., Malisani, 1999; Suárez, 2002).

Desde un punto de vista fenomenológico, este tipo de comportamiento es característico de las situaciones que involucran plantear y resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, la determinación de la suma de números triangulares y rectangulares por los pitagóricos con base en configuraciones geométricas y la medida de segmentos proporcionales a otros (Kline, 1992). O bien, la intensidad ($I$) de corriente eléctrica requerida para generar cierta cantidad de calor ($Q$) en un conductor de corriente con una resistencia constante $\left[Q = \frac{RI^2}{2}\right]$; o la situación de determinar el tiempo ($t$) en que un objeto en caída libre adquiere una altura específica $s$ [donde $s = \frac{1}{2}gt^2$, $g$ representa la gravedad] (Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev, 2014).

En lo cognitivo, los hallazgos de algunas investigaciones refieren problemas de enseñanza y aprendizaje del concepto. La concepción de los profesores acerca de la enseñanza de ecuaciones es comunicar una serie de pasos para realizar diferentes métodos algebraicos de resolución, sin fomentar el razonamiento (Trejo y Camarena, 2011; Ramos y Casas, 2017). Además, la definición conceptual de las ecuaciones es dada por los profesores en términos de la representación algebraica de la ecuación y el valor de verdad de la relación de igualdad (Tossavainen, Attorps, & Väisänen, 2012). Por ende, la comprensión de la ecuación y de los métodos de resolución se da meramente a nivel sintáctico-simbólico; el significado de la ecuación cuadrática queda supedito a la forma sintáctica y refiere al exponente mayor en la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

Benitez (2009) afirma que, si los significados quedan enmarcados solo en las representaciones algebraicas, los estudiantes tendrían problemas en el proceso de resolución de problemas. Argumenta que este proceso involucra identificar información para hacer inferencias y seleccionar los elementos relevantes, los cuales posteriormente se traducirán en la abstracción del análisis de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y conclusión del problema. Se infiere que la falta de atención en la variación lineal en el estudio de ecuaciones cuadráticas podría obstaculizar la generalización de patrones cuadráticos, pues esta actividad matemática implica reconocer el comportamiento de valores y establecer relaciones entre variables para representarlo (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

En un análisis del contenido escolar, Fernández (2016) identifica que uno de los razonamientos matemáticos involucrados en la resolución numérica de ecuaciones de segundo grado es el inductivo. Este autor detecta tres ideas centrales para la organización y enseñanza de este contenido matemático: el entendimiento de la estructura y la resolución de ecuaciones cuadráticas, la expresión de la ecuación como factores lineales de sus raíces y la modelación de problemas geométricos con este tipo de ecuaciones. En la Tabla 6.4, se indican los componentes conceptuales y procedimentales asociados a estas ideas:

**Tabla 6.4.** Componentes conceptuales y procedimentales de la ecuación cuadrática

| **Conceptuales** | **Procedimentales** |
|---|---|
| Estructura, conceptos y relaciones | Destrezas y estrategias |
| • Anillo de polinomios con coeficientes reales en una indeterminada $(\mathbb{R}[X], +, \times)$<br>• Ecuación de segundo grado<br>• Solución de una ecuación de segundo grado<br>• Equivalencia de ecuaciones<br>• Relación entre el discriminante de la ecuación y el número de soluciones | • Aplicación de la fórmula de resolución de la ecuación<br>• Factorización del polinomio a partir de sus raíces<br>• Aplicación de identidades notables<br>• Resolución geométrica de ecuaciones |

Fuente: Fernández (2016).

Para este estudio, en los contenidos procedimentales anteriores, se añade y considera el planteamiento de ecuaciones cuadráticas. Esto fue debido a que, en los aprendizajes esperados de matemáticas de la educación secundaria en México, se declara el uso de este tipo de ecuaciones para modelar y resolver situaciones, así como obtener expresiones cuadráticas para definir la regla general de sucesiones.

Por lo anterior, se decidió desarrollar el razonamiento inductivo en los profesores mediante actividades de generalización que involucren modelar relaciones entre variables usando ecuaciones cuadráticas. Así, se optó por enfocar el tratamiento de este contenido en el análisis y representación del comportamiento cuadrático de variables discretas y continuas. En particular, el objeto de la generalización fueron patrones cuadráticos asociados a ecuaciones de la forma $y = ax^2 + c$ y $y = ax^2 + bx$ (con $a, b$ y $c \in \mathbb{Z}$).

La intención fue que los profesores puedan abstraer que una característica invariante en los comportamientos cuadráticos es la variación lineal. Se presupone que esto podría ayudar a entender algunos componentes conceptuales y procedimentales de este contenido, tales como el establecimiento de relaciones de equivalencia entre variables y la expresión del polinomio cuadrático como factores lineales de las raíces de la ecuación.

Se plantea entonces favorecer en los profesores (y en los estudiantes de manera indirecta) la movilización de procesos inductivos en relación con la conceptualización de la ecuación cuadrática. Se piensa que, de esta manera, no solo podrían llegar a generalizar patrones cuadráticos, sino ampliar su entendimiento de la ecuación cuadrática. Asimismo, pasar del planteamiento y resolución de ecuaciones específicas (con sustento en argumentos concretos y numéricos), a su abstracción y generalización en situaciones que involucran variables continuas.

### 6.2.3. Actividades por sesión

En las cinco sesiones del experimento se implementaron seis actividades escritas, algunas fueron realizadas por los profesores de manera individual y otras por equipos. Adicionalmente, las actividades correspondientes a la etapa de desarrollo del razonamiento inductivo se complementaron con la discusión grupal de las respuestas. Esto se hizo con la intención de tener mayores elementos de análisis del cambio cognitivo en caso que se produjera o de los factores que lo obstaculizaran. A continuación se presentan las actividades implementadas, así como el propósito y las consideraciones del diseño de cada una.

**Sesión 1: Actividad I**

Considerando la existencia de dificultades para generalizar de manera inductiva en profesores de secundaria, se supuso que si ellos no usan ni conectan los procesos subyacentes al razonamiento inductivo al momento de resolver una tarea de generalización, difícilmente los tendrían presentes en la enseñanza de algún contenido matemático. En otras palabras, serían poco sensibles al razonamiento inductivo y tampoco tendrían claridad en cuáles son los procesos inductivos a seguir para llegar a generalizar, ya sea una idea o un proceso matemático. Lo anterior, también podría estar aunado a una enseñanza de las matemáticas en las aulas bajo una lógica deductiva.

Para indagar al respecto, se diseñó un cuestionario (Figura 6.3) compuesto de dos ítems o tareas, con el objetivo de conocer la percepción de los profesores del razonamiento inductivo (Tarea A) y su interpretación en la enseñanza de un concepto matemático (Tarea B). Así, la Actividad I consistió en responder este cuestionario de manera escrita y posteriormente, compartir las respuestas dadas a los demás compañeros para ampliarlas o ejemplificarlas.

A. Enuncie lo que en su opinión serían dos o más características del razonamiento inductivo en matemáticas.

| | |
|---|---|
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| | |

B. Con base en las características proporcionadas, indique cómo serían las fases 1, 2, etc. para enseñar o aprender el concepto de ecuación cuadrática con eje en el razonamiento inductivo. De ser posible, proporcione un ejemplo de cada una.

Fase 1 — Fase 2 — Concepto de ecuación cuadrática

Descripciones de las fases:

| | |
|---|---|
| Fase 1: | |
| Fase 2: | |
| Fase 3: | |

**Figura 6.3.** Actividad I para examinar la sensibilidad didáctica (Sesión 1).

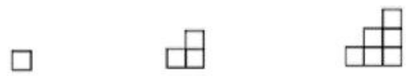
Adicionalmente, esta actividad se empleó con la intención de que los profesores comenzaran a cuestionarse sobre el papel del razonamiento inductivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria e iniciar con ellos un proceso de sensibilización didáctica.

## Sesión 2: Actividad II

El propósito de la Actividad II fue examinar el estado actual del razonamiento inductivo en la cognición de los profesores al inicio del experimento, pues este serviría de referencia para promover y analizar un cambio cognitivo en ellos. Por ello, en el diseño de la actividad se decidió plantear la tarea de construcción de escaleras con palillos (Figura 6.4), empleada como instrumento en el estudio previo. El objetivo de la tarea era inferir la regla general de un patrón cuadrático a partir del análisis de casos particulares representados con figuras. Se eligió porque es en la que mayor cantidad de profesores movilizaron su razonamiento inductivo y fue más propicia para observar la diversidad de procedimientos y argumentos utilizados en su resolución.

**Instrucción**. Analice la veracidad o falsedad de la afirmación: "*La resolución del siguiente problema implica la movilización del razonamiento inductivo por parte del resolutor*".

**Problema:** Las siguientes figuras representan escaleras de uno, dos y tres pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.



a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de $n$ pisos.

1. Indicar si la afirmación es:

   Cierta ☐ Falsa ☐

   Indique dos o más argumentos de la veracidad o falsedad de la afirmación:

2. Confirme la veracidad o falsedad de la afirmación resolviendo el problema en las hojas anexas.

**Figura 6.4.** Actividad II para examinar el razonamiento inductivo en lo cognitivo (Sesión 2).

En la actividad, la tarea se presentó como un problema, considerando que es un término más familiar para los profesores, acompañado de dos sentencias. En la primera (Ítem 1), se les solicitó a los profesores analizar y determinar si la siguiente afirmación era cierta o falsa: "*La resolución del siguiente problema implica la movilización del razonamiento inductivo por parte del resolutor* ". Esto con la intención de indagar si ellos reconocían que en la resolución del problema planteado se requería razonar inductivamente. En la segunda sentencia (Ítem 2), se les pidió resolver el problema para confirmar la veracidad o falsedad de la afirmación y así poder identificar qué procesos inductivos usan los profesores, si fuera así, cuando intentan generalizar un patrón cuadrático, lo cual se demandaba como parte del problema.

## Sesión 3: Actividad III

En el Capítulo 3 se mencionó que el desarrollo de procesos cognitivos superiores como el razonamiento inductivo, puede analizarse y desarrollarse como producto de una actividad en un ambiente sociocultural específico y requiere ser mediado por el uso de sistemas de signos.

La Actividad III se divide en dos partes. La primera está orientada al desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores; la segunda tiene como propósito identificar las acciones o procesos inductivos que los profesores reconocieron como necesarios para alcanzar la generalización en la primera parte de la actividad.

La Actividad III en su primera parte se denominó “Secuencia de figuras y números”. Esta se elaboró considerando el posicionamiento teórico de la escuela histórico-cultural de Vygotsky (1978) respecto al desarrollo de los procesos cognitivos superiores, y se estructuró con base en los elementos de la teoría de la actividad de Leontiev (1984). El diseño de la actividad se sustentó en las siguientes consideraciones teóricas (Sosa, Cabañas y Aparicio, en prensa):

1. El desarrollo cognitivo en las personas es detonado por una actividad sociocultural mediada por el uso de *instrumentos y signos*.
2. La realización de la actividad requiere de *acciones* y *operaciones internas* del pensamiento que pueden apoyarse sobre las representaciones externas de los objetos matemáticos.
3. El *razonamiento inductivo* es un medio para la realización de la actividad de *generalizar*.
4. Los *sistemas de representación semiótica* apoyan los procesos del razonamiento inductivo en matemáticas.

Una vez que se había definido el contenido matemático a tratar, el diseño de la actividad consistió en delimitar los componentes estructurales de la actividad en relación con los procesos del razonamiento inductivo, y seleccionar los sistemas de representación relativos al razonamiento inductivo y la generalización de patrones cuadráticos.

***Delimitación de los componentes de la actividad***

En la Teoría de Leontiev (1984), la unidad sobre la que se estructura la actividad son las acciones, las cuales están subordinadas al logro del objetivo o resultado que se pretende alcanzar (Figura 1). Y las tareas son las condiciones para la realización de las acciones. Bajo esta consideración, para definir las tareas de la actividad se procedió a delimitar el objetivo de la misma y a la identificación de las acciones ligadas a su consecución.

El motivo u objeto de la actividad es la generalización, en específico se trata de generalizar patrones cuadráticos, no solo a nivel empírico sino estructural (Bills & Rowland, 1999), es decir, con base en el uso de las relaciones y los procedimientos que subyacen en la estructura de ecuaciones cuadráticas. El objetivo consiste en generalizar relaciones de variación lineal entre cantidades, con expresiones algebraicas de la forma $y = ax^2 + c$ (con $a, c \in \mathbb{Z}$), a partir de su representación figural y numérica.

Debido a que, las acciones de la actividad deben estar vinculadas al objetivo de la misma, se dispuso que las acciones estén asociadas a los procesos del razonamiento inductivo necesarios para generalizar, quedando establecidas como sigue:

*Acción 1*. Observación de una regularidad $(A_1)$.
*Acción 2*. Reconocimiento y establecimiento de un patrón $(A_2)$.
*Acción 3*. Formulación de una conclusión o regla general $(A_3)$.

De este modo, el tránsito de una acción a la siguiente daría cuenta de un cambio en el razonamiento de los profesores. Para esclarecer los posibles procedimientos para la ejecución de las acciones anteriores, se consideraron las siguientes operaciones (O) necesarias para la realización y conexión de los procesos inductivos:

$\boldsymbol{O_1}$: ***Comparar***. El proceso de observar regularidades se basa en la comparación entre un conjunto de elementos u objetos con la intención de reconocer las similitudes y diferencias entre estos (Klauer, 1996). A su vez, esta operación requiere de la separación mental de algunas características y propiedades de un todo, es decir, análisis.

$\boldsymbol{O_2}$: ***Relacionar***. El proceso de establecer un patrón matemático precisa reconocer la relación invariante entre instancias o casos particulares. Involucra identificar y representar las relaciones entre números y variables que subyacen en la regularidad observada en un conjunto de casos.

$\boldsymbol{O_3}$: ***Abstraer***. El proceso de formular una generalización requiere aislar la característica intrínseca a los casos particulares analizados y extender el patrón a una clase total de casos, por tanto, implica abstraer lo general. Al respecto, Dörfler (1991) enfatiza el papel de la abstracción para reconocer y describir relaciones invariantes, así como el uso de símbolos (verbales, icónicos, algebraicos,…) como medios para la abstracción y la generalización.

***Sistemas de representación***

Las ecuaciones cuadráticas, como parte de la estructura de las funciones polinomiales de segundo grado, se pueden expresar en sistemas de representación en lenguaje verbal, gráfico, pictórico (por ejemplo, configuraciones geométricas o de figuras), numérico o simbólico algebraico (Cañadas y Castro, 2013).

El proceso de razonamiento inductivo involucra obtener una regla general a partir de analizar y relacionar casos particulares. En el trabajo con ecuaciones de la forma $y = ax^2 + c$, para valores de $a$ y $c$ pertenecientes al conjunto de números enteros, los casos particulares corresponden a los valores que pueden asumir las variables $x$ e $y$. Para mediatizar el razonamiento inductivos de los profesores, se consideró que los casos particulares pueden ser expresados de manera numérica, geométrica o verbal; y las expresiones generales de manera algebraica o verbal.

Con base en la delimitación de los componentes de la actividad en relación con el proceso de desarrollo del razonamiento inductivo, la elección del contenido matemático y de los sistemas de representación a utilizar, se diseñó una actividad de generalización inductiva. Se denominó de esta manera porque demanda generalizar razonando inductivamente.

***Actividad III – Parte 1: Secuencias de figuras y puntos***

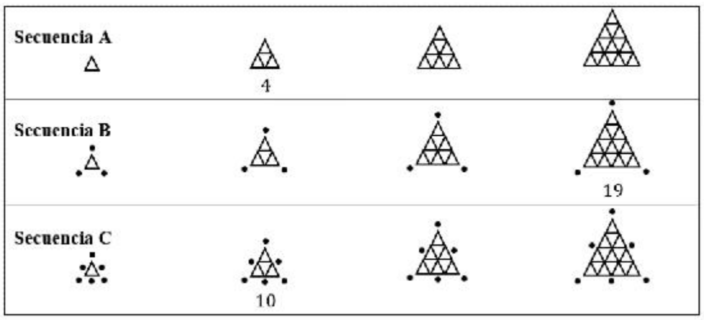
En la actividad (Figura 6.5) se presenta una situación con secuencias de valores representados figural y numéricamente, con la intención de que los profesores utilicen éstas como signos para fijar la atención en lo variable y lo constante para la generalización de un comportamiento cuadrático. Dichos signos se esperaba que fungieran como mediadores para dar sentido e interiorizar lo cuadrático.

En la situación se muestran tres secuencias (A, B y C) de figuras formadas por triángulos y puntos, tales que la cantidad de objetos en la figura de cada secuencia siguiera un comportamiento cuadrático. Debajo de algunas figuras se indicó el total de objetos que la conforman. Para llevar a cabo el proceso de generalización en la actividad, se propusieron tareas ligadas a las acciones mentales (o procesos) del razonamiento inductivo ($A_1, A_2$ y $A_3$).

El objetivo de la actividad es: *generalizar relaciones de variación lineal entre cantidades en situaciones de variación discreta, con expresiones algebraicas de la forma* $y = ax^2 + c$ *(con* $a, c \in \mathbb{Z}$*), a partir de su representación figural y numérica*.

**Instrucción.** A continuación, se presenta una situación sobre relaciones numéricas. Lea y realice lo más detallado posible lo solicitado en cada inciso.

**Situación.** Las siguientes secuencias de figuras están formadas por triángulos y puntos. Debajo de algunas figuras, se indica el total de objetos que la conforman.




1. Determine cuál de las tres secuencias tiene una figura conformada por exactamente 150 objetos (triángulos y puntos). Indique la posición que ocupa esa figura en dicha secuencia.
2. En la siguiente tabla, se muestra la cantidad total de objetos que conforman las figuras de una cuarta Secuencia D y que guarda cierta relación con las anteriores.

| **Posición** | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| **Cantidad total de objetos** | 14 | 21 | 41 | 54 |

   a) Describa un método para saber la cantidad total de objetos que deben corresponder a la figura cuya posición sea $n$, en la Secuencia D.
   b) Proponga el modelo algebraico en el que se sintetiza el método expuesto en el inciso a).

3. Genere una quinta secuencia de números o figuras que sea equivalente a las tratadas en esta Actividad.

**Figura 6.5**. Actividad III – Parte 1: Secuencia de figuras y puntos (Sesión 3).

Las acciones y operaciones que subyacen en la actividad para generalizar inductivamente, se espera sean interiorizadas por los profesores por medio de las acciones externas ejecutadas en las tareas. Las acciones (A) y operaciones (O), así como los productos que se prevé sean realizados por los profesores en cada tarea se describen a continuación:

**Tarea 1.** Determine cuál de las tres secuencias tiene una figura conformada por exactamente 150 objetos (triángulos y puntos). Indique la posición que ocupa esa figura en dicha secuencia.

La Tarea 1 está orientada por la acción $A_1$: Observar regularidades. Su realización está prevista con base en la operación de comparar ($O_1$), descomponiendo las figuras de cada secuencia y analizando la cantidad de objetos en cada una, para identificar lo que varía y características comunes en las figuras de una misma secuencia o entre secuencias, por ejemplo, que la cantidad de triángulos (internos) en cada figura es igual al cuadrado del valor de la posición que ocupa, y que la cantidad de puntos no varía de una figura a otra de la misma secuencia. Se espera como producto de la tarea, la observación de regularidades numéricas o visuales, tal como: la cantidad de objetos en las figuras varía de forma creciente y lineal, conforme aumenta la posición.

**Tarea 2, inciso a.** En la siguiente tabla, se muestra la cantidad total de objetos que conforman las figuras de una cuarta Secuencia D y que guarda cierta relación con las anteriores.

| Posición | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad total de objetos | 14 | 21 | 41 | 54 |

a) Describa un método para determinar la cantidad total de objetos que deben corresponder a la figura cuya posición sea $n$, en la Secuencia D.

La Tarea 2 (inciso a) concierne a la acción $A_2$: Reconocer y establecer un patrón cuadrático, y para su realización se requiere relacionar ($O_2$) la cantidad total de objetos con el valor de la posición de cada figura de la secuencia. Las operaciones que demanda la tarea están orientadas a reconocer la relación invariante entre los casos particulares dados en la tabla, para identificar la relación de variación lineal entre las variables y establecer un patrón cuadrático, el cual es similar al patrón de comportamiento de los elementos de las primeras tres secuencias. El producto esperado en la tarea es la representación del patrón. Una forma verbal de expresarlo es como sigue: la cantidad de objetos en cierta figura es igual al cuadrado del valor de su posición en la secuencia más un valor constante.

**Tarea 2, inciso b.** Proponga el modelo algebraico en el que se sintetiza el método expuesto en el inciso a).

La Tarea 2 (inciso b) está asociada a la acción $A_3$: Formulación de una generalización, se trata de obtener una regla general para calcular la cantidad total de objetos en cualquier figura de la secuencia D. Para esto deberá describirse la relación invariante entre los valores de la tabla dada, sin acudir o depender de la representación figural de los elementos de la secuencia, es decir, precisa hacer trascender el razonamiento más allá de reconocer el patrón en instancias particulares concretas en las secuencias y extenderlo a una categoría que los englobe. De manera que, la generalización se apoya en la operación de abstracción ($O_3$). El producto de la tarea es la expresión algebraica de un modelo o fórmula para determinar la cantidad total de objetos ($C$) que conforman la figura en la posición $n$ en la secuencia D: $C = n^2 + 5$.

| |
|---|
| **Tarea 3.** Genere una quinta secuencia de números o figuras que sea equivalente a las tratadas en esta Actividad. |

La Tarea 3 también está ligada a la acción $A_3$, pero implica la generalización del patrón no una secuencia en particular, sino de las cuatro secuencias dadas. Se centra en valorar la abstracción de la estructura del patrón cuadrático general que subyace en cada una, expresada en su forma general como $y = x^2 + c$, donde $x$ e $y$ son variables, y $c$ es constante.

Para la generalización, se prevé la realización de operaciones encaminadas a extender el patrón a un conjunto de secuencias equivalentes a las tratadas en la actividad. Se emplea el término "equivalentes" en el sentido de compartir el mismo patrón de comportamiento cuadrático o de variación lineal. Asimismo, operaciones para representar un caso particular de la generalización asociada al modelo general $y = x^2 + c$. El producto de la tarea sería una expresión matemática de lo generalizado, la cual puede aludir a un ejemplo concreto del modelo general.

La actividad se implementó en equipos de dos o tres profesores para que interactuaran entre pares, debido al papel de la interacción social para propiciar el tránsito entre un estado de desarrollo cognitivo a otro estado potencial. Al realizar la actividad, según dónde se fije la atención al observar las regularidades en la situación, puede tener lugar el reconocimiento de distintos patrones y maneras para expresarlos. Por otra parte, el uso de representaciones numéricas, verbales, geométricas y algebraicas es importante para sustentar e interiorizar los procesos del razonamiento inductivo en dos momentos de la actividad:

- Durante su resolución, para la representación de las operaciones y acciones externas en cada tarea,
- y en el diálogo realizado posterior a la resolución, para comunicar su razonamiento y llegar a consensos sobre su solución.

*Actividad III – Parte 2*

Una intencionalidad en segundo plano que se tenía con la actividad de generalización inductiva, era acercar a los profesores a una forma de tratamiento didáctico de las ecuaciones cuadráticas basada en la inducción. De este modo, se esperaba también aumentar su sensibilidad al papel del razonamiento inductivo en el aprendizaje de los estudiantes para favorecer la habilidad de generalización. Por tal razón, en la segunda parte de la Actividad III (Figura 6.6), se les propuso hacer un ejercicio meta-cognitivo con la intención de que reflexionaran sobre las acciones en su razonamiento que los llevaron a generalizar. La instrucción se planteó en términos de mencionar lo que en su opinión se requiere para desarrollar la habilidad de generalización, a partir de lo que experimentaron en la resolución de la actividad "Secuencias de figuras y puntos".

> Las tareas en la **Actividad "Secuencias de figuras y números"**, consistieron en obtener un resultado mediante un proceso de generalización.
>
> Bajo este entendido y con base en su experiencia en esta actividad, mencione lo que en su opinión se requiere para desarrollar la habilidad de generalización en matemáticas (particularmente para el concepto de ecuación cuadrática).

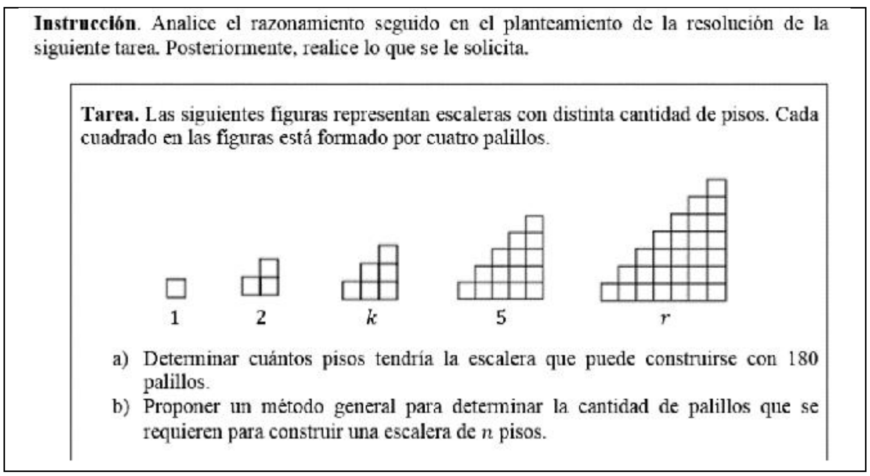
**Figura 6.6**. Actividad III – Parte 2 (Sesión 3).

## Sesión 4: Actividad IV

La Actividad IV se incorporó en el experimento con el objetivo de analizar si los profesores asocian adecuadamente los procesos inductivos con los pasos de resolución de una tarea de generalización inductiva. Esta tarea involucra la generalización de un patrón cuadrático con una expresión de la $y = ax^2 + bx$, con $a \neq 0$, o una equivalente.

Tras la resolución de la Actividad "Secuencias de figuras y números" en la Sesión 3, se detectó que la mayoría de los profesores reconocieron acciones o procesos subyacentes al razonamiento inductivo para llegar a generalizar. No obstante, hubo profesores que se centraron en la particularidad de las tareas y contexto de la actividad, de modo que les faltó abstraer la generalidad de las acciones cognitivas que les permitieron alcanzar la generalización. Por tanto, en la Actividad IV se decidió plantear una tarea de razonamiento inductivo junto con una serie de pasos a seguir para obtener su solución, y solicitar a los profesores que argumenten cuáles procesos inductivos están involucrados en la resolución de la tarea.

La tarea (Figura 6.6) es una adaptación de la propuesta en la Actividad II, sobre la construcción de escaleras con palillos. La adaptación consistió en incluir dos casos particulares más, representados figuralmente con escaleras de cinco y siete pisos, así como las literales $k$ y $r$ para denotar el número de pisos de tales escaleras (Figura 6.7). Estas figuras y literales se incluyeron para apoyar el reconocimiento de la estructura cuadrática del patrón y su expresión como el producto de factores lineales de una variable o como la relación aditiva de una variable al cuadrado y múltiplos de ésta.


**Instrucción**. Analice el razonamiento seguido en el planteamiento de la resolución de la siguiente tarea. Posteriormente, realice lo que se le solicita.

**Tarea.** Las siguientes figuras representan escaleras con distinta cantidad de pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.



a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de $n$ pisos.

**Figura 6.7.** Tarea de razonamiento inductivo planteada en la Actividad IV (Sesión 4).

Esta tarea se trabajó en este otro formato debido a que, en la versión anterior implementada en la Actividad II, se verificaron dificultades de los profesores para reconocer y expresar el patrón. En la resolución de los profesores, la técnica de las segundas diferencias fue muy socorrida en el análisis de la relación entre valores numéricos, pero solo funcionó hasta el nivel de reconocer que la expresión general requerida era cuadrática; fue insuficiente para establecer el patrón. Por tanto, se optó por modificar la tarea incorporando referentes visuales que fijaran la atención de los profesores en el análisis y la representación del comportamiento cuadrático, y cognitivamente apoyaran el reconocimiento de las relaciones estructurales (multiplicativas y aditivas) entre variables para establecer y generalizar el patrón (Bills & Rowland, 1999; Küchemann & Hoyles, 2009; Rivera, 2010).

En la Tabla 6.5 se muestran los pasos propuestos a los profesores para que analizaran el razonamiento seguido en la resolución de la tarea. El Paso 1 corresponde al proceso de observar una regularidad de manera global: el comportamiento creciente de las cantidades de palillos. El establecimiento del patrón se desglosó en los pasos 2 y 3, reconocer y expresar el patrón cuadrático, respectivamente. El Paso 4 concierne a la formulación generalización, en este se indica la expresión de la regla o ley general del comportamiento cuadrático. Este último paso implica la abstracción del patrón, el cual podría ser señalado por los profesores en el tercer o el cuarto paso, como parte del tránsito entre estos.

**Tabla 6.5.** Solución propuesta de la tarea presentada en la Actividad IV

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
Paso 1<br>
Intervienen dos cantidades variables en la situación:<br>
$p$: cantidad de pisos de la escalera<br>
$c$: cantidad de palillos que conforman la escalera<br>
Haciendo corresponder las cantidades numéricas en una tabla mediante conteo:
<table>
<tr><th>$p$</th><th>$c$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$k$</td><td>18</td></tr>
<tr><td>5</td><td>40</td></tr>
<tr><td>$r$</td><td>70</td></tr>
</table>
Se reconoce un comportamiento creciente en lo figural y en lo numérico. La cantidad de palillos va creciendo conforme aumenta la cantidad de pisos.
</td>
<td>Proceso:</td><td></td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Razón:</td></tr>
<tr>
<td rowspan="2">
Paso 2<br>
Por el hecho de haber una variación con crecimiento exponencial, se analiza la relación entre los valores de $p$ y $c$ en la tercera columna.
<table>
<tr><th>$p$</th><th>$c$</th><th>Factores de $c$</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>$1 \times 4$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>$2 \times 5$</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>18</td><td>$3 \times 6$</td><td>$3 \times m = 18, m = 6$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>28</td><td>$4 \times 7$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>40</td><td>$5 \times 8$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>54</td><td>$6 \times 9$</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>70</td><td>$7 \times 10$</td><td></td></tr>
</table>
Dado el comportamiento numérico de los datos se puede pensar en un modelo cuadrático o variación lineal entre las variables, en correspondencia con el comportamiento figural.
</td>
<td>Proceso:</td><td></td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Razón:</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| **Paso 3**<br>El comportamiento cuadrático queda expresado como el producto de dos factores que varían linealmente:<br>$$\boldsymbol{c = p(p+3)}$$<br>Comprobando que se cumple para $p = 5$:<br>$$p(p+3) = (5)(5+3) = 40 = c$$<br>Por tanto,<br>$$180 = p(p+3)$$<br>$$p^2 + 3\mathrm{p} - 180 = 0$$<br>$$(p-12)(p+15) = 0$$<br>$$p_1 = 12 \text{ o } p_2 = -15$$<br>Dado que en el contexto de la situación la variable $p$ asume valores enteros positivos, entonces con 180 palillos se formará una escalera de $p = 12$ pisos. | **Proceso:**<br>**Razón:** | |
| **Paso 4**<br><br>Para construir una escalera de $n$ pisos se requerirán $c = n(n+3) = n^2 + 3n$ palillos, donde $n \in \mathbb{N}$.<br><br>El modelo que representa la ley general que rige el crecimiento variacional en la situación es de la forma:<br>$$\boldsymbol{y = x(ax+b) = ax^2 + bx,\ a \neq 0}$$ | **Proceso:**<br>**Razón:** | |

Como parte de la Actividad IV, se les presentó a los profesores los procesos involucrados en el razonamiento inductivo acompañados con una descripción breve, pero enlistados de manera desordenada. Se les pidió asociar dichos procesos con los pasos de la solución propuesta y dar la razón de su elección.

Este listado es una ampliación o subdivisión de los procesos inductivos del marco de referencia, que resultó de hacer explícitos los procesos ligados al reconocimiento y la abstracción del patrón, así como la extrapolación de lo generalizado a otras situaciones. Lo anterior se hizo con la intención de formalizar o definir los procesos asimilados por los profesores en la Actividad III, a fin de tener un mayor entendimiento del razonamiento inductivo y sensibilización de lo que implica esta forma de razonar en matemáticas. En el siguiente recuadro se indica la instrucción complementaria de la actividad y la descripción de los procesos:

A continuación, se enlistan procesos que se llevan a cabo en la resolución de tareas de generalización. Leer cada uno detenidamente e indicar en los recuadros anteriores, cuáles de esos procesos se vislumbran en la solución propuesta. Proporcionar la razón de su elección.

A. ***Establecer el patrón.*** Consiste en expresar el patrón en algún sistema de representación. Expresa una conjetura de la aplicación del patrón a otras instancias. La justificación de la validez del patrón puede ser empírica.

B. ***Observación de una regularidad*** a partir de la comparación y el análisis de lo invariante en el conjunto de instancias específicas o casos particulares de la situación.

   Una ***regularidad*** es lo que permanece invariante entre las instancias. Una forma de detectarla es mediante la comparación y el análisis, fijando la atención en: ¿Qué cambia entre las instancias de la situación? ¿Qué permanece invariante?

C. ***Expresar un resultado o conclusión general*** de forma verbal, algebraica u otra, que asocie las instancias analizadas a una totalidad, fenómeno o categoría que las comprenda de acuerdo con el patrón establecido.

D. ***Extender o aplicar lo general*** a otras instancias particulares o situaciones, lo cual implica pasar de lo abstracto a lo concreto, o de lo general a lo particular.

E. ***Reconocer un patrón*** mediante el análisis y establecimiento de una ***relación matemática*** entre las instancias dadas y otras.

   En el análisis de la relación entre variables el patrón representa la forma de variación o comportamiento de las variables en la situación. Cuando se trabaja solo con valores numéricos de una situación, suele dificultarse el reconocer el patrón de comportamiento de esos valores, si no se tiene algún un marco de referencia para interpretar lo analizado.

   Cabe aclarar que el patrón no es en sí lo que se repite en la situación, más bien, es la relación o estructura matemática que describe la forma en que se repite o que describe la regularidad en el comportamiento de los valores. De manera que, el patrón de los valores 1, 4, 7, 10, … es *lineal*, mientras que el comportamiento de los valores 1,4,9,16, ... obedece a un patrón *cuadrático*.

F. ***Abstraer el patrón*** a través de descontextualizarlo de la situación y de la particularidad de las instancias en las que se reconoció.

En esta actividad se espera que, si los profesores reconocen y representan la variación lineal como una característica intrínseca de los patrones cuadráticos, amplíen su significado de la ecuación cuadrática y fortalezcan su razonamiento inductivo para generalizar patrones asociados a la estructura $y = ax^2 + bx$. Además, se prevé que los profesores asimilen los procesos inductivos con mayor claridad y los interpreten en términos de los pasos para resolver la tarea de naturaleza inductiva.

## Sesión 5: Actividad V

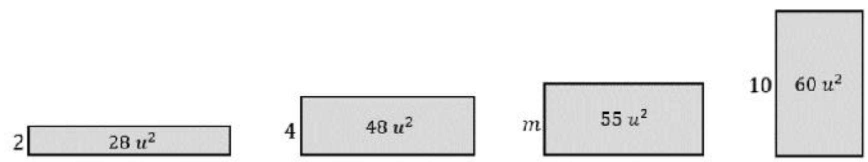
En la sesión 5 se llevaron a cabo dos actividades (V y VI) correspondientes a la Etapa C del TDE, la cual consiste en una evaluación sumativa o semi-sumativa para determinar en qué medida el diseño instruccional en el experimento condujo al logro del objetivo o resultado esperado (Nieveen & Folmer, 2013; Plomp, 2013). En este caso, las actividades se implementaron para evaluar el cambio en el razonamiento inductivo de los profesores y si había una transacción al rediseño de una actividad de generalización de un comportamiento cuadrático.

El objetivo de la Actividad V consistió en verificar si hubo un cambio en el estado del razonamiento inductivo de los profesores al resolver de una actividad de generalización. Este cambio fue medido en términos de un tránsito entre los procesos inductivos, de la observación de regularidades al establecimiento de un patrón, y de este a la formulación de la generalización. Así, se examinó si los profesores habían asimilado estos procesos en la Etapa B independientemente del contexto en que trabajaron. Esto es, si los podían extrapolar de la situación de variación discreta, en la que inicialmente disponían de un referente visual para reconocer el patrón cuadrático, a un contexto más abstracto y de variación continua.

Por consiguiente, para la Actividad V (Figura 6.8) se siguieron las directrices de la tarea de razonamiento inductiva denominada “Medida del área de una familia de rectángulos” (ver Capítulo 5), dado que trataba con una situación de variación continua. Empero, se estructuró de acuerdo al formato de la actividad de secuencia de figuras y puntos, para analizar si los profesores establecían relaciones matemáticas y abstraían el patrón general para conectar los procesos inductivos.

**Instrucción**. A continuación se presenta una tarea matemática para su resolución y análisis. Por tanto, es importante que plantee y justifique cada paso del procedimiento que siga para determinar la solución.

**Tarea**. De una familia de rectángulos, se dispone la siguiente información de las medidas de la altura (indicada a la izquierda de cada uno) y el área de cuatro rectángulos:




a) Determine la medida de la altura y la base del rectángulo cuya área mide 63 unidades cuadradas.

b) A partir de dicha información, proponga un modelo o método con el cual sea posible determinar la medida del área de cualquier rectángulo en esa familia.

c) En la siguiente tabla, se muestran las medidas de la altura ($h$) y el área ($A$) de un conjunto de rectángulos:

| $\boldsymbol{h}\ (cm)$ | 5 | 7 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A}\ (cm^2)$ | 45 | 77 | 96 | 192 |

Formule un modelo algebraico para determinar la medida del área del rectángulo perteneciente a ese conjunto, cuya altura mide $x$ unidades.

**Figura 6.8.** Actividad V – Etapa C: Categoría cognitiva (Sesión 5).

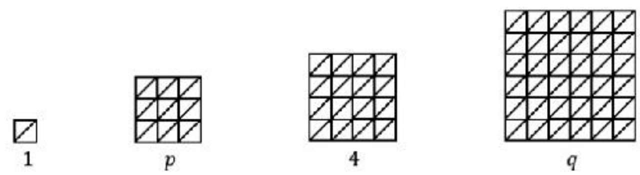
## Sesión 5: Actividad VI

La Actividad VI se utilizó para evaluar el cambio cognitivo docente en la categoría didáctica. Esta consistió en rediseñar una actividad sobre la ecuación cuadrática basada en lo inductivo, con el objetivo de identificar qué procesos involucrados en el razonamiento inductivo consideran los profesores en el rediseño y los criterios de su elección. Para hacerlo, se les presentó a los profesores una situación de estructuras con triángulos en la que se requería determinar una expresión general de la cantidad de segmentos que conforman cualquier estructura (Figura 6.9). Las figuras y valores dados en la situación representaban instancias específicas de un patrón cuadrático.

**ACTIVIDAD**

**Objetivo de la actividad:** *Determinar ecuaciones cuadráticas de la forma* $y = ax^2 + bx$ *(con* $a,\ b \in \mathbb{R}$*), mediante la generalización de relaciones de variación lineal entre cantidades representadas figural y numéricamente.*

**Instrucción**. Las siguientes figuras de una secuencia, están formadas por los segmentos de estructuras triangulares y debajo de cada una se indica su posición en la secuencia.




Realizar lo que se solicita a continuación en cada tarea, para formular un modelo que permita determinar la cantidad de segmentos en cada figura según su posición en la secuencia.

A. Formula el modelo algebraico que represente la cantidad de segmentos que contiene la figura en la posición $x$.
B. Determina la cantidad de segmentos de la figura en la posición 10, sin calcular los que contienen las figuras en las posiciones 7, 8 y 9.
C. Determinar la posición de la figura constituida por 616 segmentos.
D. En la tabla de abajo, completa las cantidades de segmentos $(c)$ que contienen las figuras según la posición $(n)$ que ocupan en la sencuencia.

| $n$ | $c$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | |
| $p$ | 33 |
| 4 | 56 |
| 5 | |
| $q$ | |

**Figura 6.9.** Situación de la Actividad VI – Etapa C: Categoría didáctica (Sesión 5).

El rediseño consistía en re-ordenar las tareas de la actividad bajo una lógica inductiva e incluso, eliminar, agregar o modificar alguna(s) tarea(s). Además de rediseñar la actividad dada, a los profesores se les solicitó proporcionar la razón de los cambios efectuados en ésta En la Figura 6.10 se muestra la instrucción de la Actividad VI.

**Instrucción.** En la hoja anexa, se presenta una actividad sobre el concepto ecuación cuadrática, la cual está compuesta por un conjunto de tareas de razonamiento inductivo. Nótese que hay ciertas fallas en el diseño de la actividad relativas al orden de las tareas.

Rediseñar la actividad replanteando el orden de las tareas de tal manera que se ajusten a un esquema o lógica de razonamiento inductivo. Puede quitar, agregar o modificar tareas. Proporcione la razón de los cambios efectuados.

| Tarea | Letra | Razón |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

**Figura 6.10.** Instrucción de la Actividad VI – Etapa C: Categoría didáctica (Sesión 5).

Las seis actividades antes presentadas se utilizaron como instrumentos para recoger datos en el experimento. Los procedimientos para la recolección de información se indican en el apartado siguiente.

## 6.3. Recolección de datos en las sesiones

Se recolectó información de tres fuentes: las respuestas escritas de los profesores a cada actividad, las transcripciones de los registros del audio en los momentos de discusión grupal de las respuestas, y las notas de la instructora y de los colaboradores sobre lo observado en cada sesión.

Al momento de recolectar las hojas de trabajo de los profesores se detectaron algunas respuestas sin justificar. En estos casos, tanto como fue posible, la instructora y los colaboradores cuestionaron a los profesores a fin de que clarificaran, justificaran o ampliaran su respuesta. Complementariamente, las notas y los registros en audio de las respuestas a tales cuestionamientos formaron parte del conjunto de datos de la investigación.

En mayor o menor medida, en ambas categorías de datos (cognitiva y didáctica) de la investigación, se empleó el software MAXQDA (Versión 2018.2) para la organización, categorización, búsqueda de patrones y diferencias en los datos, y obtención de estadísticas.

# Capítulo 7

## Desarrollo del experimento y resultados parciales por sesión

Este capítulo comprende la ejecución del experimento para promover y analizar un cambio cognitivo docente respecto al razonamiento inductivo. Se describen las sesiones de trabajo con los profesores, indicando el objetivo investigativo y el desarrollo de cada una. Asimismo, se presenta el análisis de los datos recabados por sesión y, con base en las conclusiones de estos análisis, se exponen las decisiones y consideraciones que se tomaron en cuenta para planificar cada sesión subsiguiente.

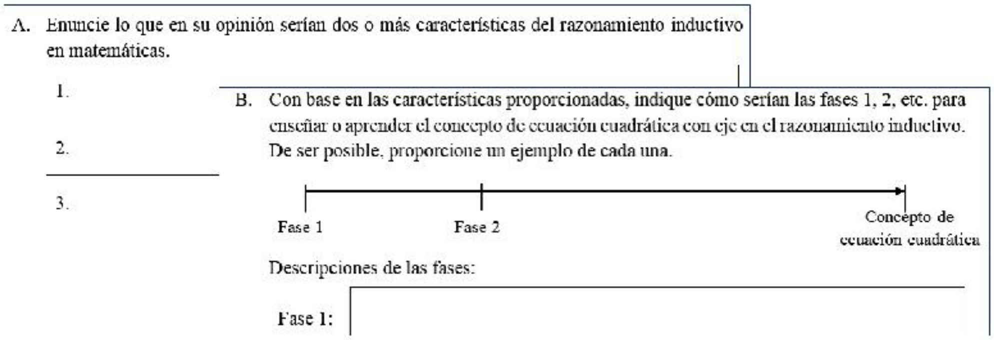
### 7.1. Sesión 1: Etapa A - Categoría didáctica

Objetivo: *Caracterizar la percepción de los profesores del razonamiento inductivo e identificar cómo lo interpretan en la enseñanza de un contenido matemático.*

En la primera sesión se introdujo a los profesores de secundaria al tema del razonamiento inductivo, invitándolos a cuestionarse qué es y cómo lo interpretan en la enseñanza de un concepto matemático, tal como ecuación cuadrática. La duración de la sesión fue 1:30 horas. En el marco de la investigación, el propósito fue recabar información acerca de la sensibilidad didáctica a esta forma de razonamiento en los profesores.

#### 7.1.1. Desarrollo de la sesión 1

La sesión se organizó en dos momentos. En el primero, los profesores respondieron las dos tareas, A y B, de la Actividad I (Figura 7.1) por escrito y de manera individual. Se inició con la implementación de la Tarea A, en la que se pidió enunciar al menos dos características del razonamiento inductivo en matemáticas. Esta fue respondida en un tiempo de 12 minutos. Inmediatamente después de responderla, se entregó a los profesores la Tarea B.


A. Enuncie lo que en su opinión serían dos o más características del razonamiento inductivo en matemáticas.

1.

2.

3.

B. Con base en las características proporcionadas, indique cómo serían las fases 1, 2, etc. para enseñar o aprender el concepto de ecuación cuadrática con eje en el razonamiento inductivo. De ser posible, proporcione un ejemplo de cada una.



Descripciones de las fases:

Fase 1:

**Figura 7.1.** Tareas A y B de la Actividad I.

En esta segunda tarea, los profesores mostraron inquietudes respecto a si la sentencia se refería a todo el concepto y qué tan extenso podría ser su respuesta. Se aclaró que las fases propuestas no se refieren a la enseñanza de todo el concepto, y que se enfocaran en un objetivo específico de aprendizaje relativo al mismo. Se les enfatizó que describieran las fases como si le sugirieran a algún compañero una forma de enseñar algún aspecto de la ecuación cuadrática razonando inductivamente, indicando qué es lo primero que harían o dirían a los estudiantes, y luego lo segundo, hasta llegar al aprendizaje pretendido sobre ese concepto. Se les recalcó que podían utilizar hojas aparte para dar mayor detalle de cada fase o incluir algún ejemplo. La tarea se realizó durante 35 minutos.

En un segundo momento de la sesión, se solicitó a los profesores que compartieran sus respuestas de la actividad con el grupo, a través de participaciones voluntarias, para generar un espacio de diálogo, entre instructora y profesores. En este espacio, la discusión estuvo dirigida a profundizar en qué es el razonamiento inductivo y a indagar cómo los profesores enseñarían un concepto matemático bajo esta forma de razonamiento. En medio del diálogo, surgió el cuestionamiento de un profesor que detonó un tercer tópico de discusión: qué es una ecuación cuadrática. A la vez, estas discusiones sirvieron para indagar con mayor detalle en algunas respuestas escritas que eran imprecisas o generales.

La dinámica para discutir las respuestas a la Tarea A fue solicitar a los profesores que mencionaran una característica del razonamiento inductivo, sin repetir la dada previamente por algún compañero, con el fin de tener diversidad de respuestas y recabar mayor cúmulo de características.  Las ideas que predominaron en los profesores giraron en torno al paso de algo particular a lo general y en ir de los conocimientos previos de los estudiantes, mediante interrogatorio, para llegar a una definición. Después del intercambio de respuestas, la instructora intervino para retomar algunas de éstas y exponer la siguiente definición de razonamiento inductivo: *"Capacidad cognitiva para inferir leyes o conclusiones generales por medio de la observación y conexión de instancias particulares de una clase de objetos o situaciones".*

Al respecto de lo anterior, se preguntó a los profesores cómo transitar de lo particular a lo general, para indagar si conocen los procesos involucrados en el razonamiento inductivo. El silencio que guardaron los profesores y su reacción dio la impresión de que no se habían cuestionado sobre ello. No obstante, algunos externaron ideas para intentar responder la pregunta. Estas ideas aludieron a la verificación de una conjetura más que al proceso de inducción. Para cerrar la discusión, la instructora mencionó las características del razonamiento inductivo como método de la ciencia y como vía de enseñanza de las matemáticas. Destacó que ha sido una forma de generación de conocimiento científico, que parte de la observación y experimentación de hechos particulares para llegar a descubrir principios o resultados generales.

Para recabar información sobre las respuestas a la Tarea B, se solicitó a los profesores que explicaran cómo le sugieren a sus compañeros enseñar la ecuación cuadrática siguiendo una lógica inductiva, enfatizando qué sería lo primero que ellos harían o presentarían a los estudiantes, y después cuáles serían las siguientes fases o pasos. De este modo, en la sesión se inició un proceso de sensibilización al razonamiento inductivo al cuestionar acerca de sus características y reflexionar cómo sería la enseñanza de dicho concepto con eje en la inducción.

### 7.1.2. Análisis de datos sobre la sensibilidad didáctica

Los datos recolectados en esta sesión se analizaron para hacer un diagnóstico general de la sensibilidad didáctica de los profesores al razonamiento inductivo en matemáticas. Para el análisis, se transcribieron las respuestas escritas y el audio de las respuestas proporcionadas a las tareas al comunicar su pensamiento en voz alta. El análisis se llevó a cabo en dos etapas:

(1) Se generaron categorías de la percepción de los profesores del razonamiento inductivo utilizando el método del análisis temático y tomando como datos las respuestas escritas y orales a la tarea A.

(2) Para analizar cómo interpretan el razonamiento inductivo en la enseñanza del concepto ecuación cuadrática, se asociaron las respuestas dadas por cada profesor en la tarea B a las categorías de percepción antes generadas y se contrastaron con el marco conceptual del razonamiento inductivo en este trabajo.

**<u>Etapa 1: Análisis temático de la percepción del razonamiento inductivo</u>**

Para identificar patrones de significados en las características comunes que los profesores atribuyen al razonamiento inductivo se realizó un análisis temático de los datos correspondientes a la tarea A. Los resultados de este análisis se presentan en términos de las categorías de percepción de los profesores de dicho razonamiento.

El análisis inició releyendo las respuestas del cuestionario de la Tarea A y las transcripciones de audio, y luego se codificaron en el software MAXQDA (Figura 7.2). Para hacer la codificación, se identificaron extractos de respuestas con frases claves o características del razonamiento inductivo mencionadas por los profesores y se les asignó un código.

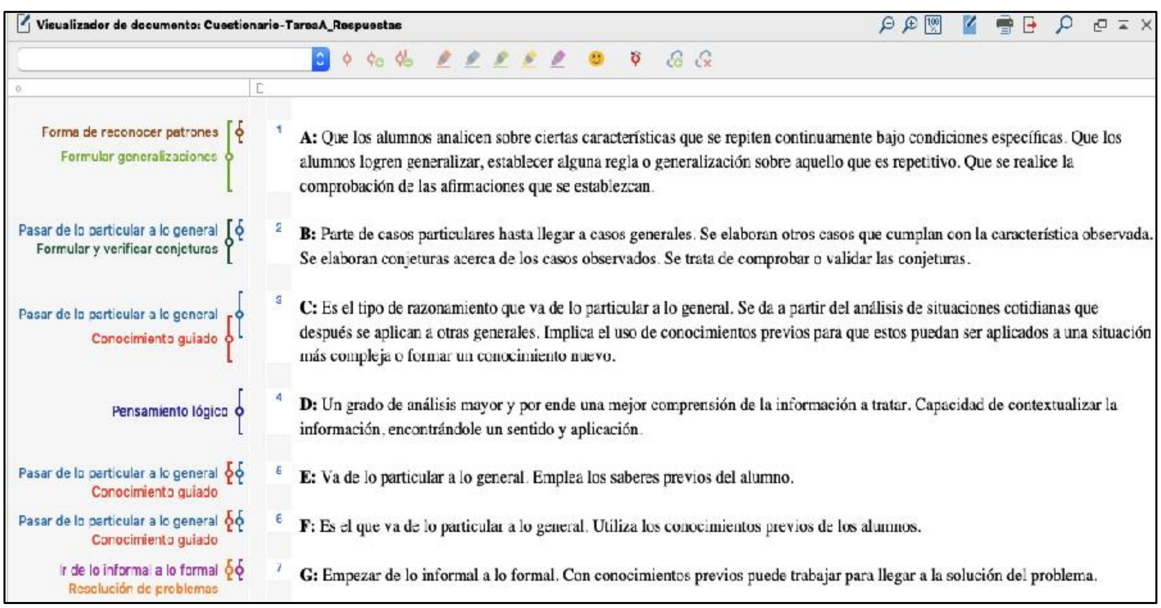



**Figura 7.2.** Pantalla de la codificación de datos de la Tarea A (Software MAXQDA).

Se generaron nueve códigos (Figura 7.3) de las características atribuidas al razonamiento inductivo. Los códigos con mayor frecuencia fueron los concernientes a la idea del razonamiento como “Conocimiento guiado” (8 profesores) y “Pasar de lo particular a lo general” (9 profesores). Cabe aclarar que en algunos casos, la respuesta de un profesor aludía a percepciones diferentes del razonamiento inductivo. En estos casos la respuesta incluía más de un código y, en consecuencia, el número de extractos codificados resulta mayor que el número de participantes.

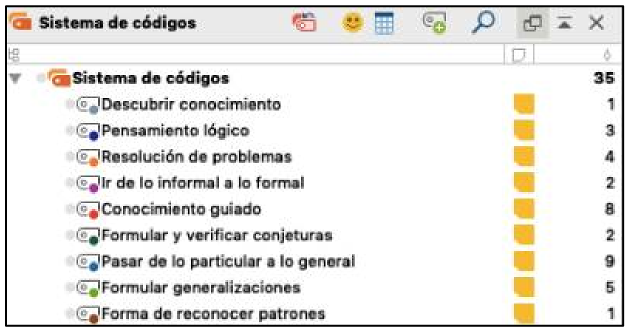



**Figura 7.3.** Códigos generados de las características del razonamiento inductivo (Actividad I).

En la Tabla 7.1 se muestra parte del listado generado en el programa con los extractos de respuestas agrupados por código.

**Tabla 7.1.** Listado parcial de extractos agrupados por código (Actividad I).

| Color | Nombre del documento | Código | Segmento |
|---|---|---|---|
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Implica el uso de conocimientos previos para que estos puedan ser aplicados a una situación más compleja o formar un conoc nuevo. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Emplea los saberes previos del alumno. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Utiliza los conocimientos previos de los alumnos. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Se piensa en ello como parte de un conocimiento guiado |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Preguntas introductorias. Logran el razonamiento inicial de los alumnos al tema y pueden visualizarse los conocimientos prev Preguntas guía. Durante el proceso de la clase pueden surgir dudas sobre cómo llevar a cabo alguna parte y pueden realizarse preguntas que fuercen el razonamiento del alumno. Con el razonamiento inductivo se puede lograr que el alumno se apropie conceptos, momentos, procedimientos personales. Al guiar con preguntas se movilizan saberes y recuerdos previos y se prop deducciones propias que les son más fáciles de apropiarse. |
| ● | Audio-TareaA | Conocimiento guiado | Básicamente vas creando hipótesis y hay que comprobarlas, y ayuda por ejemplo a que los alumnos empiecen a especular y a un poco más, de que a veces no toda la afirmación que te digan va a ser cierta, entonces sirve para crear personas que no van nada más lo que tu le digas, si no que van a comprobar lo que tu le dijiste. Eso igual es bueno, en todas las asignaturas, no sol matemáticas en especial. |
| ● | Audio-TareaA | Conocimiento guiado | Una de las características es empezar a realizar preguntas claves para los ejercicios y empezar a introducir a los alumnos al tem preguntas claves] Me refiero que cuando tenemos un texto, las ideas principales, escoger esas palabras principales y decirle a muchachos, para ustedes qué es eso. Recuerdan cuando vimos tal tema la semana pasada, qué creen o de qué manera podem aplicar lo que vimos la semana pasada en esta situación. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Conocimiento guiado | Darle un ejercicio y con base a sus conocimientos previos saquen su propio conocimiento. Realizar una lluvia de ideas para co que el alumno sabe. |
| ● | Audio-TareaA | Descubrir conocimiento | Enseña al alumno a descubrir, a construir, el tema que estemos trabajando. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Forma de reconocer patrones | Que los alumnos analicen sobre ciertas características que se repiten continuamente bajo condiciones específicas. |
| ● | Cuestionario-TareaA_Respuestas | Formular generalizaciones | Que los alumnos logren generalizar, establecer alguna regla o generalización sobre aquello que es repetitivo. Que se realice comprobación de las afirmaciones que se establezcan. |

Se revisaron los códigos y extractos agrupados para buscar temas o categorías de la percepción del razonamiento inductivo de los profesores. Por ejemplo, se relacionaron los códigos “Forma de reconocer patrones”, “Formular generalizaciones” y “Formular y verificar conjeturas” para formar una categoría referente a la formulación y verificaciones de generalizaciones.

Tras el proceso recursivo de revisión de temas en relación con los códigos y el conjunto total de respuestas, se definieron y nombraron cinco categorías, las cuales se describen a continuación y se ilustran con extractos de respuestas de los profesores.

**Categoría A:** *El razonamiento inductivo es percibido como proceso cognitivo*

En esta categoría los profesores perciben al razonamiento como un proceso que permite pasar de instancias particulares (ideas, casos particulares o situaciones) a la inferencia de una conclusión o resultado general. En esta categoría se agruparon las respuestas que aluden al razonamiento inductivo como un proceso cognitivo, teniendo como referencia la definición dada por Haverty et al. (2000) y la asumida en este trabajo. Por ejemplo:

**Profesor B:** Parte de casos particulares hasta llegar a casos generales. Se elaboran otros casos que cumplan con la característica observada. Se elaboran conjeturas acerca de los casos observados.

**Profesor E:** Va de lo particular a lo general…

**Profesor N:** Es un tipo de razonamiento que consiste en ir de ideas particulares hacia ideas generales. Partir de ideas concretas a ideas en general. Con base en experiencias de los resultados obtenidos, generalizar.

**Categoría B:** *El razonamiento inductivo es percibido como formular y verificar generalizaciones*

Algunos profesores asociaron el razonamiento inductivo con la realización de generalizaciones y verificarlas. Esta categoría se diferencia de la anterior en que el razonamiento es caracterizado en términos de la generalización como producto del proceso inductivo. Como puede verse en los siguientes extractos, las respuestas de los profesores en esta categoría hicieron referencia a la forma de obtener y la importancia de verificar una generalización.

**Profesor A:** Que los alumnos analicen sobre ciertas características que se repiten continuamente bajo condiciones específicas. Que los alumnos logren generalizar, establecer alguna regla o generalización sobre aquello que es repetitivo. Que se realice la comprobación de las afirmaciones que se establezcan… Creo que puedes establecer una afirmación, la afirmación puede salir mal, también sería después comprobar, si tú ya dijiste que eso se está cumpliendo continuamente, por ejemplo, para los números positivos pasa algo, para los negativos pasa otra cosa, […] prueba que siempre se repite, si encuentras un caso que no lo cumple, pues tu generalización no te va a servir. Como que ir probando si eso de verdad es cierto.

**Profesor B:** Después de ver casos muy particulares, muy concretos, entonces intentar predecir lo que se avecina con respecto por ejemplo a una sucesión, elaborar conjeturas, luego tratar de probarlas. Predecir esas conjeturas, ver si se pueden probar y finalmente llegar a la generalización.

**Categoría C:** *El razonamiento inductivo es percibido como una forma de guiar al conocimiento*

Varios profesores consideran el razonamiento inductivo como una forma de enseñanza guiada, que consiste en partir de los conocimientos previos de los estudiantes para llegar a definiciones o un conocimiento nuevo por medio de preguntas. Esta percepción del razonamiento se encontró en extractos de respuestas como las siguientes:

**Profesora C:** Implica el uso de conocimientos previos para que estos puedas ser aplicados a una situación más compleja o formar un conocimiento nuevo.

**Profesora L**: Darle un ejercicio y con base en sus conocimientos previos saquen su propio conocimiento. Realizar una lluvia de ideas para conocer lo que el alumno sabe.

**Profesora M**: Una de las características es empezar a realizar preguntas claves para los ejercicios y empezar a introducir a los alumnos al tema... Logran el razonamiento inicial de los alumnos al tema y pueden visualizarse los conocimientos previos. Preguntas guía. Durante el proceso de la clase pueden surgir dudas […] y pueden realizarse preguntas que fuercen el razonamiento del alumno […] se puede lograr que el alumno se apropie de conceptos, procedimientos,…

**Categoría D:** *El razonamiento inductivo es percibido como resolución de problemas*

En esta categoría los profesores relacionan el razonamiento inductivo con la resolución de problemas. Es percibido como una estrategia para obtener y argumentar la solución de problemas, pero sin precisar la forma de razonar para ello. Tal percepción se reconoció en los siguientes extractos:

**Profesora H:** Con los conocimientos que cada uno de los alumnos posee, tratar de resolver el problema que se le plantea.

**Profesor P**: Son las premisas que nos permite llegar a la conclusión para la resolución de problemas. Es aquella forma de razonamiento que nos permite argumentar mediante la inducción la resolución de problemas.

**Categoría E:** *El razonamiento inductivo es percibido como pensamiento lógico*

Pocos profesores refirieron al razonamiento inductivo como parte del pensamiento lógico, es decir, como una forma de razonamiento basada en reglas y la realización de procedimientos con orden y coherencia. Al respecto, algunos profesores mencionaron las siguientes características:

**Profesora D**: Un grado de análisis mayor y por ende una mejor comprensión de la información a tratar. Capacidad de contextualizar la información, encontrándole un sentido y aplicación.

**Profesora J**: Surge como parte de un proceso de pensamiento lógico.

**Profesora K**: Pensamiento lógico.

Las categorías A y B de la percepción del razonamiento inductivo de los profesores fueron las más adecuadas a las características de esta forma de razonamiento. Aunque también se percibe como una forma de enseñanza y de resolver problemas matemáticos, las caracterizaciones en estas categorías resultaron incompletas o alejadas de su esencia.

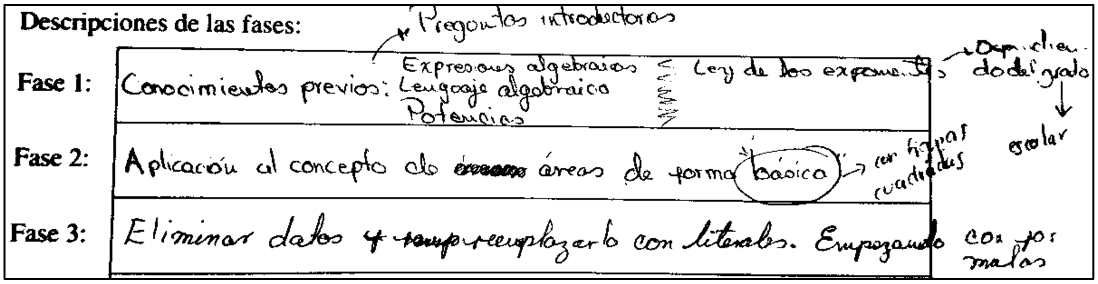
## Etapa 2: Análisis de la interpretación del razonamiento inductivo en la enseñanza

Al analizar las fases descritas por los profesores para la enseñanza de la ecuación cuadrática, se identificaron cuatro formas distintas de interpretar la inducción (Tabla 7.2), de las cuales solamente una corresponde a alguna de las categorías de percepción del razonamiento, la concerniente a la idea de guiar el conocimiento (Categoría C).

**Tabla 7.2.** Formas de interpretación de la enseñanza basada en la inducción

| Forma de interpretación | No. de profesores |
|---|---|
| Guiar el conocimiento | 8 |
| Deductiva | 5 |
| Proceder de lo particular a lo general (Inductiva) | 1 |
| Otra: Icónica | 2 |

Se observó que la mitad de los profesores interpretan que la enseñanza de un concepto con eje en el razonamiento inductivo consiste en guiar el conocimiento, de lo informal a lo formal, principalmente a través de preguntas o con ejemplos. Tal fue el caso de la profesora M (Figura 7.4).



Descripciones de las fases: Preguntas introductorias

Fase 1: Conocimientos previos: Expresiones algebraicas Lenguaje algebraico Potencias Ley de los exponentes Operaciones de 1er grado escolar

Fase 2: Aplicación al concepto de ~~áreas~~ áreas de forma básica con figuras cuadradas

Fase 3: Eliminar datos y ~~reemp~~ reemplazarlo con literales. Empezando con pos malos

**Figura 7.4.** Fases propuestas para la enseñanza de la ecuación cuadrática por la profesora M.

Las fases propuestas por la profesora M están en coherencia con su percepción del razonamiento inductivo como una forma de guiar el conocimiento. Ella enfatiza la importancia de partir de los conocimientos previos de los estudiantes y el uso de preguntas para guiar al planteamiento y definición de una ecuación cuadrática, tal como expresó por escrito y en su intervención:

Profesora M: Recuperación de conocimientos previos, hablarles de que ya trabajaron ecuaciones lineales pero que existen otro tipo de ecuaciones. Se les plantearía entonces una situación problemática de su vida cotidiana, que lleve a representar un cuadrado, para que teniendo la figura y de allá lo relacione con la fórmula del área y plantearle la ecuación, y decirle que esta es una ecuación cuadrática.

En las fases indicadas por el profesor I (Tabla 7.3) también se reconoce una forma de guiar al estudiante de un conocimiento previo (medida del área de un cuadrado) a uno nuevo (concepto de ecuación cuadrática). Si bien podría decirse que de algún modo él sigue una lógica inductiva (de lo particular a lo general), ambos profesores difieren del sentido de la inducción como una forma de enseñanza para la formación de conceptos. Esto es, en su interpretación está ausente favorecer que los estudiantes analicen un conjunto de tareas, representaciones o situaciones particulares para la abstracción de nociones o ideas matemáticas generales relativas a la ecuación cuadrática. Más bien, se particulariza la idea de lo cuadrático asociándola al caso específico del área de un cuadrado.

**Tabla 7.3.** Transcripción de las fases descritas por el profesor I.

| | |
|---|---|
| Fase 1: | *Ejemplificar con un problema que tenga relación con su entorno, que se adecue a una figura cuadrada.* |
| Fase 2: | *Esquematizar la situación para que el alumno identifique la forma cuadrada y pueda realizar la solución.* |
| Fase 3: | *El alumno realice la visualización y lo relacione con la fórmula del área.* |
| Fase 4: | *Representarlo de forma algebraica.* |
| Fase 5: | *Introducir el concepto de ecuación cuadrática.* |

En algunas respuestas, se encontró que existe confusión en la lógica a seguir para una enseñanza basada en la inducción, pues el orden de las fases descritas correspondía a una lógica deductiva. Es decir, iban de una generalidad hacia algo particular, sea un ejemplo, un caso o ecuación específica. De este modo, en las fases de enseñanza de cinco profesores se iniciaba con el planteamiento de fórmulas generales o definiciones de ecuaciones cuadráticas, y se concluía con un ejemplo o resolución de una ecuación cuadrática en particular. Esta lógica se identificó en la respuesta del profesor O:

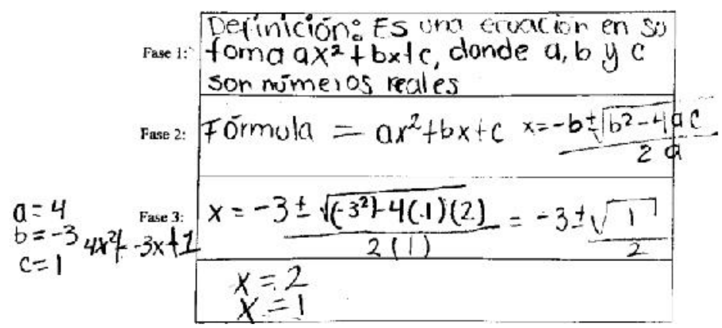



**Figura 7.5.** Fases de enseñanza acordes a una lógica deductiva (Profesor O).

Solamente un profesor describió fases que se correspondan a acciones propias del razonamiento inductivo. Las fases propuestas por el profesor B (Tabla 7.4) se apegan a las referidas por Pólya (1967) para razonar inductivamente. Aunque el profesor no se centra en la ecuación cuadrática ni presenta alguna tarea o ejemplo para ilustrar las fases, en su respuesta sí indica una manera de proceder de lo particular a lo general.

**Tabla 7.4.** Transcripción de las fases descritas por el profesor B.

| | |
|---|---|
| Fase 1: | *Se proporcionan algunos casos o situaciones concretos en los cuales se puedan contabilizar o manipular, visualizar la situación de la que se trate.* |
| Fase 2: | *Se pide que se proporcionen algunos otros casos que cumplan con la característica o propiedad observada.* |
| Fase 3: | *Se trata de predecir que dicha característica o propiedad se cumple para otros casos que no sean tangibles o directamente observables.* |
| Fase 4: | *Se obtiene una regla o fórmula que abarque todos los casos posibles, es decir, una generalización.* |

En el caso de las respuestas de dos profesores no se distingue una lógica inductiva o deductiva en las fases. Estas se enfocaron en tratamientos icónicos de la ecuación cuadrática, basados en la asociación de lo cuadrático con el área de una figura cuadrada o el producto de un número consigo mismo. A manera de ejemplo, en la Figura 7.6 se muestra la respuesta de la profesora J.

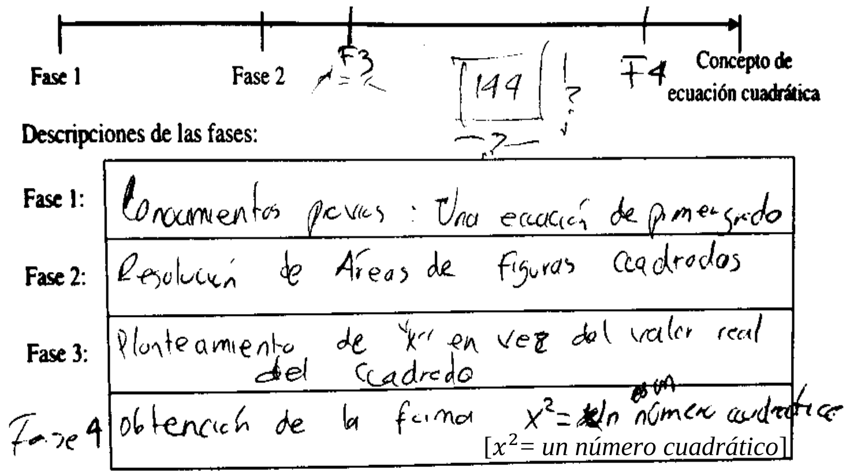



**Figura 7.6**. Fases descritas por la profesora J.

Un tópico de discusión en torno a cómo sería la enseñanza y aprendizaje basada en la inducción fue el contenido matemático en cuestión. Esta discusión permitió detectar que los profesores tienen un entendimiento procedimental de este concepto. Ellos explicaban qué es una ecuación cuadrática en términos sintácticos, es decir, según la forma de la expresión algebraica de este tipo de ecuaciones, tal como el exponente del término de mayor grado en la expresión. Por ejemplo, el profesor A menciona que dicha ecuación se puede definir de la siguiente manera:

**Profesor A:** Creo sí la podríamos definir. Distinguir que tienes una igualdad, distinguir el grado de la ecuación… como que esas características. Que tiene una igualdad y que para una cuadrática el máximo grado de la ecuación es dos.

Bajo esta clase de entendimiento de las ecuaciones, los profesores diferenciaron lo lineal de lo cuadrático con base en el grado de la ecuación, el número de soluciones y la representación gráfica:

**Profesora D:** Una lineal tiene solo una solución y las cuadráticas tienen diferentes soluciones: que no haya solución, que tenga una solución o que tenga dos soluciones…

**Profesor A:** También se pueden diferenciar por sus gráficas. Las gráficas lineales y las gráficas cuadráticas tienen algo que las distinguen… la lineal en forma de recta y la cuadrática en forma parabólica.

Por tanto, el significado de la ecuación cuadrática de los profesores se restringe a la expresión algebraica y representación gráfica de la ecuación. En el discurso de los profesores se excluyeron formas de descripción de lo cuadrático que hagan referencia a la variación o relación entre variables. Esto puede atribuirse a la falta de asociación de lo cuadrático con la variación lineal.

### 7.1.3. Conclusiones de los análisis y consideraciones para la siguiente sesión

La percepción del razonamiento inductivo que predomina en los profesores es la de forma de guiar el conocimiento, seguida de la percepción como proceso cognitivo para transitar de lo particular a lo general. Sin embargo, existe confusión en algunos profesores respecto a la primera de estas percepciones, pues las características mencionadas por ellos refieren a una forma pedagógica de enseñar para guiar a los estudiantes a un conocimiento formal o una definición mediante preguntas clave. Esta idea difiere conceptualmente de la función del razonamiento inductivo como vía de enseñanza para la formación de conceptos, es decir, la función de conducir a la abstracción y generalización de las características esenciales de un concepto mediante experiencias o situaciones particulares (Sosa, Cabañas y Aparicio, 2019a; Sriraman & Adrian, 2004).

Muy pocos profesores perciben a la inducción como un medio para favorecer procesos de generalización y resolución de problemas en matemáticas. Si bien ellos hacen alusión al tránsito de lo particular a lo general como una característica del razonamiento inductivo, ante el cuestionamiento de cómo llevar a cabo este tránsito, el silencio o ausencia de respuestas de su parte refleja falta de claridad sobre los procesos que subyacen a este tipo de razonamiento.

De manera similar, se detectó que los procesos inductivos están ausentes en las fases propuestas por los profesores para la enseñanza de la ecuación cuadrática, excepto en las descritas por el profesor B. En adición, tampoco se halló conexión del conocimiento de los profesores sobre la inducción con la resolución de tareas de generalización. Teniendo en cuenta la falta de referencia a procesos inductivos en lo didáctico, en la sesión 2 se decidió no solo examinar el nivel de razonamiento inductivo de los profesores al resolver una tarea matemática que involucra generalizar un patrón cuadrático, sino también indagar si reconocen la tarea como de tipo inductivo y los procesos requeridos para resolverla.

Por otro lado, respecto al contenido matemático, la ecuación cuadrática es caracterizada por los profesores en términos sintácticos, sin evocar su sentido como una estructura matemática que representa una forma específica de variación o de relación entre variables con comportamiento cuadrático. Esta información resultó relevante en el estudio, porque pone al descubierto la necesidad de fijar la atención de los profesores en la variación lineal, en tanto una característica que define y permite describir matemáticamente a los patrones con comportamiento cuadrático. Dado que el razonamiento inductivo se basa esencialmente en el establecimiento de relaciones, en la actividad para promover el desarrollo del razonamiento de los profesores (Actividad III) se decidió enfocar las tareas en el análisis y representación de la variación lineal.

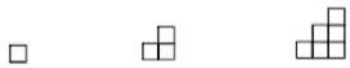
De los datos obtenidos de ambas tareas, se infiere que los profesores tienen poca sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo. En la mayoría de los profesores existe confusión acerca de qué lo caracteriza y está ausente en la forma en que interpretan la enseñanza de ecuaciones cuadráticas. En varios casos se reconoce una inadecuada interpretación de lo inductivo al momento de describir las fases para enseñar tal contenido matemático, incluso algunos se basan en una lógica deductiva. Por consiguiente, a fin de aumentar la sensibilidad didáctica de los profesores y que dispusieran de bases para rediseñar una actividad basada en la inducción, para las sesiones de la Etapa 2 se consideró que su conocimiento fuera confrontado y ampliado mediante actividades en las que reconocieran y articularan los procesos inductivos en contextos de generalización matemática.

## 7.2. Sesión 2: Etapa A – Categoría cognitiva

Objetivo: *Reconocer el estado del razonamiento inductivo de los profesores al resolver una tarea de generalización matemática.*

En esta sesión se aplicó la Actividad II (Figura 6.17) con una doble intencionalidad. Por un lado, hacer un diagnóstico del estado en que se encuentra el razonamiento inductivo de los profesores cuando resuelven una tarea de generalización de un patrón cuadrático. Por otro, tras las conclusiones del análisis de la Sesión 1, indagar si reconocen la naturaleza inductiva de la tarea propuesta y los procesos inductivos requeridos para obtener su solución.

**Problema:** Las siguientes figuras representan escaleras de uno, dos y tres pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.



a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de *n* pisos.

**Instrucción**. Analice la veracidad o falsedad de la afirmación: "*La resolución del siguiente problema implica la movilización del razonamiento inductivo por parte del resolutor*".

1. Indicar si la afirmación es:

Cierta ☐ Falsa ☐

Indique dos o más argumentos de la veracidad o falsedad de la afirmación:

2. Confirme la veracidad o falsedad de la afirmación resolviendo el problema en las hojas anexas.

**Figura 7.7**. Problema e instrucciones de la Actividad II.

El diagnóstico consistió en identificar si los profesores razonan de manera inductiva en la resolución y, de ser así, analizar si llegan a la formulación de la generalización demandada en la tarea o, en caso contrario, detectar en qué proceso inductivo termina o se interrumpe su razonamiento. Debido a que el razonamiento se comunica por medio de representaciones externas (Cañadas, Castro y Castro, 2008) y que solamente interesaba cualificar los procesos usados por los profesores al intentar generalizar, esta información se recabó a través de las respuestas escritas dadas al cuestionario, sin recurrir a una entrevista. No obstante, se tomaron notas sobre los comentarios y preguntas de los profesores durante la realización de la actividad.

### 7.2.1. Desarrollo de la sesión 2

Se implementó la actividad impresa con los profesores y se resolvió por escrito de manera individual. En el inciso 1 de la actividad, se les pidió a los profesores que respondan sobre la veracidad o falsedad de la afirmación, según cómo ellos interpretan y resolverían el problema planteado. Se les invitó a analizar si el problema puede resolverse de manera inductiva, deductiva o siguiendo otra forma de razonamiento matemático. Se les recalcó que, en los argumentos sobre su respuesta, indiquen porqué el problema puede o no resolverse razonando inductivamente, y describan cómo sería su resolución. En el inciso 2, se enfatizó a los profesores que mostraran y justificaran su procedimiento para resolver el problema. La actividad completa fue resuelta en un tiempo máximo de 35 minutos.

### 7.2.2. Análisis de datos sobre el estado inicial del razonamiento de los profesores

Las respuestas al ítem 1 de la Actividad II se clasificaron según el juicio de los profesores sobre el valor de verdad de la afirmación hecha sobre la naturaleza inductiva del problema planteado. Después, se revisó la coherencia entre los argumentos proporcionados y el dictamen del juicio (Afirmación "cierta" o "falsa"). Por ejemplo, se consideró que hay coherencia si al mencionar que la afirmación es cierta, los argumentos hacen referencia a características y procesos subyacentes al razonamiento inductivo, o a la propiedad genérica de este tipo de problemas: "Se requiere inferir una regla general que gobierne a un conjunto de elementos específicos" (Glaser & Pellegrino, 1982). En la Tabla 7.5, se muestran las respuestas que dieron los profesores en el ítem 1.

**Tabla 7.5.** Respuestas escritas de los profesores al ítem 1 de la Actividad II.

| Profesor | Afirmación | Argumentos |
|---|---|---|
| A | Cierta | Depende la manera de resolver es la que me permite afirmar si se trata o no de un razonamiento inductivo. Si se tiene que hacer todos los dibujos, pues no se trata de razonamiento inductivo. Si se halla la regla o fórmula pues sí se utiliza el razonamiento inductivo. |
| B | Cierta | Parte de casos particulares. A partir de conjeturas, intentan probarse las mismas para llegar a casos que no son tangibles y, en el mejor de los casos, a una generalización. |
| C | Cierta | Es razonamiento inductivo porque a partir del análisis de una situación particular, en este caso la figura 1, se puede generalizar y predecir cuántos pisos y palillos tendría. |
| D | Falsa | Considero que no puede ser del todo cierta la afirmación al observar cómo se van formando las siguientes escaleras a la primera y ello propicia a probar diferentes formas de resolverlo. |
| E | Cierta | El alumno deberá recordar conocimientos previos de diversos contenidos como sucesión, ecuaciones cuadráticas, factorización. Se parte de una situación particular para que el alumno llegue a una generalización llamada fórmula cuadrática. |
| F | Cierta | Este tipo de ejercicio propicia que el alumno recuerde los temas vistos y emplee esos conocimientos para resolver este tipo de ejercicios, lo cual permite que se dé un razonamiento inductivo ya que va de lo particular a lo general. |
| G | Cierta | De que la figura conforme crece va aumentando de 2 en 2 y la diferencia entre la [cantidad de palillos de la] 1ª y la 2° escalera es 6. Si estamos yendo paso a paso, decimos que vamos de manera inductiva. |

| | | |
|---|---|---|
| H | Cierta | En la segunda diferencia está la constante dos, es una ecuación cuadrática y se toman los números 4, 6, 2 para buscar la ecuación cuadrática: $2a = 2, 3a + b = 6, a + b + c = 4$ |
| I | Cierta | Induce a descubrir un patrón. Después de descubrir el patrón se puede llegar a la solución más rápido. |
| J | Falsa | Necesitamos traer a nuestra mente conocimientos previos sobre patrones de crecimiento y de potenciación de números. Conocimientos de series. Ambos razonamientos inductivos y deductivos. |
| K | Cierta | Observa cómo avanzan los palillos. Los relaciona con las figuras. Llega a la figura deseada. Trata de poner una "regla". |
| L | Cierta | Con esta actividad el alumno saca sus conjeturas sobre el procedimiento para obtener una respuesta. Esta actividad tiene varias formas para resolverse, puede ser por fórmula o por una sucesión de números. |
| M | Falsa | Puede analizarse y guiarse de forma inductiva, pero en lo particular me costaría trabajo. |
| N | Cierta | --- |
| O | Cierta | Nos lleva de lo particular a un caso general. Se le dieron valores a $n$ para varios casos, comprobando la veracidad de la ecuación cuadrática. |
| P | Cierta | Para hacerlo para el tercer piso, la fórmula cumple si lo hacemos de manera manual. Para hacerlo para el cuarto piso, la fórmula cumple si lo hacemos de manera manual. [el profesor se refiere a la comprobación, con dos casos, de la fórmula que obtuvo para determinar el número de palillos requeridos para construir una escalera de $n$ pisos] |

Trece profesores determinaron que la afirmación "*La resolución del siguiente problema implica la movilización del razonamiento inductivo por parte del resolutor*" es cierta, y tres señalaron que es falsa. De los trece profesores, ocho (A, B, C, E**,** F, K, O, I) proporcionaron argumentos coherentes con su respuesta porque refieren que en el problema se parte de algo particular para llegar a una generalización u obtener una regla general. Por ejemplo, la profesora E menciona: "*Se parte de una situación particular para que el alumno llegue a una generalización llamada fórmula cuadrática*" y la profesora F afirma: "*Este tipo de ejercicios… permite que se dé un razonamiento inductivo ya que va de lo particular a lo general*". El argumento del profesor I se consideró coherente pues, además de expresar que en el problema se requiere inducir, señala uno de los procesos involucrados en ello: "*descubrir un patrón*".

Los argumentos de cuatro de los profesores (G, H, L y P) que dictaminaron la afirmación como cierta, no refieren a características o procesos propios del razonamiento inductivo. Por el contrario, sus argumentos son relativos a estrategias no inductivas para resolver el problema. Tal fue el caso de la profesora H, quien describe la estrategia de diferencias recursivas que utilizó para obtener una expresión cuadrática. El profesor N no dio algún argumento de su respuesta. Los tres profesores (D, J y M) quienes indicaron que la afirmación es falsa, de alguna manera reconocen que el problema es de tipo inductivo, pero consideran que se requieren otros conocimientos o habría otras formas de resolverlo. En el caso de la profesora M, señala que es falsa la afirmación porque a ella misma se le dificultaría resolver el problema razonando de manera inductiva.

En las respuestas del ítem 2, el análisis del razonamiento usado por los profesores para obtener la regla general del patrón cuadrático se llevó a cabo a partir de las representaciones que emplearon para expresar los casos particulares y transitar hacia la generalización. Se consideró que podrían expresar su razonamiento usando representaciones verbales, numéricas, geométricas y algebraicas.

Primero se analizó si los profesores razonaron inductivamente para obtener la solución o siguiendo algún razonamiento distinto. Posteriormente, en el caso de quienes procedieron de manera inductiva, se identificó el estado de su razonamiento con base en los procesos inductivos descritos en el marco de referencia (Capítulo 2). Inductivamente, la regla general del patrón cuadrático podría obtenerse interconectando los siguientes procesos:

a. *Observar una regularidad:* Una regularidad en el crecimiento de las figuras es que la variación del número de palillos ($c$) en relación con el número de pisos ($n$) tiene comportamiento cuadrático. Esta regularidad podía observarse empleando la estrategia de diferencias finitas o con el apoyo visual de las figuras.
b. *Establecer un patrón:* El patrón cuadrático del número de palillos es el cuadrado del valor de la posición que ocupa la figura en la secuencia, más este valor multiplicado por tres. Este patrón se puede reconocer y expresar con casos particulares de manera verbal, figural o numérica.
c. *Formular la generalización.* La regla general puede representarse con alguna de las siguientes expresiones algebraicas u otra equivalente: $c = n^2 + 3n$ o $c = n(n + 3)$.

De este modo se determinó si los participantes llegaron a formular una generalización o solamente hasta observar alguna regularidad (local o global) y/o establecer un patrón. Se obtuvo que catorce profesores usaron razonamiento inductivo para resolver el problema y dos profesores procedieron con un método algebraico. De acuerdo con el método microgenético, se realizó tanto un análisis cuantitativo como cualitativo de los procesos involucrados en el razonamiento inductivo de los profesores. En la Tabla 7.6 se indican los resultados del análisis cuantitativo.

**Tabla 7.6.** Resultados globales del estado inicial de razonamiento inductivo de los profesores.

| **Forma de razonamiento usada en la resolución** | **No. de profesores** | **Estado de razonamiento** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *Observación de regularidades* | *Establecimiento de un patrón* | *Formulación de la generalización* |
| Inductivo | 14 | 9 | 0 | 5 |
| Otro (Método algebraico) | 2 | - | - | - |

Todos los profesores quienes usaron razonamiento inductivo en la resolución del problema, observaron alguna regularidad en casos particulares, pero solamente el razonamiento de cinco de ellos (A, G, D, E y P) trascendió hasta obtener la regla general. Dos de los cinco profesores procedieron mediante un trabajo aritmético y tres con apoyo de las figuras para visualizar el patrón cuadrático.

Nuevamente se verificó que los profesores quienes obtuvieron la regla general del patrón lo hicieron movilizando y conectando los tres procesos inductivos antes señalados. Este fue el caso del profesor A, quien llevó a cabo estos procesos de la siguiente forma:

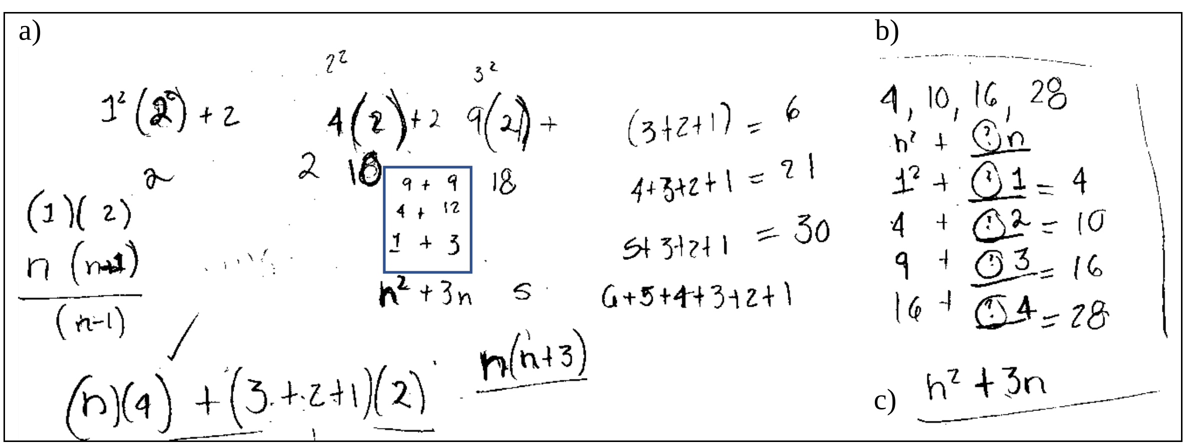



**Figura 7.8.** Solución del profesor A usando razonamiento inductivo.

El profesor A supuso que el número de palillos en la secuencia de figuras tenía un comportamiento cuadrático. Esto lo hizo considerando los casos particulares obtenidos al contar el número de pisos (1, 2, 3 y 4) y de palillos (4, 10, 18 y 28) de las primeras cuatro escaleras, respectivamente. Si bien inició su razonamiento con intentos no sistemáticos de describir este comportamiento con relaciones numéricas, tras el análisis de esas relaciones *observó una regularidad global*: la cantidad de palillos de las primeras tres escaleras era igual al cuadrado de un número más una cantidad (Figura 7.8-a). Al organizar los datos con base en esa regularidad, *estableció* numéricamente *un patrón cuadrático* mediante una estructura aditiva (Figura 7.8-b). Expresó el patrón del número de palillos como la suma del cuadrado del número de pisos ($n$) y un múltiplo de ese número, considerando valores de $n = 1, 2, 3$ y 4. Posteriormente, abstrajo que los segundos sumandos eran múltiplos de tres y *formuló la generalización*, la cual expresó como $n^2 + 3n$ (Figura 7.8-c).

Nueve de los participantes solamente observaron regularidades entre casos particulares, pero no lograron reconocer y expresar algún patrón cuadrático, y tampoco generalizar. La acción inicial de los profesores fue calcular el número de palillos y pisos en las tres primeras escaleras mediante conteo. Estos datos constituyeron los primeros casos particulares que analizaron. Las regularidades fueron observadas por los profesores a través de un trabajo numérico, utilizando la estrategia del cálculo recursivo de diferencias. Con esta estrategia obtuvieron nuevos casos particulares que fueron parte de su análisis y observaron una regularidad local: las segundas diferencias entre la cantidad de palillos de una figura y la anterior son iguales a una constante; y de ahí concluyeron que el comportamiento del número de palillos era cuadrático.

Por ejemplo, la profesora L calculó el número de palillos que formaban las escaleras de uno a doce pisos mediante la estrategia recursiva de diferencias (Figura 7.9) y notó que estos valores podían calcularse con una expresión cuadrática ($an^2 + bn + c$, $n$: número de pisos), sin embargo no pudo determinarla. Ella procedió por ensayo y error para intentar obtener la expresión, sin encontrar alguna que satisfaga simultáneamente distintos valores de $n$. Al cuestionarle qué le dificultó obtener la expresión, al igual que otros profesores en la misma situación, mencionó desconocer cómo obtener la ecuación o fórmula a partir de los números.

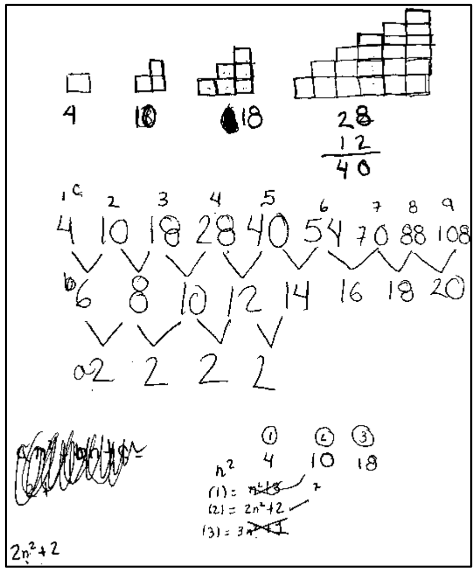



**Figura 7.9.** Proceso de observar regularidades y determinar una regla por la profesora L.

Otros profesores intentaron establecer el patrón cuadrático examinando relaciones numéricas por tanteo, de manera no sistemática, aunque sus esfuerzos fueron infructuosos. Por ejemplo, el profesor N trató de expresar el número de palillos de las escaleras de dos, tres y cuatro pisos explorando relaciones numéricas aditivas y multiplicativas (Figura 7.10), sin mostrar algún orden o referente que guíe su razonamiento.

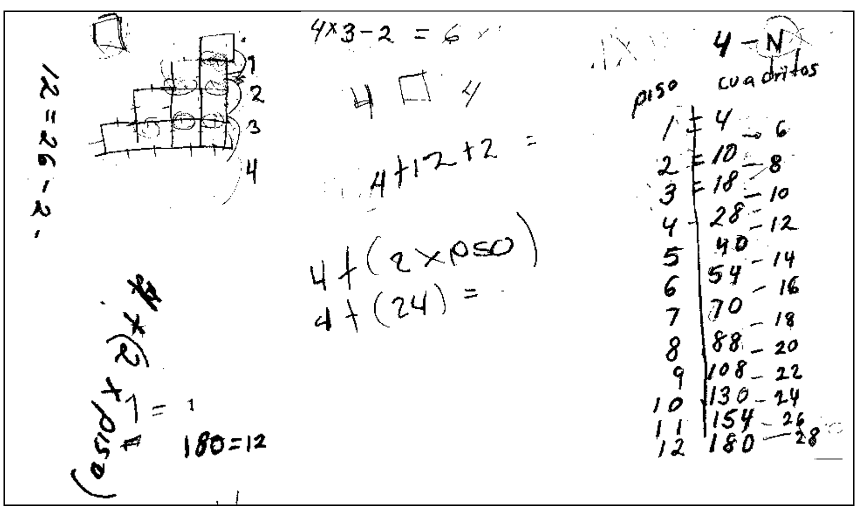



**Figura 7.10.** Observación de regularidades y búsqueda del patrón por el profesor N.

La dificultad para reconocer una estructura matemática que represente el patrón ocasionó que se trunque el razonamiento de varios profesores y no transiten a la formulación de una generalización.

Dos profesores resolvieron el problema de manera no inductiva. Ellos emplearon la estrategia de diferencias y, al percatarse que las segundas diferencias eran iguales a una constante, notaron que se requería determinar una expresión cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ para obtener la solución al problema. Para determinar los coeficientes de la expresión, emplearon un método algebraico basado en el cálculo de diferencias y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Tal fue del procedimiento seguido por la profesora M (Figura 7.11).

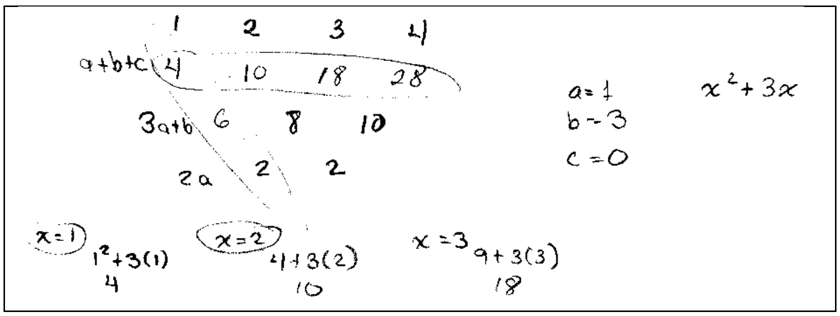



**Figura 7.11.** Solución de la profesora M por un método algebraico.

### 7.2.3. Conclusiones del análisis y consideraciones para la siguiente sesión

Casi todos los participantes identificaron en mayor o menor medida que el problema de la construcción de escaleras con palillos implicaba usar razonamiento inductivo en su resolución. Sin embargo, solamente cinco lograron obtener la regla general allí requerida; más de la mitad de los profesores se quedó en el proceso de observar regularidades. En este grupo de profesores nuevamente se verificó la existencia de dificultades para razonar inductivamente asociadas con el establecimiento del patrón. Aun cuando los profesores reconocieron que la relación entre la cantidad de palillos y el número de pisos podía expresarse con una ecuación cuadrática, carecían de estrategias para expresar el comportamiento cuadrático a partir de valores numéricos.

Este resultado reitera la importancia de favorecer un mayor entendimiento de lo cuadrático en relación con el análisis y representación de la variación lineal, pues los profesores manifestaron dificultades para reconocer relaciones matemáticas que conecten distintos casos particulares y describan el comportamiento cuadrático. Al respecto, llamó la atención la ausencia de expresión de dicho comportamiento mediante el producto de factores lineales u otra estructura equivalente del patrón cuadrático en el problema.

De manera global, se detectó falta de sistematización en el análisis de la solución problema y en la búsqueda de relaciones numéricas para describir el patrón, incluso en los profesores que alcanzaron a obtener la regla general. Por tanto, en la Sesión 3 se decidió trabajar en el desarrollo del razonamiento inductivo de los profesores desde el proceso de observar regularidades, tanto locales como globales, mediante una actividad de generalización de manera inductiva. Para propiciar la sistematización del razonamiento de los profesores, se procuró que en cada tarea de la actividad se promuevan acciones cognitivas relacionadas con los procesos inductivos: comparar, relacionar y abstraer (ver la descripción de la Actividad III en este capítulo).

De este modo, teniendo en cuenta las dificultades presentes en la mayoría de los profesores para razonar de manera inductiva, se decidió experimentar una forma de conectar los procesos inductivos. Ésta consistió en que, para pasar de *observar regularidades* a *establecer un patrón*, en las tareas se demandara reconocer una relación matemática que describa el comportamiento cuadrático de casos particulares. Luego, una vez establecido el patrón, buscar que este se descontextualice de los casos concretos para su abstracción y *formulación de la generalización*.

Adicionalmente, considerando la problemática de establecer patrones cuadráticos a partir de análisis numéricos en los participantes, en la actividad se decidió centrar la atención en el estudio de la variación lineal a partir de representaciones figurales y numéricas que apoyen la interpretación y representación de esta clase de patrones.

## 7.3. Sesión 3: Etapa B – Categoría cognitiva y didáctica

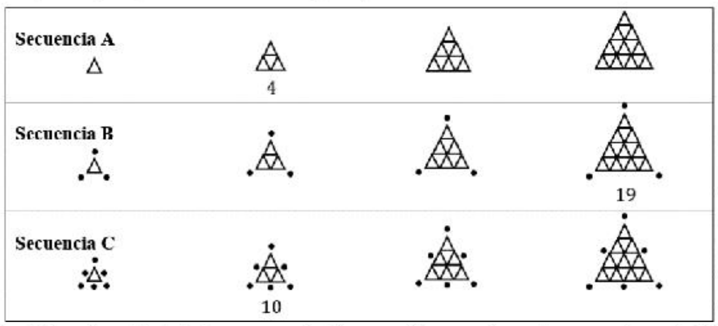
Objetivos:

a) *Analizar el desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores por medio de la resolución de la actividad de generalización inductiva.*
b) *Identificar los procesos del razonamiento inductivo que perciben los profesores en la actividad de generalización inductiva.*

La sesión estuvo dirigida a promover el razonamiento inductivo de los profesores mediante la realización de una actividad que demandaba inducir reglas generales de patrones cuadráticos y asimilar los procesos cognitivos asociados a cada tarea de la actividad.

### 7.3.1. Desarrollo de la sesión 3

Al iniciar la sesión se indicó a los profesores que se estaría trabajando y discutiendo en la sesión, acerca de la naturaleza de tareas de razonamiento inductivo que tratan con ecuaciones cuadráticas. Para ello, se les propuso realizar la actividad de generalización denominada “Secuencia de figuras y puntos” (Figura 7.12). Tal como se dijo a los profesores, la intención de la actividad era que reconocieran los procesos esenciales de esta forma de razonamiento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de que vivieran la experiencia de razonar inductivamente y vayan abstrayendo el proceso realizado en cada tarea.



**Situación.** Las siguientes secuencias de figuras están formadas por triángulos y puntos. Debajo de algunas figuras, se indica el total de objetos que la conforman.



1. Determine cuál de las tres secuencias tiene una figura conformada por exactamente 150 objetos (triángulos y puntos). Indique la posición que ocupa esa figura en dicha secuencia.

2. En la siguiente tabla, se muestra la cantidad total de objetos que conforman las figuras de una cuarta Secuencia D y que guarda relación con las anteriores.

| **Posición** | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| **Cantidad total de objetos** | 14 | 21 | 41 | 54 |

   a) Explique, mediante la descripción de al menos dos o tres pasos que considere útiles, el procedimiento para determinar la cantidad total de objetos que deben corresponder a la figura cuya posición sea $n$, en la Secuencia D.
   b) Proponga el modelo algebraico o fórmula para calcular la cantidad de objetos de cualquier figura en esta secuencia D.

3. Genere una Secuencia E de números o figuras que sea equivalente a las tratadas en esta Actividad.

**Figura 7.12.** Actividad III: Secuencia de figuras y puntos (Parte 1).

La sesión se desarrolló en dos momentos. En el primer momento se implementó la Actividad III – Parte 1 en equipos de dos y tres integrantes, y fue resuelta en 30 minutos Después, se discutieron de manera grupal las soluciones de cada tarea a fin de que socializaran y profundizaran en los procesos seguidos en su razonamiento. La instructora planteó algunas preguntas para guiar esta discusión:

**Tarea 1**: ¿Cómo determinaron que era la secuencia C, y no la A o la B, la que contiene una figura con exactamente 150 objetos? ¿Cuál es la relación entre la cantidad total de objetos de las figuras en cada secuencia?

**Tarea 2**: En la secuencia D, ¿cómo determinaron la cantidad total de objetos de la figura en la posición $n$? ¿Cómo pasaron de los datos numéricos a la expresión algebraica general?

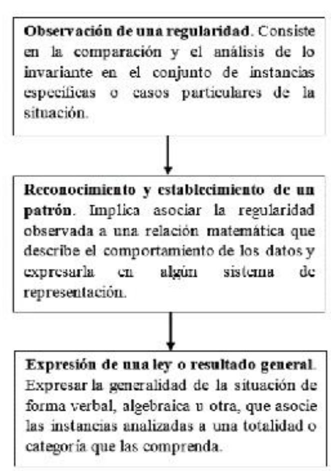
**Tarea 3**: ¿Qué hace que las secuencias sean equivalentes? ¿Qué tienen en común las cuatro secuencias que se presentaron y la quinta que ustedes propusieron?

En el segundo momento de la sesión se aplicó la Parte 2 de la Actividad III (Figura 7.13) y se resolvió de manera individual durante un periodo de 15 a 20 minutos. Para clarificar la instrucción, se pidió a los profesores indicar qué acciones o procesos seguir para desarrollar la habilidad de generalización. Se les invitó a responder, con base en su experiencia vivida en la actividad, reflexionando sobre las acciones que siguieron en su razonamiento para hacer generalizaciones.

> Las tareas en la **Actividad "Secuencias de figuras y números"**, consistieron en obtener un resultado mediante un proceso de generalización.
>
> Bajo este entendido y con base en su experiencia en esta actividad, mencione lo que en su opinión se requiere para desarrollar la habilidad de generalización en matemáticas (particularmente para el concepto de ecuación cuadrática).

**Figura 7.13**. Actividad III – Parte 2.

Para integrar lo discutido en la sesión, la instructora planteó la siguiente cuestión ¿Cómo hacer que de casos particulares se pueda abstraer y expresar lo general? Por el escaso tiempo restante en la sesión, se escuchó solamente la participación de una profesora sobre su respuesta a esta pregunta. A manera de cierre, se presentó el siguiente esquema (lado derecho) de procesos del razonamiento inductivo asociados a las tareas de la actividad.



### 7.3.2. Análisis de datos relativos al desarrollo del razonamiento inductivo

Con los datos obtenidos en esta sesión, se realizaron dos tipos de análisis correspondientes a cada uno de los objetivos de la sesión y a cada parte de la Actividad III, respectivamente:

(1) Se examinó si la Actividad “Secuencia de figuras y números” propicia el tránsito entre los procesos involucrados en el razonamiento inductivo por parte de los profesores, pues esto denotaría un cambio cognitivo. Entonces se analizaron qué procesos inductivos movilizaron al resolver dicha actividad y cómo los conectaron. La unidad de análisis fueron las acciones de los profesores en el plano externo (Vygotsky, 1992; Talizina et al., 2010), mediante las representaciones de las operaciones que llevaron a cabo para ejecutar cada tarea. Como parte del análisis microgenético del cambio (Flynn et al., 2006; Siegler, 2006), se compararon las acciones de cada equipo por tarea con el objeto de identificar patrones comunes y diferencias en su razonamiento.

(2) Con base en las respuestas escritas dadas en la Actividad III – Parte 2, se formaron categorías de los procesos inductivos comunes que percibieron los profesores en sus acciones para generalizar (en la actividad antes mencionada), y aquellos diferentes.

**<u>Análisis 1: Procesos inductivos usados para resolver la actividad</u>**

Este análisis consistió en identificar, según el marco de referencia, los procesos inductivos desarrollados por los equipos de profesores, con base en las respuestas escritas y orales que dieron en cada tarea de la actividad. Con apoyo del software MAXQDA (2018.2) se analizaron las acciones comunes y diferencias entre los equipos en la forma de realizar cada proceso. Por ejemplo, cuáles fueron las regularidades que observaron en común y las similitudes y diferencias en su proceso de observación.

En lo global, se identificó que todos los equipos transitaron de la observación de regularidades a la formulación de generalizaciones. El razonamiento de los profesores se caracterizó por el uso de los tres procesos inductivos, fundamentalmente en las primera y segunda tarea, aunque se observaron algunas variaciones en cómo los equipos los llevaron a cabo. A continuación se describen y evidencian tales procesos. En los extractos de diálogos con los profesores, se denota con IN la intervención de la instructora y con E1, E2,…, E5 se hace referencia a los equipos, indicando entre paréntesis la letra del profesor participante.

La ***observación de regularidades*** consistió en el análisis de la variación entre la cantidad de objetos de las figuras de una misma secuencia y entre secuencias, así como de las características invariantes entre sus elementos. El proceso se basó en la comparación de las similitudes y diferencias de los elementos de cada secuencia mediante cálculos aritméticos y la percepción visual de las características de las figuras. Este fue el primer proceso de razonamiento puesto de manifiesto por los profesores al resolver la Tarea 1 de actividad. En esta tarea, los profesores observaron en común las siguientes regularidades:

a. En las secuencias A, B y C, la cantidad de triángulos de una figura es igual al cuadrado del valor de su posición;
b. En las secuencias B y C aumenta la cantidad de objetos de cierta figura respecto a la correspondiente en la secuencia anterior, según el número de puntos añadidos;
c. La cantidad de objetos en las figuras de cada crece de manera no constante, conforme aumenta la posición;
d. Las secuencias de figuras representan sucesiones cuadráticas;

Estas regularidades fueron observadas a nivel global, es decir, abarcan o involucran la relación entre varios elementos particulares de cada secuencia y hacen referencia al comportamiento creciente de éstas. Para relacionar los elementos de las secuencias, los profesores centraron la atención en la variación del número de objetos en las figuras y lo que permanece invariante en estas. Al hacerlo, reconocieron el comportamiento cuadrático de las secuencias a partir de casos particulares y llevaron su razonamiento más allá del cálculo recursivo de diferencias.  Por ejemplo, para determinar cuál de las tres secuencias A, B y C contiene una figura con 150 objetos, el Equipo 2 reconoció que la cantidad de objetos de cualquier figura de las secuencias es igual al cuadrado la posición ($n$) que ocupa en la secuencia más una constante y obtuvo la regla general de cada una (Figura 7.14).

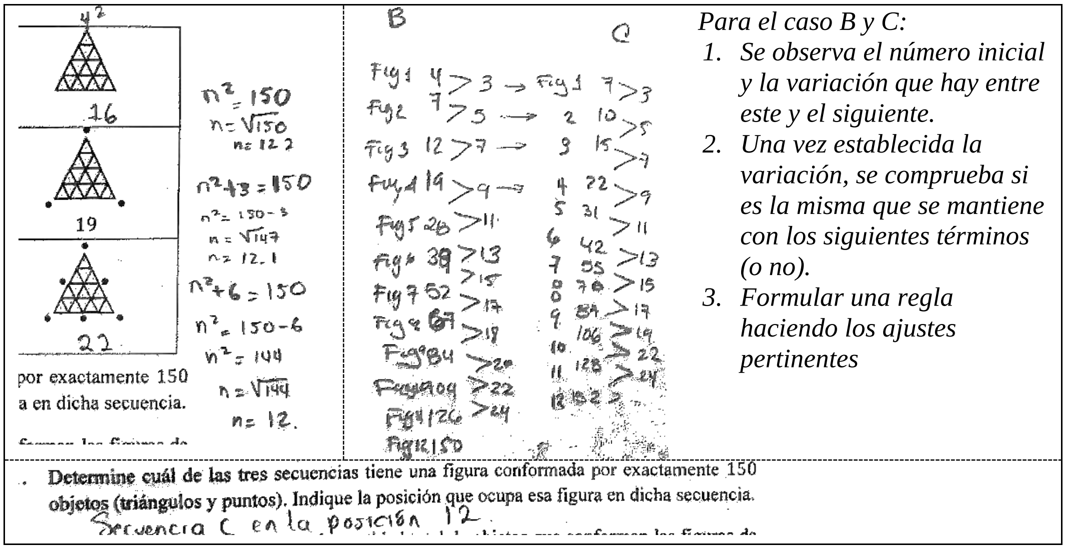


**Figura 7.14.** Observación de regularidades por E2 en la Tarea 1 (Actividad III).

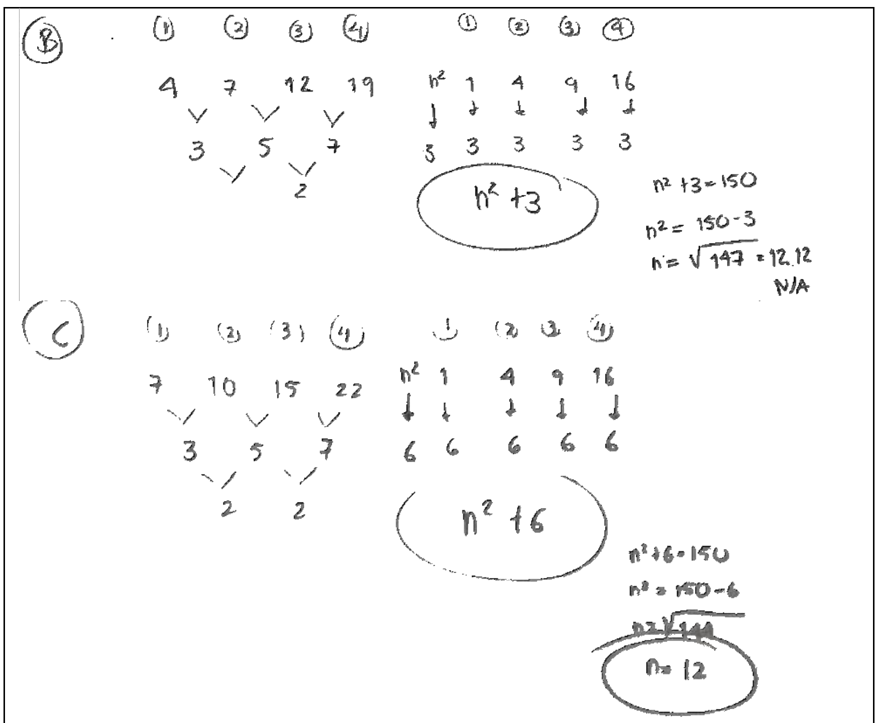
El razonamiento inicial de los profesores de E2 consistió en la observación de regularidades. Para ello, contaron y registraron el número de objetos en las figuras dadas en la actividad. Primero, observaron que la cantidad de triángulos de las figuras en la Secuencia A es igual al cuadrado la posición que ocupa. Segundo, mediante el cálculo de diferencias, observaron que las tres secuencias son cuadráticas y comprobaron que la variación entre sus elementos es la misma. Tercero, compararon las tres secuencias (A, B y C) y observaron que la cantidad objetos de las figuras en las secuencias B y C, aumenta con respecto a las figuras de la secuencia A en la misma posición, de acuerdo con el número de puntos añadidos en cada una: tres puntos en las figuras de la secuencia B y seis en la secuencia C.

E2 basó su proceso de observación en el análisis y comparación de la variación entre los valores numéricos de las secuencias a través del cálculo de diferencias y con el apoyo visual de las figuras. Fijar la atención visual en la variación del número de puntos en las figuras con la misma posición y en la invariancia del número de triángulos en relación con la posición de la figura, ayudó a establecer relaciones entre los elementos de las secuencias. Tal como describió una integrante del equipo:

IN: ¿Cómo determinaron que era la secuencia C, y no la A o la B, la que contiene una figura con exactamente 150 objetos? Es decir, ¿Cuál fue el razonamiento que siguieron para determinar que era la Secuencia C?

E2 (F): En primera instancia es observar, el paso número 1 es observar qué sucede en cada una de las secuencias. En la primera podemos notar que los triángulos hacen referencia a un número al cuadrado o un término cuadrático, y vamos viendo que en las demás hay una variante que va aumentando y que hace referencia a los puntitos. Entonces de ahí vas sacando cada una de las fórmulas: $n^2$ [Secuencia A], $n^2+3$ [Secuencia B] y $n^2+6$ [Secuencia C]. Y de ahí cuando te indica en cuál de las tres secuencias… encaja los 150 objetos, habría que igualar en cada una. (…) y en el caso de la última secuencia [C] es en la que sí, porque nos da 12.

Se identificaron dos tipos de variantes en la forma de observar regularidades. A diferencia del equipo E2, algunos equipos dieron mayor peso al análisis numérico de la variación que al apoyo visual (E5 y E6). Por ejemplo, una vez identificado numéricamente que las secuencias eran cuadráticas, los profesores del equipo 5 elevaron al cuadrado el número de la posición de las cuatro primeras figuras de las secuencia B y C, y calcularon la cantidad faltante para obtener el número total de objetos correspondiente a las figuras de cada secuencia (Figura 7.15).




1) *Observar la relación entre secuencias (son secuencias cuadráticas, probablemente la segunda y la tercera estén basadas en la 1ra.).*
2) *Igualar las tres secuencias a 150 (con el entendido de que en el primer caso, "$n^2$" no hay un # cuadrático que dé 150).*
3) *Despejar cada ecuación y sacar raíz encontrando una respuesta cuyo número sea exacto.*

**Figura 7.15**. Observación de regularidades por E5 en la Tarea 1.

Posteriormente, notaron que la cantidad faltante obtenida está asociada con el número de puntos en las figuras. Así, en la secuencia B determinaron que faltaban tres unidades para obtener el total de objetos y este número corresponde a la cantidad de puntos en las figuras de esa secuencia:

> E5 (M): Para determinar cuál era la secuencia, empezamos con la secuencia A a observar los triángulos, contar cuántos tenía cada figura y a completar los números que faltan [debajo de cada uno]. En la secuencia B hicimos lo mismo, y a partir de eso vimos que van aumentando tres y tres,… por los tres puntos adicionales en los vértices, y a partir de ello obtuve la fórmula $n^2 + 3$. (…) con respecto a la C, a 150 para que tenga raíz cuadrada exacta vimos que le hace falta un número, 6.

El Equipo 6 siguió un razonamiento similar centrado en el análisis numérico de la relación del cuadrado de un número más una cantidad faltante, según explicó un integrante del equipo:

> E6 (O): En la secuencia A vimos que 1, 4, 9, 16 son números elevados al cuadrado, entonces aquí no está la figura de 150 objetos. En la segunda elevamos al cuadrado y sumamos tres, 144 más 3, no encajaba. Y en la secuencia que seguía sumamos 6 y ya nos dio [150].

La otra variante consistió en enfocarse en la comparación de los elementos de una misma secuencia, más que en la comparación de las similitudes y diferencias entre los elementos de secuencias distintas. Tal fue el caso de E6. Ambas formas condujeron satisfactoriamente a la observación del comportamiento cuadrático, siendo determinante el papel de los referentes visuales para el reconocimiento de la variación lineal.

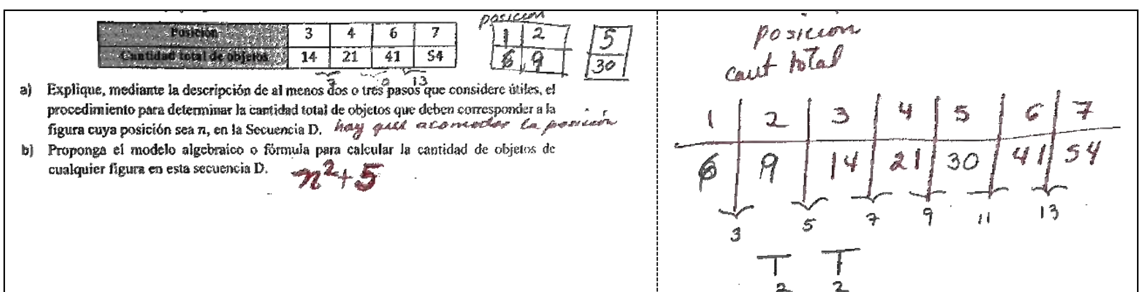
Los profesores también ***establecieron el patrón*** cuadrático, al reconocer la relación invariante entre los valores de cada secuencia y asociarla a una estructura cuadrática de la forma $y = x^2 + c,\ x \in \mathbb{N}$ para describirla. Así, establecieron que el patrón de la cantidad total de objetos de cierta figura es el cuadrado del valor de su posición en la secuencia más un valor constante.

Para transitar de la observación de regularidades al establecimiento del patrón, los profesores reconocieron relaciones aditivas entre el número total de objetos $(t)$ y la posición de las figuras $(n)$ en cada secuencia, a partir de casos particulares numéricos. Esto se evidenció en la Tarea 2, inciso a), donde se identificaron cuatro formas distintas de relacionar las variables para describir el patrón de la secuencia D (Tabla 7.7). Cabe aclarar que el Equipo 6 propuso dos métodos para determinar la cantidad total de objetos de la *n-ésima* figura de esa secuencia.

**Tabla 7.7.** Estructuras subyacentes al patrón de la secuencia D establecidas por los equipos.

| Estructura del patrón | Equipo(s) |
|---|---|
| $t = n^2 + 5$ | E3, E6 |
| $t = n^2 + 3 + 2$ | E4 |
| $t = n^2 + 6 - 1$ | E6 |
| $t - n^2 = 5$ | E1, E2, E5 |

Para reconocer el patrón de los valores de la Secuencia D, los equipos analizaron numéricamente el comportamiento de ésta en comparación con las secuencias A, B y C, e identificaron que sigue un patrón cuadrático similar a ellas. Para determinar el patrón, tomaron como referencia los valores de alguna de estas secuencias y establecieron relaciones aditivas entre los valores de las variables, $t$ y $n$, dados en la tabla. Por ejemplo, el equipo 3 identificó que la secuencia D era cuadrática mediante el cálculo de las segundas diferencias y que tenía un comportamiento creciente similar a las secuencias B y C (Figura 7.16).




*Acomodar la sucesión puesto que no están dando todos los datos, vemos que al igual que las anteriores tiene una constante $n^2$ pero se van agregando 5 a la cantidad total, $n^2 + 5$*

*a) Se observa un crecimiento gradual entre los elementos de la sucesión,*

*b) Hay una relación que se presenta entre el cuadrado de la posición y la suma de un número constante, por lo que se genera la fórmula $n^2 + 5$*

**Figura 7.16.** Respuesta escrita de E3 a la Tarea 2 de la actividad III – Parte 1.

Los profesores de E3 reconocieron como relación invariante de estas secuencias que, para calcular la cantidad total de objetos de las figuras dadas, a la posición al cuadrado había que sumarle un número. Elevaron al cuadrado los valores de la posición de la tercera y cuarta figura de la secuencia D ($n = 3$ y $n = 4$) y determinaron que el número a añadir era cinco. Al respecto, el profesor I explicó su razonamiento como sigue:

E3 (I): Multiplicamos por sí mismo el número de la posición, haciendo algunos ejemplos, y sumándoles un número…

IN: ¿Por qué pensaron en elevar al cuadrado y sumarle una cantidad?

E3 (I): En el inciso 2), como vimos que dice que guarda relación con las anteriores, entonces debe de ser algo semejante, y como en la B se le sumaba 3 y en la C se sumaba 6. Entonces a la posición al cuadrado era sumarle una cantidad. En la secuencia B era sumarle 3, y en la secuencia C era sumarle 6. Entonces en esa [Secuencia D] (…) Debía ser $n^2$ más un número y fuimos probando, en la posición 3, 3 al cuadrado, cuánto se le tiene que agregar para el total [14], 5; 4 al cuadrado es 16, cuánto se le tiene que sumar, 5; y nos dimos cuenta que era sumarle 5.

La generación de diferentes estructuras equivalentes a $t = n^2 + 5$ en el proceso de establecer el patrón de la Secuencia D, dependió de la forma de relacionar valores específicos de las variables y los referentes considerados (p. ej. los valores de la secuencia A u otra) para descubrir el patrón. Por ejemplo, en el caso del equipo 4, el patrón es determinado con base en la relación de incremento del cuadrado de la posición de cierta figura en dos y en tres unidades, y está asociado a la estructura: $t = n^2 + 2 + 3 = n^2 + 5$ (Figura 7.17), según mencionó la profesora J:

E4 (J): Primero, para saber que era elevado al cuadrado aplicamos el método de diferencias, la diferencia entre 3 y 4 [de los valores para $n = 3$ y $n = 4$] no era la misma que entre 6 y 7, (…) tendría que ser geométrica, [corrige] ser cuadrática. Y lo segundo fue ver los números de la secuencia B, y con respecto a las posiciones 3 y 4, en la secuencia D solo están aumentados dos unidades más. De la secuencia B, dos más. Y como allí ya habíamos sumado tres, entonces nada más sumamos dos, y ya, la constante era 5. Se comprobó para $n = 3$ y 4, y avanzamos con $n = 6$ y 7 para verificar que sea cierto.

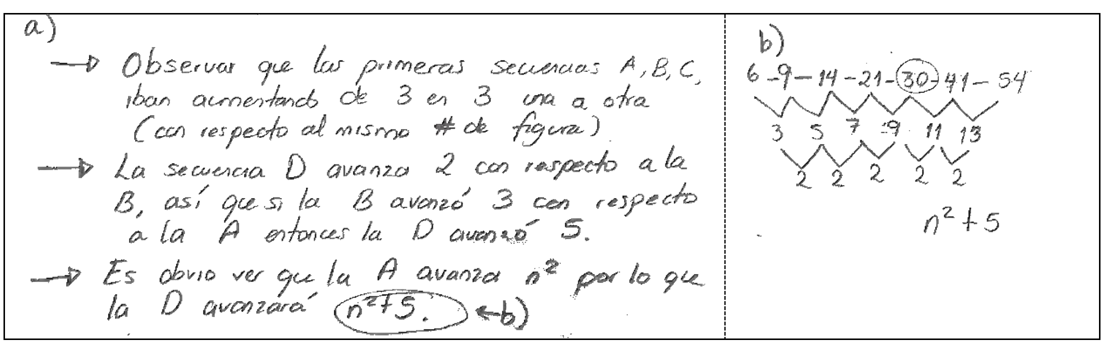
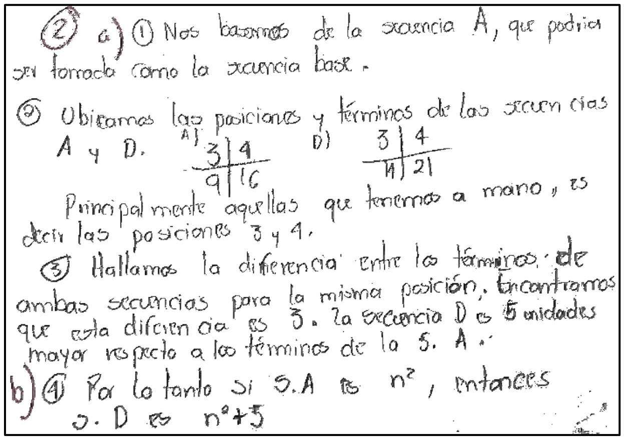



**Figura 7.17.** Respuesta escrita de E4 a la Tarea 2 de la actividad III – Parte 1.

Otras relaciones establecidas entre los valores de las variables condujeron a las siguientes estructuras subyacentes al patrón: $t - n^2 = 5$ y $t = n^2 + 6 - 1$, como puede inferirse de las respuestas escritas de los equipos E1 y E6, respectivamente:


(2) a) (1) Nos basamos de la secuencia A, que podría ser tomado como la secuencia base.

(2) Ubicamos las posiciones y términos de las secuencias A y D.

A) 3 | 4 — 9 | 16   D) 3 | 4 — 14 | 21

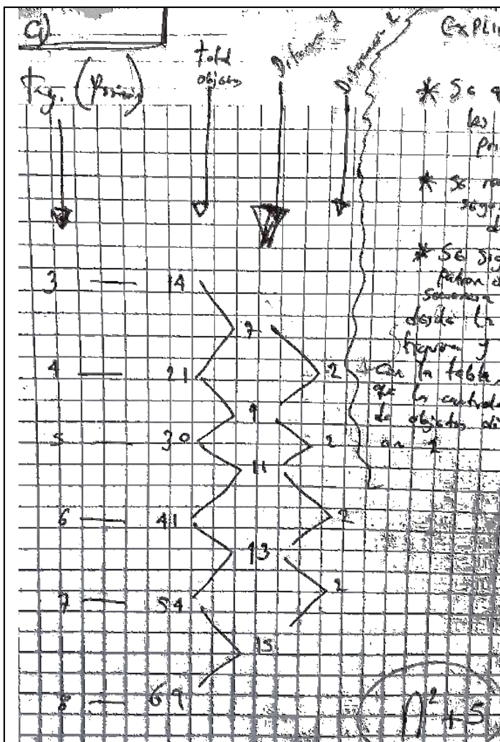
Principalmente aquellas que tenemos a mano, es decir las posiciones 3 y 4.

(3) Hallamos la diferencia entre los términos de ambas secuencias para la misma posición, encontramos que esta diferencia es 5. La secuencia D es 5 unidades mayor respecto a los términos de la S. A.

b) (4) Por lo tanto si S.A es $n^2$, entonces S.D es $n^2+5$

**Figura 7.18.** Respuesta escrita de E1 a la Tarea 2.

Los profesores reconocieron el patrón trabajando por lo menos con tres casos particulares conocidos. Además, obtuvieron otros valores no mostrados numérica o figuralmente en las secuencias para verificar su conjetura sobre el patrón. La extensión del patrón a casos particulares (elementos) no presentes o conocidos de las secuencias dio paso a la abstracción y expresión de lo general en cada una.




*Explicación:*
** Se realizó las diferencias primeras*
** Se realizó la segunda diferencia*
** Se siguió el patrón de la secuencia C, desde la tercera figura y comparando con la tabla, se encontró que la cantidad total de objetos disminuye en 1.*

**Figura 7.19.** Respuesta escrita de E6 a la Tarea 2.

En un primer plano, la ***formulación de generalizaciones*** se evidenció en la obtención de la regla general del patrón de cada secuencia. Por ejemplo, los equipos determinaron la expresión para calcular la cantidad total de objetos de la $n$-ésima figura de la Secuencia D y la representaron algebraicamente como $n^2 + 5$ (Figuras 7.16 y 7.17). En un segundo plano, se detectó la generalización del patrón subyacente a las secuencias tratadas en la actividad, el cual está asociado al modelo cuadrático $y = x^2 + c$, donde $x, y$ son variables y $c$ una constante. La formulación de esta generalización fue notoria cuando los profesores propusieron ejemplos numéricos, algebraicos o figurales de secuencias equivalentes a las dadas (Figura 7.20-a) o la regla algebraica general del patrón de comportamiento: $n^2 + c$, donde $c$ es una constante (Figura 7.20-b), pues esto implicaba haber abstraído lo general de las secuencias específicas A, B, C y D.

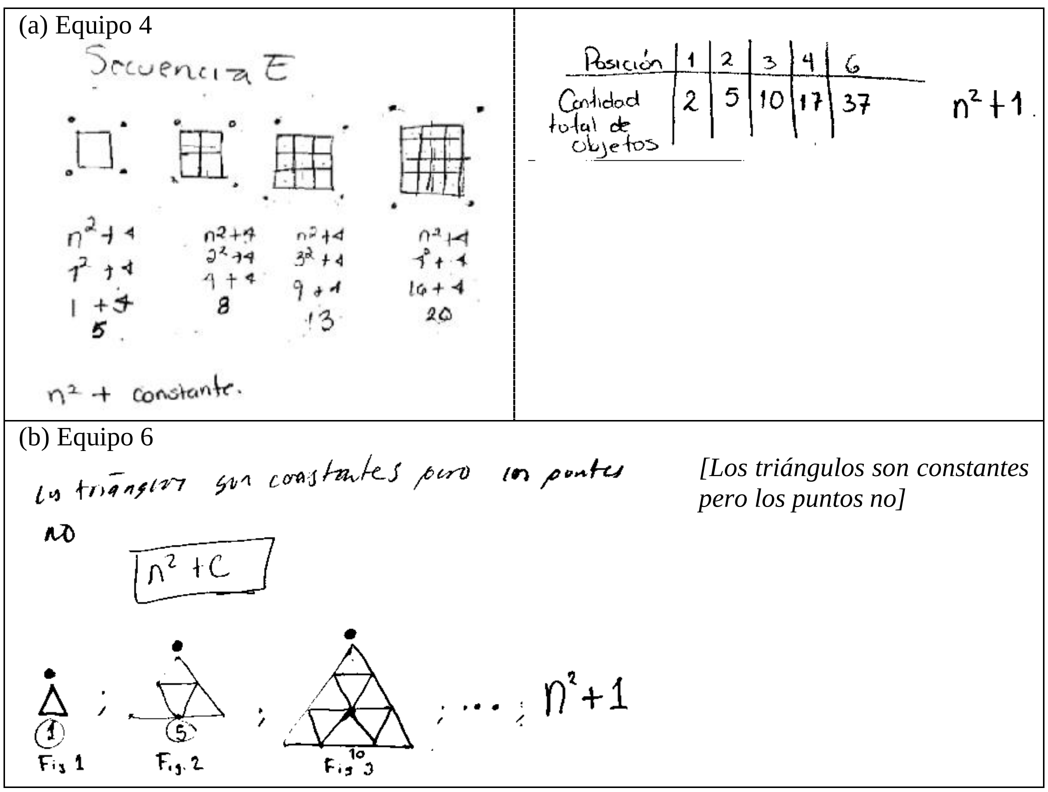


**Figura 7.20.** Evidencias de generalización del patrón de las secuencias por E4 y E6 (Tarea 3).

Los profesores formularon el modelo general asociado a tales secuencias al abstraer la relación invariante que norma su comportamiento y extenderlo a secuencias equivalentes, lo cual se puso de manifiesto en el diálogo cuando mencionaron en qué sentido eran equivalentes:

IN: ¿Qué se entendió por “secuencias equivalentes”? ¿Qué hace que las secuencias sean equivalentes?

Grupal: Que tengan la misma relación que las anteriores

IN: En lo general, ¿Cuál es la relación que hay entre las secuencias A, B, C, D y la que propusieron?

E4 (L): El término cuadrático es el que mantenemos, como dijo la profesora F, puede ser esa secuencia u otra, por ejemplo, 10, 13, 18, 25, 34, (…) entonces lo que conservamos, en las que tenemos aquí físicamente [señala las secuencias A, B y C], en la [secuencia] D y la que vamos a proponer [secuencia E], es el término cuadrático; y el avance [la constante] lo podemos mover, puede ser 1, 5, 6, etc.

IN: ¿Cómo describirían cuál es esa relación entre las secuencias? (…)

E3 (H): Que son cuadráticos y se les agrega un número

E1 (B): Prácticamente son cuadráticas

E4 (K): La elevación al cuadrado de la posición, n.

E6 (O): Lo que no cambia maestra es el número de triángulos por secuencia, eso es constante en cada una de ellas, lo que sí varía es el número de puntos alrededor.

E1 (C): La posición al cuadrado más una constante es igual a la cantidad de objetos en la figura.

En la discusión sobre la relación invariante de las secuencias, los profesores hablaron de las características del comportamiento cuadrático y expresaron lo siguiente:

IN: (…) ¿Qué relación hay entre la cantidad de objetos que hay en las figuras de la secuencia C? Analicemos, las primeras figuras en la secuencia C ¿cuántos objetos tienen?

Grupal: 7, 10, 15, 22

IN: Sin tener que ver o hacer la figura, ¿cuántos objetos tendría la quinta?

Grupal: 31

IN: ¿Cómo determinaron que son 31 objetos?

E2 (F): Cinco por cinco es 25, más 6, 31

E1 (B): Calculando las diferencias entre los objetos de las primeras figuras, de la primera a la tercera, de la tercera a la quinta, y encontrar el patrón de cómo van variando esas diferencias

IN: ¿Cómo van variando las diferencias en la secuencia C?

Grupal: 3, 5, 7, 9, 11,…

IN: ¿Qué tienen en común esas diferencias?

E1 (B): Van variando de la misma manera que en las primeras secuencias.

⋮ ⋮

IN: ¿Cómo describirían cuál es esa relación entre las secuencias? (…)

⋮ ⋮

E1 (B): Prácticamente son cuadráticas

⋮ ⋮

IN: ¿Qué entendemos porque sean cuadráticas? ¿Qué características tienen esas secuencias de números y figuras que nos hacen decir que son cuadráticas?

E3 (I): Hay… un tema en tercero de secundaria donde se ve la diferencia entre dos posiciones que no son iguales, se calcula la resta, por ejemplo [en la secuencia D] de 14 a 21 son 7, de 21 a 30 son 9, y de los dos que quedan abajo se sacan las diferencias y te quedan cantidades iguales, ...

E2 (E): El método de las segundas diferencias. Las segundas diferencias son iguales o constantes.

IN: … las diferencias entre los valores del total de objetos en la secuencia D: 7, 9, 11, 13,… son constantes, esto quiere decir que el comportamiento de esas diferencias es lineal. Esta es una característica de lo cuadrático. ¿Qué otra característica le atribuyen a lo cuadrático en las expresiones algebraicas o modelos que obtuvieron? (…) ¿de qué otra manera nos podemos percatar de que algo es cuadrático?

E5 (N): Si se grafica obtenemos la forma de una curva, de una parábola, mmm, o media parábola, dependiendo de cómo se inicie, de qué valores se tomarían en el eje horizontal, si son enteros positivos, sería media parábola.

IN: Esto nos hace también asociar lo cuadrático, si lo vemos en otro sistema de representación, con el comportamiento de curvas parabólicas. Además, como hace un momento dijo un compañero, cuando hay una relación del cuadrado de un número más una cantidad, o una multiplicación de un número por sí mismo más una constante también se tiene un modelo cuadrático. En general, en la actividad se trataba de generar modelos algebraicos de tipo cuadrático, particularmente los de la forma $y = x^2 + c$, la constante podía ser positiva o negativa. Como ustedes pueden observar, en la actividad partimos de casos particulares y llegamos a expresiones algebraicas generales. (…) Este tipo de actividades demanda razonar inductivamente.

Centrar la atención en el estudio de la variación lineal en la actividad favoreció que los profesores caracterizaran lo cuadrático, no solo en términos de la constante obtenida en las segundas diferencias, sino también refiriéndose a la variación, a la expresión del tipo particular de patrón tratado en la actividad (el cuadrado de un número más una constante), e incluso lo asociaran con la representación gráfica de una parábola.

## Análisis 2: Procesos inductivos asimilados tras realizar la actividad

Se efectuó un análisis temático para identificar las acciones o procesos percibidos por el colectivo de profesores para generalizar de manera inductiva, según su experiencia vivida en la actividad “Secuencia de figuras y números”. La fuente de datos fueron sus respuestas escritas a la Actividad III – Parte 2. El análisis inició con la revisión de las acciones descritas por los profesores y la generación de códigos en el software MAXQDA (2018.2):

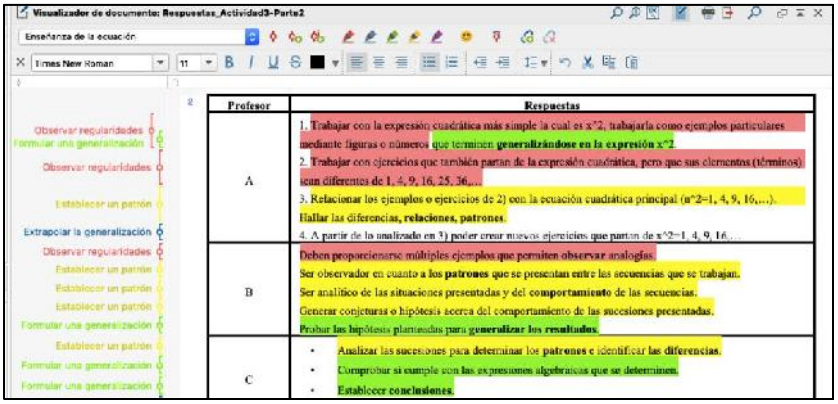



**Figura 7.21.** Codificación de extractos de las respuestas de la Actividad III – Parte 2.

Se asignaron nueve códigos a partir de localizar extractos que hacían referencia a características o palabras claves asociadas a los procesos inductivos. Aunque también se encontraron extractos relativos a acciones para la enseñanza de ecuaciones cuadráticas en general y al objetivo de la actividad. En la Tabla 7.8 se muestra el listado de códigos obtenidos, número de extractos, las características o palabras clave consideradas en la codificación y el número de profesores con respuestas pertenecientes a cada código.

**Tabla 7.8.** Listado de códigos generados sobre las acciones para generalizar inductivamente.

| Código | No. Extractos | Característica/Palabras clave | No. Profesores |
|---|---|---|---|
| ● Enseñanza de la ecuación | 6 | Describen acciones generales para la enseñanza de ecuaciones cuadráticas. | 2 |
| ● Verificar la generalización | 2 | Probar que la regla general es válida para otros casos particulares. | 2 |
| ● Objetivo de la actividad | 3 | Señalan, de manera general, el objetivo o naturaleza de la actividad realizada. | 3 |
| ● Conocimientos previos | 3 | Mencionan la revisión o repaso de conocimientos previos en la introducción de una actividad que involucra razonar inductivamente. | 3 |
| ● Extrapolar la generalización | 3 | Extender o aplicar la generalización a otras situaciones. | 3 |
| ● Abstraer lo general | 4 | Abstraer el patrón general. Extensión/aplicación del patrón a una clase total de casos/objetos. | 3 |
| ● Observar regularidades | 15 | Hace referencia al proceso de presentar y analizar casos particulares, comparar, observar similitudes y diferencias. Palabras clave: comparar, observar, regularidad, similitudes, diferencias, casos particulares. | 13 |
| ● Establecer un patrón | 21 | Se hace mención del reconocimiento de un patrón y el establecimiento de relaciones matemáticas para describirlo. Palabras clave: comportamiento, patrón, relación. | 14 |
| ● Formular una generalización | 15 | Alude a la extensión del patrón a una clase general de casos y a la obtención de una regla o expresión general. Palabras clave: Regla general, conclusión, resultado, general. | 13 |

Los códigos y extractos se exportaron a Excel para agruparlos y buscar temas concernientes a los procesos percibidos por los profesores en la actividad (Figura 7.22). Los códigos “Enseñanza de la ecuación” y “Conocimientos previos” se agruparon en un tema, y “Abstraer lo general” se integró con “Formular una generalización”.

| 1 | Color | Código | Profes | Extracto |
|---|---|---|---|---|
| 3 | ● | Conocimientos previos | H | Establecer las relaciones de contenidos |
| 5 | ● | Conocimientos previos | J | Lo primero es movilizar conocimientos sobre los conocimientos que implican las ecuaciones, manejo de potencias y sucesiones |
| 7 | ● | Conocimientos previos | L | Realizar una retroalimentación de qué es una ecuación y cómo sacamos una ecuación de un elemento dado |
| 16 | ● | Enseñanza de la ecuación | L | Ponerle al alumno un ejemplo de figuras y números para resolver según sus conocimientos |
| 20 | ● | Enseñanza de la ecuación | L | Con base en lo obtenido en la actividad, realizar una explicación de lo que es una ecuación cuadrática |
| 24 | ● | Enseñanza de la ecuación | L | Darle varios ejemplos en los cuales ellos puedan determinar la ecuación cuadrática de cada ejercicio |
| 30 | ● | Enseñanza de la ecuación | P | Contrasta el concepto de ecuación cuadrática con el concepto de ecuación lineal |
| 33 | ● | Enseñanza de la ecuación | P | Identifica ecuaciones cuadráticas en la vida cotidiana |
| 37 | ● | Enseñanza de la ecuación | P | Representa gráficamente a modo de bosquejo las ecuaciones cuadráticas |
| 43 | ● | Observar regularidades | A | Trabajar con la expresión cuadrática más simple la cual es x^2, trabajarla como ejemplos particulares mediante figuras o números |
| 46 | ● | Observar regularidades | A | Trabajar con ejercicios que también partan de la expresión cuadrática, pero que sus elementos (términos) sean diferentes de 1, 4, 9, 16, 25, 36, |
| 47 | ● | Observar regularidades | B | Deben proporcionarse múltiples ejemplos que permiten observar analogías |
| 51 | ● | Observar regularidades | D | Para introducir podemos acercar al educando al tema permitiendo que tengan un primer proceso de observación de alguna situación, ya sea figurativa o numérica, de manera que se haga detenidamente |
| 52 | ● | Observar regularidades | E | Observar y analizar las imágenes presentadas |
| 53 | ● | Observar regularidades | F | Presentar a los alumnos casos particulares donde puedan observar características comunes de los ejercicios |

**Figura 7.22.** Agrupación y revisión de códigos en Excel para la búsqueda de temas.

Se revisaron de manera recursiva los temas provisionales en relación con el conjunto total de códigos y respuestas de los profesores, dando lugar a la definición de seis temas. Cuatro temas atañen a procesos relacionados con el razonamiento inductivo, uno al proceso de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas y otro no involucra acciones propias de algún proceso, sino alude a la naturaleza de la actividad de generalización inductiva. En la Tabla 7.9 se indican los temas definidos y el número de profesores que describieron acciones pertenecientes a cada uno.

**Tabla 7.9.** Relación de temas sobre los procesos percibidos en la actividad III.

| Tema | No. Profesores |
|---|---|
| Observar regularidades | 13 |
| Establecer un patrón | 14 |
| Formular una generalización | 15 |
| Verificar y extrapolar la generalización | 5 |
| Enseñar ecuaciones cuadráticas | 4 |
| Objetivo de la actividad | 3 |

La mayoría de los profesores (13-14) reconoció acciones para generalizar correspondientes a por lo menos dos de los procesos subyacentes al razonamiento inductivo: observar regularidades, establecer un patrón y formular una generalización. En once de ellos se identificó la percepción de los tres procesos inductivos en sus acciones. Además, cinco hicieron explícita la acción de verificar y extrapolar lo generalizado. Cuatro profesores mencionaron acciones no propias del razonamiento, sino del proceso de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, y tres incluyeron respuestas relacionadas con el objetivo de la actividad de generalización inductiva. A continuación se describen los temas y se ejemplifican con algunos extractos de respuestas.

**Tema 1:** *Proceso de observar regularidades*

En este tema se incorporan las acciones asociadas al proceso de observación de regularidades, tal como el análisis de casos particulares, la comparación y detección de similitudes y diferencias entre casos. Los profesores reconocieron este proceso inductivo para generalizar y mencionaron aspectos esenciales del mismo:

**Profesor B:** Deben proporcionarse múltiples ejemplos que permiten observar analogías.

**Profesora D:** … acercar al educando al tema permitiendo que tengan un primer proceso de observación de alguna situación, ya sea figurativa o numérica, de manera que se haga detenidamente.

**Profesora F:** Presentar a los alumnos casos particulares donde puedan observar características comunes de los ejercicios.

**Tema 2:** *Proceso de establecer un patrón*

Varios profesores percibieron el establecimiento de un patrón como clave en la actividad y usaron los términos comportamiento y patrón en la descripción de las acciones que llevaron a cabo. Acciones relativas a este proceso fueron enunciadas en sus respuestas, por ejemplo, descubrir patrones, observar comportamientos y establecer relaciones:

**Profesor B:** Ser observador en cuanto a los patrones que se presentan entre las secuencias que se trabajan. Ser analítico de las situaciones presentadas y del comportamiento de las secuencias. Generar conjeturas o hipótesis acerca del comportamiento de las sucesiones presentadas.

**Profesor I:** … que los alumnos puedan observar el comportamiento de este tipo de sucesiones. (...) Al mismo tiempo se debe realizar preguntas acerca de los patrones que se observan, y las características que se pretende que los alumnos observen.

**Profesora D:** Partiendo de la observación anterior se podrá extraer información que hayan detectado (la relación entre las figuras, la diferencia, la posición y cualquier dato que pudieran resaltar).

**Profesora E:** Establecer relaciones numéricas.

**Tema 3:** *Proceso de formular una generalización*

Los profesores, en su mayoría, reconocieron acciones en su razonamiento relativas a la formulación de generalizaciones. Entre estas, mencionaron la generación de reglas y conclusiones generales, la obtención de modelos matemáticos y la generalización en sí misma.

**Profesora D:** Una vez que se han realizado los pasos anteriores se pide el establecimiento de una regla que guie el comportamiento que ha sido analizado.

**Profesor N:** Generalizar a través de una regla general de acuerdo a los ejemplos proporcionados.

**Profesor O:** Escribimos un modelo matemático.

En tres casos, se hizo referencia al tránsito del establecimiento del patrón a la formulación de generalizaciones, pues las acciones señaladas connotaban la abstracción general del patrón mediante su aplicación o extensión a una clase de objetos. Tal como se enfatiza (en cursiva) en los siguientes extractos de respuestas:

**Profesora F:** … y puedan reproducir esos patrones mediante una regla *que se pueda aplicar a todos los casos*.

**Profesora G:** …vimos que en las ecuaciones cuadráticas *se sigue un mismo patrón para cada actividad*.

**Profesor I:** …se puede *presentar otro tipo de sucesiones como por ejemplo que tengan alguna constante*.

**Tema 4:** *Verificar y extrapolar la generalización*

Los profesores quienes percibieron alguno de los procesos inductivos, también consideraron acciones más allá de la producción de generalizaciones. En específico, se fijaron en verificar la validez de la regla general al probarla en otros casos y en extrapolar o extender lo generalizado a situaciones análogas.

**Profesora J:** **(…)** inferir una generalidad y comprobar su autenticidad antes de adoptarla.

**Profesora C:** Aplicar lo aprendido a otras situaciones generales.

**Profesora D:** Una vez que se han realizado los pasos anteriores se pide el establecimiento de una regla que guie el comportamiento que ha sido analizado. Como cierre se pudiera pedir que para un nuevo caso se realice de manera individual todos los anteriores.

**Tema 5:** *Proceso de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas*

En este tema se agruparon las respuestas de los profesores que hicieron mención de acciones generales para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, tal como la introducción a una actividad de aprendizaje mediante el repaso de conocimientos previos, así como la ejemplificación y explicación de este contenido matemático.

**Profesora J:** Lo primero es movilizar conocimientos sobre los conocimientos que implican las ecuaciones, manejo de potencias y sucesiones.

**Profesora L:** Ponerle al alumno un ejemplo de figuras y números para resolver según sus conocimientos. Con base en lo obtenido en la actividad, realizar una explicación de lo que es una ecuación cuadrática.

**Profesor P:** Contrasta el concepto de ecuación cuadrática con el concepto de ecuación lineal. Identifica ecuaciones cuadráticas en la vida cotidiana…

**Tema 6:** *Objetivo de la actividad*

Algunos profesores se refirieron al objetivo y naturaleza de la actividad de generalización inductiva, más que a los procesos cognitivos para desarrollarla. Las respuestas incluidas en este tema mencionan elementos o características generales de esta actividad tales como el tipo de tareas en la misma.

**Profesora F:** Observar, analizar e interpretar lo que se presenta en una situación dada de aprendizaje para poder generar un razonamiento inductivo.

**Profesora H:** Propuestas de modelos de ejercicios similares que sean inductivos.

### 7.3.3. Conclusiones del análisis y consideraciones para la siguiente sesión

La actividad de generalización inductiva propició que los equipos conectaran los tres procesos involucrados en el razonamiento inductivo, desde la observación de regularidades hasta la formulación de generalizaciones. Se comprobaron las conjeturas acerca del establecimiento de relaciones matemáticas que describan el comportamiento cuadrático y la abstracción de lo general para transitar entre los procesos inductivos.

Todos los equipos compararon la cantidad de objetos en las figuras de las secuencias y visualizaron lo cambiante e invariante entre ellas para observar regularidades. Aunque la estrategia del cálculo de diferencias se empleó al inicio de la actividad por la mayoría de los equipos (E2, E4, E5, E6), solamente fue utilizada para corroborar que las sucesiones eran cuadráticas. Se verificó que la inclusión de referentes visuales para el análisis y representación de la variación lineal en las secuencias, apoyó a los profesores en el establecimiento de relaciones entre variables y se desapeguen del cálculo recursivo de diferencias. En consecuencia, esto posibilitó que los profesores reconozcan y representen los patrones cuadráticos en la actividad.

Se corroboró también que la abstracción de lo general soportó el tránsito del establecimiento del patrón a la obtención de la regla general del patrón cuadrático de las secuencias. En efecto, los equipos pudieron extender el patrón a casos no conocidos y expresar verbal y algebraicamente la relación invariante entre los valores de las secuencias. No obstante, la mayoría de los equipos se apoyaron en la representación figural de las secuencias A, B y C para reconocer la relación invariante en los valores de la Secuencia D. Sólo un equipo abstrajo la relación directamente de los valores en la tabla, sin acudir a lo visual. Si bien los profesores caracterizaron lo cuadrático no solo en términos de las segundas diferencias, se detectó que falta dar mayor soporte conceptual a su razonamiento para saber cómo relacionar variables con comportamiento cuadrático a partir de pares de valores numéricos.

Por lo anterior, en la siguiente sesión se decidió trabajar en el contenido matemático con el establecimiento de la relación de variación lineal entre dos variables, mediante el análisis numérico y representación de un comportamiento cuadrático como el producto de dos factores lineales de una variable. Para ello, se retomó y modificó el formato del problema de la construcción de escaleras con palillos, dadas las dificultades allí detectadas para establecer el patrón y abstraer lo general. El ajuste del formato consistió en la representación figural de dos casos particulares adicionales y la inclusión de dos literales para representar la posición de dos figuras, tal como puede verse en la tarea de la Actividad IV. Estas literales se incluyeron como referentes para orientar el análisis y expresión de las relaciones numéricas en la tarea.

En la descripción de las acciones para generalizar, los profesores emplearon términos como como patrón, observar, regularidad, regla, conclusiones generales, etc., que denotan aspectos propios del razonamiento inductivo. La mayoría de los profesores logró asimilar de la actividad, los procesos inductivos que llevaron a cabo para generalizar, aunque algunos los describieron en términos de la particularidad de las acciones realizadas en las tareas. Por el contrario, dos se enfocaron solamente en acciones relativas a la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, no en las cognitivas. Entonces se decidió continuar el trabajo en equipos para que compartan y amplíen sus entendimientos sobre los procesos inductivos, mientras reflexionan sobre aquellos implicados en la solución de una tarea de razonamiento inductivo.

## 7.4. Sesión 4: Etapa B – Categoría didáctica

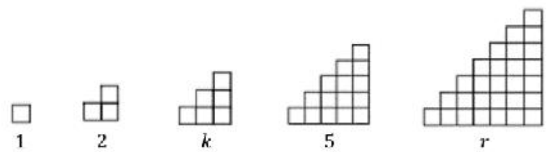
| |
|---|
| Objetivo: *Analizar si los profesores asocian adecuadamente los procesos inductivos con las acciones de solución de una tarea de razonamiento inductivo.* |

En este sesión se pretendía que los profesores robustecieran y formalizaran las nociones desarrolladas en la actividad anterior (Actividad III – Sesión 3) sobre cada uno de los procesos inductivos. Con esto en mente, se generó un espacio para la reflexión entre pares acerca de la solución propuesta a una tarea de razonamiento inductivo y los procesos cognitivos implicados en la resolución. Respecto al contenido matemático, se trabajó con el reconocimiento y la representación de un patrón cuadrático como el producto de dos factores lineales de una variable. Investigativamente, el interés estuvo en analizar si ellos asociaban adecuadamente los procesos a los pasos de solución de la tarea.

### 7.4.1. Desarrollo de la sesión 4

Se introdujo la sesión mencionando a los profesores que se continuaría el trabajo con una tarea de razonamiento inductivo, más en este ocasión ellos no llevarían a cabo la resolución, sino analizarían una forma de resolver esa tarea y los procesos inductivos involucrados. Se organizaron los profesores en equipos, tal como estaban integrados en la sesión anterior. Luego, se les presentó la tarea de la Actividad IV (Figura 7.23), la cual corresponde a la situación de construcción de escaleras con palillos, y se señalaron los ajustes hechos a la tarea en relación con la resuelta en la segunda sesión, tal como la inclusión de dos casos particulares más y los referentes $k$ y $r$ para apoyar el reconocimiento del patrón.

**Tarea.** Las siguientes figuras representan escaleras con distinta cantidad de pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.




a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de $n$ pisos.

**Figura 7.23.** Tarea de razonamiento inductivo de la Actividad IV.

Inmediatamente después se les entregaron las hojas con los pasos de la solución propuesta (Figura 7.24), junto con un listado de procesos cognitivos asociados al razonamiento inductivo y su descripción breve. Y se leyó la instrucción de la actividad "A continuación, se enlistan procesos que se llevan a cabo en la resolución de tareas de generalización. Leer cada uno detenidamente e indicar en los recuadros anteriores, cuáles de esos procesos se vislumbran en la solución propuesta. Proporcionar la razón de su elección".

**Paso 1**

Intervienen dos cantidades variables en la situación:
$p$: cantidad de pisos de la escalera
$c$: cantidad de palillos que conforman la escalera

Haciendo corresponder las cantidades numéricas en una tabla mediante conteo:

| $p$ | $c$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 10 |
| $k$ | 18 |
| 5 | 40 |
| $r$ | 70 |

Se reconoce un comportamiento creciente en lo figural y en lo numérico. La cantidad de palillos va creciendo conforme aumenta la cantidad de pisos.

**Paso 2**

Por el hecho de haber una variación con crecimiento exponencial, se analiza la relación entre los valores de $p$ y $c$ en la tercera columna.

| $p$ | $c$ | Factores de $c$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | $1 \times 4$ |
| 2 | 10 | $2 \times 5$ |
| 3 | 18 | $3 \times 6$ |
| 4 | 28 | $4 \times 7$ |
| 5 | 40 | $5 \times 8$ |
| 6 | 54 | $6 \times 9$ |
| 7 | 70 | $7 \times 10$ |

$3 \times m = 18, m = 6$

Dado el comportamiento numérico de los datos se puede pensar en un modelo cuadrático o variación lineal entre las variables, en correspondencia con el comportamiento figural.

**Paso 3**

El comportamiento cuadrático queda expresado como el producto de dos factores que varían linealmente:

$$\boldsymbol{c = p(p+3)}$$

Comprobando que se cumple para $p - 5$:

$$p(p+3) = (5)(5+3) = 40 = c$$

Por tanto,

$$180 = p(p+3)$$
$$p^2 + 3\text{p} - 180 = 0$$
$$(p-12)(p+15) = 0$$
$$p_1 = 12 \text{ o } p_2 = -15$$

Dado que en el contexto de la situación la variable $p$ asume valores enteros positivos, entonces con 180 palillos se formará una escalera de $p = 12$ pisos.

**Paso 4**

Para construir una escalera de $n$ pisos se requerirán $c = n(n+3) = n^2 + 3n$ palillos, donde $n \in \mathbb{N}$.

El modelo que representa la ley general que rige el crecimiento variacional en la situación es de la forma:

$$\boldsymbol{y = x(ax+b) = ax^2 + bx, a \neq 0}$$

**Figura 7.24.** Pasos de la solución propuesta a la tarea de la Actividad IV.

En un primer momento se contestó la actividad por escrito. Para ello, en cada equipo se analizó cada paso de la solución de la tarea y los profesores intercambiaron ideas para elegir el proceso inductivo correspondiente a cada uno y dar las razones de su elección. La actividad se respondió durante 40 minutos. En un segundo momento, se discutieron las respuestas de manera grupal a fin de generar consensos sobre el o los procesos inductivos asignados.

### 7.4.2. Análisis de datos sobre los procesos inductivos identificados

Se transcribieron y organizaron en tablas las respuestas escritas y registradas en audio de los equipos por cada paso de la solución propuesta. Se analizó la asociación de los procesos inductivos elegidos por los profesores para cada paso de la solución, aunque la atención se centró en las razones dadas para la elección de cada proceso más que en la adecuada o inadecuada asociación. A priori, se esperaban las siguientes relaciones de correspondencia entre pasos y procesos inductivos:

Paso 1 – *B: Observación de una regularidad*
Paso 2 – *E: Reconocer un patrón*
Paso 3 – *A: Establecer el patrón*
Paso 4 – *C: Expresar un resultado o conclusión general*

Como se había mencionado en la descripción de la Actividad IV (Capítulo 6), el proceso *F: Abstraer el patrón (general)* estaba implícito en el tránsito del Paso 3 al 4. Por lo que también podría haber sido señalado por los equipos. En las respuestas escritas se detectó que, en algunos pasos hubo discrepancia entre los procesos asociados por los equipos a un mismo paso. A través de la discusión entre pares se generaron consensos sobre los procesos cognitivos involucrados en la solución y, por los argumentos dados por los compañeros, algunos equipos cambiaron su respuesta. En la Tabla 7.10 se indican los procesos que originalmente señalaron los equipos en sus respuestas escritas y entre paréntesis se anota el proceso resultante de su cambio de decisión tras la discusión grupal.

**Tabla 7.10.** Procesos inductivos asociados por los equipos a cada paso de la solución (Actividad IV)

| Equipo | Paso 1 | Paso 2 | Paso 3 | Paso 4 |
|---|---|---|---|---|
| E1 | B | E | A | C |
| E2 | B | A (E) | D (A) | C |
| E3 | B | E | C (A) | D (C) |
| E4 | B - A | E | A | C |
| E5 | B | A (E) | D (A) | F (C) |
| E6 | B | E | A | C |

En el Paso 1, todos los equipos coincidieron en que el proceso cognitivo involucrado era la observación de regularidades (B). Las razones que proporcionaron, oralmente y por escrito, fueron coherentes con las características de este proceso, pues identificaron acciones de comparación y análisis de casos particulares para relacionarlos. La convergencia en sus respuestas y la pertinencia de las razones dadas por los profesores, refleja un entendimiento bastante claro de este proceso. Entre estas razones mencionaron:

En las respuestas escritas:

E2: Porque se establece una comparación y análisis entre las variables involucradas en el problema anterior.

E5: Comprender el comportamiento de la sucesión para indicar la relación entre posición y cantidad.

E6: Porque se necesita ver cantidad de figuras, incrementos o decrementos entre unas 3 por lo menos, y observar lo que sucede entre una y otra figura.

En la discusión grupal:

E2 (F): Nosotros pusimos el B porque hay una comparación que hay que realizar, se dice que hay un comportamiento creciente en lo figural y lo numérico, hay una comparación.

E1 (A): Se puede observar como regularidad que los dos valores $[p$ y $c]$ están creciendo, que uno crece más lento y otro crece más rápido.

E3 (G): Cuando tienes una tabla lo primero que haces es observar cómo cambian las diferencias entre los números, te pones a pensar en cómo van. (…) Exactamente, en la tabla comparas y te pones a ver cómo los vas a relacionar.

El equipo 4 había también asociado el proceso A al primer paso. Sin embargo, rectificó por las razones anteriores y estuvo de acuerdo en el señalamiento de E5 respecto a que ese proceso estaba involucrado en un paso siguiente: "*También el B, en el otro paso se establece el patrón*" (E5).

En el Paso 2, la mayoría de los equipos (E1, E3, E4 y E6) indicó por escrito que el proceso asociado es reconocer el patrón (E), proporcionando razones como las siguientes:

E3: Porque ya encontró una relación entre las variables en la situación y de allí podrá expresar el patrón.

E4: Se analiza la relación de las variables. Habiendo reconocido el patrón se puede expresar de una manera más concreta.

Por el contrario dos equipos (E2 y E5) señalaron que el proceso correspondiente es establecer el patrón (A), sus razones fueron:

E2: Porque se establece una representación gráfica, con la cual se facilita el análisis de la información que se nos proporciona.

E4: Una vez establecida la relación de comportamiento entre posición y cantidad, se puede observar y reconocer los patrones.

Aparentemente, las razones de E2 y E4 hacen referencia al proceso de reconocer el patrón, pero en la discusión grupal reafirmaron que se trata del proceso A, discrepando con la elección de los otros equipos. Esta discrepancia se disipó cuando algunos profesores argumentaron que, a diferencia de establecer el patrón, en el segundo paso se analiza y reconoce una posible relación entre las variables, pero no se formula una conjetura específica sobre el patrón ni se prueba con otros casos.

IN: Ahora vamos al paso dos. ¿Cuál es el proceso que corresponde?

E1 (A): El reconocimiento de un patrón.

IN: ¿Alguno indicó un proceso diferente?

E2 (D): Nosotras pusimos el A, establecer el patrón, porque se establece una representación más gráfica y estamos hablando también de las posiciones, en la tabla se muestra qué se hizo, por ejemplo, cómo se obtuvo el 18. O sea, la tabla nos permite analizar mejor la información que teníamos en el paso anterior.

IN: ¿Sería reconocer o establecer un patrón? ¿Qué diferencia habría entre uno y otro?

E1 (B): Cuando lo estableces como que ya estás, no asegurando por completo, pero casi casi asegurando el patrón, cuando estás reconociendo estás tratando de ver para dónde va, no lo has formalizado, ni se ha establecido. De hecho, en el paso 3 se hace la comprobación. Por eso pusimos reconocer.

⋮ ⋮

E2 (E): Más bien pusimos el A porque decía algún sistema de representación, en este caso una tabulación, por eso nos fuimos por el A.

| | |
|---|---|
| E1 (B): | Allí [en el paso 2] se distingue entre lo lineal y lo cuadrático. Como que el número de pisos es lineal y como el otro, el de palillos, es cuadrático. |
| IN: | Entonces, ¿Qué concluimos profesores? |
| Grupal: | [Proceso] E |
| IN: | ¿Qué opinan quienes habían elegido el proceso A? |
| E2 (F): | Después de darnos cuenta lo que dijo el maestro A, pensamos que sí sería reconocer el patrón, porque en la parte de abajo dice que el comportamiento de los valores puede ser de variación lineal o cuadrático. (…) Entonces consideramos que sí podría ser reconocer el patrón, en lugar de establecer, porque estaríamos afirmando que lo es. |
| E5 (N): | Creo que en ese paso podría pensarse que están incluidos los dos aspectos, reconocer y establecer, reconoce que hay un patrón y posteriormente, al hacer la tabulación y ver el comportamiento, ya lo podría establecer. El reconocimiento es previo a establecerlo, ya lo reconoció, aquí hay un patrón, entonces el establece esa tabulación e incluso habla de los factores de *c*. Ya se dio cuenta que no es lineal, entonces es cuadrático y es cuando intenta sacar o hace los factores de *c*... |
| E5 (M): | Es que, también, establecer el patrón es nada más expresar una conjetura, no estás dando todavía un argumento. |
| IN: | ¿Cuál sería la conjetura que se estaría dando en el paso 2? |
| E1 (B): | Allí todavía no propone, todavía sigue analizando los datos, pero más a fondo, todavía no está estableciendo que el patrón aquí va, es tal. |
| E6 (P): | Se observa que hay un comportamiento creciente en los valores y se relacionan con los factores. |
| E5 (M): | Ah sí, es ese [proceso], el E. |
| IN: | Si nos fijamos en la respuesta debajo de la tabla, habla del comportamiento numérico de los datos según la variación. (…) todavía no está afirmando cómo va a ser, sino está reconociendo cómo están variando los datos. Entonces podríamos decir que este paso 2 lo asociamos al reconocimiento de un patrón. |

En el Paso 3, en las respuestas escritas, la mitad de los equipos (E1, E4 y E6) asignó el proceso A y la otra mitad (E2, E3 y E5) eligieron procesos relativos a expresar o extender/aplicar la generalización (procesos C y D, respectivamente). La elección del C pudo deberse a una eventual confusión por el uso de expresiones con literales para representar la estructura del patrón en este paso, pues se suele vincular a las fórmulas o ecuaciones algebraicas con la generalización. Por otro lado, quienes eligieron el proceso D parece que interpretaron la sustitución de literales por números como la aplicación o comprobación de una fórmula, según se infiere en las razones dadas por escrito:

E2: Porque la fórmula ya se aplica para una situación completa comprobando si cumple o si no (Proceso D).

E3: Porque ya está expresando la situación en una forma algebraica (Proceso C).

Sin embargo, los argumentos generados en la discusión del paso previo propiciaron que algunos equipos cambien su elección al compartir sus respuestas al grupo y todos convinieron bastante pronto en que el proceso subyacente al tercer paso era el A. Entonces, los profesores proporcionaron razones de por qué en este paso se establecía el patrón y mencionaron la conjetura formulada al respecto al patrón cuadrático, tal como se lee en los siguientes extractos de la discusión:

IN: … En este paso 3, ¿Cuál es el proceso cognitivo que asociarían?
E2 (E): A
E6 (O): A
E1 (B): Nosotros pusimos A, establecer el patrón.

IN: Aquí ¿cuál fue su respuesta?

E3 (G): Nosotros pusimos C.
E4 (J): Nosotras igual pusimos el A, establecer el patrón.

E3 (G): Aunque después de lo discutido en el paso 2, podríamos quedarnos con establecer el patrón.

IN: Si nos quedamos con establecer el patrón en este paso, ¿Cuál sería la razón?

E4 (J): Pienso que porque está probando el patrón, al principio prueba con $p = 5$, y ve que se cumple, funciona, entonces hace esa igualdad para saber en el otro caso [$c = 180$], cuál sería el valor de $p$. Entonces como ve que ya funciona, establece el patrón y dice que sí era ese.

E1 (A) Ya lo estableció y está probando si funciona lo que propuso.

IN: … ¿Cuál sería la conjetura que se está formulando? De otra forma, ¿Cuál es el patrón que se estableció en esta situación?

E2 (D): $c = p(p + 3)$
E6 (P): La cantidad de palillos es igual a la cantidad de pisos, $p$, por $p$ más tres.

E5 (N): Y ya luego lo establece cuadráticamente, o sea, no fue como directo. Primero fue [Paso 2] con los dos factores lineales, por factorización, y luego, en el otro paso [3], el modelo cuadrático.

IN: En el paso anterior se decía que los valores de la tabla tenían un comportamiento cuadrático o de variación lineal. En este paso 3, la conjetura es que ese comportamiento se puede representar mediante el producto de dos factores lineales, y se verifica numéricamente con un caso… Por tanto, si estamos de acuerdo, el proceso cognitivo asociado al paso 3 es el establecimiento de un patrón.

En el Paso 4, cuatro de los seis equipos (E1, E2, E4 y E6) indicaron que corresponde el proceso C, mientras que E3 eligió el proceso D y E5 el F (abstraer el patrón general). Ciertamente, el proceso F está implicado cognitivamente en este paso, debido a que se requiere para expresar un resultado o conclusión general de la situación, aunque el que se explicitaba era este último proceso. La mayoría de los equipos proporcionó razones concernientes a la expresión de la generalización mediante una fórmula o modelo:

E1: Generalización de manera verbal y algebraica de la situación.

E4: Encuentra una expresión para representar cualquier piso de la escalera.

E6: Se establece un modelo general que permite trabajar con n pisos y calcular los palillos.

Al momento de la discusión grupal, todos los equipos estuvieron de acuerdo en que se trataba del proceso C, porque reconocieron la expresión verbal y algebraica de la generalización, pero no hicieron referencia al conjunto de números para la cual es válida. Aspecto que es propio de la formulación de una generalización y que fue enfatizado por la instructora:

IN: … En este paso 4, ¿Cuál es el proceso cognitivo del razonamiento inductivo que ustedes asignaron?

E2 (D): Expresar un resultado o conclusión general.

⋮ ⋮

E5 (M): Sí, también puede ser el C.

⋮ ⋮

E4 (K): Nosotras pusimos el C.

E3 (G): Cambiamos a C.

E1 (A): Sí, el C. Porque igual dice expresar el resultado de forma verbal y algebraica, y es lo que hace allá [paso 4], expresa la fórmula y la explica, o sea, explica cómo funciona la fórmula.

⋮ ⋮

IN: Cabe recalcar, que la generalización no solo consiste en dar una expresión general, sino en extender el patrón a una categoría o clase total de casos. Por lo que implica abstraer el patrón, como indicó el equipo 5 en su respuesta. En la situación, la regla general [$c = n^2 + 3n$] del patrón es válida para el conjunto de los valores de $n \in \mathbb{N}$. (…) En la actividad se trata el comportamiento cuadrático o de variación lineal, y se muestra que puede ser representado en dos formas: como el producto de dos factores lineales o como una relación aditiva del producto de un número por sí mismo y un múltiplo de ese número.

### 7.4.3. Conclusiones del análisis y consideraciones para la siguiente sesión

De manera general, los profesores reconocieron y asociaron adecuadamente los procesos inductivos con las acciones mostradas en cada paso de solución de la tarea. La mayor controversia se dio en el segundo paso de la solución, en relación con la distinción entre el reconocimiento y establecimiento del patrón. No obstante, se dieron argumentos que ayudaron a los compañeros a clarificar la diferencia entre estos y generar consensos.

La movilización de los procesos subyacentes al razonamiento inductivo para generalizar desde casos particulares en la sesión anterior, y la evidencia de su asimilación en esta sesión, dejan entrever un cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores y cierta estabilidad en el uso e identificación de los procesos inductivos por parte de ellos. Por tal razón, se decidió evaluar en qué medida se produjo ese cambio en la siguiente sesión y concluir el experimento.

## 7.5. Sesión 5: Etapa C – Categorías cognitiva y didáctica

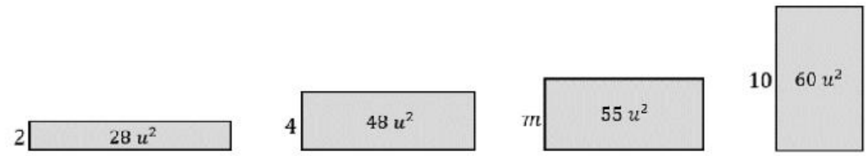
Objetivo: *Evaluar en qué medida se produjo un cambio cognitivo y se reflejó en el rediseño de una actividad de generalización.*

En esta sesión se realizó una evaluación sumativa para determinar en qué medida el experimento produjo un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores, así como una posible transacción del conocimiento generado en este cambio al rediseño de una actividad de generalización inductiva.

### 7.5.1. Desarrollo de la sesión 5

Se aplicaron, de manera no simultánea, dos actividades en equipos y se respondieron por escrito. La primera actividad se aplicó para recabar información sobre un cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores (Actividad V - Figura 7.25), en la cual demandaba generalizar un patrón cuadrático en un contexto de variación continua. La actividad fue resuelta en un tiempo máximo de 25 minutos.

**Tarea.** De una familia de rectángulos, se dispone la siguiente información de las medidas de la altura (indicada a la izquierda de cada uno) y el área de cuatro rectángulos:




a) Determine la medida de la altura y la base del rectángulo cuya área mide 63 unidades cuadradas.

b) A partir de dicha información, proponga un modelo o método con el cual sea posible determinar la medida del área de cualquier rectángulo en esa familia.

c) En la siguiente tabla, se muestran las medidas de la altura ($h$) y el área ($A$) de un conjunto de rectángulos:

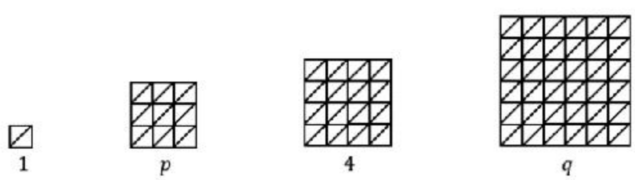
| $\boldsymbol{h}\ (cm)$ | 5 | 7 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A}\ (cm^2)$ | 45 | 77 | 96 | 192 |

Formule un modelo algebraico para determinar la medida del área del rectángulo perteneciente a ese conjunto, cuya altura mide $x$ unidades.

**Figura 7.25.** Actividad V para evaluar un cambio cognitivo.

En la segunda actividad se recolectó información sobre los criterios que emplean los profesores para rediseñar una actividad de generalización inductiva de un comportamiento cuadrático (Actividad VI - Figura 7.26). A los equipos se les se solicitó replantear el orden de las tareas (A, B, C y D) de tal manera que se ajusten a una lógica de razonamiento inductivo y proporcionar la razón de los cambios efectuados. Se enfatizó que podían quitar, agregar o modificar las tareas.

**Instrucción**. Las siguientes figuras de una secuencia, están formadas por los segmentos de estructuras triangulares y debajo de cada una se indica su posición en la secuencia.




Realizar lo que se solicita a continuación en cada tarea, para formular un modelo que permita determinar la cantidad de segmentos en cada figura según su posición en la secuencia.

A. Formula el modelo algebraico que represente la cantidad de segmentos que contiene la figura en la posición $x$.
B. Determina la cantidad de segmentos de la figura en la posición 10, sin calcular los que contienen las figuras en las posiciones 7, 8 y 9.
C. Determina la posición de la figura constituida por 616 segmentos.
D. En la tabla de abajo, completa las cantidades de segmentos ($c$) que contienen las figuras según la posición ($n$) que ocupan en la secuencia.

| $n$ | $c$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | |
| $p$ | 33 |
| 4 | 56 |
| 5 | |
| $q$ | |

**Figura 7.26.** Actividad de generalización inductiva a rediseñar.

En los equipos se observó que, primeramente, cada profesor resolvió las tareas de la actividad propuesta. Seguidamente, dialogaron sobre la intención de cada tarea y las reordenaron, escribiendo los criterios en que basaron sus modificaciones. Este trabajo se realizó durante 40 minutos aproximadamente.

### 7.5.2. Análisis de datos relativos a la evaluación de un cambio cognitivo docente

Se realizaron dos análisis por separado de cada actividad:

(1) El cambio cognitivo fue medido en términos de un tránsito del proceso de observar regularidades al de establecer un patrón o a la formulación de generalizaciones. Para ello, se examinaron cuáles procesos inductivos movilizaron los profesores en la resolución de la Actividad V.

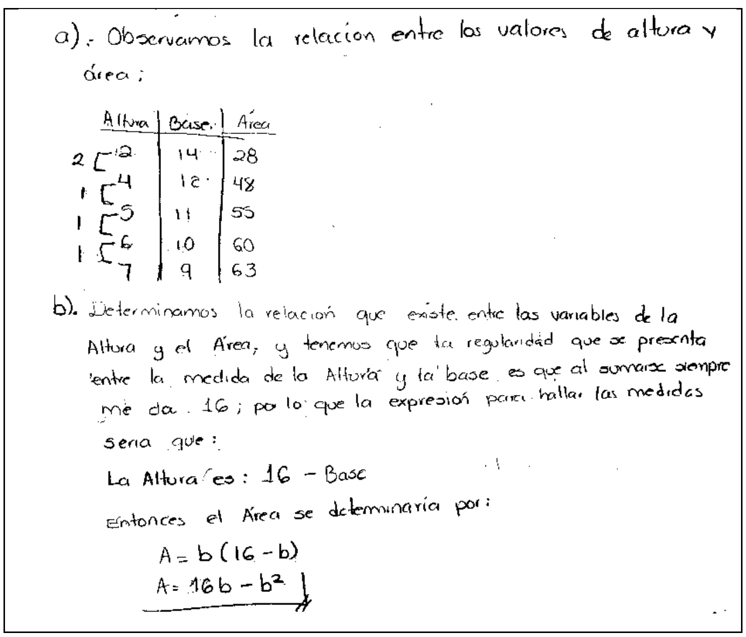
(2) Los datos recolectados en la Actividad VI se analizaron para obtener información acerca de la lógica y los criterios considerados por los profesores en el rediseño de la actividad de generalización inductiva.

**Análisis 1: Movilización de procesos inductivos**

Con base en el marco de referencia, se analizaron cuáles procesos inductivos emplearon los profesores en el razonamiento seguido para resolver la Actividad V y así comprobar si se dio alguna transición entre un proceso y otro. La unidad de análisis fueron las acciones llevadas a cabo en cada tarea (incisos a, b y c) de la actividad. Se encontró que todos los equipos dieron evidencia de transitar de la observación de regularidades a la formulación de generalizaciones.

Ellos, sin excepción, iniciaron su razonamiento obteniendo valores de la altura (h), el área (a) y la base (b) de los rectángulos representados con figuras y organizándolos en una tabla para buscar alguna regularidad. Los valores de la base se obtuvieron utilizando la fórmula para medir el área de rectángulos, $A = b \times h$. A partir del análisis de la variación de los valores de la base y la altura de los rectángulos conocidos, la mayoría de los equipos obtuvo las medidas de otros rectángulos de la familia, ampliando el número de casos particulares.

La ***observación de regularidades*** se sustentó en la comparación de los valores en la tabla centrada en su variación, y en la búsqueda de relaciones entre las medidas de la base y la altura de rectángulos específicos. Por ejemplo, el equipo 2 analizó relaciones aditivas entre los valores de $b$ y $h$, y observó que la suma de la base y la altura de ciertos rectángulos es la misma, tal como señaló en su respuesta a los incisos a) y b):


a).- Observamos la relacion entre los valores de altura y área;

| | Altura | Base | Área |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 14 | 28 |
| 1 | 4 | 12 | 48 |
| 1 | 5 | 11 | 55 |
| 1 | 6 | 10 | 60 |
| | 7 | 9 | 63 |

b). Determinamos la relación que existe entre las variables de la Altura y el Área, y tenemos que la regularidad que se presenta entre la medida de la Altura y la base es que al sumarse siempre me da 16; por lo que la expresión para hallar las medidas sería que:

La Altura es: 16 − Base

Entonces el Área se determinaría por:

$A = b(16 - b)$

$A = 16b - b^2$

**Figura 7.27.** Respuestas de E2 en los incisos a) y b).

E2 describió (por escrito) el razonamiento seguido en esta primera parte de la actividad como sigue:

> 1. Observamos el planteamiento e identificamos los aspectos (datos que intervienen). Una vez identificados y organizados los datos nos dimos a la tarea de hallar una regularidad entre las cantidades...

El ***establecimiento de un patrón*** consistió en el reconocimiento y representación de una relación funcional entre las variables $b$ y $h$. En el inciso b, el patrón establecido por los profesores fue que la medida de la base de los rectángulos es igual a 16 unidades menos la medida de su altura o su equivalente, la altura en función de la base. El patrón fue representado numérica, verbal o simbólicamente. Por ejemplo, E2 combina lo verbal con lo simbólico y expresa: "*La Altura es: 16 – Base*" (Figura 7.27 – inciso b) y E5 lo representa numéricamente (Figura 7.28) al analizar la relación entre las medidas del área y la altura de los rectángulos:

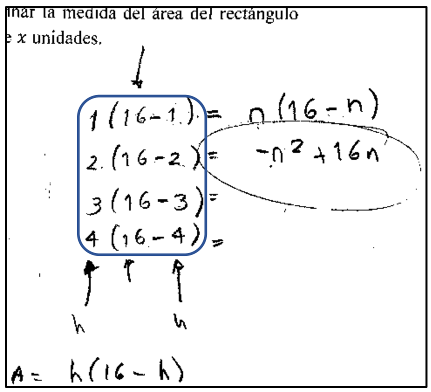



**Figura 7.28.** Patrón numérico representado por E5 en el análisis de los valores del área.

La ***formulación de la generalización*** se concretó con la obtención del modelo para determinar la medida del área, tanto de la familia de rectángulos (inciso b) como del conjunto especificado en el inciso c. Los modelos fueron expresados algebraicamente. En el inciso b, se usaron expresiones como $A = 16b - b^2$ (E2) y otras en las que la medida del área se expresó en función de la altura, tal como puede notarse en la respuesta de E4:

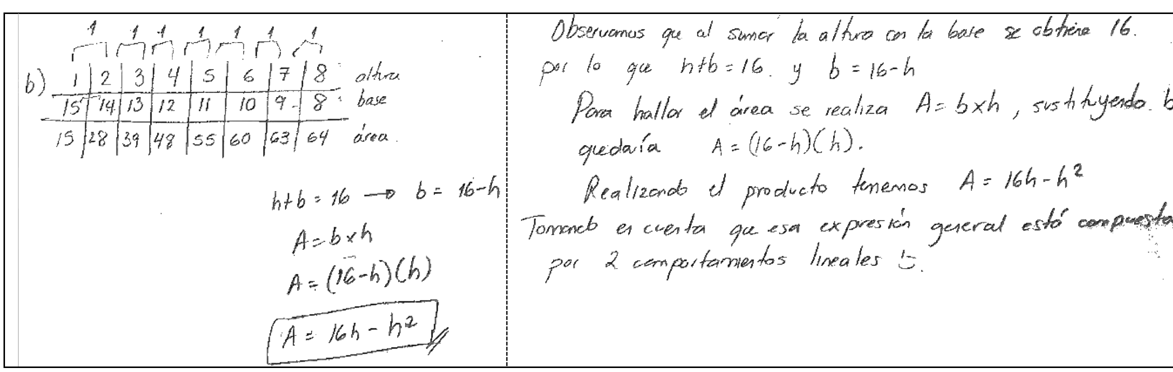



**Figura 7.29.** Formulación de un modelo general por E4, inciso b.

En el inciso c, un patrón en el conjunto de rectángulos es que la base de cada uno era cuatro unidades mayor que la altura. Entonces, la medida del área de cualquier rectángulo de ese conjunto podría determinarse con la expresión general: $A = (h + 4)(h)$, $A = h^2 + 4h$, o usando otra literal para denotar la medida de la altura o la base de los rectángulos. En la Figura 7.30 se muestra el modelo formulado por E2:

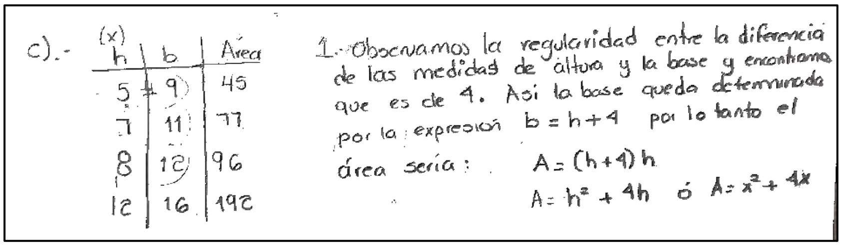



**Figura 7.30.** Formulación de un modelo general por E2, inciso c.

Si bien el análisis estaba enfocado en los procesos inductivos, globalmente se observó que los equipos describieron de manera ordenada las acciones correspondientes a cada tarea de la actividad, incluso haciendo mención de expresiones que aluden a dichos procesos. En general, se nota un razonamiento más sistematizado. A manera de ejemplo, en se presenta la solución completa de E5 al inciso b:

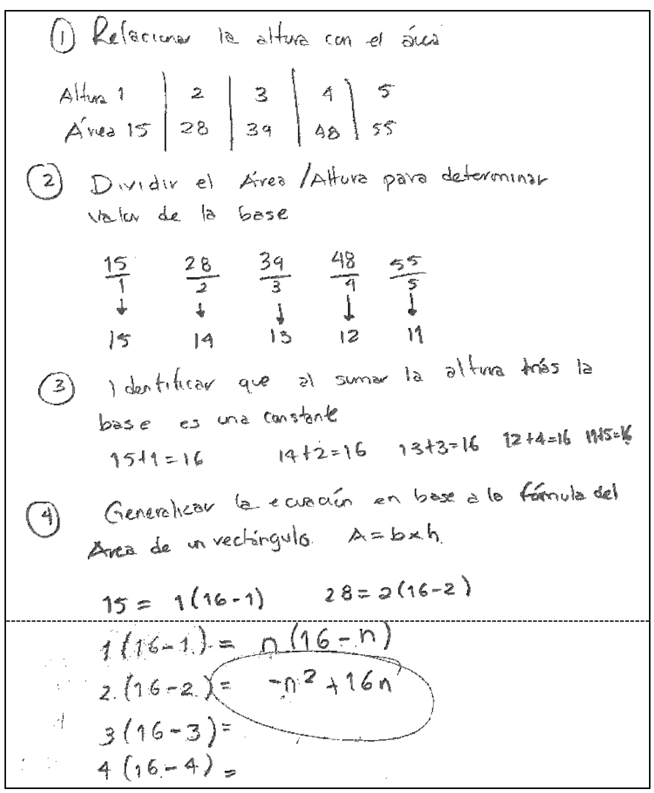



**Figura 7.31.** Formulación de un modelo general por E5, inciso b.

## Análisis 2: Lógica y criterios empleados en el rediseño de la actividad

Se organizaron en una tabla las letras correspondientes al orden de las tareas dispuesto por cada equipo en el rediseño y las razones proporcionadas para los cambios efectuados en la ordenación. A priori, en el diseño de la actividad se consideró el orden siguiente, según los procesos inductivos implicados en cada tarea:

**Tabla 7.11.** Orden preestablecido para las tareas de acuerdo a una lógica inductiva (Actividad VI).

| Orden | | Tarea | Proceso asociado |
|---|---|---|---|
| 1 | D | En la tabla de abajo, completa las cantidades de segmentos ($c$) que contienen las figuras según la posición ($n$) que ocupan en la secuencia. | Observación de regularidades |
| 2 | B | Determina la cantidad de segmentos de la figura en la posición 10, sin calcular los que contienen las figuras en las posiciones 7, 8 y 9. | Establecimiento de un patrón |
| 3 | A | Formula el modelo algebraico que represente la cantidad de segmentos que contiene la figura en la posición $x$. | Formular una generalización |
| 4 | C | Determina la posición de la figura constituida por 616 segmentos. | Aplicar la generalización |

De manera global, se comparó el orden de las tareas de todos los equipos para comprobar si se ajusta a una lógica inductiva, es decir, si se procede de lo particular a lo general. En la Tabla 7.12 se muestra el concentrado de respuestas. Todos los equipos, excepto uno (E6), ordenaron las tareas iniciando con la que involucra la observación de regularidades (D) y finalizando con la formulación (A) y aplicación de la generalización (C).

**Tabla 7.12.** Orden de las tareas dispuesto por cada equipo en el rediseño de la actividad.

| Tarea | E1 | E2 | E3 | E4 | E5 | E6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | D | D | D | D | D |
| 2 | B | B | B | E | B | B |
| 3 | A | A | A | B | A | C |
| 4 | C | C | C | A | C | A |
| 5 | - | - | - | C | - | - |

En la Tabla 7.11 puede notarse que solamente el Equipo 4 agregó una tarea (E) a las propuestas en la actividad, pues consideraron debía solicitarse de manera explícita la observación de alguna regularidad en las figuras de la secuencia:

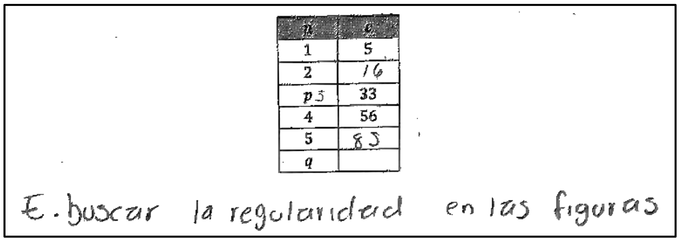



**Figura 7.32.** Tarea E propuesta por E4 en el rediseño de la actividad.

En el caso del Equipo 6, este invierte el orden de las últimas dos tareas; establecen como tercera tarea a la C y a la A como cuarta. Los profesores del equipo interpretaron que la C demandaría extender y comprobar el posible patrón de la secuencia para luego establecerlo (Véase la Tabla 7.13). Desde este punto de vista, sería adecuado considerar a la A cómo la última tarea, ya que implica obtener la regla general.

**Tabla 7.13.** Orden de las tareas asignado por E6 y razones de los cambios efectuados.

| Tarea | Letra | Razón |
|---|---|---|
| 1 | D | *Completa las cantidades de segmentos, a partir de la observación de la regularidad.* |
| 2 | B | *Determina la cantidad de segmentos reconociendo el patrón.* |
| 3 | C | *Determina la posición de la figura para un caso particular, estableciendo el patrón.* |
| 4 | A | *Formula el modelo algebraico que representa la cantidad de segmentos. Expresa una ley general.* |

Por otro lado, se analizaron de manera puntual los criterios que emplearon los equipos al determinar el orden de las tareas. Se detectó que los equipos basaron sus criterios en el reconocimiento de los procesos inductivos inmersos en la resolución de cada tarea. Estos fueron referidos de manera explícita o implícita. Por ejemplo, el Equipo 1 menciona el proceso de observar una regularidad y la formulación de un modelo al indicar la razón de colocar las tareas D y A, como la primera y la tercera de la actividad, respectivamente. Véanse las respuestas de E1 a la Actividad VI en la siguiente tabla:

**Tabla 7.14.** Orden de las tareas asignado por E1 y razones de los cambios efectuados.

| Tarea | Letra | Razón |
|---|---|---|
| 1 | D | *Para observar y establecer la regularidad entre las cantidades involucradas.* |
| 2 | B | *Porque buscamos los resultados de casos concretos o particulares.* |
| 3 | A | *Para formular un modelo a través de una expresión algebraica.* |
| 4 | C | *Establecimiento de una generalización de los resultados.* |

El Equipo 5 señala de manera implícita a cada uno de los procesos inductivos en sus razones para los cambios de orden, las cuales se presentan en la Tabla 7.15. En negritas se resaltan las frases o palabras claves consideradas para la interpretación de dichos procesos.

**Tabla 7.15.** Orden de las tareas asignado por E5 y razones de los cambios efectuados.

| Tarea | Letra | Razón |
|---|---|---|
| 1 | D | *Es más fácil p/ los alumnos **visualizar algún comportamiento numérico** en una tabla. Los ayuda a **analizar**, a **realizar operaciones** y **descubrir posibles relaciones** entre una y otra [variable].* |
| 2 | B | *Es posible que los alumnos **al manejar los # sean capaces de manipular las variaciones y movimientos entre las posiciones** de la secuencia.* |
| 3 | A | *Una vez que los alumnos entiendan **la relación entre una posición y otra** puedan **encontrar reglas que cumplan con las condiciones propias de la secuencia** entendiendo la relación.* |
| 4 | C | *Es posible que una vez que los chicos encuentren la relación jueguen con la fórmula para ahora encontrar la posición según los elementos.* |

Se identificó que los profesores de E5 aluden al proceso de observar regularidades en la elección de la primera tarea (D), cuando refieren a la visualización del comportamiento numérico, y al análisis y descubrimiento de posibles relaciones entre las variables. Asimismo, en la segunda tarea (B) se interpreta que E1 considera el proceso de establecer un patrón y se reafirma en la razón de la elección de la tercera tarea (A), pues escriben: "*Una vez que los alumnos entiendan la relación entre una posición y otra*…". Allí, también se indica implícitamente la formulación de una generalización, en la frase "*encontrar reglas que cumplan con las condiciones propias de la secuencia*".

### 7.5.3. Conclusiones del análisis

En la Actividad V se demandaba inferir la regla general de patrones cuadráticos, a partir de datos numéricos y sin un referente visual que oriente el establecimiento del patrón. Por ende, el razonamiento inductivo estaría soportado esencialmente por el análisis numérico y la identificación de relaciones aditivas entre los valores de las variables. Este trabajo fue desarrollado con éxito por los profesores, siendo clave en el paso de la observación de regularidades al establecimiento del patrón, pues posibilitó visualizar la estructura matemática subyacente.

Todos los equipos alcanzaron a generalizar desde instancias particulares representadas numéricamente, lo cual da evidencia de un cambio cognitivo al transitar de un estado inferior a uno superior en su razonamiento. Adicionalmente, mostraron bastante orden y coherencia en la descripción de las acciones seguidas en la resolución de la actividad, observándose apego a los procesos inductivos y el uso de un vocabulario más formal acorde a estos.

Por otra parte, las respuestas de la Actividad VI, ponen de manifiesto que los profesores rediseñan la actividad tomando como eje el razonamiento inductivo en la ordenación de las tareas. En efecto, ellos proponen partir de la observación y análisis de casos particulares y encadenar las tareas procurando la conexión de los procesos inductivos, de tal manera que se orienten las acciones de los estudiantes hacia la inferencia de una regla general.

# Capítulo 8

## Resultados y conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados de la investigación con base en el análisis retrospectivo de los datos recolectados en el TDE, correspondientes a las categorías cognitiva y didáctica. Esta mirada hacia atrás en los datos y en el experimento en sí mismo, consistió en la comparación de los resultados parciales (por sesión) en cada categoría y su interpretación según los elementos teóricos, el marco de referencia del razonamiento inductivo y los aspectos considerados en el diseño de cada actividad. Así, tras este ir y venir entre los datos y la teoría se responde a las preguntas de investigación. Los hallazgos obtenidos del análisis retrospectivo muestran una evolución en el razonamiento inductivo de los profesores y un aumento en su sensibilidad didáctica. Para cerrar el capítulo, se exponen conclusiones relativas al objetivo general, limitaciones y aportes del trabajo.

### 8.1. Cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores

Se estudió una forma de promover un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de dieciseis profesores de matemáticas de secundaria, mediante un análisis microgenético, mientras resolvían tareas similares que demandaban inferir reglas generales de patrones cuadráticos desde casos particulares. Se encontró que todos los profesores manifestaron un cambio cognitivo caracterizado por un tránsito de la observación de regularidades a la formulación de generalizaciones y por una forma más sistemática de analizar y resolver tareas inductivas a partir del análisis numérico de casos particulares.

Para describir el cambio cognitivo y determinar en qué medida se produjo, se realizó un análisis comparativo de los resultados obtenidos en las tareas implementadas antes (Actividad II), durante (Actividad III) y después del cambio (Actividad V). De este modo, a continuación se describen las dimensiones del cambio cognitivo (Siegler, 2006) ocurrido en el razonamiento de los profesores: trayectoria, tasa de cambio, amplitud, variabilidad y fuente.

### a. Trayectoria

La trayectoria se refiere a los aspectos cualitativos y cuantitativos que permiten describir cómo ocurre el cambio en la experiencia de aprendizaje de los profesores durante el TDE. En la Tabla 8.1 se sintetizan los procesos y acciones predominantes en el razonamiento de los profesores en las actividades realizadas antes, durante y después del cambio cognitivo, a partir de los cuales se analizó la trayectoria de este cambio.

**Tabla 8.1.** Procesos inductivos y acciones predominantes en el razonamiento de los profesores durante el TDE.

| | **Antes del cambio (Actividad II)** | **Durante (Actividad III-Parte 1)** | **Después del cambio (Actividad V)** |
|---|---|---|---|
| **Procesos** | Observación de regularidades. | Observación de regularidades, establecimiento del patrón y formulación de generalizaciones. | Observación de regularidades, establecimiento del patrón y formulación de generalizaciones. |
| **Acciones** | • Obtención de casos particulares<br>• Análisis no sistemático de relaciones entre valores de las variables<br>• Estrategia de cálculo recursivo de diferencias<br>• Análisis visual de las características de figuras | • Obtención y comparación de casos particulares y comportamientos de secuencias de valores<br>• Análisis visual y numérico de la variación para observar regularidades<br>• Uso de estrategia recursiva para verificar el comportamiento de los valores de las variables<br>• Búsqueda y establecimiento de relaciones entre valores de las variables<br>• Abstracción de la relación invariante entre las secuencias<br>• Expresión verbal y algebraica de reglas generales | • Obtención y comparación de casos particulares<br>• Análisis numérico de relaciones entre variables de manera ordenada para observar regularidades<br>• Reconocimiento y representación numérica y verbal de relaciones entre variables para establecer el patrón<br>• Abstracción de lo general<br>• Expresión algebraica de reglas generales |

Cualitativamente, el proceso predominante en el razonamiento inductivo de los profesores al inicio del experimento fue la observación de regularidades, solamente cinco profesores alcanzaron la generalización razonando de manera inductiva. No obstante, en la etapa desarrollo (Actividades III y IV), los profesores reconocen y asimilan los procesos inductivos de observar regularidades, establecer el patrón y formular una generalización, mediante el análisis y representación de relaciones matemáticas asociadas a comportamientos cuadráticos de valores de variables y la abstracción de relaciones invariantes. En consecuencia, fueron mostrando mayor dominio en el uso de estos procesos en tareas inductivas.

Por lo anterior, un cambio cualitativo en su razonamiento se dio con la conexión de los tres procesos inductivos, para obtener la regla general de patrones cuadráticos desde instancias particulares representadas de manera geométrica y numérica. Asimismo, como se observó en los resultados de la Actividad V, se detectó un razonamiento con mayor sistematización y un uso aparentemente más consciente de los procesos inductivos para llegar a generalizar, lo cual se reflejó en una manera más organizada de plantear la solución a las tareas de esa actividad. Por el contrario, antes del cambio se habían identificado análisis dispersos o desorientados para la observación de regularidades que resultaban infructuosos para el establecimiento de algún patrón.

Un cambio cuantitativo notorio fue el uso menos frecuente de la estrategia del cálculo de diferencias y, en sentido inverso, un aumento en las acciones de búsqueda y representación de relaciones numéricas para reconocer un patrón cuadrático en las tareas. En comparación con las soluciones de la Actividad II, la estrategia de diferencias recursivas fue cada vez menos empleada por los profesores a lo largo de la Actividad III (Parte 1), y solamente dos equipos mostraron evidencia de su uso en la Actividad V. Así, conforme avanzaba el experimento, esta estrategia fue empleada más a modo de comprobación del comportamiento de valores, y se fue prescindiendo de ella en la búsqueda de regularidades.

### b. Tasa de cambio

El cambio en el razonamiento inductivo de los profesores fue gradual, por medio de experiencias de aprendizaje que integraron la movilización, asimilación y reflexión colectiva de los procesos inductivos para y en la resolución de actividades de generalización desde casos particulares. En lo cognitivo, este cambio estuvo precedido por un uso más frecuente y consciente de los procesos inductivos, especialmente del establecimiento de un patrón cuadrático. Se puede decir que hubo un razonamiento progresivo en los profesores en la medida que fueron reconociendo numéricamente el comportamiento cuadrático de valores de una variable y representándolo mediante relaciones aditivas y multiplicativas subyacentes a una estructura cuadrática, debido a que estas acciones son esenciales para establecer un patrón de este tipo.

El cambio acontece en la actividad de generalización inductiva (Actividad III - Parte 1), cuando los profesores empiezan a comparar, relacionar y abstraer patrones cuadráticos de secuencias de números mediante el análisis y representación de la variación lineal con el apoyo de referentes visuales. Como muestran los resultados correspondientes a la Parte 1 de esta actividad, esto permitió que todos los equipos de profesores pasen de la observación de regularidades al establecimiento de los patrones cuadráticos en la actividad. También, ellos transitaron a la formulación de generalizaciones al abstraer la relación invariante que normaba el comportamiento de todas las secuencias tratadas y extrapolarla a otras no conocidas. Cognitivamente, lo experimentado en la primera parte de la Actividad III les ayudó a movilizar e ir conectando los procesos inductivos para alcanzar a generalizar.

En otro momento, el cambio se acentúa con la asimilación de estos procesos. Como muestran los resultados de la Actividad III – Parte 2, la mayoría de los profesores percibe y enuncia los procesos involucrados en el razonamiento que siguieron para generalizar en la primera parte de la actividad. Incluso, hicieron referencia a las operaciones cognitivas asociadas, tales como: analizar, comparar, relacionar.

El cambio cognitivo tiende a estabilizarse con la reflexión colectiva de los equipos de profesores acerca de los procesos implicados en la resolución de una tarea de razonamiento inductivo. En la Actividad IV, los profesores reconocen y diferencian cada proceso asociado a los pasos de solución de la tarea planteada, proporcionando argumentos congruentes.

En conclusión, los profesores empezaron a usar los procesos inductivos y tomaron consciencia de estos en las Actividades III y VI, ayudándoles a subsanar las dificultades enfrentadas para generalizar en la tarea (construcción de escaleras con palillos) de la Actividad II. En las experiencias vividas en esas actividades, ellos comenzaron a establecer patrones cuadráticos y abstraer la generalidad de este comportamiento en valores numéricos específicos de variables discretas.

### c. Amplitud

El cambio cognitivo fue específicamente en el dominio de la resolución de tareas matemáticas de razonamiento inductivo. Si bien este cambio se produce en el contexto de situaciones de variación discreta y con apoyo de referentes visuales, se generaliza a contextos más abstractos y de variación continua. A diferencia de las tareas planteadas en las actividades (III y IV) de la etapa 2 del experimento "Desarrollo del razonamiento inductivo y sensibilización didáctica", las tareas de la Actividad V involucraban variables continuas y los profesores carecían de referentes visuales que orienten hacia el reconocimiento de la estructura del patrón. Tal como evidenciaron los resultados del análisis correspondiente a esta actividad, ellos fueron capaces de transitar de la observación de regularidades a la formulación de generalizaciones, partiendo del trabajo con valores numéricos de variables continuas.

### d. Variabilidad

Se notó estabilidad del cambio cognitivo en el uso de los procesos inductivos por parte de los profesores en tareas similares durante el experimento. La variabilidad se presentó en las estrategias que emplearon para buscar patrones, en las estructuras subyacentes a los patrones cuadráticos establecidos y en el lenguaje empleado para expresar las reglas generales.

Conforme transcurría el TDE, los profesores poco a poco se desenfocaron de la estrategia de diferencias y del ensayo y error para la búsqueda de algún patrón, y fueron centrando más su razonamiento en el análisis de la variación lineal y la identificación de relaciones para describir el comportamiento cuadrático de manera numérica. El razonamiento seguido por los profesores y las relaciones identificadas condujo a la construcción de diferentes estructuras asociadas a los patrones. Por ejemplo, en el establecimiento del patrón de la cantidad de objetos en las figuras de la secuencia D (Actividad III - Parte 1), se generaron cuatro estructuras: $n^2 + 5$, $n^2 + 3 + 2$, $n^2 + 6 - 1$ y $\boxed{\phantom{x}} - n^2 = 5$. La mayoría de las reglas generales obtenidas en las actividades se expresaron algebraicamente, y algunas también de manera verbal.

### e. Fuente

Las acciones del razonamiento de los profesores para obtener la regla general de patrones cuadráticos durante el desarrollo del experimento, sugieren que el cambio cognitivo ocurre cuando logran conectar los procesos inductivos a través de establecer relaciones numéricas que describan un patrón y abstraer su generalidad. La actividad que detonó poner en movimiento los procesos involucrados en el razonamiento inductivo fue la generalización de relaciones de variación lineal entre variables discretas, mediante el uso de representaciones figurales y numéricas de valores específicos de las variables.

En efecto, los procesos inductivos fueron interiorizados por los profesores por medio de las acciones llevadas a cabo con otros pares para reconocer el comportamiento cuadrático en valores específicos y asociarlo a la estructura de una ecuación cuadrática. Se verificó que, la inclusión de referentes visuales para centrar la atención de los profesores en el análisis y representación de la variación lineal mediaron estas acciones, debido a que les permitió transitar del proceso de observar regularidades al de establecer un patrón. En especial, porque les ayudó a disponer de un entendimiento conceptual más amplio para reconocer y representar matemáticamente la variación lineal entre variables, sea como el cuadrado de una cantidad variable por sí misma más o menos una constante, como el producto de factores lineales de una variable u otra.

La abstracción del patrón general implicado en las tareas, fue la operación cognitiva o enlace para conectar el establecimiento del patrón con el proceso de formular una generalización. La vía prevista para originar esta abstracción fue situar a los profesores en un contexto de reflexión y discusión grupal acerca de la relación intrínseca invariante en conjuntos de valores con comportamiento cuadrático (la variación lineal), pero con diferentes formas y representaciones de dicho comportamiento en las tareas. La demanda cognitiva de eliminar cualquier anclaje a la configuración visual o geométrica de instancias específicas del patrón en las tareas (P. ej. Tareas 2b y 3 en la Actividad III - Parte 1), favoreció que los profesores encapsulen esta relación invariante y con ello, abstraigan la generalidad de lo cuadrático y los extrapolen a otras situaciones.

En conclusión, el cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores ocurre en la medida que logran establecer relaciones numéricas que describan el patrón y abstraer su generalidad, independientemente del sistema de representación utilizado para las instancias particulares o el contexto de la situación, pues estas operaciones cognitivas permiten conectar los procesos inductivos.

## 8.2. Sensibilidad didáctica al razonamiento inductivo

Para el análisis retrospectivo de los datos en la categoría didáctica, se revisaron nuevamente los audios junto con las transcripciones y las respuestas escritas relativas a la percepción, interpretación y uso del razonamiento inductivo en las actividades del experimento. Se compararon estos datos por actividad y se puso especial atención en el tono de voz, a las preguntas y los comentarios realizados por los profesores con la intención de identificar patrones o variables que indiquen cambios en la sensibilidad didáctica a dicho razonamiento.

La *sensibilidad didáctica docente* se definió como "la capacidad para percibir la ausencia o presencia de formas distintas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por parte del docente, así como las implicaciones didácticas en la práctica". Los resultados del análisis muestran una sensibilización de los profesores al razonamiento inductivo. Es decir, se observó un aumento de la sensibilidad didáctica durante y después del cambio cognitivo (Etapa 2 del TDE) respecto a su sensibilidad previo a estas experiencias. En la Tabla 8.2 se muestra una comparación de los aspectos en los que se identificó una mayor sensibilidad a la inducción y que sirvieron para caracterizarla:

**Tabla 8.2.** Aspectos de la sensibilidad didáctica antes, durante y después del cambio cognitivo.

| Aspectos de la sensibilidad didáctica | Antes del cambio (Actividades I y II) | Durante y después del cambio (Actividades III, IV y V) |
|---|---|---|
| *Percepción del razonamiento inductivo en matemáticas* | Se percibe principalmente como un proceso cognitivo que procede de lo particular a lo general y como una forma de guiar al conocimiento, con nulo o escaso entendimiento de las acciones o procesos para desarrollarlo. | Se percibe como una forma de razonamiento que permite hacer generalizaciones en matemáticas y desarrollar conceptos matemáticos, con mayor entendimiento de los procesos cognitivos involucrados. |
| *Lógica inductiva* | Reconocen la lógica de la inducción en lo teórico: discursivamente. | Reconocen esta lógica en lo teórico y en lo práctico, por ejemplo, en la estructura de actividades para generalizar de manera inductiva. |
| *Conocimiento y uso de los procesos inductivos* | Ausencia de los procesos inductivos al describir las fases para la enseñanza de un concepto matemático y en su vocabulario. | Enuncian y describen las características de los procesos inductivos al analizar la solución de tareas y en los criterios empleados para rediseñar una actividad de generalización inductiva. Ampliación de su vocabulario. |
| *Relación entre inducción y generalización en la enseñanza* | La mayoría de los profesores no relaciona el razonamiento inductivo con la generalización matemática en la enseñanza. | Articulan su conocimiento de los procesos inductivos con las acciones necesarias para generalizar patrones matemáticos en la resolución y rediseño de actividades. |
| *Papel del razonamiento inductivo en la enseñanza y el aprendizaje matemático* | Enfoque en la enseñanza. Hay una idea vaga sobre el papel de este razonamiento para construir conocimiento o desarrollar la habilidad de generalizar. El discurso del profesor se centra en las acciones realizadas por él para guiar al estudiante a través de plantear preguntas y proporcionar definiciones y ejemplos. | Enfoque en la acción y el pensamiento de los estudiantes. Emoción en el discurso del profesor al hablar de importancia al razonamiento inductivo para desarrollar el pensamiento de los estudiantes y sean capaces de formular modelos y reglas generales por ellos mismos. |

En este trabajo se obtuvo que, la sensibilidad didáctica de los profesores al razonamiento inductivo se caracterizó por una percepción más clara del papel de esta forma de razonamiento para desarrollar conceptos y la habilidad de generalización en matemáticas, aunado a la ampliación de su conocimiento sobre los procesos inductivos y su uso en el análisis y rediseño de actividades de generalización inductiva. Por ejemplo, en la Actividad

IV los profesores usaron ese conocimiento para analizar los procesos cognitivos implicados en la solución de una tarea que demandaba inferir reglas generales desde casos particulares y en la Actividad VI para determinar una forma de estructurar una actividad de aprendizaje con base en una lógica inductiva.

La sensibilización de los profesores se detonó al conectar sus experiencias vividas durante las actividades de desarrollo del razonamiento inductivo con su práctica y el aprendizaje de los estudiantes, particularmente en relación con la generalización matemática. La conexión de su experiencia en el TDE con la práctica docente se identificó en comentarios de los profesores que hacían alusión a la inducción en relación con demandas curriculares del aprendizaje matemático y el tratamiento de contenidos de los ejes temáticos en secundaria. Al respecto, los profesores L y N comentaron lo siguiente: [2]

Profesora L: [Conclusión de la Actividad III-Parte 2, cuando la instructora cuestiona cómo llegar a generalizar razonando de manera inductiva] Empezar de casos concretos más sencillos e ir generando las expresiones. Porque lo que decía el maestro I de las diferencias [Actividad III-Parte 1, discusión sobre característica de las ecuaciones cuadráticas] se trabajaba en el plan anterior, ahí si se veían las diferencias (…), pero ahora el plan no lo trata así, ahora te dan la secuencia y el alumno debe sacar el patrón, obtener la expresión. Lo primero es descomponer, una vez que genero mi tabla entonces descompongo los números, entonces ir viendo qué tienen de igual, ir buscando algo, un patrón que se esté repitiendo. Ir ordenando de lo particular a lo general,...

Profesor N: [Integración de lo trabajado en el TDE posterior a la Actividad VI] El razonamiento inductivo sí ayuda al desarrollo del pensamiento de los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje del Sentido numérico y pensamiento algebraico. También en el eje Forma, espacio y medida, por ejemplo, analizando en tablas las medidas de ángulos o áreas se pueden inducir fórmulas y teoremas de figuras geométricas.

Se detectó que una característica de esta sensibilidad fue la emoción externada por los profesores al reconocer en el razonamiento inductivo y las actividades realizadas una forma de desarrollar el pensamiento de los estudiantes y potenciar su aprendizaje para que induzcan modelos y reglas generales por sí mismos. Por ejemplo, esta emoción se notó en comentarios realizados sobre la Actividades III, como los siguientes:

[2] Nota: En los comentarios anteriores y los sucesivos, se indica entre corchetes el momento durante el experimento donde los profesores emitieron su comentario.

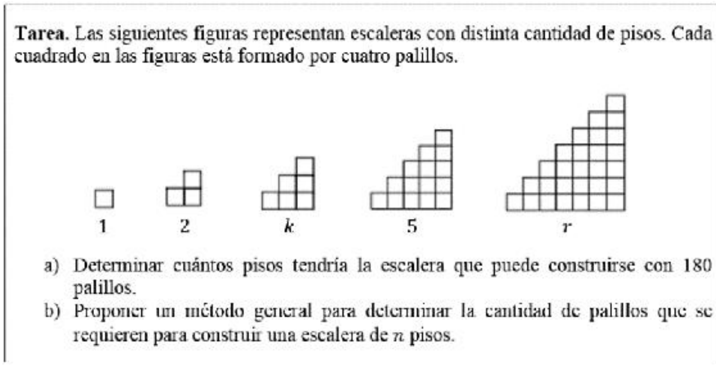
Profesor O: [Discusión de la tarea 2 - Actividad III (Parte 1), tras responder ¿Cómo determinaron la cantidad total de objetos de la figura en la posición $n$?] (…) Aquí lo que quiero apuntar es que se supone que la actividad tiene imágenes precisamente para poder ir de lo particular a lo general, porque esta actividad se la puedes poner a niños de sexto año de primaria y ellos no te van a sacar raíz cuadrada, ni te van a despejar, eso no van a hacer ellos. Sin embargo, ese apoyo visual sí les permite a ellos inducir y que su mente trabaje y resuelvan el ejercicio, lograr generalizar en la actividad.

Profesora F: [Cierre de la Actividad III] La actividad que trabajamos está muy bien para los estudiantes, ellos sí la pueden resolver, porque con las figuras y lo que se pide en las tareas pueden visualizar el patrón e ir construyendo los modelos algebraicos.

Profesor P: [Cierre de la Actividad III] Nos induce a ir estableciendo algo. Primero nos induce a pensar en los cuadrados, luego en una constante, en la tercera [secuencia C] ya te generó una idea de algo cuadrado más una constante. En la tercera ya llevas una inducción de algo que vas generalizando. Entonces en la cuarta [secuencia D] se establece una fórmula de algo más abstracto, ya más directo, sin que veas las figuras y se establece numéricamente. Pienso que así se les debe trabajar a los muchachos, es una forma práctica de llevarlos a donde queremos. (…) Si no lo hacemos así, cuando se le plantee la secuencia D, el niño te va a decir que falta un número, entonces no lo hemos preparado para pensar de manera inductiva. Me imagino que esa es parte de la secuencia del razonamiento inductivo.

Como muestra de una mayor sensibilidad didáctica, en los comentarios de estos profesores se observa en su discurso un cambio de enfoque: de la enseñanza al aprendizaje. En su discurso en las actividades de la Etapa 2 del DE, se refieren a la capacidad de los estudiantes de realizar acciones por ellos mismos para razonar inductivamente y desarrollar la habilidad de generalizar. Contrario a lo observado en la Etapa 1, donde su discurso se centraba en las acciones por él realizadas para guiar al estudiante en la adquisición de su conocimiento.

Otra característica de la sensibilidad didáctica fue cuestionarse sobre el diseño y rediseño de actividades de generalización inductiva y sus implicaciones en el razonamiento de los estudiantes. Por ejemplo, previo a la discusión de las respuestas de la Actividad IV el profesor N cuestionó sobre los casos particulares presentados en la tarea de esta actividad (Figura 8.1) y también se discutió sobre la colocación de las literales $k$ y $r$ en lugar del número de la posición de la tercera y la séptima figura de la secuencia, respectivamente.


**Tarea.** Las siguientes figuras representan escaleras con distinta cantidad de pisos. Cada cuadrado en las figuras está formado por cuatro palillos.



a) Determinar cuántos pisos tendría la escalera que puede construirse con 180 palillos.
b) Proponer un método general para determinar la cantidad de palillos que se requieren para construir una escalera de $n$ pisos.

**Figura 8.1.** Tarea de razonamiento inductivo planteada en la Actividad IV.

A continuación se presentan extractos de la discusión sobre las variables didácticas consideradas en el diseño de la tarea y la reflexión de los profesores acerca de las implicaciones en el razonamiento de los estudiantes:

Profesor N: ¿Por qué no poner [la figura en] la posición 4, por qué saltar del tres al cinco y del cinco al siete?

Profesor A: Es como para invitar al alumno a relacionar la posición con el número de palillos y generalizar. Ellos van a observar que está faltando el cuarto piso.

Profesor O: Las letras $k$ y $r$ pueden llevar a los estudiantes a cuestionarse cuál es la relación entre el número de palillos y el número de pisos. En la segunda página [Hoja con los pasos 1 y 2 de la solución] tienen una tabla, al relacionar los números de las columnas te das cuentas que los valores de $p$ son multiplicados por números que van creciendo linealmente.

Profesora L: O puede ser que haya alumnos que las dibujen al notar que faltan.

Profesor P: Incluso, hay alumnos que visualizan rápido la relación, al ver toda la secuencia y ver el comportamiento de las cantidades de arriba hacia abajo y empezar a trabajar con los cuadrados, con las sumas o multiplicaciones, para el alumno es más fácil la inducción. Haciendo primero la tabla, analizando resultados, y los va comparando con los palillos y cuadrados que se van formando [en la construcción de las escaleras] la inducción debe ser más fácil, porque visualiza el comportamiento y obtiene las expresiones.

Profesor A: De hecho, hay ejercicios en el libro con términos 1, 2, 3, 4, 5 y brincan al 8, al 10, al 20, al 100

Profesora F: Hasta cierto punto, te orilla a encontrar la fórmula. (…) Si no estás acostumbrado a algún método o no sabes te puedes ir perdiendo en el proceso. Porque si las construyes, vas de todos modos a tener que hallar la fórmula y $k$ y $r$ te van a ayudar. Como que te instruye un poquito más en los procesos.

En conclusión, estos hallazgos sugieren que confrontar el conocimiento que los profesores poseen acerca del razonamiento inductivo con experiencias de aprendizaje de movilización y reflexión grupal de los procesos subyacentes, mediante ejemplos concretos de cómo incorporar esta forma de razonamiento para promover la habilidad de generalización en sus estudiantes, favorece la sensibilización didáctica.

## 8.3. Implicaciones del cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en el rediseño de una actividad

Se estudió un cambio cognitivo docente en el razonamiento inductivo de profesores de secundaria, en términos de una transacción entre el estado que guarda su razonamiento y una acción de la práctica profesional, tal como el rediseño de una actividad de aprendizaje. El objetivo general de la investigación fue describir el cambio cognitivo y la sensibilidad didáctica en profesores de matemáticas de secundaria respecto a su razonamiento inductivo y sus implicaciones en el rediseño de una actividad de generalización inductiva. El rediseño consistió en reestructurar la actividad, determinando y justificando el orden de las tareas o su modificación, a fin de propiciar la generalización con modelos algebraicos cuadráticos en los estudiantes.

El cambio docente fue concebido como descriptor de un desarrollo personal y un crecimiento profesional de los profesores. A *nivel personal*, se observó un cambio cognitivo en su razonamiento inductivo, pues durante el Experimento de Desarrollo del Profesor (TDE) evidenciaron una transformación en el estado inicial de su razonamiento a un estado superior, al resolver tareas que implicaban inferir la regla general de un patrón cuadrático. Los profesores transitaron de la observación de regularidades a la formulación de generalizaciones mostrando una mayor sistematización de sus procesos inductivos.

A *nivel profesional*, se manifestó sensibilización didáctica a dicho razonamiento en ellos. Los profesores transformaron su percepción del razonamiento inductivo, identificaron los procesos inductivos tanto en la resolución como en el diseño de las actividades trabajadas y reconocieron su funcionalidad para fomentar el desarrollo de la habilidad de generalización en los estudiantes. Se verificó que la sensibilización permite que los profesores vayan más allá del entendimiento y movilización de los procesos inductivos en la resolución de tareas y mirar su implicación en el rediseño de actividades de generalización.

La transacción para el cambio cognitivo docente implica la discusión y asimilación por parte de los profesores de los procesos subyacentes al razonamiento inductivo en las actividades implementadas y, a la vez, la transformación del estado de su razonamiento. Es decir, las actividades de generalización inductiva promueven un cambio cognitivo en los profesores, al propiciar que identifiquen los procesos inductivos involucrados en su resolución y diseño. Al mismo tiempo, el cambio cognitivo favorece que reconozcan su propia forma de razonar y adquieran mayor entendimiento de los procesos cognitivos asociados y, a través de la sensibilidad didáctica, esto permite que rediseñen la actividad de aprendizaje de manera fundamentada.

En efecto, como se ha reportado en el apartado 8.1, el TDE promovió un cambio cognitivo en el razonamiento de los profesores de secundaria participantes. Este cambio indica un desarrollo de sus procesos inductivos durante el experimento, el cual posibilitó que los profesores resuelvan con éxito tareas que demandaban generalizar inductivamente, y solventen las dificultades que habían enfrentado en una tarea similar en la primera etapa de este. Como producto del TDE, se configuró un modelo teórico del desarrollo del razonamiento inductivo en los profesores, el cual se esquematiza en la Figura 8.2:

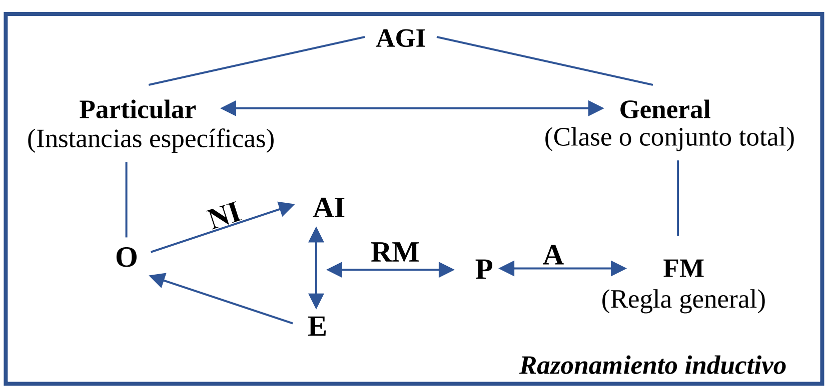



**Figura 8.2.** Esquema de desarrollo del razonamiento inductivo de los profesores en el TDE.

El modelo teórico se lee y funciona como sigue. Se planteó detonar la movilización de procesos inductivos mediante una ***Actividad de Generalización Inductiva*** **(AGI)** en la que se precisa hacer una interconexión entre algo particular (instancias específicas) y lo general (la clase o conjunto total al que pertenecen esas instancias). El razonamiento parte de la ***Observación de regularidades*** **(O**) en un conjunto de instancias específicas o casos particulares para reconocer sus rasgos similares o diferentes, a través de la comparación. Esta observación se orienta al ***Análisis de lo invariante*** **(AI)** a partir de plantear una ***Necesidad de Interconexión*** **(NI),** tal como aducir otras instancias específicas o buscar una relación causal entre alguna de éstas y las presentadas inicialmente.

Para transitar de **O** al ***Establecimiento del Patrón*** **(P)** se requiere asociar lo invariante con una ***Relación Matemática*** **(RM)** que describa el comportamiento de esas instancias. Para obtener la regla del patrón general se lleva a cabo el proceso de ***Formular una generalización*** **(FG),** el cual implica ***Abstraer*** **(A)** ley que rige los cambios en las instancias conocidas y otras desconocidas para englobarlas en una clase. Esta abstracción exige aislar el patrón del contexto y representación de las instancias específicas. El producto de la generalización inductiva se expresa mediante una regla o conclusión general. Adicionalmente, en la AGI se solicitó ***Extrapolar*** **(E)** la generalización a otras situaciones o instancias específicas para verificar la abstracción de lo general.

El cambio cognitivo se tradujo en la adquisición de mayor conocimiento de los profesores sobre los procesos inductivos y, mediado por la sensibilidad didáctica, se reflejó, en el uso de ese conocimiento en los criterios que emplearon para rediseñar una actividad de generalización inductiva. La sensibilización didáctica al papel e importancia de estos procesos para desarrollar la habilidad de generalizar matemáticamente en los estudiantes, favoreció una transacción de este conocimiento a la acción profesional de rediseño. Con base en lo señalado por Fraser y colaboradores (2007) respecto a este tipo de transacciones de lo aprendido en experiencias de desarrollo profesional, se concluye que el cambio en los profesores traspasó el dominio cognitivo y se transfirió al didáctico, dando lugar a un *cambio cognitivo docente* respecto al razonamiento inductivo.

## 8.4. Limitaciones de la investigación

Al reflexionar sobre el desarrollo de la investigación y la obtención de los resultados se apreciaron algunas limitaciones del trabajo, principalmente de corte metodológico. Una de estas limitaciones viene adherida a la naturaleza de las investigaciones de diseño como la aquí realizada, y concierne a la cuestión de en qué medida los resultados son generalizables a otros contextos y a diversas poblaciones de profesores (Plomp, 2013; Svihla, 2014). Si bien los hallazgos sobre el cambio cognitivo docente son generalizables, no lo es del todo el modelo teórico formulado sobre el desarrollo de razonamiento inductivo de los profesores. El dominio de validez del modelo teórico y los resultados sobre la sensibilidad didáctica, son específicos del dominio matemático, de la generalización inductiva de patrones cuadráticos usando estructuras algebraicas y de la forma de razonamiento de profesores de matemáticas de secundaria en servicio. Siendo así, los principios considerados en el diseño de las actividades y los resultados de la investigación podrían extenderse a experiencias de aprendizaje profesional con profesores de características similares a los participantes en el TDE.

El experimento promovió el desarrollo y sistematización del razonamiento inductivo en profesores que presentan dificultades para generalizar patrones cuadráticos y ayudó a que tomen consciencia de los procesos inductivos tanto en la resolución de tareas como en lo didáctico. No obstante, de acuerdo con Yin (2003, como se citó en Plomp, 2013), para ampliar la validez del modelo, se requiere replicar el experimento en otros contextos en más de una ocasión y, en este caso, con otros grupos de profesores de secundaria, con el objeto de asegurar la producción de los mismos resultados. Esto contribuiría a la aceptación y generalidad del modelo propuesto en contextos similares.

Otra limitante identificada fueron las respuestas cortas y la poca o nula argumentación que dieron los profesores para expresar sus ideas y su razonamiento por escrito en las primeras actividades del experimento. En cierta medida estas fueron subsanadas con el diálogo entablado con ellos a través de cuestionamientos sobre sus respuestas. En conjunción con el reducido tiempo del programa para trabajar el contenido del mismo y la falta de disponibilidad de espacios (de tiempo y lugar) para interactuar y entrevistar a los profesores fuera de las sesiones, dificultaron dilucidar qué otras variables influyeron en el cambio cognitivo y la sensibilización didáctica respecto al razonamiento inductivo. Asimismo, estos factores imposibilitaron validar con más sustento en qué momento y dónde tuvo mayor impacto el experimento para el logro del objetivo. Cabe decir que, en las actividades de evaluación (Etapa 3), solamente se dispuso de las producciones escritas para efectuar los análisis correspondientes, por lo que no hubo condiciones para una evaluación semi-sumativa o más profunda del objetivo y desarrollo del experimento en sí mismo.

## 8.5. Aportes y alcances de los resultados de la investigación

Previo a este trabajo, en la literatura de la educación matemática, se carecía de investigaciones acerca del razonamiento inductivo de profesores de matemáticas de secundaria en servicio. La mayoría de las investigaciones se había enfocado en las acciones y fases de este razonamiento en niños, y en pocos estudios la población eran profesores en formación. Esta investigación ofrece mayor entendimiento de cómo razonan los profesores y aporta una caracterización de los procesos inductivos que les permiten generalizar con éxito desde casos particulares. Por otro lado, se contribuye a esclarecer el tipo y la naturaleza de las dificultades que tienen profesores de matemáticas para generalizar patrones cuadráticos razonando de manera inductiva.

Como se comprobó en el TDE, este marco de referencia es útil para indagar y proveer información sobre aspectos centrales del razonamiento inductivo de profesores de secundaria, y posibilitar que conecten casos particulares con la obtención de reglas generales. De este modo, con el experimento desarrollado se puede contribuir por una parte, a superar las dificultades que enfrentan algunos profesores para generalizar y, por otra parte, a generar directrices pedagógicas para favorecer la práctica docente y el desarrollo de esta forma de razonamiento en las aulas de clases de matemáticas en secundaria.

A manera de reflexión, se considera apropiado realizar investigaciones futuras para explorar la reproducibilidad y los alcances del experimento de desarrollo del profesor sobre el razonamiento inductivo, no solo en contextos similares, sino también considerando otros contenidos matemáticos del currículo de educación secundaria. Asimismo, esto contribuiría en ampliar el rango de generalidad del modelo.

Por otro lado, en esta investigación se aporta el marco conceptual de un constructo que fue útil para examinar y entender si un cambio cognitivo en el razonamiento inductivo de los profesores implicaba una mejora en acciones de su práctica profesional: la sensibilidad didáctica. Este constructo posibilitó analizar si los profesores percibían en este razonamiento una forma alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y un medio para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes, especialmente para desarrollar su habilidad de generalización.

Como se observó durante el TDE, la sensibilidad didáctica resulta un elemento clave para que los conocimientos generados en este tipo de experiencias de aprendizaje profesional docente sean mejor asimilados y transferidos por los profesores a acciones de su práctica. Esta sensibilidad se considera un elemento importante para estudiar cómo incrementar el interés y la disposición de los profesores por entender los procesos de aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, tal como el razonamiento inductivo, pues propicia que cuestionen lo que saben, su práctica y cómo aprenden sus estudiantes. Por lo anterior, la sensibilidad didáctica fortalece la conexión de lo aprendido en experiencias de desarrollo profesional con la práctica docente y la aceptación de formas alternativas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, faltaría más investigación sobre las variables significativas que podrían suscitar esta conexión y realizarla de la manera más adecuada.

# Referencias bibliográficas


Abe, A. (2003). *Abduction and analogy in chance discovery*. In Y. Ohsawa & P. McBurney (Eds.), Chance discovery (pp. 231–248). New York: Springer-Verlag.

Alajmi, A. H. (2016). Algebraic Generalization Strategies Used by Kuwaiti Pre-service Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(8), 1517–1534. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9657-y

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (2014). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. España: Alianza editorial.

Arriaga, A. y Benítez, M. (2014). *Matemáticas 3. Por competencias.* Ciudad de México: Pearson.

Arslan, C., Göcmencelebi, S. I., & Tapan, M. S. (2009). Learning and reasoning styles of pre service teachers: inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 2460–2465. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.432

Association of Mathematics Teacher Educators (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Available online at amte.net/standards.

Bakker, A. & Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping and N. Presmeg (Eds.), *Approaches to cualitive research in Mathematics Education. Examples of methodologys and methods* (pp. 429-466). New York: Springer.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Barab, S. (2014). Design-based research: A methodological toolkit for engineering change. In Sawyer, R. (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning science* (pp. 151-170). New York: Cambridge University Press.

Barab, S. A., & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1

Bergqvist, T. & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers’ presentations. *Journal of mathematical behavior*, *31*(2), 252–269.

Bermejo, V. (1996). Cardinality development and counting. *Developmental Psychology*, *32*(2), 263-368. http://dx.doi.org/10.1037/0012-1649.32.2.263.

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: Adquisición del cardinal numérico. *Psicothema*, *17*(4), 559-562.

Bills, L. & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Advances in Mathematics Education*, *1*(1), 103-116. https://doi.org/10.1080/14794809909461549

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology, 3*(2), 77-101.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of research methods in psychology: Vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57-71). Washington, DC: American Psychological Association.

Brito, H. y Castellanos, H. (1987). *Psicología general para los institutos superiores pedagógicos*. Tomo 2. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Calais, G. (2008). Microgenetic analysis of learning: Measuring change as it occurs. *National Forum of Applied Educational Research Journal*, *21*(3), 1-7.

Callejo, M.L. & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78. https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000032542.40308.65

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2013). Análisis didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. *Metodología de Investigación, Formación de profesores e Innovación Curricular* (pp. 333-348). Granada: Editorial Comares.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2009). Utilización de un modelo para describir el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychologic, 7*(1), 261-278.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72. https://doi.org/10.22329/jtl.v5i1.82

Castillo, J. (2011). Desarrollo de la habilidad de visualizar en geometría. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Castro, E., Cañadas, M. C. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.

Catán, L. (1986). The dynamic display of process: historical development and contemporary uses of the microgenetic method. *Human Development, 29*(5), 252-263. Doi: 10.1159/000273062

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55–66. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Clarke, D. & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, *18,* 947-967.

Clements, D. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York: Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E. (2009). *Lev S. Vygotski: El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Retrieved from: http://www.corestandards.org

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. & Francisco, R. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*, 181–200.

Dávila, G. (2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales. *Laurus. Revista de Educación, 12,* 180-205.

Davis, B. & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 137–167.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293-319.

Davydov, V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers.

Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning.* London: Routledge.

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 1-19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olson, and J. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-88). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). New York: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving. In G. Hanna & M. Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education– The 19th international commission for mathematics instruction study* (pp. 111–120). New York: Springer.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*. México: Grupo editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

El Mouhayar, R. (2018). Exploring teachers' attention to students' responses in pattern generalization tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 1-31. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9406-6

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379–396. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9434-6

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229.

Evans, J. & Over, D. (1996). *Rationality and reasoning.* Hove, UK: Erlbaum.

Fernández, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103-118). Madrid: Ediciones Pirámide.

Flynn, E., Pine. K., & Lewis. C. (2006). The microgenetic method: Time for change? *The Psychologist, 19*(3), 152-155.

Fowler, R. C. (1992). Siegler and Crowley's (1991) conception of development. *American Psychologist*, *47*(10), 1239-1240.

Francisco, J. & Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, *24,* 361–372.

Frank, P. (1991). La ciencia de la ciencia. *Mathesis. Revista de investigación, divulgación e información en Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*(1), 31-77.

Fraser. C., Kennedy, A., Reid, L. & Mckinney, S. (2007). Teacher's continuing professional development: contested concepts, understandings and models. *Journal of In-Service Education, 33*(2), 153-169.

Frolov, I. (1984). *Diccionario de Filosofía*. Moscú: Editorial Progreso.

García, M., Páez, R. y Barkovich, M. (2011). *Matemáticas 2.* México: Ediciones Larousse, S.A. de C.V.

Glaser, R. & Pellegrino, J. (1982). Improving the skills of learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *How and how much can intelligence be increased* (pp. 197-212). Norwood, NJ: Ablex.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 115–141.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA*, *7*(4), 155-170.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45–85). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 72-113). Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development.

Grønmo, L., Lindquist, M., Arora, A. & Mullis, I. (2013). TIMSS 2015 Mathematics Framework. In I. Mullis and M. Martin (Eds.), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks*. Boston, USA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Guetmanova, A. (1989). *Lógica* (Trad. V. Médnikov). Moscú: Editorial Progreso.

Guskey, T. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and teaching*, *8*(3/4), 381-391.

Hallagan, J. E., Rule, A. C., & Carlson, L. F. (2009). Elementary school pre-service teachers' understandings of algebraic generalizations. *The Mathematics Enthusiast, 6*(1), 201-206.

Harel G., Sowder L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Haverty, L., Koedinger, K., Klahr, D. & Alibali, M. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: Not-so-trivial persuit. *Cognitive science, 24*(2), 249-298. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(00)00019-7

Hayes, B. K., Heit, E., & Swendsen, H. (2010). Inductive reasoning. *Wiley interdisciplinary reviews: Cognitive science*, *1*(2), 278-292. https://doi.org/10.1002/wcs.44

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 369-388.

Heit, E. (2007). What is induction and why study it? In Feeney A. and Heit, E. (Eds.), *Inductive reasoning. Experimental, developmental and computational approaches* (pp. 1-24). New York: Cambridge University Press.

Heit, E. & Rotello, C. (2010). Relations between inductive reasoning and deductive reasoning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *36*(3), 805-812. https://doi.org/10.1037/a0018784

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, *74*, 26-37. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005

Hernández, H. y Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamiento deductivo e inductivo y su enseñanza. *Innovación Educativa*, *13*(63), 61-73.

Herrera, V. y Guarino, L. (2008). Sensibilidad emocional, estrés y salud percibida en cadetes navales venezolanos. *Universitas Psychologica*, *7*(1), 185-198.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan.

Hodnik, T. & Manfreda, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 283-306. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9598-y

Hoffmann, M. (1998). ¿Hay una lógica de la abducción? *Analogía filosófica: Revista de Filosofía, Investigación y Difusión*, *12*(1), 41-56.

Hopwood, N. (2016). *Professional practice and learning. Times, spaces, bodies, things.* New York: Springer.

Johnassen, D. H., Beissner, K., & Yacci, M. (2013). *Structural knowledge: Techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge*. New York: Routledge.

Johnson-Laird, P. (2004). Mental models and reasoning. In J. Leighton and R. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning* (pp. 169-204). New York: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. & Byrne, R. (1991). *Deduction.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kelly, A. (2013). When is design research appropriate? In Plomp, T. and Nieveen, N. (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 134-151). Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development.

Klauer, K. J. (1990). A process theory of inductive reasoning tested by the teaching of domain-specific thinking strategies. *European Journal of Psychology of Education, 5*(2), 191–206. https://doi.org/10.1007/BF03172682

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction, 6*(1), 37–57. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00015-1

Klauer, K.J. & Phye, G.D. (1994). *Cognitive training for children. A developmental program of inductive reasoning and problem solving.* Seattle: Hogrefe & Huber.

Klauer, K. J., & Phye, G. D. (2008). *Inductive Reasoning: A Training Approach. Review of Educational Research, 78*(1), 85–123. https://doi.org/10.3102/0034654307313402

Klauer, K., Willmes, K. & Phye, G. (2002). Inducing inductive reasoning: Does it transfer to fluid intelligence? *Contemporary Educational Psychology, 27*(1), 1–25. https://doi.org/10.1006/ceps.2001.1079

Krebs, A. (2005). Studying students' reasoning in writing generalizations. *Mathematics teaching in the middle school, 10*(6), 284-287.

Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. J*ournal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 379-405

Koedinger, K. R. & Anderson, J. R. (1998). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments, 5*(1), 161-179.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2009). From empirical to structural reasoning in mathematics: tacking changes over time. In D. Stylianou, M. Blanton and E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning of proofs across the grades* (pp. 171-190). New York: Routledge.

Kuhn, D. (1995). Microgenetic study of change: what has it told us? *Psychological science, 6,* 133-139. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1995.tb00322.x

Ledesma, M. (2014). *Análisis de la Teoría de Vygotsky para la Reconstrucción de la Inteligencia Social*. Cuenca: Universidad Católica de Cuenca.

Lehmann, C. (1980). *Álgebra*. México: Editorial Limusa.

Leighton, J. (2004). Defining and describing reason. In J. Leighton and R. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning* (pp. 3-11). New York: Cambridge University Press.

Leontiev, A. (1984). *Actividad, conciencia y personalidad.* México: Editorial Cartago.

Lewis, C., Perry, R., y Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. *Educational Researcher, 35*(3), 3- 14.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE*, *13,* 2-25.

Manfreda, V., Slapar, M. & Hodnik, T. (2012). Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers' students and mathematics teachers' students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels.* Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Mares, E. (2015). La inducción como método de conocimiento de los principios éticos en la Ética nicomáquea de Aristóteles. *Diánola, 60*(75), 31-53.

Martín, M. y Valiña, M. D. (2002). Razonamiento deductivo: Una aproximación al estudio de la disyunción. *Revista de Psicología General y Aplicada, 55*(2), 225-248.

Martinez, M. V. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 125–149.

Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2018). Elementary school teachers’ noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9408-4

Mill, J. (2011). A system of logic, ratiocinative and inductive.

Mill, J. (2011). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139149839

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Molnár, G. (2011). Playful fostering of 6-to 8-year-old students’ inductive reasoning. *Thinking skills and Creativity, 6*(2), 91-99. http://dx.doi.org/10.1016/j.tsc.2011.05.002

Molnár, G., Greiff, S., & Csapó, B. (2013). Inductive reasoning, domain specific and complex problem solving: Relations and development. *Thinking skills and Creativity, 9*, 35-45. http://dx.doi.org/10.1016/j.tsc.2013.03.002

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología histórico-cultural. *Avances en Psicología Latinoamericana, 23,* 33-42.

Moulines, C. (1976). Los fundamentos metodológicos de la filosofía natural de Isaac Newton. *Diánoia, 22*(22), 27-43.

Mousa, M. (2017). The Influence of Inductive Reasoning Thinking Skill on Enhancing Performance. *International Humanities Studies, 4*(3), 37–48.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTKS): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 589-605.

Murawska, J. M., & Zollman, A. (2015). Taking it to the next level: Students using inductive reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(7), 416–422.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neubert, G. A. & Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom.* Washington DC: National Education Association.

Nieveen, N., & Folmer, E. (2013). Formative evaluation in educational design research. In Plomp, T. and Nieveen, N. (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 152-169). Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development.

Núñez, M., Arévalo, A., y Ávalos, B. (2012). Profesionalización docente: ¿Es posible un camino de convergencia para expertos y novatos? *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 14(2), 10-24. Consultado en http://redie.uabc.mx/vol14no2/contenido-nunezetal.html

Oostra, A. (2000). Acercamiento lógico a Peirce. *Boletín de matemáticas, 7*(2), 60-77.

Ortiz, M. P. (2014). Análisis microgenético del proceso de enseñanza-aprendizaje de la traducción. Informe de una investigación en proceso. *Studia Romanica Posnaniensia, 41*(1), 101-118.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Papageorgiou, E. (2009). Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 313-320), Vol. 4. Thessaloniki, Greece.

Patiño, L. (2007). Aportes del enfoque histórico cultural para la enseñanza. *Educación y Educadores, 10*(1), 53-60.

Pineda, O. (2009). Inducción y deducción como origen de la ciencia. *Konvergencias: Filosofía y culturas en diálogo, 21*, 122-133.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In Plomp, T. and Nieveen, N. (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 10-51). Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development.

Poincaré, H. (1914). Ciencia y Método. Madrid: Espasa-Calpe, S. A.

Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* New York: Doubleday and Company, Inc.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Vol. I, pp. 195-210), Lisbon, Portugal.

Preciado, A., Metz, M. & Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the mathematical learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM*, *47*(2), 257-268.

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Puche, R. y Ossa, J. C. (2006). ¿Qué hay de nuevo en el método microgenético? Más allá de las estrategias y más acá del funcionamiento cognitivo del sujeto. *Suma Psicológica*, *13*(2), 117-139.

Ramírez, M., Castillo, R., Vergara, D., Flores, M. E. y Azpeitia, J. (2014). *Matemáticas 3: Desafíos matemáticos.* Ciudad de México: Fernández Editores.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *33*(1), 5-29.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). Types of reasoning. In Authors (Eds.), *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching* (pp. 83-127). Rotterdam: Sense Publishers.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, *28*(48), 360-382.

Richardson, V. & Placier, P. (2001). Teacher change. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 905-947). Washington, D.C.: American Educational Research Association.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297–328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations*. New York: Springer.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (pp. 63–70). Honolulu, HI.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2016). Middle school students' patterning performance on semi-free generalization tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 43,* 53–69. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.05.002

Rodríguez, A. (2003). Interacción social y mediación semiótica: Herramientas para reconceptualizar la relación desarrollo-aprendizaje. *Educere*, *6*(20), 369-379.

Roesken, B. (2011). *Hidden dimensions in the professional development of mathematics teachers. In-service education for and with teachers*. Netherlands: Sense Publishers.

Rubinstein, S. (1979). *El desarrollo de la psicología. Principios y métodos* (Vidal, A. Trad.). Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica secundaria.* Ciudad de México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México: SEP.

Shapiro, A. (2007). La "filosofía experimental" de Newton. *Estud.filos*, *35*, 111-147.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-30.

Siegler, R. S. (1995). How does change occur: A microgenetic study of number conservation. *Cognitive Psychology*, *28*(3), 225-273. https://doi.org/10.1006/cogp.1995.1006

Siegler, R. (2006). Microgenetic analyses of learning. In D. Kuhn, R. Siegler, W. Damon and R. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (pp. 464-510). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc.

Siegler, R. & Crowley, K. (1991). The microgenetic method. A direct means for studying cognitive development. *American Psychologist*, *46*(6), 606-620.

Simon, M. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. *PNA*, *6*(2), 43-49.

Singmann, H. & Klauer, K. (2011) Deductive and inductive conditional inferences: Two modes of reasoning. *Thinking & Reasoning, 17*(3), 247-281. doi:10.1080/13546783.2011.572718

Smith, E. P., & Henderson, K. B. (1959). Proof. In E. Gibb, P. Jones, & C. Junge (Eds.), *The growth of mathematical ideas, Grades K-12. 24th Yearbook* (pp. 7– 64). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Soler-Álvarez, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias*, *32*(2), 191-219.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma de pensar didácticamente. En E. Morales, H. Manzo, I. Cruz, y J. Basilio (Coords.), *Libro electrónico: Primer Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente, CONIEF 2017* (pp. 802-809).

Sosa, L., Aparicio, E. y Cabañas, G. (2019). Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 563-581. https://doi.org/10.29333/iejme/5769

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Editorial Diaz de Santos.

Sosa, L. y Cabañas, G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. In Galindo, E. and Newton, J. (Eds.), *Proceedings of the 39$^{th}$ annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1415-1418). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Sosa, L., Cabañas, G. y Aparicio, E. (2019a). Tareas de generalización por inducción para formar el concepto de potencia. En F. Machado (Org.), *Educaçao Matemática e suas Tecnologias 2* (pp. 181-191). Paraná: Atena Editora.

Sosa, L., Cabañas, G. y Aparicio, E. (2019b). Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización. *Memorias de la XV Conferencia Intermericana de Educación Matemática* (pp. 1-8). Medellín, Colombia. Recuperado de: https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

Sosa, L., Cabañas, G. y Aparicio, E. (en prensa). Actividad para promover el razonamiento inductivo y la generalización matemática en profesores de secundaria. *Investigación e Innovación en*

*Matemática Educativa en Guerrero.*

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *Journal of mathematical behavior, 23*(2), 205-222. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.03.005

Sriraman, B., & Adrian, H. (2004). The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations : Reflections from the Classroom. *Interchange, 35*(4), 407–422.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stenning, K. & Monaghan, P. (2004). Strategies and knowledge representation. In J. Leighton and R. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning* (pp. 129-168). New York: Cambridge University Press.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2004, April). Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1463-1490. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9

Suárez, C. (2002). Matemáticas de ayer para el aula de hoy. En J. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Penas (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 75-95). España: S.A.E.M. THALES.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Editorial Díaz de Santos.

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2015). Preschool children's collective mathematical reasoning during free outdoor play. *Journal of mathematical behavior, 39*, 1-10.

Svihla, V. (2014). Advances in design-based research. *Frontline Learning Research, 6*, 35-45. http://dx.doi.org/10.14786/flr.v2i4.114

Talizina, N., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2010). La aproximación de la actividad en psicología y su relación con el enfoque histórico-cultural de L.S. Vigotsky. *Reflexión y Debate, 230,* 4-8.

Thompson, A. (1992). Teachers Beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tomic, W. (1995). Training in Inductive Reasoning and Problem Solving. *Contemporary Educational*

*Psychology, 20*(4), 483–490. https://doi.org/10.1006/ceps.1995.1036

Tossavainen, T., Attorps, I., & Väisänen, P. (2012). Some South African mathematics teachers' concept images of the equation concept. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16*(3), 376-389. http://dx.doi.org/10.1080/10288457.2012.10740752

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: Una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 14*(3), 1-20.

Van den Akker, J. (2013). Curricular development research as a specimen of educational design research. In Plomp, T. and Nieveen, N. (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 52-71). Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development.

Vermeir, K. & Deckard, M. F. (2012). Philosophical enquiries into the science of sensibility: An introductory essay. En K. Vermeir and M. F. Deckard (Eds.), *The science of sensibility: Reading Burke's philosophical enquiry* (pp. 3-56). Netherlands: Springer.

Villa, A. (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 245-254. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological process.* London: Cambridge University Press.

Walshaw, M. (2010). Mathematics pedagogical change: rethinking identity and reflective practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(6), 487-497.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 73-108). Rotterdam: Sense Publishers.

Wertsch, L. (1978). *Vygotsky y la formación social de la mente.* México: Ediciones Paidós.

Wilhelm, P. & Beishuizen, J.J. (2003). Content effects in self-directed inductive learning. *Learning and instruction, 13*(4), 381-402. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00013-0

Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2010). Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 1142–1147. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.162