UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

EL USO DEL GEOGEBRA EN EL PROCESO DE TRANSICIÓN GRADOS-RADIANES EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA, PRESENTA:

LIC. MAGALI EDAENA HERNÁNDEZ YAÑEZ

DIRECTORES DE TESIS:

M.C. ELIKA SUGEY MALDONADO MEJÍA

DR. JAVIER GARCÍA GARCÍA

Chilpancingo de los Bravo, Gro. Noviembre de 2019

DEDICATORIA

Dedicó este trabajo a mi familia, que siempre me apoya y me impulsa a ser mejor persona. A ellos, que son mi motor para salir adelante y mi pilar en la vida.

A mi mamá, que siempre con sus bellas palabras y motivación me ayuda día a día a sentir que puedo hacer las cosas y llegar a donde me proponga.

A mi papá, que con todo su esfuerzo, esmero y cariño, sigue llevándonos adelante, buscando lo mejor para sus nosotras.

A mi hermanita, que siempre está para mí. A ella que es mi inspiración, mi admiración y mis ganas de salir adelante.

Y a mi abuelita, que siempre está al pendiente de mí, dándome buenos consejos llenos de sabiduría.

¡Con amor, para ustedes!

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradezco a Dios por todas sus bendiciones, por permanecer a mi lado y por ayudarme siempre en esta hermosa etapa.

A mis asesores por el tiempo dedicado y por compartirme sus conocimientos. A mis revisores por las sugerencias y observaciones que ayudaron a fortalecer éste trabajo. A los profesores que me impartieron clases, por ayudarme a crecer académica y profesionalmente.

A mi mejor amiga Victoria y a mi novio Iván, por acompañarme, cuidarme, aconsejarme, apoyarme, ayudarme y sobre todo aguantarme, durante ésta trayectoria. Sin duda alguna, son parte de las más grandes bendiciones que Dios me ha dado al llegar a Chilpancingo.

A todos ustedes:

¡MUCHAS GRACIAS!

Contenido

INTRODUCCIÓN

Bressoud (2010), menciona que la trigonometría circular tiene sus orígenes desde el estudio de los cielos por los griegos clásicos. Hipparchus Rodas (190-120 a.C), utilizó y resolvió el primer problema de lo que hoy conocemos como trigonometría, explicando la longitud de las temporadas del año determinando la longitud del arco recorrido por el sol en su órbita durante cada estación. Después, determinó las longitudes de las cuerdas que unen la posición del sol en los extremos de cada estación. Esto le permitió establecer lo lejos que está la Tierra del centro de la órbita del Sol.

Más tarde, Ptolomeo (90-168 d.C) construyó una tabla de longitudes de cuerda para un círculo, usando un radio de 60, dado que sus fracciones eran expresadas en 60, de 60 de 60. Asimismo, Georg Rheticus (1514-1574 d.C.) fue el primer europeo en publicar las tablas de las seis funciones trigonométricas, con una precisión de quince dígitos sin recurrir a las fracciones, al elegir un radio de $1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000\ = 10^{15}$.

Hasta finales del siglo XIX d.C., los grados se consideraban como una medida de la longitud del arco, esto es, $1° = \frac{1}{360°}$ de la circunferencia. En este sentido, la medida de un ángulo se determinaba con la longitud del arco de un círculo centrado en la intersección de dos segmentos. Por ende, el tamaño del grado dependía del radio del círculo.

Los astrónomos indios, fueron los primeros en reconocer que es más conveniente utilizar las misma unidades para ambos, es decir, si la circunferencia tiene $360°$ el radio debe ser de $\frac{360}{2\pi} \approx 57.3°$. Sin embargo, como los decimales aún no existían, eligieron medir la circunferencia en minutos ($60 \cdot 360 = 21{,}600$).

Más adelante, Leonhard Euler (1707-1783 d. C.), fue quien dispuso que el radio debía fijarse en 1, ya que, en el cálculo, es esencia que el arco y la longitud de las líneas tengan la misma unidad de medidas. A pesar de este razonamiento, no estaba usando el radio, sólo usaba las mismas unidades para medir el radio, la mitad de la cuerda (o seno) y el arco que determinaba el seno. Después de casi cien años de la muerte de Euler, existió el término radián, debido a que el argumento de las funciones cambió de ser una longitud de arco a un ángulo medido como una fracción de giro.

En este sentido, se considera pertinente introducir las funciones trigonométricas relacionando la longitud de arco con la longitud de segmentos de línea (radio), buscando que los estudiantes modelen fenómenos periódicos, para que las entiendan como funciones (Bressoud, 2010). Es por ello, que en esta investigación se presenta un rediseño a la propuesta de Santana (2009), para favorecer el proceso de transición grados-radianes, con la trigonometría del círculo, apoyados del GeoGebra.

Esta tesis está integrada por 5 capítulos. En el capítulo 1 se presenta la problemática asociada con la trigonometría, la pregunta de investigación, los objetivos, los antecedentes y la justificación de esta investigación.

En el capítulo 2, se describen los elementos teóricos sobre los cuales está basada esta investigación. Es decir, se describen las características de los profesores de matemáticas en formación, el proceso de transición grados-radianes, la visualización y los registros de representaciones semióticas que se contemplan.

El capítulo 3, expone en qué consiste la metodología que sigue ésta investigación. En este sentido, se describe la preparación y diseño del experimento, la experimentación para apoyar el aprendizaje y el análisis retrospectivo.

En el capítulo 4, se hace el análisis de resultados de las producciones escritas y de las grabaciones de audio de los profesores de matemáticas en formación, obtenidas durante el desarrollo de la experimentación.

Finalmente el capítulo 5, presenta la discusión de los resultados y la conclusión. Es decir, se comparan los resultados obtenidos en ésta investigación con la literatura existente, así como una discusión entre los mismos resultados. En esta sección también se presenta la contribución y las limitaciones de este trabajo.

CAPÍTULO I. ORIGEN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Antecedentes

En la búsqueda de la profesionalización docente se espera que los profesores desarrollen estrategias y herramientas que les permitan mejorar su práctica docente. En este sentido, existen investigaciones que atienden diversas problemáticas con el propósito de mejorar la enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, se presenta una revisión de investigaciones relacionadas con dificultades en la trigonometría, tanto en estudiantes como en profesores, en los temas de ángulo, de la razón trigonométrica, de las medidas angulares y de la transición grados radianes. Así también, las que han hecho análisis de libros de texto y propuestas de enseñanza que atienden problemáticas referentes con la trigonometría.

Dificultades en la trigonometría

La trigonometría presenta varios desafíos a los estudiantes, como corresponder los diagramas de triángulos con relaciones numéricas y manipular los símbolos involucrados en dichas relaciones (Weber, 2008). Además, el estudio histórico de ésta, arroja que sufre de una división en dos partes (trigonometría del triángulo y trigonometría del círculo), lo que implica un serio obstáculo para los estudiantes (Bressoud 2010).

En las funciones trigonométricas, los términos seno, coseno y tangente se consideran operaciones matemáticas aplicadas a ángulos (Weber 2008). Sin embargo, a través de un análisis de literatura sobre los orígenes matemáticos y didácticos se considera que existe ambigüedad o falta de claridad, respecto al ángulo, y continúan presentando un desafío en su enseñanza y comprensión (Barabash, 2016).

Así también, Montiel y Jácome (2014) analizaron una situación-problema que se relaciona con el cálculo de distancias inaccesibles, con profesores del nivel medio superior en México. Como resultado, identificaron el significado lineal en la relación del ángulo y la distancia, que surge de las actividades normadas por el discurso trigonométrico escolar, inmerso en el fenómeno de aritmetización de la trigonometría. Es decir, la actividad matemática se concentra en la operación aritmética para obtener el valor faltante y no se reconoce lo que es trigonométrico en la relación entre el ángulo y el lado del triángulo.

Por otro lado, Santana (2009) resalta que los estudiantes de bachillerato tienen dificultades al trabajar con los ángulos negativos y mayores de 360º (no consideran el sentido marcado en los ángulo y no recuerdan como se miden los ángulos mayores a 360°), al calcular el perímetro del círculo (confunden la medida del ángulo con la medida del perímetro y asignan un valor al radio considerando el tamaño del ángulo sin considerar el perímetro que se señala) y al encontrar la razón (calculan el valor del ángulo en lugar de la razón y asignan un valor arbitrario a la longitud del arco). Estas dificultades impiden que formulen la relación que hay entre las medidas angulares grados y radianes.

Un concepto que es usado y tiene mucha relevancia en la trigonometría es la razón. En este sentido, Scholz y Montiel (2018) para el estudio de la transición de la razón trigonométrica (contexto geométrico) a la función trigonométrica (contexto variacional), analizan investigaciones que abordan temas de Trigonometría desde el aprendizaje y/o la didáctica, de esto, destacan elementos importantes como son: el trabajar con los ángulos mayores a 90° y negativos, el cambio de las medidas angulares de grados a radianes y el paso de lo estático a lo dinámico.

Martínez (2012) desde un análisis didáctico-cognitivo sobre la unidad de medida, señala que existen rupturas conceptuales en estudiantes y profesores con respecto a los grados y radianes, y señala que «sería interesante determinar de una manera precisa el papel de la tecnología y las calculadoras en las rupturas conceptuales» (p. 27).

Por otro lado, Tuna (2013) examinó los niveles de conocimientos de 93 profesores de matemáticas en formación de Turquía, sobre los conceptos: grado y radián, los resultados de la investigación arrojaron que el 40% de ellos, definieron correctamente el concepto de grado y el 90% hizo una definición incorrecta de radianes.

Trigonometría en los libros de textos

Del análisis de la trigonometría escolar en el nivel medio superior, la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2013) menciona que la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas y razones trigonométricas, se debe en parte al contenido trigonométrico, su ubicación curricular y los procesos de enseñanza asociados a dicho contenido.

Méndez, Martínez y Maldonado (2007), estudiaron la construcción escolar de la Función Trigonométrica, en específico la transición de grados a radianes a reales, en el cual consideran que en los libros de texto el tránsito de radianes a reales es ambiguo e impreciso, suponiendo que se debe a la falta de conciencia de la convención matemática.

Del análisis sobre algunos libros textos de matemáticas e investigaciones en el ámbito de la Matemática Educativa realizadas en México, referente a la transición: grados, radianes, reales, Díaz, Salgado y Díaz (2010), consideran que existe un obstáculo didáctico, debido a las dificultades que surgen en el proceso de enseñanza de la matemática que son atribuibles a los profesores, libros de texto, programas de estudio, plan de estudios o la institución educativa.

Propuestas para la enseñanza de la trigonometría

Referente a propuestas para la enseñanza de la trigonometría, primero se presentan las que abordan la trigonometría, seguidas por las de ángulo, la razón trigonométrica, las medidas angulares y, por último, las de transición grados-radianes.

Weber (2008) sugiere, estrategias de instrucción basadas en un enfoque geométrico con la intención de que se entiendan las operaciones trigonométricas, como funciones. Concluye que, los estudiantes deben tener la oportunidad de aplicar y reflexionar sobre los procesos geométricos, independientemente del modelo que se utilice para la enseñanza de estas operaciones, para que comprendan los conceptos trigonométricos.

También Beltrán y Montiel (2016), por medio de la resolución de una situación problema, desde el planteamiento teórico-didáctico de la funcionalidad-trigonométrica, fundamentado en la teoría socioepistemológica, dan evidencia del pensamiento funcional-trigonométrico en las producciones y los argumentos de estudiantes mexicanos del nivel medio superior, e identifican a la modelación como práctica de referencia que les permitió matematizar el movimiento del péndulo, logrando resignificar la función trigonométrica.

Además, desde una experiencia didáctica con el concepto de ángulo, con estudiantes mexicanos de secundaria, Rotaeche y Montiel (2017), mencionan que no lo aprendieron en el sentido formal y absoluto, sin embargo, desarrollaron significados asociados a su naturaleza.

Scholz (2014) realizó una secuencia de actividades desde la construcción social del conocimiento trigonométrico y las ideas básicas en el aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de bachillerato. Donde, vincula lo trigonométrico con lo geométrico en las actividades, para que el alumno construya modelos en el contexto geométrico del círculo y redescubra el sentido de la razón trigonométrica. Los resultados arrojan un avance en el manejo del lenguaje geométrico en los estudiantes.

Po otro lado, Andrade (2015) en Colombia, realiza una propuesta para la enseñanza de las razones trigonométricas, en la educación media superior, usando el software GeoGebra y Cabri para la construcción gráfica de situaciones que requerían precisión entre otras situaciones. En sus resultados destaca que el uso de las Tic fue significativo en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Ahora bien, atendiendo las medidas de grado y radián, Moore (2012) realizó un experimento de enseñanza con estudiantes de precálculo, mediante la cuantificación de la medida angular por medio de la medición de arcos y relaciones multiplicativas entre un arco subtendido, la circunferencia y el radio de un círculo. Los resultados arrojan que cuantificar la medida angular, sin importar la unidad, por medio de procesos que impliquen medir longitudes de arcos, ayuda a los estudiantes a concebir cantidades y relaciones entre cantidades como inseparables al proceso de medición de ángulo. Más tarde, Moore (2014) señala que conectar la medida del ángulo a la medida de arcos y concebir el radio como una unidad de medida, genera significados trigonométricos, desde un contexto trigonométrico: el círculo unitario y triángulos rectángulos.

Además, Moore y LaForest (2014), consideran que para el uso de las funciones trigonométricas los estudiantes deben entender la medida angular, el círculo unitario y los triángulos rectángulos de maneras que les permitan ver las funciones trigonométricas como relaciones entre dos cantidades. Sin embargo, señalan que la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría con frecuencia carecen de una conexión con las cantidades y los círculos.

Maldonado, Rodríguez y Santana (2009) y Santana (2009) abordando el problema de la transición grados–radianes, proponen una secuencia didáctica al seno de la metodología Ingeniería Didáctica y la Teoría de Situaciones Didácticas, para favorecer en estudiantes de nivel medio superior dicha transición. De aquí que, el orden del diseño tiene la finalidad de introducir en los estudiantes al trabajo con medidas angulares que permiten recordar algunos conceptos básicos de la circunferencia, a fin de que identifiquen la relación que existe entre la unidad angular en grados y radianes.

A modo de reflexión, las investigaciones reportadas en este trabajo, muestran que las dificultades respecto a la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, se debe, a que profesores en formación y servicio no comprenden el concepto de ángulo, la razón trigonométrica, las medidas angulares y la transición grados-radianes, además, la instrucción de los libros de textos no es la apropiada. Por ello, investigadores han centrado su atención en realizar propuestas de enseñanza para mejorar del aprendizaje de esta. Por otro lado, se considera que las Tic's son importantes para la enseñanza y aprendizaje en la trigonometría.

Así pues, con base en las investigaciones mencionadas, en esta investigación se hace el rediseño de la propuesta de Santana (2009) sobre el proceso de transición de grados a radianes, que consiste en la incorporación de la visualización mediante el software GeoGebra, con la finalidad de brindar un ambiente dinámico, que permita favorecer el proceso de transición grados-radianes.

1.2 Problemática

Desde mi experiencia docente, respecto de las funciones trigonométricas lo trataba de manera superficial por el poco dominio que tenía de ellas, pues al momento de impartir las clases solo atendía la medida angular en grados. Un factor por el cual dejaba de lado la medida angular radianes, se debía a que, en los libros de texto, dado que me apoyaba en ellos para abordar el tema, no muestran a qué se debe o cuándo usar la media angular grados, radianes y/o cuándo es necesario realizar la transición de ambas. Esto puede ser, porque en los libros de textos e incluso los programas de estudios, no consideran la importancia y la necesidad de estas medidas angulares y la transición de una a otra (Díaz, Salgado y Díaz, 2010).

Por otra parte, algunos profesores presentan rupturas conceptuales respecto de las medidas angulares (Martínez 2012), conciben de manera errónea los conceptos de grados y radianes (Tuna 2013), y la falta de significado geométrico y variacional en los conceptos de razón y función trigonométrica (Scholz & Montiel, 2018).

Por consiguiente, las rupturas conceptuales, el poco dominio de las funciones trigonométricas que tienen los profesores y la forma en que los libros de textos presentan la transición grados-radianes, influyen en el aprendizaje de los estudiantes, como lo es el relacionar las medidas angulares (Moore y LaForest, 2014). En este sentido, esta investigación rediseña una propuesta para el tratamiento del proceso de transición de grados a radianes (Santana, 2009), como alternativa para atender dicha problemática, dado que el profesor debe conocer y dominar los contenidos que imparte, para comunicar a los estudiantes el saber y con ello propiciar la comprensión, las habilidades y destrezas de la materia enseñada (Shulman 2005).

1.3 Pregunta de investigación

De esta forma nace la interrogante: ¿Cómo favorecer el proceso de transición grados-radianes en profesores de matemáticas en formación?

1.4 Objetivo de la investigación

Incorporar la visualización a través del uso del GeoGebra en tareas propuestas para favorecer el proceso de transición de grados–radianes, en profesores de matemáticas en formación, con base en los significados geométrico y variacional.

De la propuesta hecha por Santana (2009), se incorpora el GeoGebra para visualizar las representaciones gráficas y geométricas del proceso trigonométrico con el cual se distingue la medida angular, tanto en grados como en radianes para mostrar la necesidad de la transición grados-radianes de las funciones trigonométricas de variable real. Se espera que ésta sea una forma de hacerlo comprensible desde los profesores de matemáticas en formación y posteriormente de sus estudiantes, debido a que los docentes somos los mediadores del aprendizaje de los estudiantes (Andrade, 2015).

1.5 Justificación

El programa de estudio de bachillerato de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro, 2010), señala que las Tic's son de ayuda para la enseñanza de la Geometría. Las herramientas tecnológicas pueden ofrecer simulaciones virtuales por ejemplo para gráficas, procesamiento y manipulación de imágenes, es decir, la instrucción asistida por el ordenador como complemento a la enseñanza es más eficaz (Zegin et al., 2012).

No obstante, Fernández y Caballero (2017), indican que la práctica de la enseñanza se sigue apoyando mayormente en el libro de texto, puesto que es una guía que dirige el curso de la enseñanza en buena parte de las aulas.

Por consiguiente, se analizaron tres libros de texto que señala la bibliografía de la UAGro (2010) (véase anexo 1), de la unidad de competencia III que refiere a la trigonometría. El análisis fue conceptual (Maz, 2009) y se contemplaron los registros de representaciones (Macías, 2014) en el tema de transición grados-radianes. Se encontró que, los libros de texto solo contemplan problemas que se resuelven con algoritmos estándar o con una fórmula o el proceso de solución se centra en responder la interrogante de una pregunta específica, otros, presentan procedimientos algorítmicos tanto para grados y radianes. Es decir, no diversifican su orientación sobre el sentido y alcance de los problemas matemáticos, limitando el aprendizaje de los estudiantes (Castañeda, Gonzales y Mendo-Ostos 2017). También, en los libros de textos solo se muestran imágenes estáticas y no se contempla el uso de la tecnología, a pesar de que el programa de estudio de matemáticas señala la importancia de que el profesor implemente las herramientas tecnológicas.

Es así, que se propone un rediseño de la propuesta didáctica de Santana (2009) incorporando la tecnología, específicamente el software GeoGebra, cómo alternativa para el proceso de transición grados-radianes en profesores de matemáticas en formación. La elección de dicha propuesta y la decisión de incorporar la visualización a través GeoGebra se debe a las siguientes consideraciones:

- ✓ Contiene visualización en papel (el diseño impreso), que favorece la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes (Arcavi, 2003).
- ✓ Contiene registros de representaciones que promueven las transformaciones semióticas para el tratamiento y la conversión. Además, esta última favorece el proceso cognitivo que involucra el pensamiento matemático y cualquier problema. En este sentido, la conversión indica si existe comprensión correcta o errónea (Duval, 2006b).
- ✓ Incorporar la visualización a través de una herramienta tecnológica, principalmente, ayuda a construir, combinar, reconstruir, examinar y manipular imágenes, además de que permite observar los cambios efectuados en las relaciones representadas (Noss, Healy y Hoyles, 1997).
- ✓ El Software GeoGebra exponen al instante diferentes registros semióticos del objeto matemático que se está trabajando, además de dar una percepción dinámica de la transformación o transformaciones semióticas, contrario al soporte estático del papel (Duval, 2006b). Permite la construcción de ambientes virtuales para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Salas, 2018). Asimismo, favorece la problematización, la resolución de problemas, la comprensión de conceptos, el enfoque en determinados temas y la motivación por profundizar en ellos (Díaz, Rodríguez y Lingán, 2018)

Con base en lo anterior, el incorporar la visualización a través del GeoGebra, se espera favorecer el proceso de transición de grados-radianes de los profesores de matemáticas en formación, antes de que este frente a grupo.

CAPÍTULO II. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Profesores en formación

El profesor debe comprender las estructuras de la materia enseñada y tener conocimiento de los contenidos, para hacerlo comprensible a sus estudiantes (Shulman, 2005). Por ello, existe un interés creciente hacia la formación de profesores de matemáticas, entre otras razones, por las nuevas reformas curriculares que exigen renovación del profesor (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004).

Para que se dé un cambio de rumbo en la formación de profesores, es importante tener en cuenta que es indispensable formar a los profesores con área relacionada con la ciencia, organizando cursos especializados, con perspectiva de integración de los componentes: científico y didáctico, de modo que se garantice una coherencia en la formación (Paixao y Cachapuz, 1999). Es por ello que la formación del profesorado se está convirtiendo en un espacio de conocimiento e investigación, que brinda soluciones y plantea problemas a los sistemas educativos (Marcelo, 1995).

En cuanto al concepto formación del profesorado, según Marcelo (1995), debe referirse a los sujetos que están realizando estudios para convertirse en profesores y a los docentes que llevan algunos años en la enseñanza. El concepto es el mismo, lo que cambia es el contenido, enfoque o metodología de la formación. En este sentido, contempla las siguientes fases de la formación del profesorado (Marcelo, 1989):

- ***Pre-entrenamiento***: Se centra en las experiencias de enseñanzas anteriores que los aspirantes a profesores han vivido, habitualmente en la etapa de alumnos (en educación básica y media superior) que puede asumirse de forma acrítica y puede influir de manera inconsciente en el profesor.
- ***Formación inicial:*** Se enfoca en la preparación formal en una institución delimitada a la formación de profesores, en la que los profesores en formación adquieren conocimientos pedagógicos y de disciplinas académicas, así como, realizan prácticas de enseñanza.

- ***Formación durante el periodo de iniciación:*** Se refiere a los primeros años que ejercen como profesores, en los cuales los docentes aprenden en la práctica, generalmente a través de estrategias de supervivencia.
- ***Desarrollo profesional***: Contiene todas las actividades planeadas por instituciones o por los propios docentes para favorecer el desarrollo profesional y perfeccionar su enseñanza.

En este trabajo, se asume la postura de Marcelo (1989) sobre la formación de profesores en la fase de Formación inicial, debido a que se centra en sujetos que se están formando para convertirse en profesores de matemáticas, pretendiendo que los ***profesores de matemáticas en formación*** adquieran los conocimientos matemáticos, las destrezas y las actitudes adecuadas para que desarrollen una enseñanza de calidad, en este caso, para las funciones trigonométricas en el proceso de transición grados-radianes. Esto, por la responsabilidad que tendrán en un futuro (al estar frente al aula) de comunicar dicho cocimiento a sus estudiantes (Shulman, 2005).

2.2 El proceso de transición grados-radianes

El contenido matemático que se trabajará con los profesores de matemáticas en formación, es el proceso de transición grados-radianes. A continuación, se describen los conceptos matemáticos que contempla dicho proceso.

Uno de los conceptos que estará presente en esta investigación, es el del ***ángulo***, el cual, se define como lo cita Casas y Luengo (2015): Es «La cantidad de inclinación entre las dos líneas o la cantidad de giro necesaria para trasladar una línea a la posición de otra» (p. 203), puesto que no presenta problemas al considerar los ángulos mayores a 360º, además permite la expresión de ángulo positivo y ángulo negativo.

Las medidas angulares importantes en esta investigación son los ***grados (o sistema sexagesimal)*** y ***radián (o medida circular)***. El ***grado*** se define como, la magnitud de un ángulo donde el vértice se encuentra en el centro de un círculo y sus lados interceptan un arco con longitud de $1/360$ de la circunferencia. La magnitud de un ángulo no tiene límite (Niles, 1991).

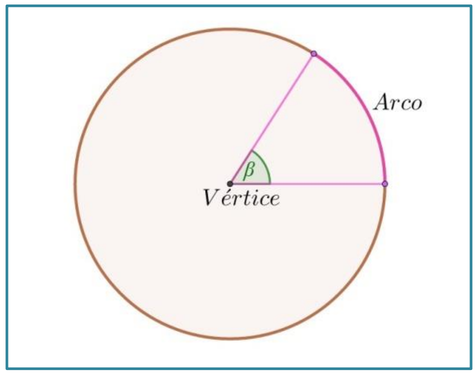


Figura 8. Representación de un grado arbitrario

Por ***radián*** se entiende, que es la medida de un ángulo donde el vértice está en el centro de un círculo unitario y sus lados interceptan un arco en la circunferencia de longitud equivalente al radio (Niles, 1991) (véase figura 9).

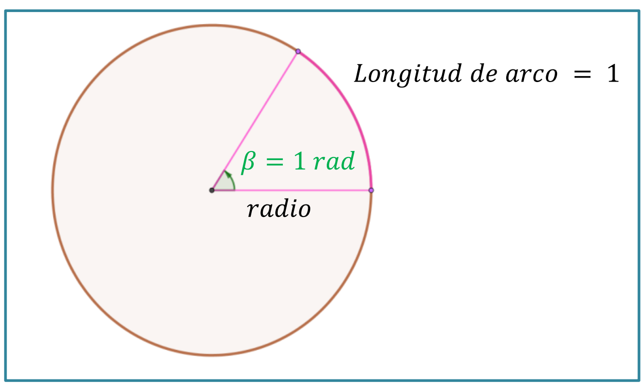


Figura 9. Representación del radián

Además, dado un ángulo (β), ***la razón*** que existe entre la ***longitud del arco*** (l) equivalente al radio y ***la longitud del radio*** (r) de la circunferencia correspondiente, es un ***número real*** x, que está asociado a β y es independiente de la circunferencia que se tome. Es decir:

$$\text{Si} \quad l = r \quad \rightarrow \quad \frac{l}{r} = x \quad \rightarrow \quad \text{Medida angular } \beta \text{ en radianes}$$

Así, la unidad del radián, se obtiene cuando el ángulo de la circunferencia unitaria está determinado por el arco de longitud 1, siendo la ***razón*** el número 1:

$$\frac{l}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora bien, el ***proceso de transición*** grados-radianes se ilustra de la siguiente manera (Acuña y Trujillo, 1986):

El ángulo de una vuelta completa en ***grados*** mide (ver figura 10):

$$\beta = 360°,$$

Y en ***radianes*** mide (la longitud del arco que subtiende a la circunferencia es $2\pi r$):

$$x = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \, radianes \text{ (Figura 10)}$$

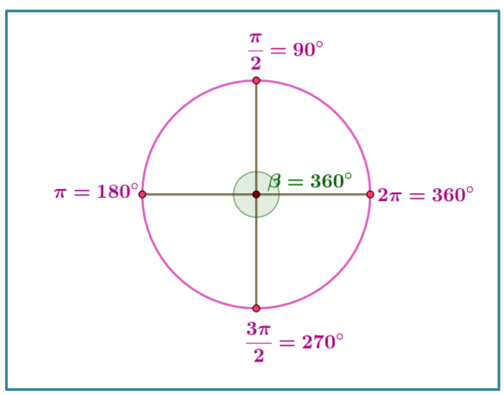


Figura 10. Equivalencia de medidas angulares

Por consiguiente:

$$2\pi \, radianes = 360° \quad \rightarrow \quad \pi \, radianes = 180°$$

Entonces, el ángulo de un radián mide la $n - ésima$ parte de 180°:

$$1 \, rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3° \text{ (Véase figura11)}$$

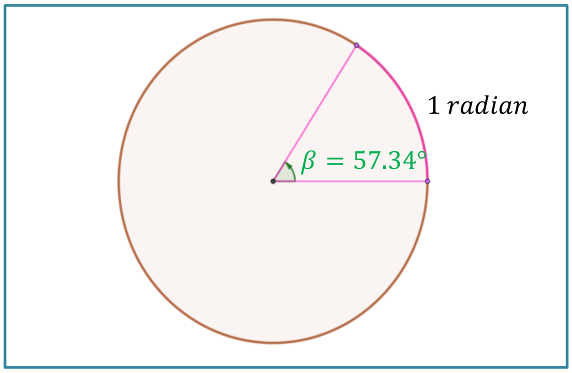


Figura 11. Un radián en grados

Asimismo:

$180° = \pi \;\; \rightarrow \;\; 1° = \frac{\pi}{180}\, radianes \approx 0.01745$ (Véase figura 12)

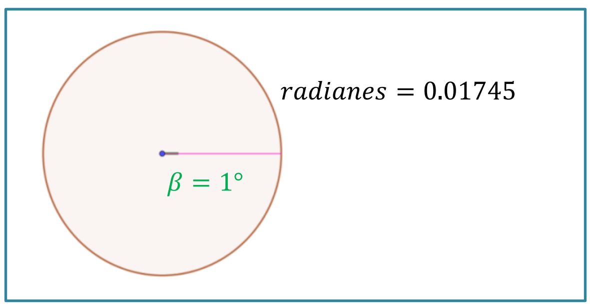


Figura 12. Un grado en radianes

Por lo tanto, para el caso general, se tienen las siguientes equivalencias de radianes a grados y viceversa:

$$x\; radianes = x\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \left(\frac{x \cdot 180}{\pi}\right)°$$

$$\beta° = \left(\beta\frac{\pi}{180}\right) radianes$$

2.3 Visualización

En esta investigación, consideramos importante el uso de la visualización para el proceso de transición de grados-radianes, puesto que, fundamenta el aprendizaje de la geometría, pues, los conceptos geométricos se obtienen a través de representaciones externas que se perciben, de las cuales se desarrollan representaciones internas mentales, por ello se considera que el aprendizaje sucede cuando existe una coordinación entre las representaciones internas que el alumno desarrolla del concepto (Ortega y Pecharromán, 2015).

La aplicación de elementos gráficos tiene aporte importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Ascheri, Pizarro, Astudillo, García y Culla, 2014) y el uso de la visualización se considera importante para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Schmitz y Eichler, 2016), puesto que es un aspecto crítico del pensamiento matemático, la comprensión y el razonamiento. Además, el pensamiento visual es un recurso alternativo y poderoso para que los estudiantes realicen matemáticas, por lo tanto, para que los estudiantes construyan conceptos matemáticos, el razonamiento visual y analítico deben estar presentes e integrados (Chih-Hsien, 2015).

Se asume la perspectiva de Arcavi (2003) que define la visualización como la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes, dibujos, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con la finalidad de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas que sean previamente desconocidas y entendimientos avanzados. La visualización no solo se relaciona con propósitos ilustrativos, sino también se reconoce como componente clave del razonamiento (involucrando lo conceptual), la resolución de problemas y la prueba.

2.4 Registros de representaciones semióticas

En la geometría, es necesario combinar al menos el uso de la visualización y la expresión verbal de propiedades o la expresión numérica de magnitudes (Duval, 2006). Es por esto, que en el rediseño que se propone en este trabajo, para el proceso de transición grados-radianes, se resaltan los registros de representaciones semióticas (Duval, 2006).

Duval (2006) menciona que las representaciones semióticas son herramientas para promover nuevos conocimientos y su uso determina la posibilidad de procesamiento matemático, el cual implica sustituir alguna representación semiótica por otra. A continuación, mencionamos los tipos de representaciones semióticas que describe Macías (2014):

- ✓ Registro de Lenguaje Natural: Permite introducir definiciones y hacer descripciones o designaciones.
- ✓ Registro Numérico: Abarca operaciones de cálculo y la aplicación de propiedades distributiva, asociativa, etcétera, que sean necesarias para la resolución de diversas tareas.
- ✓ Registro Figural-Icónico: Incluye dibujos, bosquejos, líneas, marcas, etcétera, que pretenden significar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.
- ✓ Registro Tabular: Los datos están representados a través de un conjunto de filas y de columnas que permiten visualizar la información de manera global, establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se coleccionan, así también descubrir propiedades y características del objeto de conocimiento representado.
- ✓ Registro Algebraico: Se realizan generalizaciones, modelizaciones y se señalan características particulares del objeto que representa.
- ✓ Registro Geométrico: Posibilita realizar operaciones de reconfiguración y de manipulación que propicien la comprensión y establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.

- ✓ Registro Gráfico: La representación gráfica- cartesiana hace presentes numerosos elementos como son: puntos de corte en los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, curvatura y más, que permiten apreciar parámetros.

Duval (2006) menciona que las representaciones semióticas se pueden cambiar por otras. Por consiguiente, la actividad matemática consiste en la transformación de representaciones, de la cual existen dos tipos: Tratamientos y Conversiones. Los *tratamientos* son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro. Mientras que las *conversiones* son transformaciones de representación que radican en cambiar un registro semiótico a otro, sin cambiar los objetos que se expresan.

Además, la comprensión en el aprendizaje de la matemática y los procesos de pensamiento determinados que demanda la actividad matemática, se obtienen por medio de los diferentes tipos de conversiones.

En resumen, el rediseño de esta investigación, contempla la visualización y los registros de representaciones semióticas, para el desarrollo del conocimiento, las destrezas y las habilidades necesarias, en el proceso de transición grados-radianes por profesores de matemáticas en formación.

2.5 Tecnología en la enseñanza

Para obtener un conocimiento matemático, Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki y Balles, (2012) mencionan que, además, del manejo de diferentes sistemas de representaciones y la conversión entre unos y otros, es necesario crear condiciones donde sea posible establecer una coordinación entre diferentes registros de representaciones, considerando que los objetos matemáticos por naturaleza son: abstractos, accesibles sólo por medio de representaciones y su conceptualización es la capacidad de identificar un mismo concepto en diferentes perspectivas. De esta forma, surge la necesidad de reconsiderar la forma en que se enseñan ciertos conceptos. Asimismo, Gamboa (2007) señala que las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia de usar tecnologías como un medio que permita obtener conclusiones y realizar observaciones que en otros ambientes (lápiz y papel), sería difícil de obtener.

En este sentido, el uso de sistemas de representaciones y la tecnología, permiten dar significado preciso a los conocimientos matemáticos, además, el uso de la tecnología en la resolución de problemas, permite desarrollar conductas como: buscar relaciones entre los elementos de representaciones, elaborar conjeturas a partir de los datos observados en las distintas representaciones realizadas en herramientas tecnológicas, generalizar los resultados a partir de las soluciones obtenidas al trabajar con las herramientas tecnológicas, elaborar conexiones entre los resultados obtenidos con otros contenidos matemáticos y comprobar los resultados obtenidos en un proceso de resolución a través de la elaboración de otro diferente (Gamboa, 2007). Por consiguiente, el uso de la tecnología favorece alcanzar los objetivos de aprendizaje, la selección de los contenidos curriculares y mejoran la calidad del aprendizaje (Badia, Chumpitaz, Vargas y Suárez, 2016).

Barahona, Barrera, Vaca e Hidalgo (2015) consideran que los procesos de aprendizajes son más eficientes al integrar herramientas informáticas que faciliten mediante procesos visuales el análisis matemático, garantizando la vinculación del aprendizaje logrado con la contribución de las soluciones matemáticas a problemas de la sociedad. En este sentido señalan que, la herramienta GeoGebra[1] facilita procesos de abstracción, mostrando cómo se construye una relación entre las presentaciones geométricas y algebraicas de una situación de la vida real, permitiendo encontrar soluciones matemáticas y visuales que representan la solución de un determinado problema. GeoGebra fue creado para ayudar a obtener mejor comprensión matemática.

[1] **GeoGebra:** Es un software matemático

Con base en lo anterior, esta investigación integra la herramienta GeoGebra, para facilitar el proceso de transición grados-radianes construyendo una relación entre las representaciones geométricas, gráficas y numéricas, permitiendo a los profesores de matemáticas en formación encontrar soluciones a través de procesos visuales.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA Y DISEÑO DEL EXPERIMENTO

3.1 Metodología: Investigación Basada en Diseño

En cuanto a la metodología usada en este trabajo es la Investigación Basada en Diseño, de tipo cualitativa, dado que los datos se deben interpretar en un proceso minucioso.

La Investigación Basada en Diseño es básicamente para los profesores en formación o investigadores en educación, dado que tiene el potencial de cerrar la brecha entre la práctica educativa y la teoría. Como metodología tiene dos objetivos, el primero es el desarrollo de teorías sobre el aprendizaje de dominios específicos, y el segundo es apoyar el desarrollo de métodos particulares de aprendizaje (Bakker y Eerde, 2015). El método comprende también las formas y procedimientos para el diseño de elementos específicos de ambientes para el aprendizaje como son: tareas[2], materiales, herramientas, patrones de comunicación e interacción, instrucción de secuencias, etc. (Riemann, 2011).

Por las razones expuestas previamente, se opta por la Investigación Basada en Diseño como metodología. De acuerdo con Amiel y Reeves (2008) el diseño podría ser un conjunto nuevo de estrategias o podría basarse en una investigación recopilada a partir de un diseño que fue experimentado antes. Por consiguiente, se asume la segunda postura, es decir, a partir del diseño propuesto por Santana (2009), se opta por su rediseño (anexo 2), incorporando el uso de la tecnología en su puesta en escena, esto es, se construye un nuevo diseño a partir de uno que ya está. Esta metodología comprende tres fases: preparación y diseño del experimento; la experimentación para apoyar el aprendizaje; y análisis retrospectivos (Reimann, 2011) que serán descritos enseguida.

[2] **Tareas:** Se entiende como ejercicio(s), problema(s) o pregunta(s).

3.2 Preparación y diseño del experimento

Como se mencionó anteriormente el rediseño de este trabajo se elaboró a partir de la propuesta de Santana (2009), por consiguiente, algunas tareas fueron modificadas, pero la estructura y los objetivos se conservaron. En éste apartado se describen los objetivos por bloque y por tarea, así también, se resaltan los cambios realizados

El objetivo general del rediseño fue favorecer en profesores de matemáticas en formación el proceso de transición grados-radianes a través de la visualización en el GeoGebra. En el rediseño, cuando aparece el icono indica que previo a que los profesores de matemáticas en formación resuelvan las tareas, se les presentará en GeoGebra información y elementos necesarios (conocimientos previos) para completarlas consistentemente. En cuanto a las tareas, se seccionan en tres bloques con un objetivo específico.

El primer bloque (B-I) corresponde a las tareas de inicio, estas tienen por objetivo introducir al profesor de matemáticas en formación al trabajo con las medidas angulares. Asimismo que recuerden algunos conceptos previos como el perímetro y arco de una circunferencia y el cálculo de la razón, a fin de que al recordarlos les permitan resolver las tareas del siguiente bloque.

El segundo bloque (B-II) corresponde a las tareas de desarrollo, las cuales tienen el objetivo de que identifiquen la relación que existe entre las unidades de medidas angulares grados y radianes.

Finalmente, el tercer bloque (B-III) corresponde a las tareas de cierre, que tienen el objetivo de que de manera sistemática el profesor de matemáticas en formación relacione la equivalencia de medida angular en grados a radianes y viceversa.

DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN EL REDISEÑO

A. *TAREAS DE B-I*

A diferencia de Santana (2009), en este rediseño, antes de responder la tarea 1 y 2 (ver figura 13), se incluye el uso de los registros geométricos y gráficos que promueve la visualización en GeoGebra, como apoyo en la resolución de las mismas.

El objetivo en dichas tareas se conserva, siendo este, que los profesores de matemáticas en formación recuerden la forma de cómo se miden y representan los ángulos según el sentido o el valor dado. Se espera que se movilicen entre los registros de representación que proporciona el GeoGebra, así como, del lenguaje natural al gráfico (que aparecen en las instrucciones, ver figura 13); al lenguaje natural (tarea 1) y figural-icónico (tarea 2) que ellos tienen que realizar.

Diseño Santana (2009)

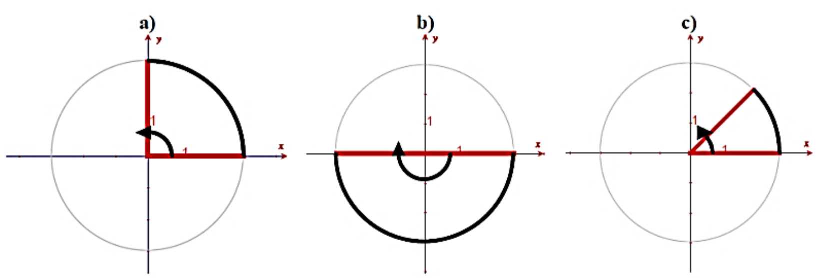
Tarea 1

BLOQUE I

Recuerda que… el ángulo de una circunferencia mide 360°, que un ángulo es positivo si está medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, es negativo si está medido en sentido de las manecillas del reloj.

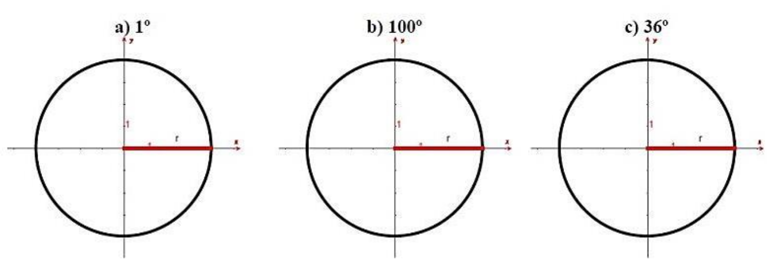
Entonces, si suponemos que el ángulo inicia sobre el eje *x*, realiza las siguientes actividades.

I) Estima el valor de los ángulos que se representan en las siguientes circunferencias. Justifique ampliamente sus respuestas.



Tarea 2

VII) En las siguientes circunferencias representa los ángulos que se te piden.



Rediseño en este trabajo

Tarea 1

Ponga atención en lo que sucede con los ángulos α y β (véase figura A).

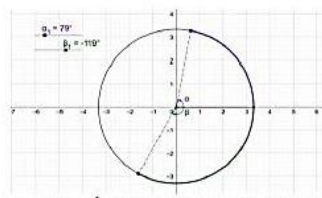
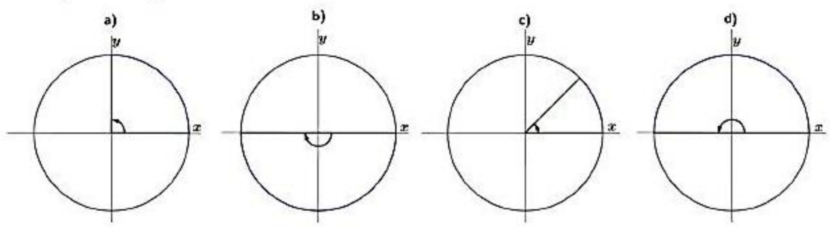


Figura A. Ángulos positivos y negativos

Entonces, si suponemos que el ángulo inicia sobre el eje x, realiza las siguientes actividades.

1) Estima el valor de los ángulos que se representan en las siguientes circunferencias. Justifique sus respuestas.



Tarea 2

2) En las siguientes circunferencias representa los ángulos que se te piden.

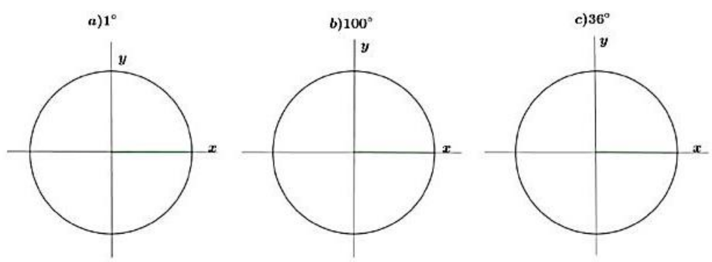


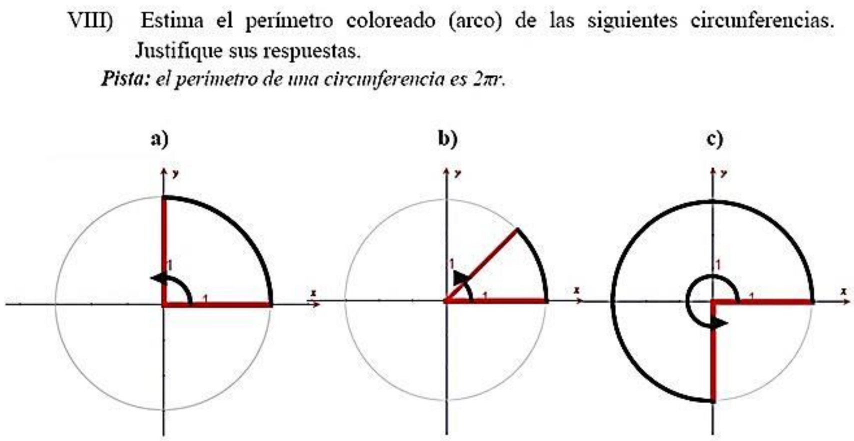
Figura13. Comparación de la tarea 1y 2

La figura 13 muestra un extracto de las tareas 1 y 2 de ambos diseños y se observa que, además de las diferencias ya mencionadas, en este rediseño, se omite el valor del radio en las circunferencias, para evitar que asocien lo que realizan a una medida específica.

En relación a la tarea 3, la finalidad es que los profesores de matemáticas en formación calculen el perímetro de las circunferencias (arco) señalado en los círculos, sin importar la medida del radio (r). Para ello, se les proporciona la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia ($2\pi r$), como se muestra en la figura 14. Se espera se movilicen en los registros proporcionado en la tarea (gráfico y lenguaje natural) al numérico (realizado por ellos).

Diseño Santana (2009)

Tarea 3



Rediseño en este trabajo

Tarea 3

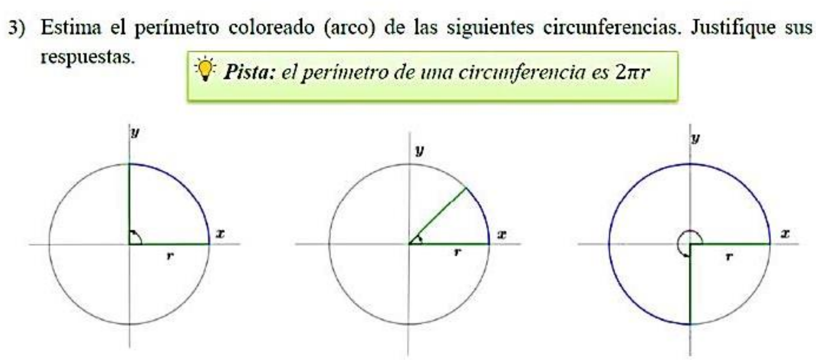


Figura 14. Comparación de la Tarea 3

La figura 14, muestra un extracto de la tarea 3 en ambos diseños. De aquí se observa que en el rediseño, se omite la medida del radio, porque consideramos importante que los resultados se obtengan de manera generalizada, evitando que se asocien con una medida específica.

A diferencia de Santana (2009), antes de que los profesores de matemáticas en formación realizaran la tarea 4, se incluyó el uso de los registros: numérico, geométrico y gráfico, que promueve la visualización en GeoGebra (ver figura 15) como apoyo para la resolución de la misma.

En lo que respecta a la tarea 4, el objetivo es que los profesores de matemáticas en formación concluyan que dado el mismo ángulo en circunferencias con radios distintos, la razón de la longitud del arco entre el radio, es la misma Se espera que se movilicen entre los registros proporcionado por el GeoGebra: y del lenguaje natural y gráfico (que se dan en la instrucción de esta, como se observa en la figura 15); al que ellos tienen que realizar (numérico).

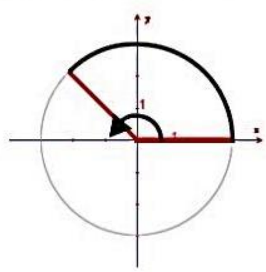
Diseño Santana (2009)

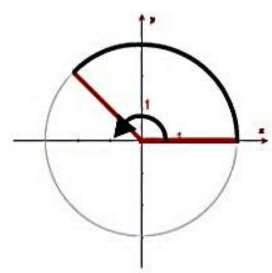
Tarea 4

IX) Calcula la razón de la longitud del arco con el radio de cada una de las siguientes circunferencias.

i) El radio mide 2cm

j) El radio mide 6 cm





k) El radio mide 3 cm

l) El radio mide 5 cm

Rediseño en este trabajo
Tarea 4

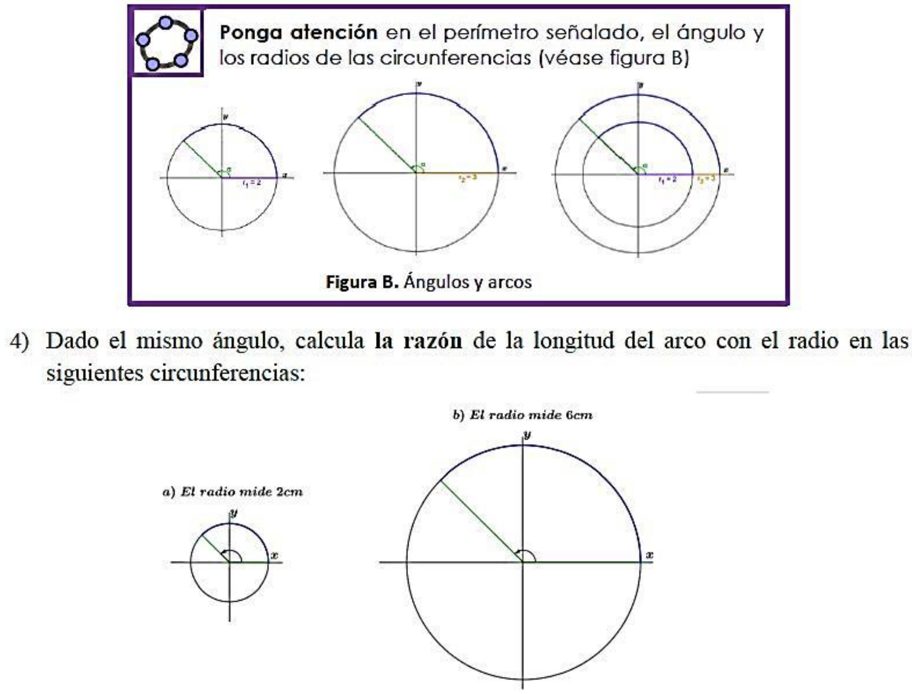


Figura 15. Comparación de la tarea 4

La figura 15, muestra un extracto de la tarea 4 en ambos diseños. Como se puede observar, además de las diferencias ya mencionadas, el enunciado se modificó, puesto que se consideró confuso, así también, se cuidó el radio de las circunferencias, para que parecieran de diferente tamaño según el radio que ésta señala, favoreciendo la visualización que se facilita en el rediseño impreso (imágenes estáticas en papel).

B. TAREAS DE B-II

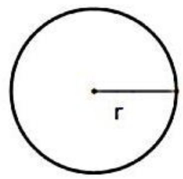
En cuanto a la tarea 5, tiene el objetivo de que los profesores de matemáticas en formación relacionen la razón del perímetro de la circunferencia entre el radio, con la medida en grados que tiene ésta, llegando a la conjetura que la vuelta completa de cualquier circunferencia medida en grados es 360 y el valor de la razón siempre será 2π. Se espera que se movilicen entre el registro del lenguaje natural al figural-icónico (que facilita la tarea, véase figura 16); al numérico (que ellos tienen que realizar).

Diseño Santana (2009)

Tarea 5

BLOQUE II

IX) Calcula la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio. También estima el ángulo.



Rediseño en este trabajo

Tarea 5

B-II

5) Calcula la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio. También estima el ángulo.

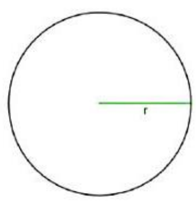


Figura 15. Comparación de la tarea 5

Como se observa en la figura 15, la tarea 5 quedó igual a la de Santana (2009), ya que se consideró pertinente para lograr el objetivo esperado.

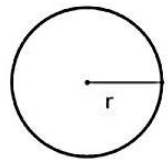
Antes de empezar la tarea 6, a diferencia de Santana (2009) en este rediseño se incluyen los registros: numérico, gráfico y geométrico, que promueve la visualización en el GeoGebra (ver figura 16), como guía para la resolución de ésta.

Con relación a la tarea 6, el objetivo es que los participantes se den cuenta que el número de veces que entra el radio en cualquier circunferencia, es el mismo y esta media se puede representar como 2π. Se espera que los profesores de matemáticas en formación se movilicen en los registros que proporciona el software; así como, del lenguaje natural y figural-icónico (que facilita la tarea, ver la figura 16); al que ellos tienen que realizar (lenguaje natural).

Diseño Santana (2009)

Tarea 6

X) Estima el número de veces que entra el radio en la circunferencia. Expresa tu resultado en términos de π.
Pista: $\pi = 3.1416$ aproximadamente!



Rediseño en este trabajo

Tarea 6

Ponga atención lo que sucede con el radio en el arco de la circunferencia (véase figura C).

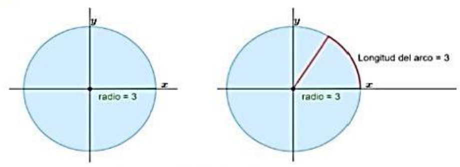


Figura C. Radios en el arco

6) Estima el número de veces que entra el radio en la circunferencia. Expresa tu respuesta en términos de π.

$$\pi = 3.1416$$

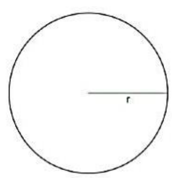


Figura 16. Comparación de la tarea 6

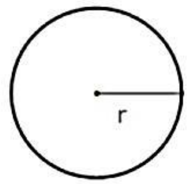
La figura 16, muestra la diferencia antes mencionada. El enunciado de la tarea 6 es el mismo, puesto se consideró pertinente de acuerdo al objetivo planteado.

En lo que concierne a la tarea 7, tienen que representar un ángulo que sus lados formen un arco con igual medida a la del radio, con el objetivo de que los profesores de matemáticas en formación encuentren la representación del ángulo equivalente a un radián. Se espera que se movilicen entre los registros del lenguaje natural y figural-icónico (que les proporciona la tarea, como se muestra en la figura 17), al figural-icónico (que ellos tienen que realizar).

Diseño Santana (2009)

Tarea 7

XI) Representa el ángulo α, para el cual el arco que se forma sea igual al radio dado en la siguiente circunferencia.



Rediseño en este trabajo

Tarea 7

7) Representa el ángulo α, para el cual el arco que se forma sea igual al radio dado en la siguiente circunferencia.

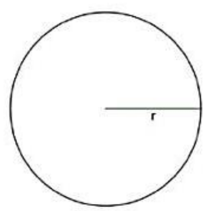


Figura 17. Comparación de la Tarea 7

Como se observa en la figura 17, la redacción en esta tarea quedo igual, porque se consideró conveniente para alcanzar el objetivo planteado en ella.

Con respecto a las tareas 8 y 9, se les proporciona el registro de lenguaje natural (en la tarea, ver figura 18). Estas tienen el objetivo que los profesores de matemáticas en formación establezcan la relación que existe entre los grados y los radianes. Específicamente, en la tarea 8 se espera que se den cuenta que en la circunferencia hay $2\pi\, radianes$, moviéndose entre el registro que ésta se proporciona, al numérico y nuevamente al lenguaje natural (realizados por ellos). Asimismo, el de la tarea 9, es obtener la media de grados que tiene un radián (57.29°), esperando que se muevan entre el registro que proporciona la tarea, al algebraico (que tienen que realizar).

Diseño Santana (2009)

Tarea 8 y 9

Eureka!, este ángulo limitado por el arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio recibe el nombre de **RADIÁN**, y generalmente se expresa como **1rad**.

XII) ¿Cuántos radianes tiene una circunferencia? Exprésalo en términos de π. Justifica ampliamente tu respuesta.

XIII) Expresa en términos de grados el ángulo α de la actividad III.

Rediseño en este trabajo

Tarea 8 y 9

Este ángulo limitado por el arco de la circunferencia cuya longitud es igual al radio recibe el nombre de **RADIÁN**, y generalmente se expresa como $\mathbf{1\ rad}$.

8) ¿Cuántos radianes tiene una circunferencia? Exprésalo en términos de π. Justifica tu respuesta.

9) Expresa en términos de grados el ángulo α de la actividad 7.

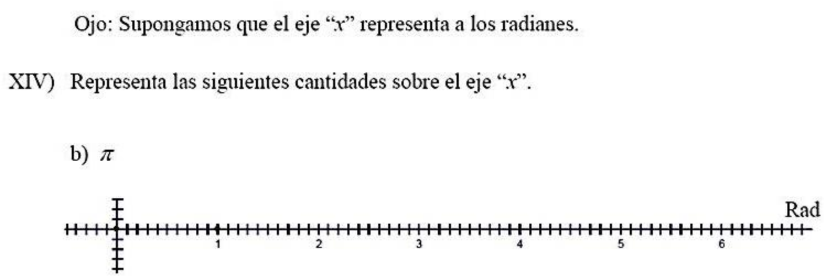
Figura 18. Comparación de las tareas 8 y 9

Como se puede observar en la figura 18, sólo se cambió la imagen del diseño, sin embargo la instrucción de las tareas quedaron igual, puesto que se consideraron adecuadas para alcanzar el objetivo planteado.

En lo que se refiere a la tarea 10, el objetivo es que los profesores de matemáticas en formación pasen las cantidades dadas en términos de π, al eje "x" (que representa los radianes). Se espera que se muevan entre los registros numérico, gráfico y lenguaje natural (que proporciona la tarea, como se muestra en la figura 19); al numérico (que tienen que realizar ellos).

Diseño Santana (2009)

Tarea 10



Rediseño en este trabajo
Tarea 10

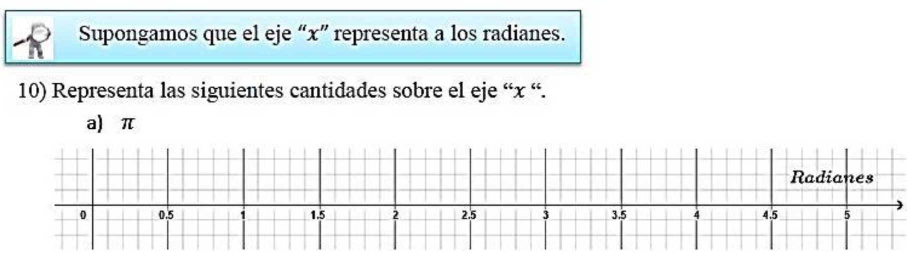


Figura 19. Comparación de la tarea 10

En la figura 19, mediante el extracto de la tarea 10, se observa que sólo se realizaron cambios en la presentación, conservando la instrucción de esta, porque se consideró oportuna para el objetivo de la misma.

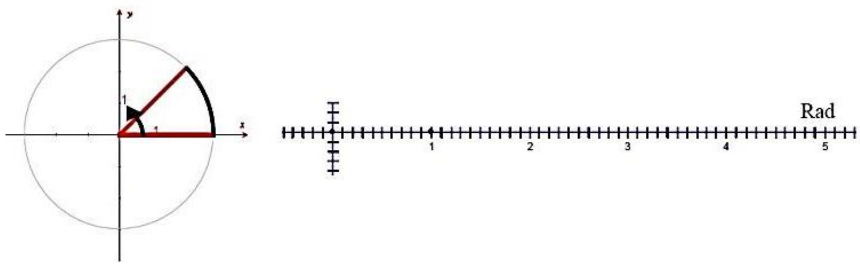
A diferencia de Santana (2009), antes de que los profesores de matemáticas en formación realizarán la tarea 11, se incluye el uso de los registros: numérico, geométrico y gráfico, que promueve la visualización en el GeoGebra (ver figura 20), como apoyo para la resolución de la misma.

En cuanto a la tarea 11) el objetivo es que identifiquen la medida en términos de π (del arco señalado en las circunferencias) y la marquen en el eje "x" (que representa los radianes). Esto es, Se espera que los profesores de matemáticas en formación se movilicen entre los registros que facilita el GeoGebra; así como, los que proporcionan la tarea (lenguaje natural y gráfico, véase figura 20); al numérico que ellos tienen que realizar.

Diseño Santana (2009)

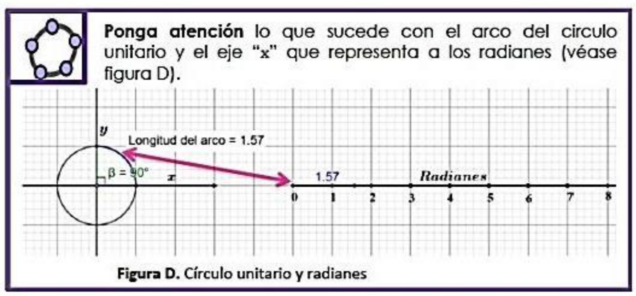
Tarea 11

d) El ángulo que se forma en las siguientes circunferencias:



Rediseño en este trabajo

Tarea 11



11) Representa el ángulo que se forma en las siguientes circunferencias unitarias:

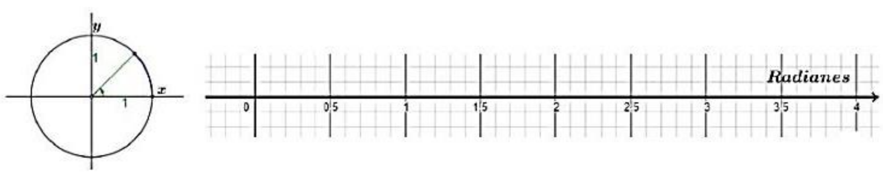


Figura 20. Comparación de la tarea 11

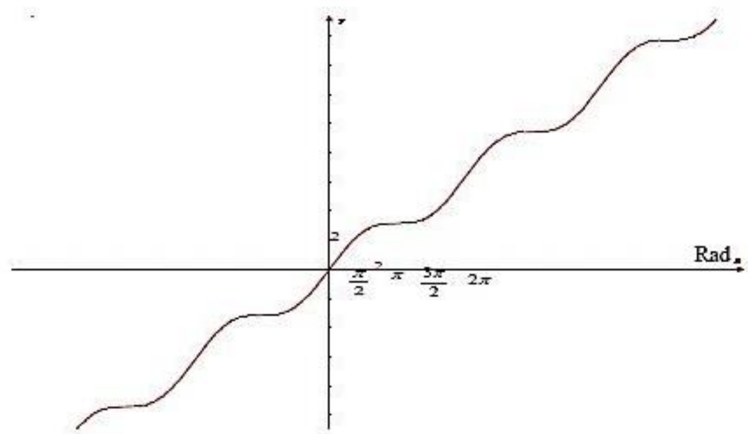
En la figura 20, se puede observar en el extracto de la tarea 11, que además de las diferencias ya mencionadas, se modificó la instrucción, puesto que, causaba confusión a lo que se tiene que realizar.

C. TAREAS DE B-III

Esta parte (B-III) del rediseño, se compone por dos tareas, en las que a diferencia de Santana (2009), previo a la resolución de estas, se incluyen algunos registros de representaciones a que promueve la visualización de GeoGebra. En este sentido, antes de la tarea 12, se proporciona el registro gráfico, geométrico y numérico, como se muestra en la figura 21.

A través de la información presentada en el software GeoGebra, se espera que los profesores de matemáticas en formación resuelvan la tarea 12, moviéndose en los registros: gráfico, lenguaje natural, tabular y numérico (que ésta facilita); al registro numérico (que tienen que realizar ellos) para completar la información que se pide (figura 21), Es decir, el objetivo de esta tarea es que, transiten de grados a radianes y relacionen estas medidas con la gráfica proporcionada.

Diseño Santana (2009)
Tarea 12



III) Considera la función $y = x + senx$. Con ayuda de la gráfica, encuentra los valores que faltan en la tabla siguiente.

$y = x + senx$		
Valor de x en grados	**Valor de x en radianes**	**Valor de**
	1 rad	
1°		

Rediseño en este trabajo
Tarea 12

Ponga atención en el ángulo formado en el círculo unitario, y en el eje "x" que representa los radianes (véase figura E).

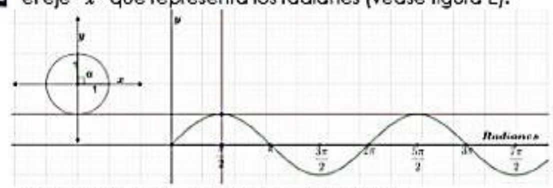
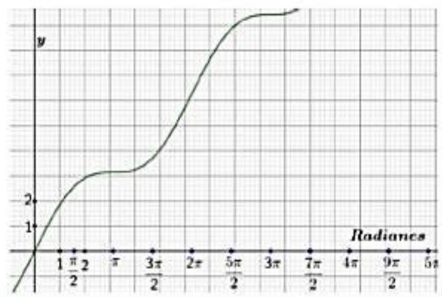


Figura E. Círculo unitario y función trigonométrica.

12) Considera la siguiente función y encuentra los valores que faltan en la tabla siguiente:



Valor de x en grados	Valor de x en radianes	Valor de y
	$1\,rad$	
1º		
	$\frac{\pi}{180}$	

Figura 21. Comparación de la tarea12

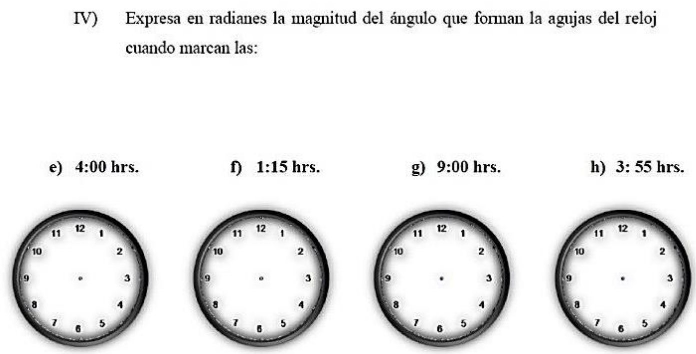
El extracto de la tarea 12 en la figura 21, muestra que, además de las diferencias ya mencionadas, se modificó la gráfica y se omite declarar la función que le corresponde, así también, se completa la tercera columna de la tabla, a fin de favorecer el objetivo planteado en la misma.

Como ya se mencionó, previo a la tarea 13, también se incluyen el uso de los registros de representaciones figural-icónico y el numérico, que promueve la visualización en GeoGebra, como se muestra en la figura 22.

Con relación a la tarea 13) el objetivo es que los profesores de matemáticas en formación transiten de grados a radianes el ángulo comprendido por las manecillas del reloj. Se espera que, se muevan entre los registros proporcionados por el GeoGebra; así como, en los que facilita el rediseño (figural-icónico y lenguaje natural, como se observa en la figura 22); al realizado por ellos (numérico):

Diseño Santana (2009)

tarea 13



Rediseño en este trabajo

Tarea 13

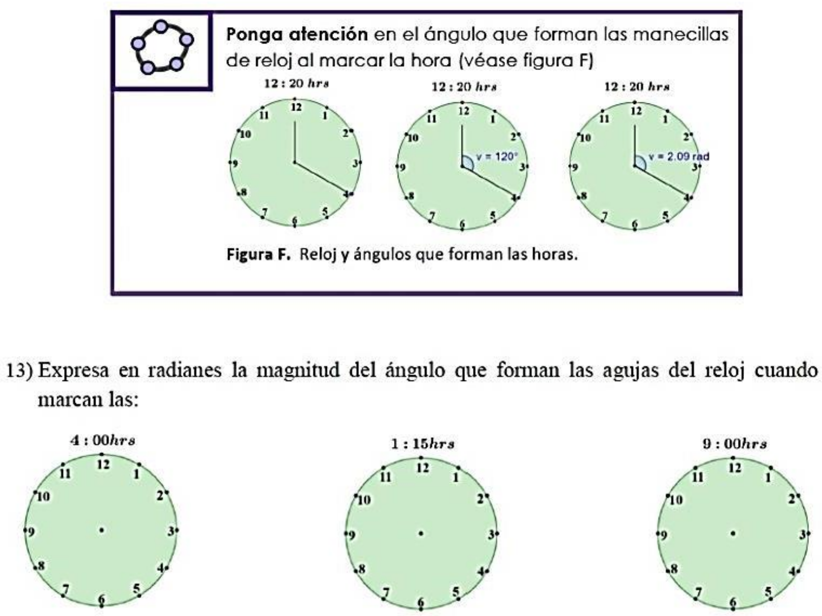


Figura 22. Comparación de la tarea 13

En la figura 22, además de las diferencias mencionadas, se observa el cambio de la presentación en el diseño, sin embargo la instrucción se conservó, puesto que, se considera adecuada para el objetivo planteado.

A continuación se muestra la tabla1, que presenta de manera sintética los registros de representación ya descritos en cada tarea:

Tareas	Registros de representaciones semióticas		
	Proporcionados en el rediseño con el GeoGebra	Proporcionados en las tareas del rediseño	Esperados en las respuestas de los profesores de matemáticas en formación
1	Geométrico, gráfico y numérico	Lenguaje natural y gráfico	Lenguaje natural
2	Geométrico, gráfico y numérico	Lenguaje natural y gráfico	Figural-icónico
3		Gráfico y lenguaje natural	Numérico
4	Geométrico, gráfico y numérico	Lenguaje natural y gráfico	Numérico
5		Lenguaje natural y figural-icónico	Numérico
6	Geométrico, gráfico y numérico	Lenguaje natural y figural-icónico	Lenguaje natural
7		Lenguaje natural y figural-icónico	Figural-icónico
8		Lenguaje natural	Numérico y lenguaje natural
9		Lenguaje natural	Numérico y algebraico
10		Numérico, lenguaje natural y gráfico	Numérico
11	Geométrico, gráfico y numérico	Lenguaje natural y gráfico	Numérico
12	Geométrico, gráfico y numérico	Gráfico, lenguaje natural, tabular y numérico	Numérico

13	Geométrico, gráfico y numérico	Figural-icónico y lenguaje natural	Numérico y figural-icónico

3.3 La experimentación para apoyar el aprendizaje

El rediseño se aplicó con nueve profesores de matemática en formación, que están cursando el sexto semestre de la licenciatura en matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero ubicada en Chilpancingo, Guerrero.

En cuanto a las características de los profesores de matemáticas en formación, podemos destacar que son participantes por disposición. Sus edades están comprendidas entre 20 y 24 años, 3 son mujeres y 6 son hombres. En adelante, para referirnos a ellos usaremos las siguientes simbologías:

- PF1
- PF2
- PF3
- PF4
- PF5
- PF6
- PF7
- PF8
- PF9

El experimento se llevó a cabo en tres sesiones durante el mes de mayo de 2019, dos de una hora y una sesión de una hora y cuarenta minutos, en las instalaciones de la institución educativa donde se encuentran estudiando.

3.4 Análisis retrospectivo

En lo que refiere a esta tercera y última fase de la metodología, se basa en las producciones escritas de los profesores de matemáticas en formación, así como las grabaciones de audio obtenidas durante el desarrollo de la experimentación.

El conjunto de evidencias fue analizado con respecto a los objetivos planteados en cada tarea, los cuales se describen en la fase dos de esta metodología, para determinar si el proceso de transición de grados a radianes se favoreció con el implemento del rediseño que se propone en este trabajo. Asimismo, se hizo un análisis descriptivo de sus producciones.

CAPÍTULO IV

4.1 Análisis retrospectivo

En este apartado se analizan las producciones escritas y verbales de los nueve profesores de matemáticas en formación al resolver las tareas propuestas del rediseño. Se discuten las tareas por bloque y se determina el grado de consecución de cada objetivo planteado. La simbología que se estará usando para describir los extractos de los diálogos que tuvieron lugar durante la intervención serán las siguientes:

Aplicadora = A

Los nueve profesores de matemáticas en formación = Todos

Resolución de las tareas de B-I

Como ya se mencionó, previo a que los profesores de matemáticas en formación contestaran la tarea 1, interpretaron y reflexionaron la información que se presentó sobre la medida de los ángulos a través del GeoGebra (ver Figura 23).

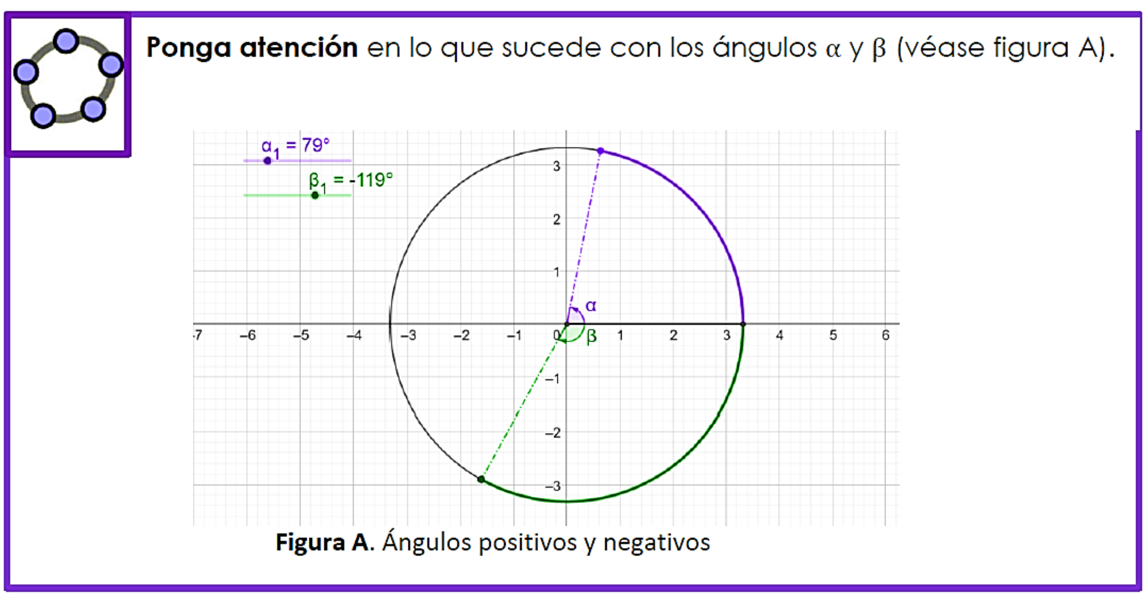


Figura 23. Creación propia, referente a la tarea aplicada utilizando el GeoGebra.

En la figura 23, se muestra un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño para recordar lo que se realizó previo a la tarea.

A continuación, se presenta un extracto de la grabación que da evidencia de que los profesores de matemáticas en formación lograron moverse en los registros proporcionados a través de la visualización del ambiente dinámico creado en el GeoGebra:

A: ¿Qué pasa con el ángulo cuando lo medimos en contra de las manecillas del reloj?

Todos: es positivo.

A: ¿Y si es a favor de las manecillas del reloj?

Todos: es negativo

Posteriormente, usando la información presentada en el ambiente dinámico, respondieron la tarea 1, que consistió en *estimar el valor de los ángulos que se representan en las circunferencias dadas y justificar las respuestas*, de ahí que, siete profesores de matemáticas en formación respondieron justificando el valor de la medida angular según la abertura y la dirección, moviéndose entre los registros representados en la tarea al registro del lenguaje natural (realizado por ellos), como se esperaba en los objetivos planteados (ver figura 24).

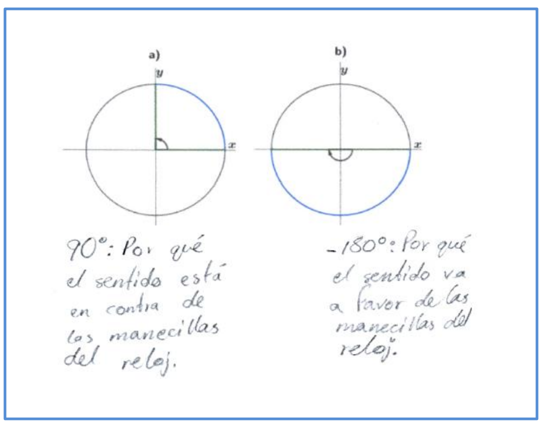


Figura 24. Producción escrita de PF6

En la figura 24, se observa que a través de los ejes del plano cartesiano en la circunferencia PF6 describió la medida angular señalada.

Además, los profesores de matemática en formación PF7 y PF8, superaron las expectativas de la tarea. Es decir, PF7 tomó los grados que tiene la circunferencia y la dividió según el ángulo que se solicitó (figura 25), moviéndose entre los registros proporcionados el GeoGebra y entre los que facilita la tarea al numérico y lenguaje natural (que él realizó).

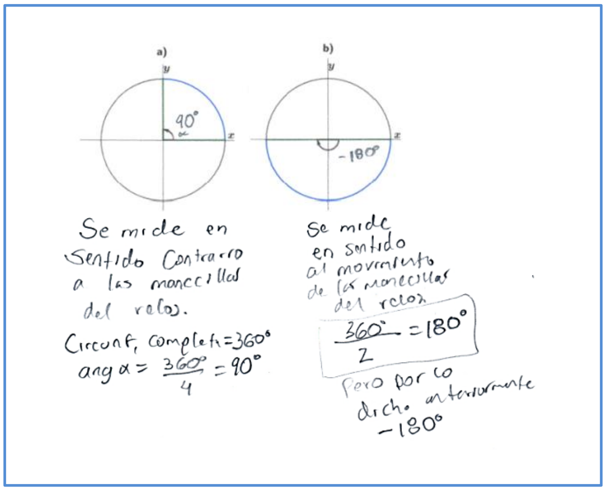


Figura 25. Producción escrita de PF7

En la figura 25 se observa que, PF7 describió la medida del ángulo señalado y realizó operaciones aritméticas de división, tomando en cuenta los grados que tiene la circunferencia completa.

Mientras que, PF8 justificó la medida del ángulo en grados solicitado a partir del valor de π. Las operaciones que realizó, son diferentes a las de PF7, pero también se movió entre los registro que facilita el software y entre los que proporciona la tarea al que el realizó (lenguaje natural y numérico, ver figura 26).

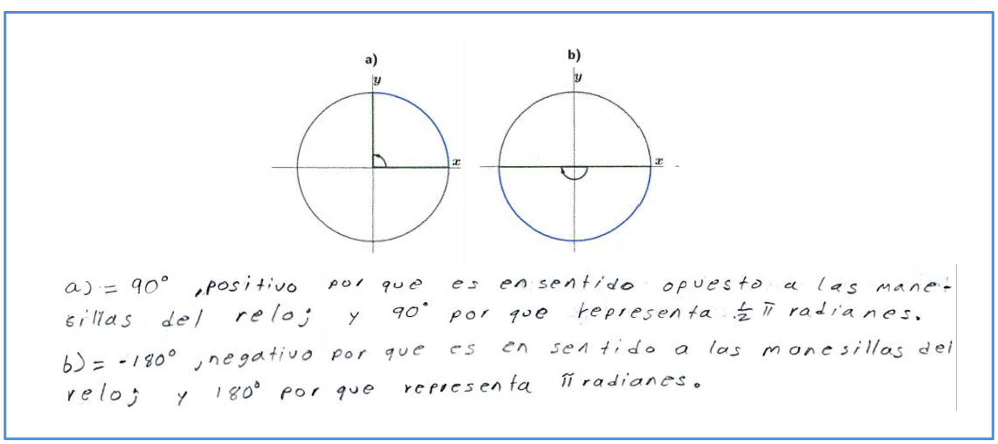


Figura 26. Producción escrita de PF8

Como se puede observar en la Figura 26, PF8 describió los resultados para establecer los valores del ángulo señalado en la circunferencia, tomando el valor de π y realizando operaciones de multiplicación.

Por lo que se refiere a la tarea 2, que radicó en *representar en las circunferencias dadas los ángulos indicados*, seis profesores de matemáticas en formación (PF1, PF2, PF3, PF6, PF8 Y PF9) localizaron de forma correcta el ángulo solicitado (ver figura 27), moviéndose entre los registros proporcionados en el GeoGebra y entre los de la tarea al registro figural-icónico (que realizaron). De esta manera, los objetivos de las tareas 1) y 2) se lograron.

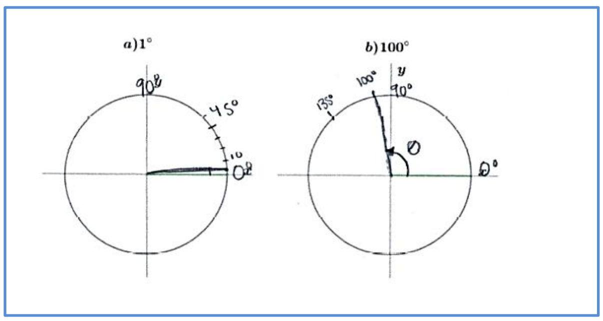


Figura 27. Producción escrita de PF1

En la Figura 27 se observa que, PF1 localizo un bosquejo del ángulo que solicitaba la actividad.

Además, los tres profesores de matemáticas en formación restantes (PF4, PF5y PF7), localizaron de forma correcta el ángulo solicitado (ver figura 28), moviéndose entre los registros proporcionados en el GeoGebra y entre los de la tarea al que ellos realizaron (registro figural-icónico y numérico). Superando el objetivo de la actividad.

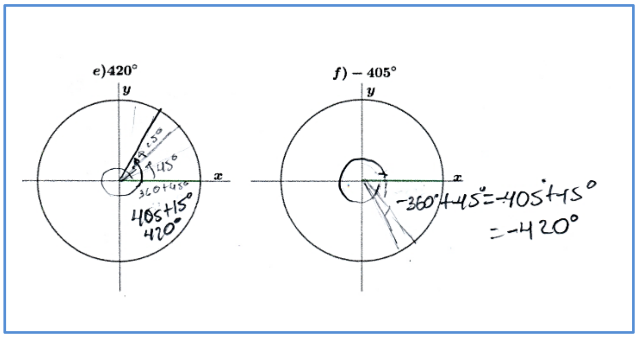


Figura 28. Producción de PF7

Como se observa en la figura 28, PF7 realizó operaciones de suma, resta y/o división, a partir de los cortes que forman los ejes en la circunferencia.

En cuanto a la tarea 3, consistió en *estimar el perímetro coloreado de las circunferencias que se les presentaron y justificar sus respuestas.* A continuación se presenta un extracto de la transcripción de la grabación que da evidencia de la forma en la que procedieron los profesores de matemáticas en formación para resolverla, moviéndose entre el registro de lenguaje natural al gráfico (que facilita la tarea).

Todos: No sabemos la medición del radio.

A: Pero sabemos cuál es el perímetro de una circunferencia.

Todos: 2π por radio.

A: Entonces ¿cómo podemos calcular la longitud que les están dando?

Todos: 2π por el radio, por $\frac{1}{4}$ (haciendo referencia al inciso a).

A: ¿Por qué?

Todos: Porque solo estamos utilizando una cuarta parte.

Al mismo tiempo, en las producciones escritas, observamos que los nueve profesores de matemáticas en formación resolvieron la tarea. De ahí que, seis se mueven entre los registros que facilita la tarea, al numérico (realizado por ellos, véase figura 29); de esta manera es como calcularon el perímetro señalado en las circunferencias, logrando el objetivo esperado.

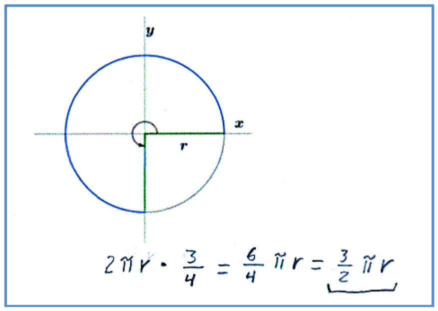


Figura 29. Producción de PF8.

Como se puede observar en la Figura 29, PF8 realizó operaciones de multiplicación y simplificación para encontrar el perímetro que está señalado.

Además, PF2, PF4 y PF6, describieron y calcularon el perímetro solicitado, moviéndose entre los registros proporcionados en la tarea al que ellos realizaron (numérico y el lenguaje natural), como se muestra en la figura 30, superando de esta manera, la expectativa de la tarea.

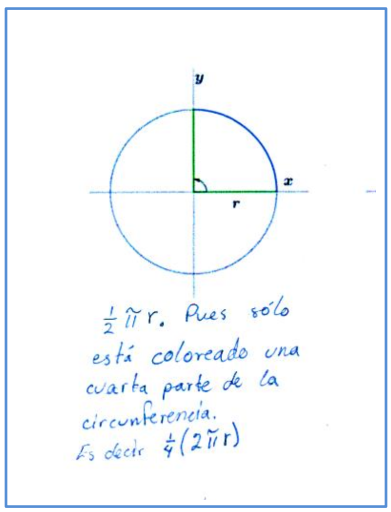


Figura 30. Producción escrita de PF6.

La figura 30 muestra que, PF6 realizó operaciones de multiplicación, simplificación y describió el motivo por el cual obtuvo ese perímetro.

Antes de que los profesores de matemáticas en formación contestaran la tarea 4, se les presentó visualmente información sobre la medida fija de ángulos en circunferencias con diferentes radios, utilizando los registros: numérico, gráfico y geométrico que el GeoGebra proporciona (Figura 31).

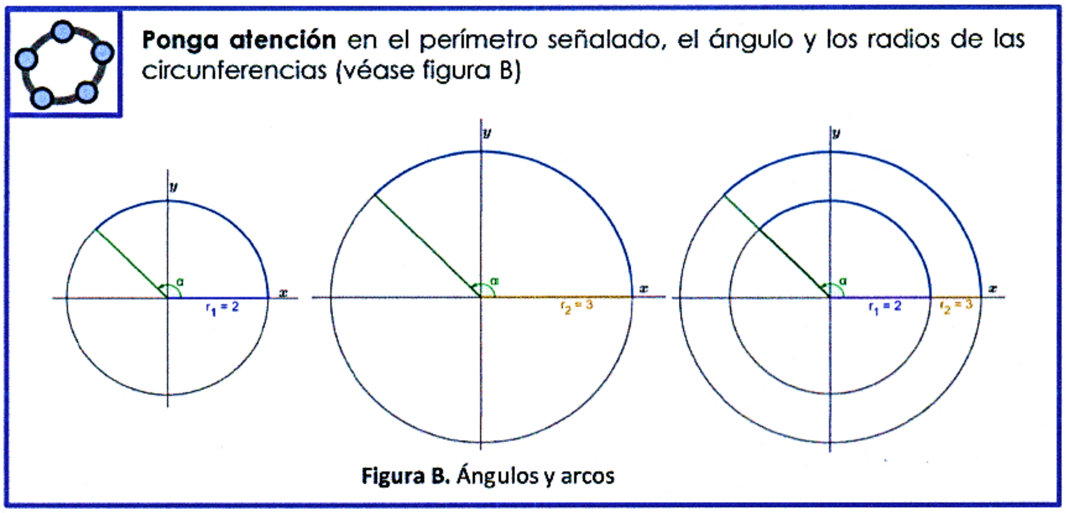


Figura 31. Producción propia de las instrucciones del rediseño aplicado que muestra lo que se presentó en el GeoGebra.

En la figura 31, se muestra un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño para recordar lo que se realizó previo a la tarea.

A continuación se presenta un extracto de la transcripción de la grabación que da evidencia del pensamiento y las ideas que desarrollaron los profesores de matemáticas en formación al moverse entre los registros proporcionados a través de la visualización del GeoGebra:

A: Si dejo el ángulo fijo y hago más grande la circunferencia ¿qué pasa con el arco que abarca el ángulo?

Todos: Va creciendo.

(La aplicadora aumenta el radio de la circunferencia en el software)

A: ¿Qué tienen en común las dos circunferencias?

Todos: El mismo ángulo.

En lo que concierne a la tarea 4, consistió en *calcular la razón de la longitud del arco señalado con el radio de las circunferencias que se presentaron por pares en el rediseño*, las cuales tenían el mismo ángulo y distintos radios. Usando la información que se proporcionó en el GeoGebra, siete profesores de matemáticas en formación (PF1, PF2, PF3, PF5. PF7, PF8 y PF9) se movieron entre los registros de representación que facilita la tarea al numérico (que ellos realizaron), logrando el objetivo de la tarea, como se muestra en la figura 32.

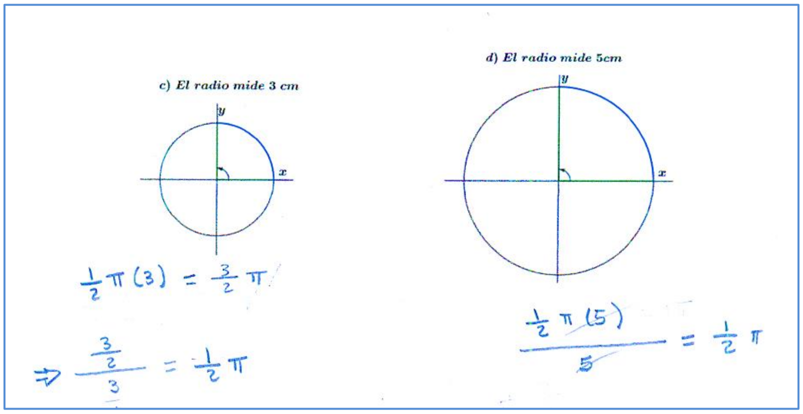


Figura 32. Producción escrita de PF3.

Como se puede observar en la figura 32, PF3 realizó operaciones de multiplicación y división para encontrar la razón del arco que está señalado en las circunferencias centradas en el origen obteniendo el mismo resultado en ambas.

Además PF6, logró calcular la razón de manera correcta, moviéndose entre los registros de representación que se facilitó en el GeoGebra y entre los que proporciona la tarea al realizado por él (registro numérico y lenguaje natural, ver figura 33), superando el objetivo de la tarea.

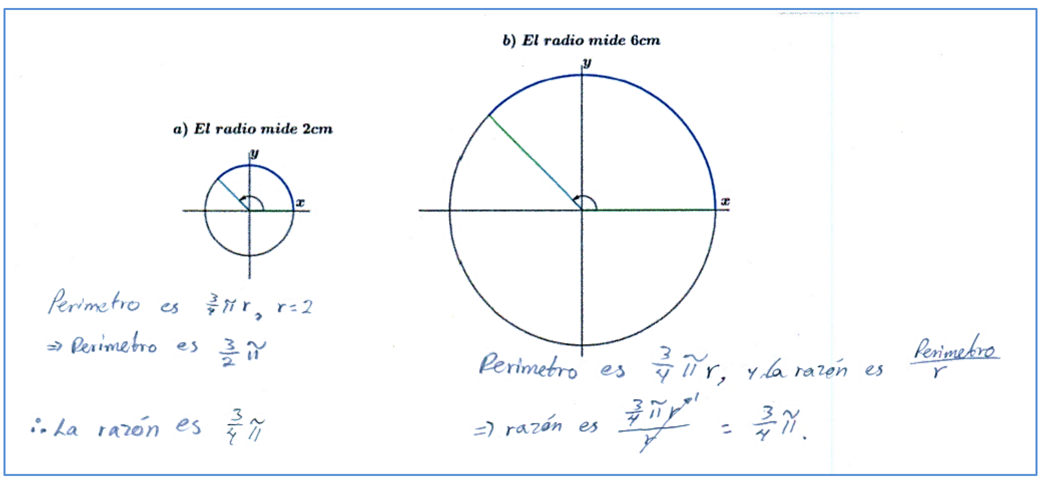


Figura 33. Producción escrita de PF6.

En la figura 33, se observa que PF6 describió las operaciones de cálculo que realizó de acuerdo con las características que observó en las circunferencias dadas.

Ahora bien, solamente PF4, declara lo que esperaba en el objetivo de la tarea, sin embargo, no logró moverse en ningún registro, por esta razón, se considera que no alcanzó el objetivo, como se muestra en la figura 34.

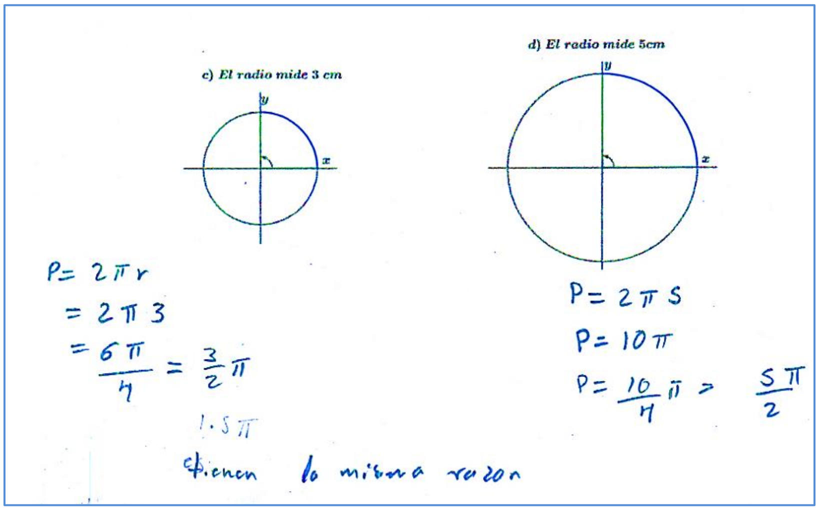


Figura 34. Producción escrita de PF4.

Como se observa en la figura 34, las operaciones que realizó PF4 no corresponden a lo señalado en la representación gráfica, pero declaró que ambas circunferencias tienen la misma razón.

Como se mencionó anteriormente, el primer apartado (B-I) tiene un objetivo, que se cumple una vez que los profesores de matemáticas en formación, resuelven consistentemente cada tarea planteada, con lo cual cumplen los propósitos planteados para cada una. Con ayuda de la visualización de los registros de representación semiótica en las tareas y en el GeoGebra, permitió que los profesores de matemáticas en formación alcanzaran el objetivo planteado e incluso en las tareas 1, 3 y 4 hubo quienes superaron la expectativa inicial. De manera general, se considera que los profesores de matemáticas en formación recordaron conceptos como el perímetro y arco de una circunferencia, además, del cálculo de la razón de la longitud de los arcos que se señalaron entre el radio de las circunferencias que se presentaron en el rediseño.

Resolución de las tareas de B-II

Con relación a la tarea 5 que consistió en *calcular la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio (generalizado), así como estimar el ángulo de la misma*, cinco profesores de matemáticas en formación calcularon dicha razón y el ángulo de la circunferencia, moviéndose entre los registros que proporciona la tarea al numérico (que ellos realizaron, ver Figura 35), alcanzando el objetivo esperado.

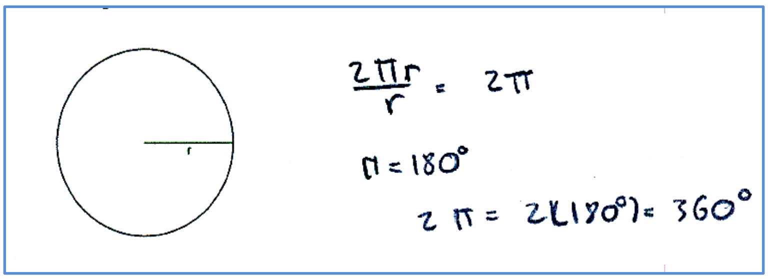


Figura 35. Producción escrita de PF5.

La figura 35 muestra que PF5 realizó operaciones de multiplicación y división, para encontrar el ángulo y la razón que pide la tarea, mediante de la circunferencia del rediseño, tomando en cuenta la relación de grados y radianes.

Además, PF6 se mueve entre los registros que facilita la tarea al que el realizó (numérico y lenguaje natural), superando el objetivo planteado (figura 36).

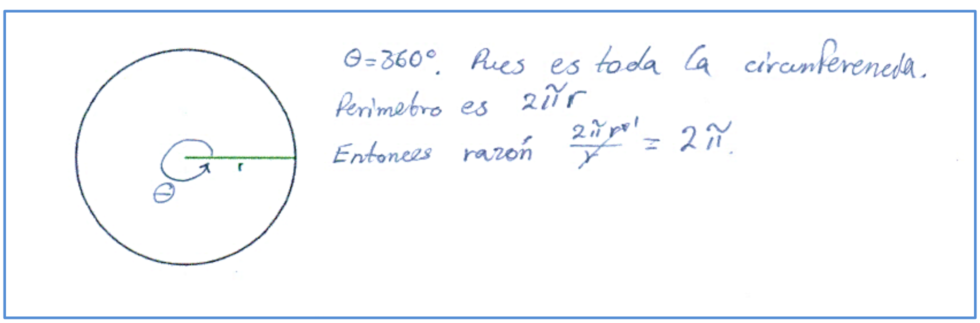


Figura 36. Producción escrita de PF6.

Como se puede observar en la figura 36, PF6 describió los elementos que observó en la circunferencia del rediseño y realizó una división para el cálculo de la razón que se indicó en la tarea.

En el caso de PF4 y PF8, lograron moverse entre los registros proporcionados en la tarea al numérico (realizado por ellos), pero, sólo calculan la razón. Es decir, les faltó el valor del ángulo de la circunferencia, como se muestra en la figura 37. En este sentido, se considera que no alcanzó el objetivo esperado.

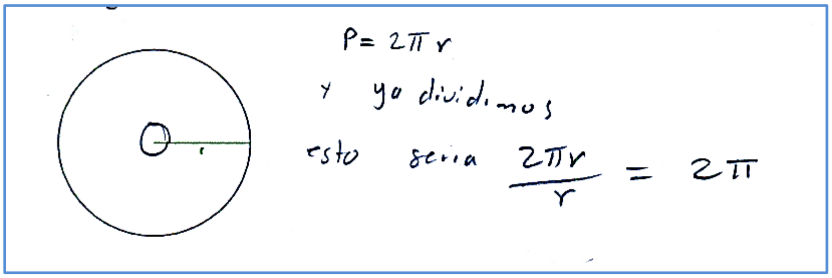


Figura 37. Producción escrita de PF4.

Como se observa en la Figura 37, PF4 realizó una división para encontrar la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio, por medio de la circunferencia que se presentó en el rediseño.

Asimismo, PF2 no logra moverse entre el registro del lenguaje natural (proporcionado por la tarea) al numérico (que él tenía que realizar, ver figura 38), puesto que, si bien escribió la medida del ángulo de la circunferencia (lenguaje natural), le faltó efectuar el cálculo de la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio (generalizado). Por lo tanto, no logró el objetivo esperado.

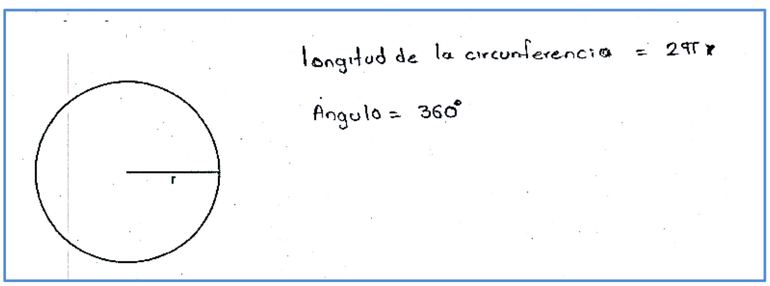


Figura 38. Producción escrita dePF2.

La figura 38 muestra que, PF2 tomó en cuenta la circunferencia que se presentó en el rediseño y describió lo que observó en ésta, pero le faltó usar el registro numérico para encontrar la razón que se pide en ésta tarea.

Antes de que los profesores de matemáticas en formación empezaran la tarea 6, se les presentó la visualización en el GeoGebra, facilitando el registro gráfico, numérico y geométrico, con la finalidad de representar y comunicar información sobre el número de veces que entra el radio en la circunferencia (ver figura 39).

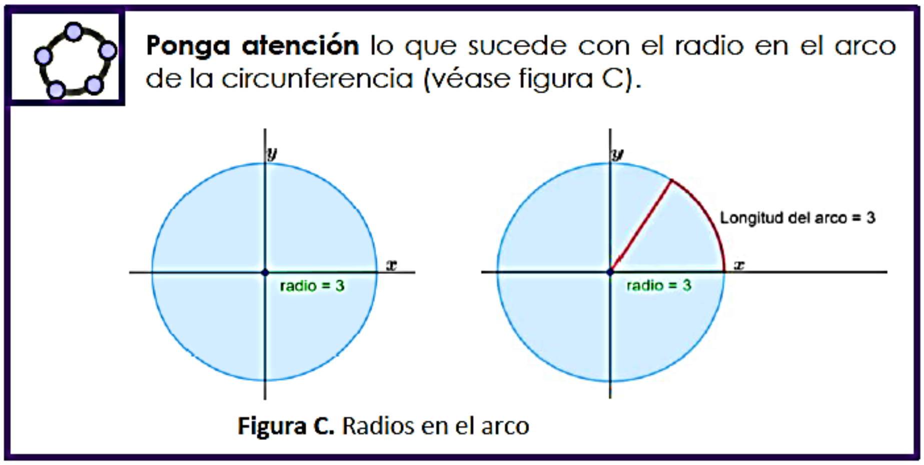


Figura 39. Producción propia, que hacen alusión a lo que se presentó con el GeoGebra.

En la figura 39, se muestra un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño para recordar lo que se realizó previo a la tarea.

En seguida se presenta un extracto de la grabación que da evidencia del pensamiento y las ideas que desarrollaron los profesores de matemáticas en formación al moverse entre los registros proporcionados a través de la visualización en el GeoGebra:

A: ¿Cuántos radios entraron en la circunferencia?

Todos: 6 y un poquito.

A: ¿Qué pasara si aumento el radio?

(La aplicadora aumenta el radio de la circunferencia en el software)

A: ¿Cuántas veces cabe el radio en la circunferencia?

Todos: Igual.

Posteriormente, usando la información que se proporcionó en el GeoGebra, los profesores de matemáticas en formación respondieron la tarea 6, que pide *estimar el* *número de veces que el radio entra en la circunferencia en términos de π.* Las producciones escritas muestran que ocho de los nueve profesores de matemáticas en formación respondieron la tarea. Por ejemplo, PF8 declaró en términos de π lo indicado, moviéndose entre los registros que proporcionó el GeoGebra y entre los que facilita la tarea al que él realizó (lenguaje natural y algebraico, ver figura 40), superando el objetivo.

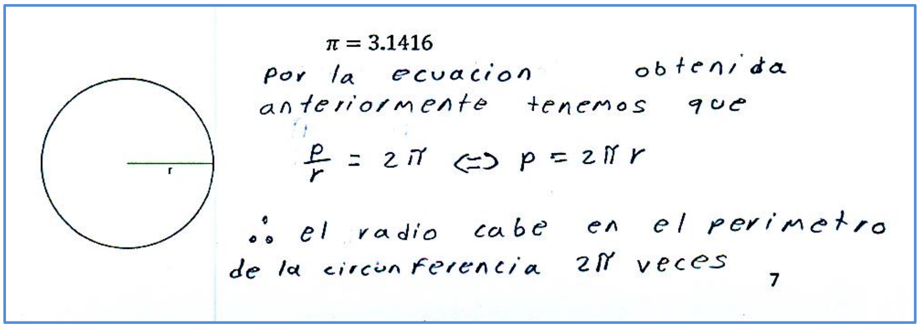


Figura 40. Producción escrita de PF8.

En la figura 40 se observa que, PF8 describió lo que observó en el GeoGebra y en la circunferencia del rediseño. Además, estableció de forma generalizada la razón mencionada.

PF4 y PF9 usaron el valor de π para estimar el número de veces que entra el radio en la circunferencia, moviéndose entre los registros de representación que facilitó el GeoGebra y entre los que proporciona la tarea, a los realizados por ellos (lenguaje natural y numérico, véase figura 41), superando también el objetivo.

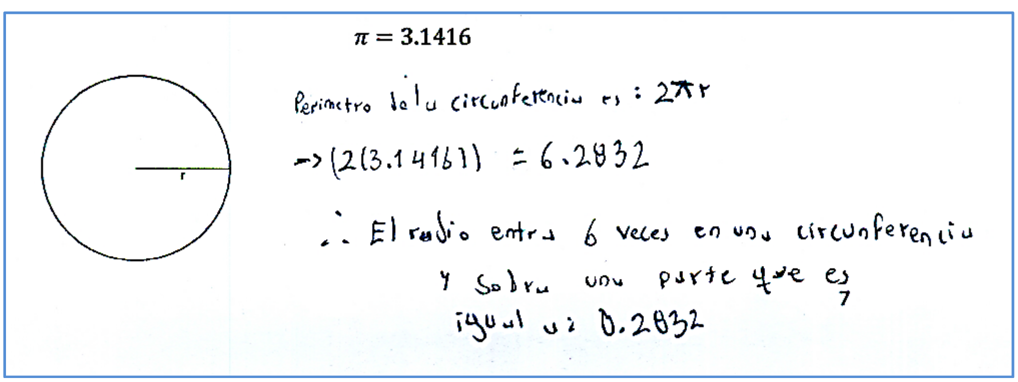


Figura 41. Producción escrita de PF9.

Como se puede observar en la figura 41, PF9 describió los elementos que observó en el GeoGebra y en la circunferencia del rediseño, además realizó operaciones aritméticas con el valor de π, es decir 3.1416.

Asimismo, PF2 declara en términos de π el número de veces que entra el radio en la circunferencia, moviéndose entre los registros que proporciona el GeoGebra y entre los que facilita la tarea, al registro de lenguaje natural y figural-icónico (que él realiza, ver figura 42). Superando el objetivo de ésta.

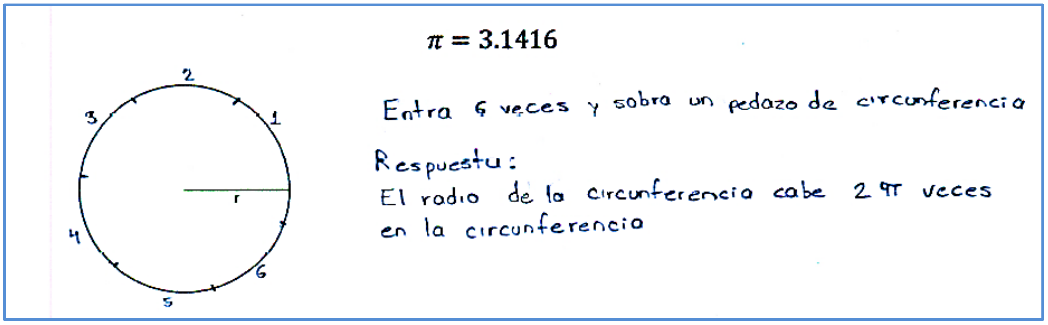


Figura 42. Producción escrita de PF2.

La figura 42 muestra que, PF2 marcó los radios que entran en la circunferencia, de acuerdo con lo que observó en el GeoGebra y describió el resultado.

Ahora bien, PF3 y PF6 declaran en términos de π el número de veces que entra el radio en la circunferencia, moviéndose entre los registros que facilita el GeoGebra y entre los que la tarea proporciona, al registro de lenguaje natural (realizado por ellos, ver figura 43), logrando el objetivo.

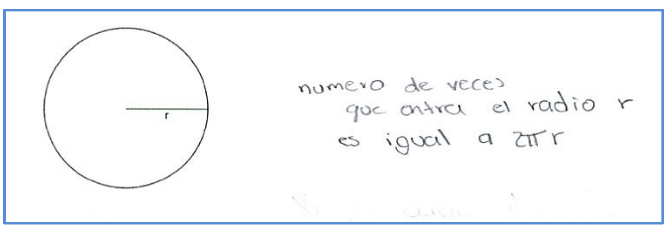


Figura 43. Producción escrita de PF3.

Como se observa en la figura 43, PF3 describe el número de veces que entra el radio en la circunferencia.

Y en el caso de PF1 y PF7, en lugar de utilizar el registro del lenguaje natural, utilizó el numérico, expresando el resultado tanto en términos de π y usando su valor, sin embargo, el objetivo de la tarea se logró, como se muestra en la figura 44.

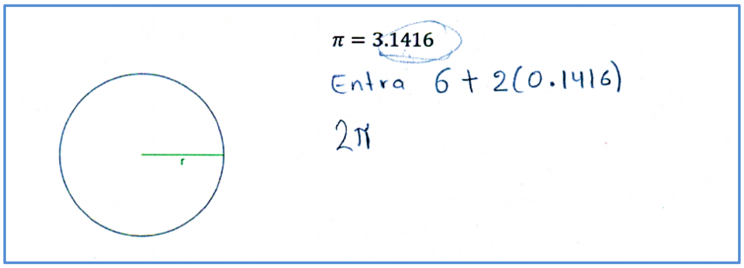


Figura 44. Producción escrita de PF1.

Como se observa en la figura 44, PF1 sumó la parte decimal del valor de π, y declaró la respuesta en términos del mismo, mediante lo que observó en el GeoGebra y en la circunferencia del rediseño.

Por el contrario, PF5, no logró moverse entre los registro proporcionados por el GeoGebra, ni entre los de la tarea y por ende no logró el objetivo de la tarea (ver figura 45).

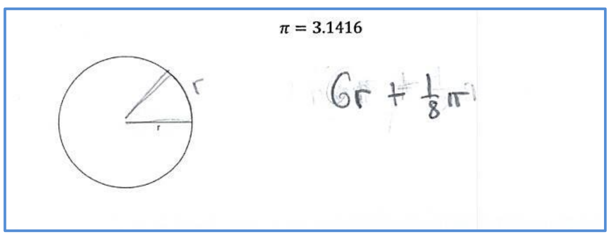


Figura 45. Producción de PF5

En la figura 45 se observa que, PF5 realiza una operación aritmética que no representa lo que pide la tarea.

La tarea 7 consistió en *representar el ángulo α para el cual el arco que se forma sea igual al radio dado en la circunferencia*. PF5, PF7, PF8 y PF9 lo representaron moviéndose entre los registros que proporciona la tarea al figural-icónico (que ellos realizaron), logrando el objetivo esperado (figura 46).

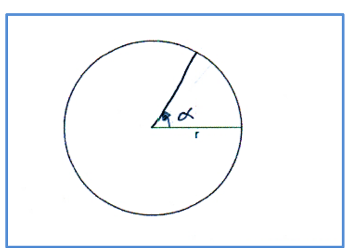


Figura 46. Producción escrita de PF8.

La Figura 46 muestra que, PF8 realizó un bosquejo del ángulo α que forma el arco de igual medida que el radio.

Además, PF1 y PF3 se movieron entre los registros que proporciona la tarea, al que ellos realizaron (figural-icónico y lenguaje natural), superando el objetivo de ésta, como se muestra en la figura 47.

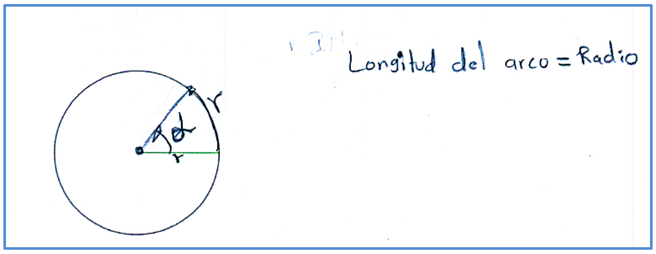


Figura 47. Producción escrita de PF1

Como se puede observar en a figura 47, PF1 describió la característica del arco formado por el ángulo α.

Así también, PF2 y PF4 superaron el objetivo, moviéndose entre los registros facilitados en la tarea, al registro figural-icónico y numérico (realizados por ellos, ver figura 48).

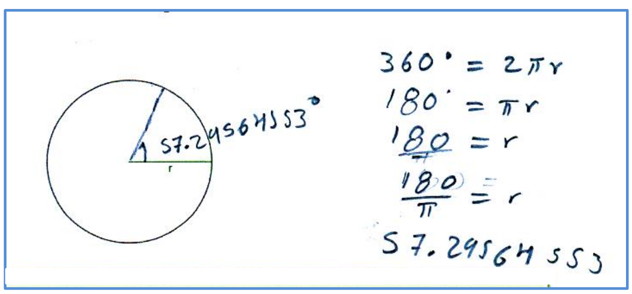


Figura 48. Producción escrita de PF4.

En la figura 48 se observa que, PF4 realizó operaciones aritméticas relacionando lo que mide una circunferencia completa en grados y radianes, tomando en cuenta el dibujo de la circunferencia del rediseño.

Asimismo, PF6 se movió entre los registros que la tarea proporciona, al figural-icónico, lenguaje natural y numérico (que él realizó), superando así también, el objetivo planteado, como se muestra en la figura 49.

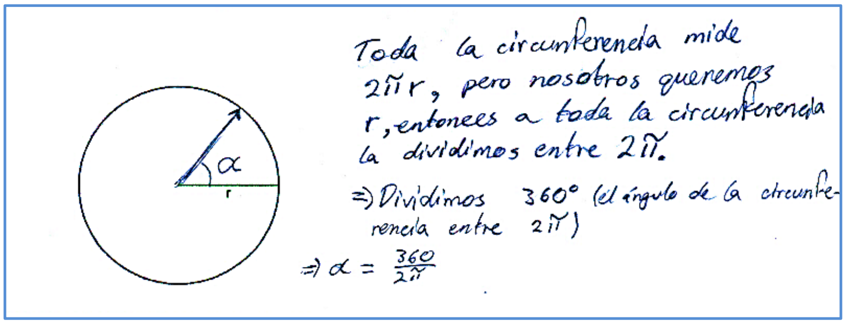


Figura 49. Producciones escritas de PF6.

La figura 49 muestra que, PF6 describió los resultados para establecer el ángulo α que bosquejó, guiándose de la circunferencia del rediseño.

A continuación, se presenta un extracto transcrito de la grabación que da evidencia del pensamiento que desarrollaron los profesores de matemáticas en formación, al moverse en los registros de representaciones semióticas en esta tarea:

A: ¿Qué tiene en particular el ángulo que se trazó en la tarea 7?

Todos: Que el arco es igual al radio.

La tarea 8 consistió en *representar cuantos radianes tiene una circunferencia en términos de* π. Cinco profesores de matemáticas en formación (PF2, PF3, PF4, PF5 y PF6) respondieron lo que se indica, moviéndose entre el registro que ésta facilita a los realizados por ellos (numérico y lenguaje natural, véase figura 50), logrando el objetivo esperado.

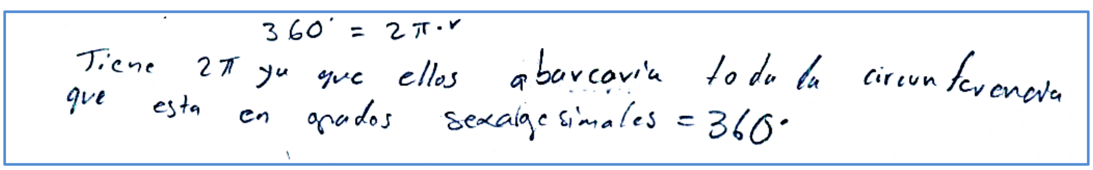


Figura 50. Producción de PF6.

La figura 50 muestra que, PF6 explicó detalladamente la respuesta que escribió en términos de π, relacionando la medida angular grados y radianes.

En el caso de PF1, PF7, PF8 y PF9 solo usan el registro numérico para dar respuesta a la tarea como se muestra en la figura 51. Por consiguiente no lograron el objetivo de la ésta.

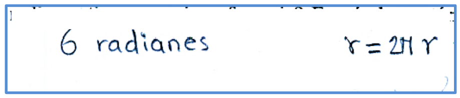


Figura 51. Producción escrita de PF1.

Como se puede observar en la figura 51, PF1 escribió sólo numéricamente la respuesta de la tarea, pero le faltó justificar su respuesta.

La tarea 9 consistió en *expresar en términos de grados un radián.* Los nueve profesores de matemáticas en formación respondieron, moviéndose entre el registro proporcionado por la ésta, al algebraico (que ellos realizaron), obteniendo que $1\,rad = 57.29°$ (figura 52), alcanzando el objetivo planteado.

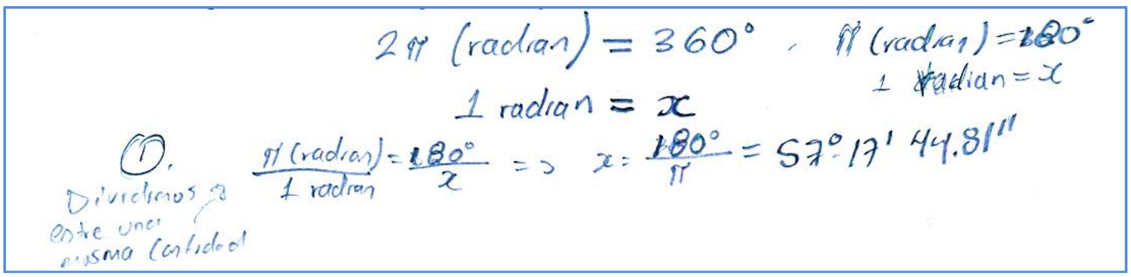


Figura 51. Producción escrita de PF7.

En la figura 52 se observa que, PF7 realizó operaciones aritméticas para encontrar el valor de un radián, estableciendo ecuaciones de una incógnita.

Por lo que refiere a la tarea 10, la intención es *representar las cantidades que se dan, sobre el eje x (radianes),* los nueve profesores de matemáticas en formación se movieron entre los registros que ésta proporciona (lenguaje natural, numérico y gráfico) al numérico (que ellos realizaron), logrando el objetivo planteado (ver figura 53).

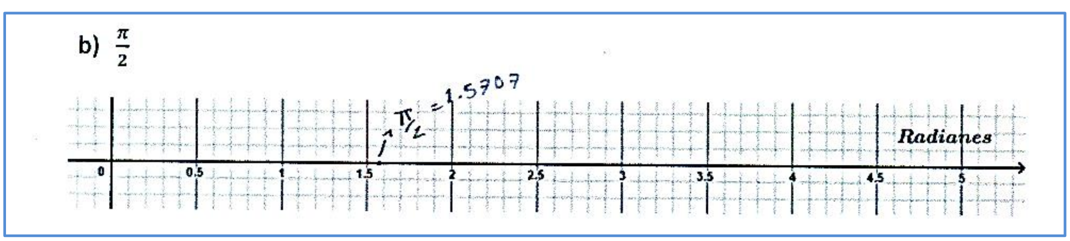


Figura 53. Producción escrita de PF9.

Como se observa en la figura 53, PF9 marcó en la gráfica el valor en radianes que le corresponde a la cantidad señalada, en este caso $\frac{\pi}{2}$.

Antes de que los profesores de matemáticas en formación contestaran la tarea 11, se les presentó el registro gráfico, numérico y geométrico en el GeoGebra, con la finalidad de comunicar información sobre la longitud del arco en el círculo unitario y los radianes (figura 54).

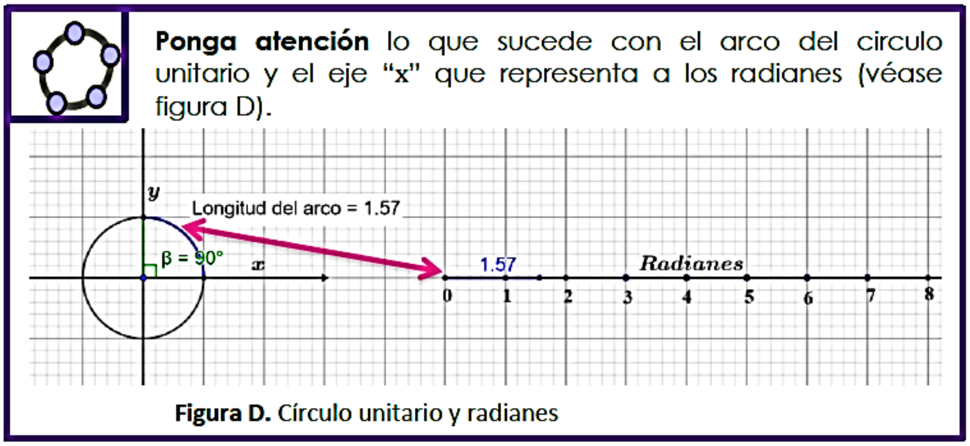


Figura 54. Producción propia que hace referencia a lo que se presentó en el GeoGebra.

En la figura 54, se muestra un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño para que recuerden lo que se realizó previo a la tarea.

La tarea 11 consistió en r*epresentar el ángulo señalado en las circunferencias en el eje* x. Ocho profesores (PF1, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, PF8 y PF9), lograron el objetivo moviéndose entre los registros de representaciones que proporcionó el GeoGebra y entre los que facilitó la tarea al registro numérico (realizado por ellos), como se muestra en la figura 55.

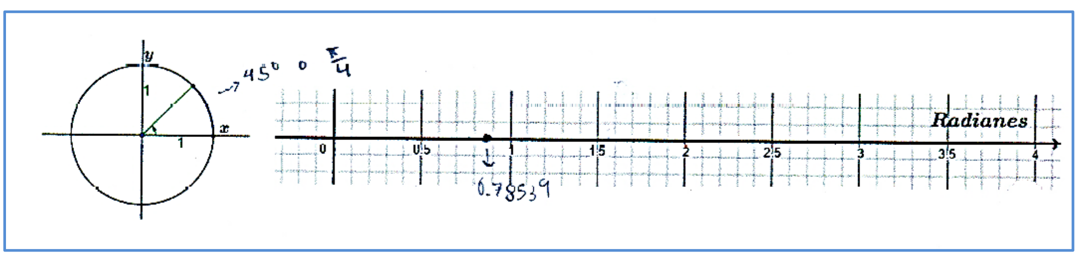


Figura 55. Producción escrita de PF9.

La figura 55, muestra que PF8 estableció el valor numérico aproximado que le corresponde al ángulo señalado en el círculo en la tarea y lo marcó en la recta de los radianes.

Además, PF7 se movió entre los registros de representación proporcionados por el GeoGebra y en los que la tarea facilitó, al numérico y algebraico (que él realizó), superando de esta manera el objetivo planteado (ver figura 56).

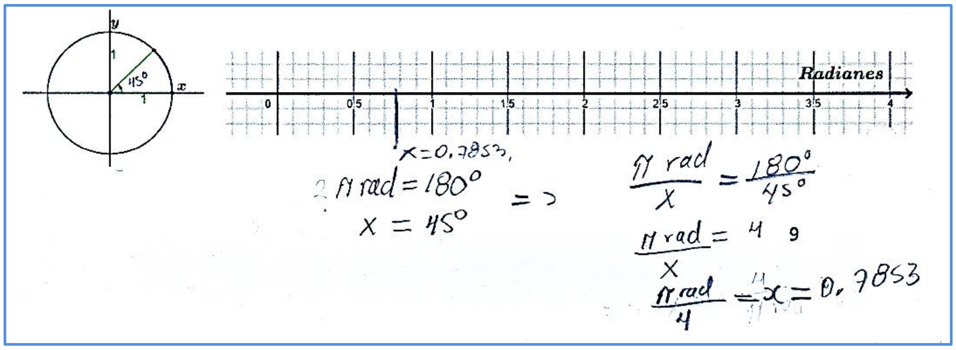


Figura 56. Producción escrita de PF7.

Como se puede observar en la figura 56, PF7 estableció ecuaciones de una incógnita para obtener en radianes el valor del ángulo que se muestra en el rediseño y señalarlo en la gráfica del mismo.

Puesto que, se lograron los objetivos planteados en cada una de las tareas de este bloque y en algunos casos se superaron, se asume que los profesores de matemáticas en formación, por medio de los registros de representaciones, identificaron la relación que existe entre las unidades de medidas angulares y radianes, favoreciendo de esta manera la resolución de las tareas del siguiente bloque.

Resolución de tareas del B-III

Antes de empezar la tarea 12, se les presentaron los registros: numérico, gráfico y geométrico, a través de la visualización en el GeoGebra, con la finalidad de representar y comunicar información, sobre el ángulo formado en el círculo unitario y los radianes en una función trigonométrica (figura 57).

Ponga atención en el ángulo formado en el círculo unitario, y en el eje "x" que representa los radianes (véase figura E).

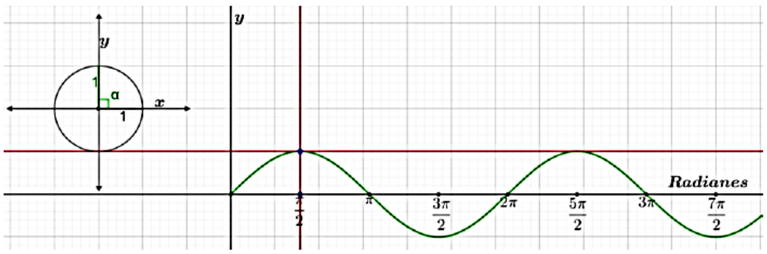
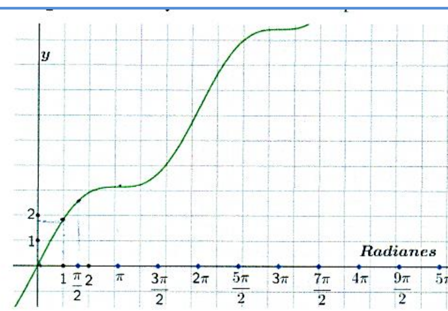


Figura E. Círculo unitario y función trigonométrica.

Figura 57. Producción propia que hace referencia a lo que se presentó en el GeoGebra.

La figura 57, muestra un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño para que recuerden lo que se realizó previo a la tarea.

La tarea 12 consistió en *encontrar los valores que faltan en la tabla que se les presentó (valor de x en grados, valor de x, en radianes y valor de y), mediante una gráfica (sin mencionar la función).* Seis profesores de matemáticas en formación (PF2, PF4, PF5, PF6, PF8 y PF9), se movieron entre los registros proporcionados en el GeoGebra y entre los que la tarea proporciona, al numérico (que ellos realizaron), logrando el objetivo, tal como se muestra en la figura 58.

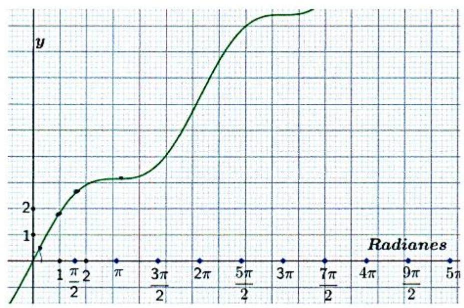


Valor de x en grados	Valor de x en radianes	Valor de y
57° 17' 44.91''	1 *rad*	y ≃ 1.8...
1º	0.017 rad	y ≃ 0.01...
1°	$\frac{\pi}{180}$	y ≃ 0.01...
90°	$\frac{\pi}{2}$	y ≃ 2.6...
90º	$\pi/2$	y ≃ 2.6...
180º	π	y ≃ 3.2...
180°	π	y ≃ 3.2...

Figura 58. Producción escrita de PF9

En la figura 58 se observa que, PF9 localizó en la gráfica los datos dados en la tabla para encontrar los valores numéricos de x faltantes.

Además, PF1, PF3 y PF7 superaron el objetivo de la tarea al moverse entre los registros que proporcionó el GeoGebra y entre los que facilitó la tarea, al numérico y algebraico (realizados por ellos), superando el objetivo planteado (ver figura 59).



$\pi r = 180°$

$x = 1°$

$x \cdot 180° = \pi r\, 1$

$x = \frac{\pi}{180°} r = 0.017r$

$\pi r = 180°$

$\frac{\pi}{2} r = x$

$x\, \pi r = 180°(\frac{\pi}{2}) r$

$x\pi = 180°(\frac{\pi}{2})$

$x = \frac{180°(\frac{\pi}{2})}{\pi}$

$= 90°$

Valor de x en grados	Valor de x en radianes	Valor de y
57° ≈	$1\, rad$	1.9 ≈
1º	0.017	0.4 ≈
1°	$\frac{\pi}{180}$	0.4 ≈
90°	$\frac{\pi}{2}$	2.9 ≈
90º	$\frac{\pi}{2}$	2.9 ≈
180º	π	3.2 ≈
180°	π	3.2 ≈

Figura 59. Producción escrita de PF3

Como se observa en la figura 59, PF3 estableció ecuaciones de una incógnita para encontrar los valores numéricos faltantes en la tabla y localizó dichos valores en la gráfica que se presentó en la tarea.

Antes de que los profesores de matemáticas en formación contestaran la tarea 13, se presentó la visualización de los registros gráfico, numérico y geométrico en el GeoGebra, con la finalidad de representar y comunicar información sobre los ángulos formados con las manecillas del reloj (Figura 60).

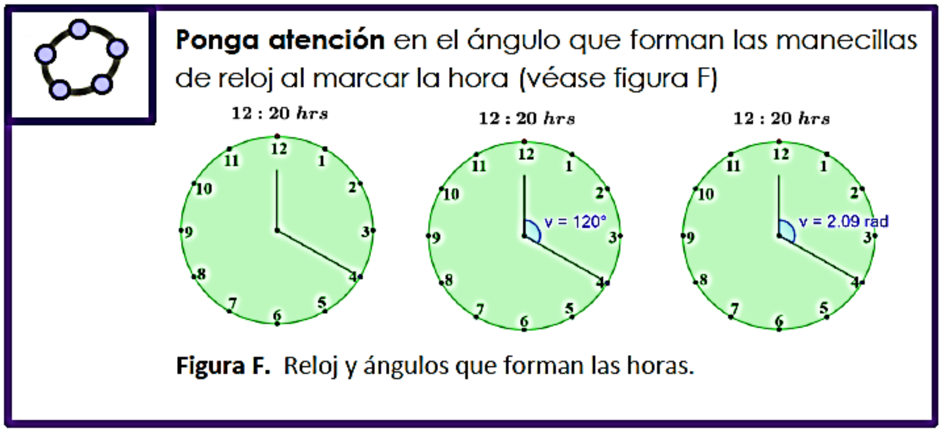


Figura 60. Producción propia, que hace referencia a lo presentado en el GeoGebra.

En la figura 60, se observa un extracto de lo que se presentó en el GeoGebra. Se consideró contemplarlo en el rediseño que recordaran lo que se realizó previo a la tarea.

Con relación a la tarea 13, ésta consistió en *expresar en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando marcan las horas indicadas*. PF2, PF4, PF5, PF8 y PF9 contestaron la tarea moviéndose entre los registros de representación que se proporcionaron en el GeoGebra, así como, entre los que proporciona la tarea, al numérico y figural-icónico (que ellos realizaron, ver figura 61), logrando el objetivo.

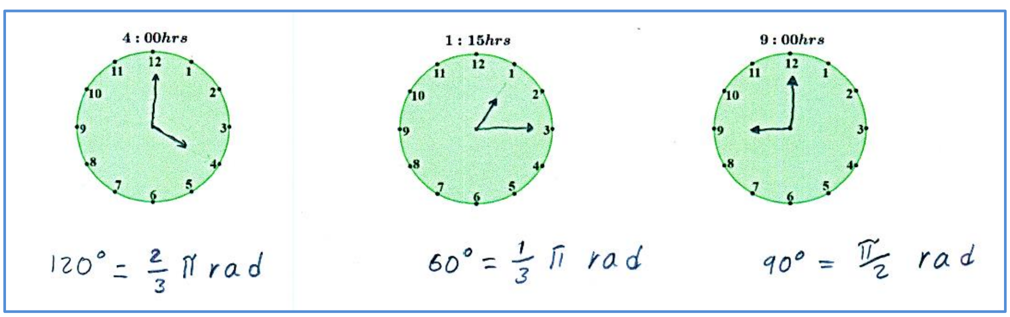


Figura 61. Producción escrita de PF9.

La figura 61 muestra que PF9 localizó y determinó el ángulo que se formó con las manecillas de la hora señalada en el reloj del rediseño, y con ello encontró la equivalencia del éste, en radianes.

Además, PF1, PF6 y PF7 superaron el objetivo al moverse entre los registros proporcionados en el GeoGebra y entre los que facilita la tarea, a los realizados por ellos (figural-icónico, numérico y algebraico), como se muestra en la figura 62.

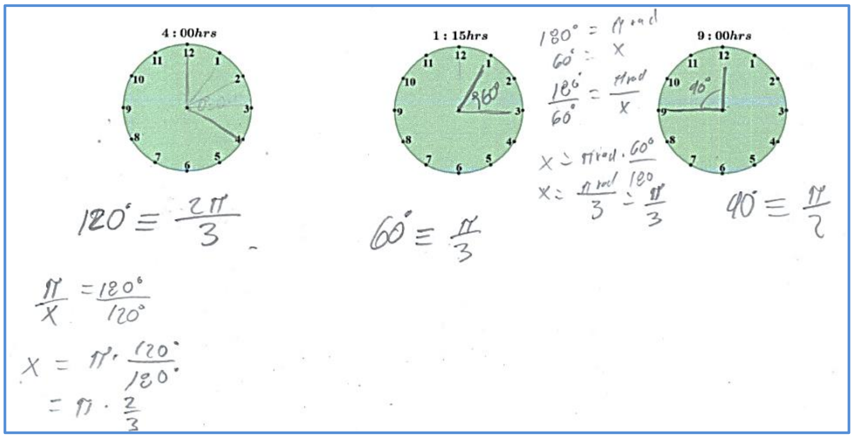


Figura 62. Producción escrita de PF6.

Como se puede observar en la figura 62, PF6 localizó el ángulo formado en el reloj por las manecillas en la hora señalada y estableció ecuaciones de una incógnita para encontrar el valor numérico asociado al mismo.

Por el contrario, PF3 no logro moverse en ningún registro. Sólo usó el registro numérico, pero no logró el objetivo esperado, como se muestra en la figura 63.

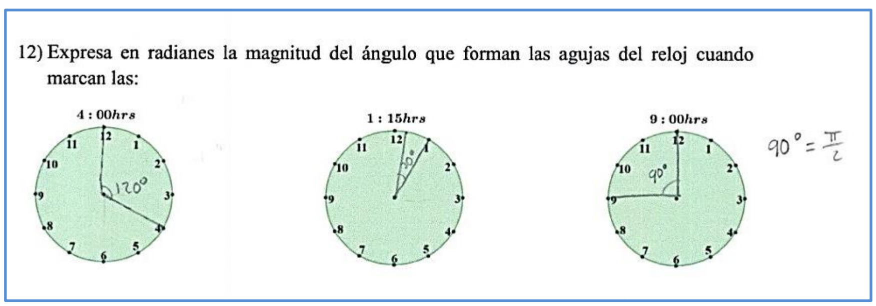


Figura 63. Producción escrita de PF3

En la Figura 63, se observa que, en el último reloj si hace la equivalencia de grados a radianes y en los demás solo señala el grado. Por consiguiente, se considera que no logró el objetivo de la tarea.

Considerando que ocho de los nueve profesores de matemáticas en formación lograron el objetivo de las tareas de este bloque, pasando de un registro de representación semiótica a otro, incluso en algunos casos lo superaron, se asume que, lograron transitar de grados a radianes y relacionaron la equivalencia de ambas medidas angulares, como se plantea en este bloque.

CAPÍTULO V

5.1 Discusión

Las funciones trigonométricas involucran la relación entre los círculos, las medidas angulares y el arco que subtiende el ángulo (Moore y LaForest, 2014). El rediseño de esta investigación contempla los grados, los radianes, el círculo y la razón de la longitud de arcos entre el radio, a través de representaciones semióticas.

Con respecto a los registros de representaciones semióticas existen dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión (Duval 2006a). La mayor parte de las tareas desarrolladas durante la experimentación se centró en la conversión en el momento en que los profesores de matemáticas en formación cambiaron de un registro a otro permaneciendo en los objetos que denotaban. Sólo en la tarea 9 desarrollaron el tratamiento, al realizar el cálculo para expresar en términos de grados un radián, a través de ecuaciones con una incógnita, permaneciendo en el mismo *registro algebraico.* La transformación de representaciones semióticas, en especial la conversión, se evidenció durante el análisis de las producciones.

En el rediseño aplicado en esta investigación, se contempla los registros de representaciones semióticas que describe Macías (2014), y se considera que los profesores de matemáticas en formación se mueven de un registro a otro, sin importar que algunos son proporcionados, debido a que, se debe comprender el objeto que se está trabajando para poderlo identificar o expresar en otros diferentes (Duval, 2006a).

En este sentido, la visualización se reconoce como componente clave del razonamiento (involucrando lo conceptual) y la resolución de problemas (Arcavi, 2003). Por ello, que en esta investigación se contempla la visualización de imágenes estáticas en papel (al igual que Santana, 2009) y a través del GeoGebra (incorporación en el rediseño), para la resolución de las tareas.

Asimismo, el GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en especial de la trigonometría, es una herramienta poderosa y útil (Zengin, Furkan y Kutluca, 2012). Además, la implementación de las tecnologías en el aula permite construir, combinar, reconstruir, examinar y manipular imágenes, así también, observar cambios que se efectúan en las relaciones representadas (Noss, Healy y Hoyles, 1997). Es decir, en la visualización de las imágenes estáticas en papel que contiene el rediseño de esta investigación, no se observa ningún cambio efectuado en los círculos geométricos, es por ello, que se incluye ésta a través del GeoGebra previo a las tareas: 1, 4, 6, 11, 12, 13; con el fin de favorecer el proceso de transición grados-radianes en los profesores de matemáticas en formación.

Tuna (2013) señala en su investigación que, de 93 profesores de matemáticas en formación, el 90% definieron mal el radián y el 10% los grados. Sin embargo, el análisis de las producciones de esta investigación arrojo que 8 de los 9 profesores de matemáticas en formación realizaron de manera correcta el proceso de transición grados radianes y alcanzaron los objetivos de las tareas del rediseño.

Por otra parte, Santana (2009) reportó dificultades con el cálculo del perímetro de los arcos, en el concepto de ángulo, en la razón y con la relación entre grados y radianes. En esta investigación, al rediseño se le incorporó la visualización con el GeoGebra, y el análisis de las producciones de profesores de matemáticas en formación arroja que dichas dificultades no se presentaron. Esto es, en la tarea 3 calcularon el perímetro del círculo; en la tarea 1 y 2 trabajaron bien con los ángulos positivos, negativos y mayores a $360°$; y en las tareas 4 y 5 calcularon la razón de la longitud de arco entre el radio.

Además, previo a las tareas 1, 4, 6, 11, 12, 13, se incluyó el uso de los registros geométricos y gráficos que promueve la visualización en GeoGebra, puesto que, existen beneficios de usar la tecnología para la enseñanza y aprendizaje. Por mencionar algunos: favorece la resolución de problemas (Barahona, Barrera, Vaca e Hidalgo, 2015) y la comprensión de conceptos (Gamboa, 2007). Sin embargo, respecto al proceso de transición grados-radianes, las propuestas de enseñanza-aprendizaje que se reportaron anteriormente, no la contemplan.

Cabe mencionar que, los resultados que se obtuvieron en esta investigación pueden variar al cambiar de contexto, al modificar el rediseño o simplemente al cambiar los participantes, puesto que, no siempre lo que se pretende que hagan (los participantes) sucede (Gamboa, 2007). Además, deben ser capaz (los participantes) de cuestionar y refutar los resultados obtenidos al trabajar con la tecnología (en este caso en el GeoGebra), con base en sus conocimientos matemáticos (Gamboa, 2007).

En este sentido, consideramos que la incorporación de la visualización a través del GeoGebra en el rediseño de este trabajo, favoreció el proceso de transición grados-radianes en los profesores de matemáticas en formación

5.2 Conclusiones

En el planteamiento del problema se cuestionó por una parte el poco dominio que tenían algunos profesores de matemáticas en formación en torno a las funciones trigonométricas, en particular en el proceso de transición de grados a radianes, y por otro lado, las rupturas conceptuales que presentan los profesores en los mismos conceptos (Martínez, 2012 y Tuna, 2013).

En este sentido, surge la interrogante ¿cómo favorecer el proceso de transición grados-radianes en profesores de matemáticas en formación? Consideramos que la repuesta es: Incorporando la visualización a través del GeoGebra al diseño de Santana (2009). Puesto que, por un lado, el análisis de las producciones de esta investigación muestra que los objetivos planteados en las tareas, fueron alcanzados por arriba de la mitad de los profesores de matemáticas en formación; y por otro lado, permite apreciar cambios efectuados en los registros gráficos, geométricos y numéricos (que proporciona el GeoGebra); logrando una mejor comprensión de los objetos matemáticos que se estén trabajando.

En cuanto a la metodología Investigación Basada en Diseño, nos permitió, realizar el rediseño de la propuesta de Santana (2009). Éste, se compone de 13 tareas, de las cuales 6 contempla el uso del GeoGebra, para ayudar a visualizar lo que en imágenes estáticas no se percibe. En el análisis de estas, se observó que los profesores de matemáticas en formación se movieron en diversas representaciones semióticas, es decir, en las realizadas por ellos, en las que se proporcionan (en tareas o en el GeoGebra) y en ambas. Esto, indica que comprendieron el objeto matemático. En este sentido, cumplimos con el objetivo que establece dicha metodología, es decir, aportamos una propuesta para la enseñanza-aprendizaje del proceso de transición grados-radianes.

A continuación, en la tabla 2, se presentan el resumen por actividad. En este sentido, los objetivos superados están en cuadros color rosa, donde se describe el o los registros en que los profesores de matemáticas en formación se movieron aparte de los que se tenían contemplados. Los objetivos no logrados, están de color naranja. Y en los cuadros verdes, se describe el registro que éstos usaron, diferente al que se esperaba, pero logrando el objetivo planteado en la actividad. Para mejor organización se utilizara la siguiente simbología:

Para los registros de representaciones semióticas:

- Registro de Lenguaje Natural (**RLN**)
- Registro Numérico (**RN**)
- Registro Figural-Icónico (**RFI**)
- Registro Tabular (**RT**)
- Registro Algebraico (**RA**)
- Registro Geométrico (**RGe**)
- Registro Gráfico (**RG**)
- Registro Proporcionado por el Software (**RPS**)
- Registro Proporcionado por la Tarea (**RPT**)
- Registro Esperado por los Profesores de Matemáticas en Formación (**REPF**)

Para los objetivos:

- Objetivo Logrado (**L**)
- Objetivo Superado (**S**)

- Objetivo No Logrado (**NL**)

TAREAS Y REGISTROS DE REPRESENTACIONES PROPORCIONADOS Y ESPERADOS	PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1 **RPS, RPT Y REPF (RLN)**	L	L	L	L	L	L	S RN	S RN	L
2 **RPS, RPT Y REPF (RFI)**	L	L	L	S (RN)	S (RN)	L	S (RN)	L	L
3 **RPT Y REPF (RN)**	L	S (RLN)	L	S (RLN)	L	S (RLN)	L	L	L
4 **RPS, RPT Y REPF (RN)**	L	L	L	NL	L	S (RLN)	L	L	L
5 **RPT Y REPF (RN)**	L	NL	L	NL	L	S (RLN)	L	NL	L
6 **RPS, RPT Y REPF (RLN)**	L (RN)	S (RFI)	L	S (RN)	NL	L	L (RN)	S (RA)	S (RN)
7 **RPT Y REPF (RFI)**	S (RLN)	S (RN)	S (RLN)	S (RN)	L	S (RLN Y RN)	L	L	L
8 **RPT Y REPF (RN Y RLN)**	NL	L	L	L	L	L	NL	NL	NL
9 **RPT Y REPF (RA)**	L	L	L	L	L	L	L	L	L
10 **RPT Y REPF (RN)**	L	L	L	L	L	L	L	L	L

11 RPS, RPT Y REPF (RN)	L	L	L	L	L	L	S (RA)	L	L
12 RPS, RPT Y REPF (RN)	S (RFI)	L	S (RFI)	L	L	L	S (RFI)	L	L
13 RPS, RPT Y REPF (RN Y RF-I)	S (RA)	L	NL	L	L	S (RA)	S (RA)	L	L

Como se puede observar en la tabla 2, fueron pocos profesores de matemáticas en formación que no lograron el objetivo en ciertas actividades, sin embargo, en actividades posteriores si lo alcanzaron, a excepción de PF3. Por consiguiente se considera que con este rediseño se favorece el proceso de transición grados radianes.

En términos generales, los profesores de matemáticas en formación desarrollaron ideas interpretando los registros de representaciones semióticas, estáticos y en movimiento, que se presentaron en el rediseño, logrando relacionar las medidas angulares entre sí.

5.3 Limitaciones y futuras investigaciones

Se espera que este rediseño facilite la tarea de los profesores de matemáticas en servicio en el proceso de transición grados-radianes y se pueda minimizar las dificultades reportadas por la literatura cuando los estudiantes realizan dicho proceso. Se asume en este trabajo que, comprender la relación que existe entre las medidas angulares puede generar una enseñanza de calidad en las funciones trigonométricas en los alumnos.

Asimismo, si el profesor en servicio lo considera, podría aplicar este rediseño a los alumnos o una adaptación del mismo según la competencia a desarrollar en sus estudiantes. Resultados positivos permitirían minimizar en los alumnos las dificultades reportadas por las investigaciones en el campo de la trigonometría.

Finalmente, se cree que el rediseño de este trabajo podría encontrar como limitante si en el contexto escolar no se cuenta con la tecnología requerida (es decir, equipos de cómputo con el software disponible), o bien si el profesor o los alumnos presentan dificultades en su manejo.

Referencias

Acuña, C., y Trujillo, M. (1986). *Programa nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas: Trigonometría* (2a ed.). México, DF: CIEA del IPN

Amiel, T., y Reeves, T. C. (2008). Design-Based Research and Educational Technology: Rethinking Technology and the Research Agenda. *Educational Technology & Society, 11* (4), 29–40.

Andrade, O. (2015). *Diseño de una propuesta de aula para enseñar razones trigonométricas en el grado décimo de la institución educativa presbítero Bernardo Montoya Giraldo del Municipio de Copacabana Antioquia.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/49554/1/11706629.2015.pdf.pdf

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241

Ascheri, M., Pizarro, R., Astudillo, G., Garcia, P., y Culla E. (2014). Software educativo en línea para la enseñanza y el aprendizaje de temas de Cálculo Numérico. *Matemática, educación e internet, 20*(2), 1-28.

Badia, A., Chumpitaz, L., Vargas, J., y Suárez, G. (2016). La percepción de la utilidad de la tecnología conforma su uso para enseñar y aprender. *Revista Electronica de Investigación Educativa, 18*(3), 95-105. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/810

Bakker, A., y Eerde, D. (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education.* doi: 10.1007/978-94-017-9181-6_16

Barabash, M. (2016). Angle concept: a high school and tertiary longitudinal perspective to minimize obstacles. *Teaching Mathematics and Its Applications, 36*(1), 31-55. doi.org/10.1093/teamat/hrw008

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., e Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Ravista Tecnológica ESPOL, 28*(5), 121-132.

Beltrán, M., y Montiel, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(3), 255-286.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on teaching trigonometry. *The Mathematics Teacers, 104*(2), 106-112. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/20876798

Casas, L., y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las ciencias, 23*(2), 201-216

Castañeda, A., González, J. C., y Mendo-Ostos, L. (2017). Libros de Matemáticas para primer grado de secundaria en México: problemas y estrategias de solución. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(4), 97-111. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.4.1173

Chih-Hsien, H. (2013). Engineering students' visual thinking of the concept of definite integral. *Global Journal of Engineering Education, 15*(2), 111-117

Díaz, L., Rodríguez, J., y Lingán, S. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones, 6*(2), 217-251. http://dx.doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251

Díaz, M., Salgado, G., y Díaz, V. (2010). La transición: Grados-radianes-reales. Un obstáculo didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74*, 29-37. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/3543/1/D%C3%ADaz2010LaNumeros74.pdf

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 9(1), 143-168

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 266-297. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 263-274.

Fernández, M., y Caballero, A. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20*(1), 201-2017. http://dx.doi.org/10.6018/reifop.20.1.229641

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matmática, 2*(3), 11-44.

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L., y Balles, H. (noviembre, 2016). Uso de GeoGebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica. Trabajo presentado en la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra, Uruguay.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2, 5*(9), 27-57.

Maldonado, E., Rodríguez F., y Santana., S. (2009). Una propuesta para abordar la transición grados radianes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 693-701. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/33251620.pdf

Marcelo, C. (1989). *Introducción a la formación del profesorado: Teoría y Métodos***.** Utrera, Sevilla: Universidad de Sevilla.

Marcelo, C. (1995). Formación del profesorado para el cambio educativo. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/256194929

Martínez, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(1), 35-62. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33523151003

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Méndez, C., Martínez, G., y Maldonado, E. (2007). Sobre la construcción escolar de la función trigonométrica: La transición grados-radianes-reales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 573-578. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5384/1/M%C3%A9ndezSobreALME2007.pdf

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor. *Bolema, 50*(28), 1193-1216.

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 225-245. doi 10.1007/s10649-012-9450-6

Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Moore, K., y LaForest, K. (2014). The Circle Approach to Trigonometry. *The Mathematics Teacher, 107*(8), 616-623. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.107.8.0616

Niles, N. (1991). *Trigonometría plana*. México: Limusa.

Noss, R., Healy, L., y Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(2), 203-233

Ortega, T., y Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95 - 117.

Paixao, F., y Cachapuz, A. (1999). La enseñanza de las ciencias y la formación de profesores de enseñanza primaria para la reforma curricular: de la teoría a la práctica. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 69-77.

Rotaeche, R., y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática, 29*(1), 171-199. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/405/40550442008.pdf

Riemann, P. (2011). Methodological Choice and Design: Design-Based Research. En L. Markauskaite, P. Freebody y J. Irwin (Eds.), *Methodological Choice and Design: Scholarship, Policy and Practice in Social and Educational Research* (pp. 37-50). Estados Unidos de Norteamérica: Springer.

Rubio, L., Prieto, J., y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *Revista Internacional de Investigación e Innovación Educativa, 5,* 90-111. Recuperado de https://www.upo.es/revistas/index.php/IJERI/article/view/1586

Salas, R. (2018). Uso del servicio en la nube GeoGebra durante el proceso enseñanza-aprendizaje sobre las matemáticas. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *8*(6), 1-30. http://dx.doi.org/10.23913/ride.v8i16.331

Santana, S. (2009). *Una propuesta para abordar el proceso de transición grados-radianes* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Secretaria de Educación Pública. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico,* Recuperado de http://www.cobaqroo.edu.mx/Docentes/Didac/desarrollo_del_pensamiento_trigonometrico.pdf

Schmitz, A., y Eichler, A. (2016). *Teachers' individual beliefs about the roles of visualization in classroom*. Trabajo presentado en el Ninth Congress of European Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. Resumen recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287355

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/scholz_2014.pdf

Scholz, O., y Montiel, G. (2018). Transición del contexto geométrico al variacional, el caso de la Trigonometría. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *3*(1), 2-24. Recuperado de http://revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/2/7

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *9*(5), 1-30.

Tuna, A. (2013). A Conceptual Analysis of the Knowledge of Prospective Mathematics Teachers about Degree and Radian. *World Journal of Education*, *3*(4), 1-9

UAGro. (2010). *Plan de estudios por competencias 2010. Matemáticas III*. Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de http://www.cgru.uagro.mx/programas_estudio_2010/tercer_semestre/1.-MATEMATICAS_III.pdf

Weber, K. (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research. *Mathematics Teacher*, *102*(2), 144-150.

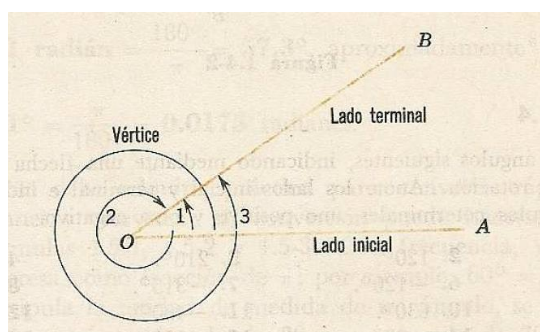
Zengin, Y., Furkan, H., y Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 31*, 183-187. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.12.038

Anexos

1. Análisis de tres libros de texto

El primer libro que se analizó es el de Niles, N. (1991), Trigonometría plana, el cual expone el tema de la siguiente manera:

DEFINICIÒN	
GRADOS	**RADIANES**
“Un ángulo es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo, desde una posición inicial hasta una posición terminal. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo” (p. 26). En la **figura 1** se muestra la representación de ángulo. “Un *grado* es la magnitud de un ángulo cuyo vértice está en el centro de un circulo y cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a $1/360$ de la circunferencia” (p.27)	“Un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia de longitud igual al radio” (p. 28). En la **Figura 2** se muestra la representación de radián.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	
Grados	
Registro Numérico	**Registro Geométrico**
“No hay límite para la magnitud de un ángulo. Si una semirrecta efectúa una revolución completa en sentido levógiro, habrá generado ***un ángulo* de 360°**. Dos revoluciones completas en el mismo sentido generan ***un ángulo* de 720”** (p.27) “Un ángulo de un grado puede ser dividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de *minuto*; cada minuto puede a su vez ser subdividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de *segundo”* (p.27).	 **Figura1.** Representación del ángulo (p.27)

<table>
<tr><th colspan="2">REGISTROS DE REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><th colspan="2">Radianes</th></tr>
<tr><th>Registro Numérico</th><th>Registro Geométrico</th></tr>
<tr><td>“En geometría se demuestra que los ángulos en el centro son proporcionales a los arcos que interceptan.

$$\frac{\measuredangle AOC}{\measuredangle AOB} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{AB}}$$
$\measuredangle AOC = 180°, \measuredangle AOB = 1\,radian$ y ABC es una semicircunferencia cuyo longitud es πr.

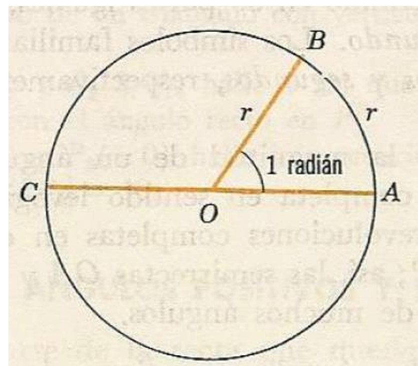
$$\frac{180°}{1\,radian} = \frac{\pi r}{r}$$
$$\boldsymbol{\pi\ radianes = 180°}$$
$$\boldsymbol{1\ radian = \frac{180°}{\pi} = 57°}$$
$$\boldsymbol{1°} = \frac{\pi}{180°} = \boldsymbol{0.0175}\,radianes”$$
(p.28-29)</td><td>

Figura 2. Representación de un radián (p.28)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">PROCEDIMIENTOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Grados</th></tr>
<tr><th>Algorítmicos</th><th>Heurísticos</th></tr>
<tr><td>Trace ángulos θ de $30°, -45\ y\ 390°$; designe por ϕ un ángulo coterminal del ángulo θ. (Véase figura 3).

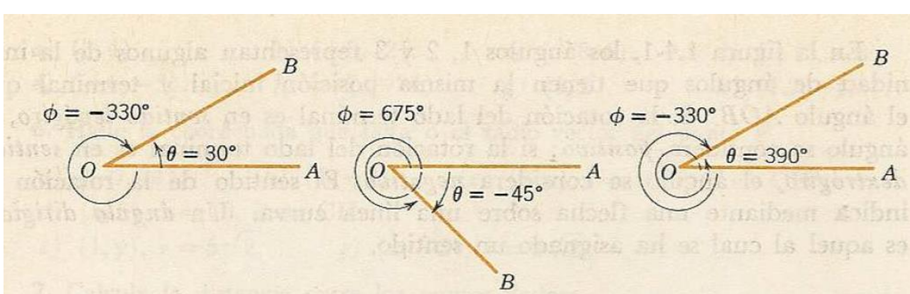
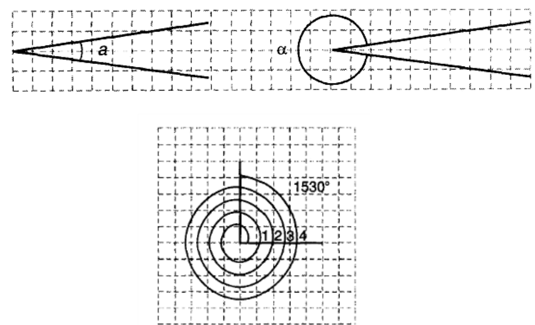


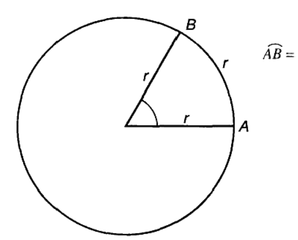
Figura 3. Representación de los ángulos señalados (p. 28)</td><td>No tiene.</td></tr>
</table>

PROCEDIMIENTOS	
Radianes	
Algorítmicos	**Heurísticos**
Usando $\pi = 3.1416$ se tiene $\mathbf{1\ radi}\text{á}\mathbf{n} = \frac{180°}{\pi} = \mathbf{57.3}°$ aproximadamente $\mathbf{1}° = \frac{\pi}{180°} = \mathbf{0.0175}\ radianes$	No tiene.

El segundo libro es de Acevedo, V., Valadez, M. y Vargas, E. (1999). Geometría y Trigonometría: Matemáticas con aplicaciones 2, el cual expone el tema de la siguiente manera:

DEFINICIÒN	
GRADOS	**RADIANES**
"Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto llamado vértice y las semirrectas que se forman se llaman lados" (p.41). En la **figura 4** se muestra la representación del ángulo. El sistema sexagesimal es el más conocido y mediante él se divide una rotación completa en 360 partes iguales, cada una de las cuales se llama *grado.*	"un *radián* es el ángulo central de la circunferencia, cuyo arco determinado por los lados del ángulo tiene una longitud igual al radio de la circunferencia" (p. 47). En la **Figura 5** se muestra la representación de un radián.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	
Grados	
Registro Numérico	**Registro Geométrico**
“Los ángulos de más de $360°$ nos permiten conocer el número de rotaciones completas que sufre un cuerpo” (p. 43). “1 Grado sexagesimal = $\frac{1}{360}$ parte de una rotación completa. Cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos*; de esta manera: 1 Minuto sexagesimal = $\frac{1}{60}$ de grado. El minuto se divide también en 60 partes iguales y éstas se denotan como *segundos:* 1 Segundo sexagesimal = $\frac{1}{60}$ de *minuto”* (p.44).	 **Figura 4.** Representación de ángulo (p.42)

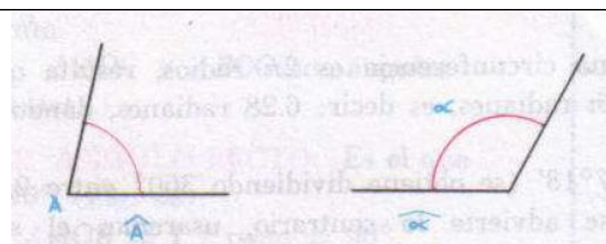
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	
Radianes	
Registro Numérico	**Registro Geométrico**
“El perímetro del círculo está determinado por $p = 2\pi r$ (2π veces el radio); por lo tanto, en una rotación completa el radio cabe 2π veces y 1 radián = $\frac{1}{2\pi}$ parte de una rotación completa” (p. 47) “Para convertir radianes en grados sexagesimales y viceversa, utilizamos "la regla de tres"; si una rotación completa en el sistema sexagesimal equivale a $360°$ y en el sistema circular a 2π radianes, esto quiere decir que: $360°$ sexagesimales equivalen a 2π radianes” (p.48)	 **Figura 5.** Representación de un radián (p. 47)

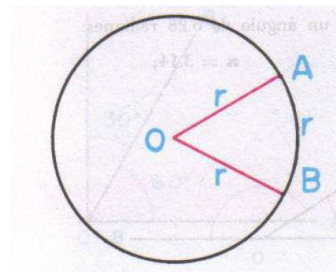
PROCEDIMIENTOS	
Grados	
Algorítmicos	**Heurísticos**
“Dos ángulos expresados en grados completos se suman o restan como si se sumaran o restaran dos números enteros; por ejemplo: $35° + 15° = 50°$ y $85° - 60° = 25°$” (p. 44).	“El brazo de una grúa de precisión tiene un ángulo de $35°\,25'\,46''$ respecto a la horizontal; después aumenta su inclinación un ángulo de $18°\,45'\,32''$. ¿Con qué ángulo respecto a la horizontal se encuentra el brazo de la grúa? Para resolver el problema se suman $35°\,25'\,46''$ y $18°\,45'\,32''$” (p. 44).

PROCEDIMIENTOS	
Radianes	
Algorítmicos	**Heurísticos**
“Convertir $\frac{\pi}{4}$ rad a grados sexagesimales. $\begin{array}{ccc} 360° & \underline{\qquad\qquad} & 2\pi\, rad \\ X° & \underline{\qquad\qquad} & \frac{\pi}{4}\, rad \end{array}$ $X = \dfrac{360\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi}$ $X = \dfrac{360}{8}$ $X = 45°$” (p. 48)	No tiene.

Un tercer libro es el de Baldor, J. (2004), Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría, el cual expone la transición grados-radianes de la siguiente manera:

DEFINICIÒN	
GRADOS	**RADIANES**
“Un *ángulo* es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados” (p.24). En la **figura 6** se representan algunos ángulos. Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad. Desde muy antiguo se ha tomado como unidad el grado sexagesimal que se obtiene así: Se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales y un ángulo de un grado es el que tiene el vértice en el centro y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. Cada división de la circunferencia se llama también *grados* (p.23)	“Sistema circular. En este sistema se usa como unidad el ángulo llamado *radián”* (p.23). “Un radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia” (p.24). En la **figura 7** está la representación de un radián.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	
Grados	
Registro Numérico	**Registro Geométrico**
“Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos para estas unidades son: Grado ° Minuto ‘ Segundo “”. (p. 23)	 **Figura 6.** Representación de ángulos. (p.23)

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN	
Radianes	
Registro Numérico	**Registro Geométrico**
“Como la longitud de la circunferencia es 2π radios, resulta que un ángulo de $360°$ equivale a 2π radianes, es decir: 6.28 radianes, dándole a π el valor de 3.14. Un radián equivale a $57°18'$ (se obtiene dividiendo $360°$ entre 2π” (p.24). “Si representamos por S la medida de un ángulo en grados sexagesimales y por R la medida del mismo ángulo en radianes, podemos establecer la siguiente proporción: $\frac{S}{360°} = \frac{R}{2\pi}; \quad \pi = 3.14$ Simplificando: $\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi}$ “ (p. 24)	 **Figura 7.** Representación de radián (p. 23)

PROCEDIMIENTOS	
Grados	
Algorítmicos	**Heurísticos**
Si un ángulo ABC mide 38 grados 15 minutos 12 segundos se escribe: $38°15'12"$	No tiene.

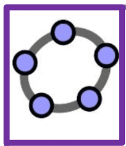
<table>
<tr><th colspan="2">PROCEDIMIENTOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Radianes</th></tr>
<tr><th>Algorítmicos</th><th>Heurísticos</th></tr>
<tr><td>Expresar en radianes un ángulo de 90°:
$$\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi};$$
$$\frac{90}{180}=\frac{R}{\pi};$$
$$\therefore R=\frac{90\pi}{180}=\frac{\pi}{2}$$
Y como $\pi=3.14$, también podemos escribir:
$$R=\frac{3.14}{2}=1.57$$</td><td>No tiene.</td></tr>
</table>

2. Rediseño

Nombre:____

Edad:__________ Sexo:___________ Formación profesional: __________________

B-I



Ponga atención en lo que sucede con los ángulos α y β (véase figura A).

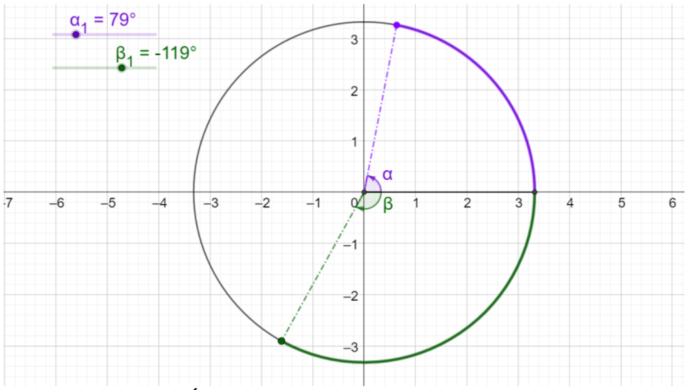
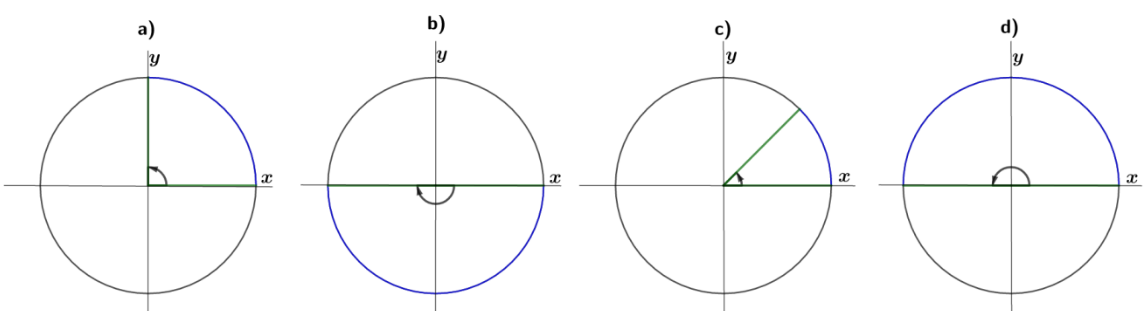
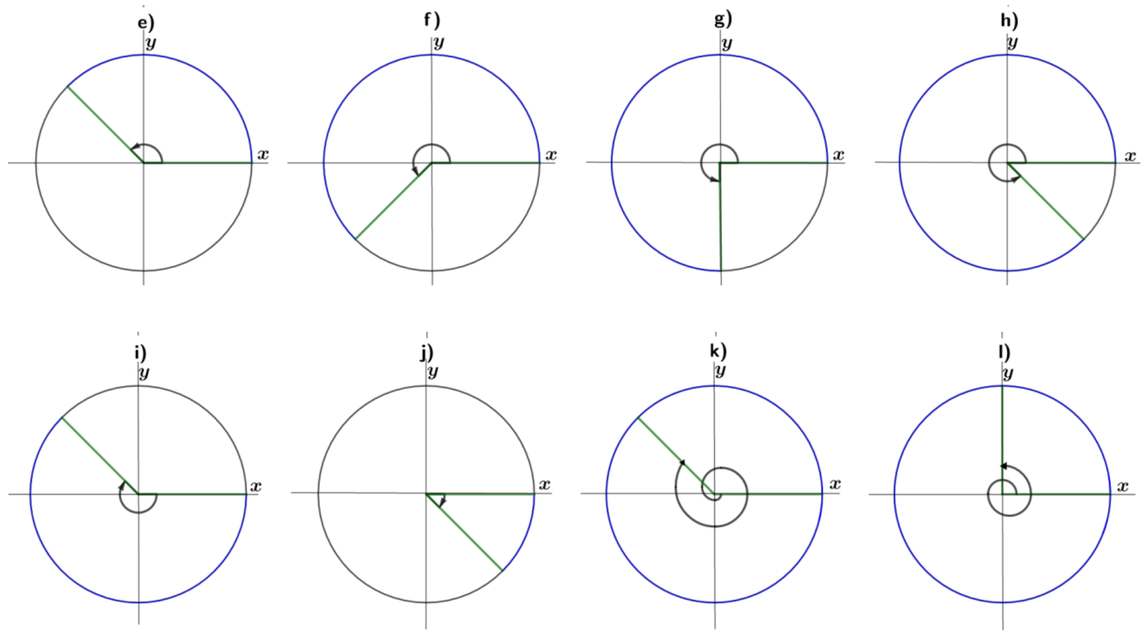


Figura A. Ángulos positivos y negativos

Entonces, si suponemos que el ángulo inicia sobre el eje x, realiza las siguientes ejercicos.

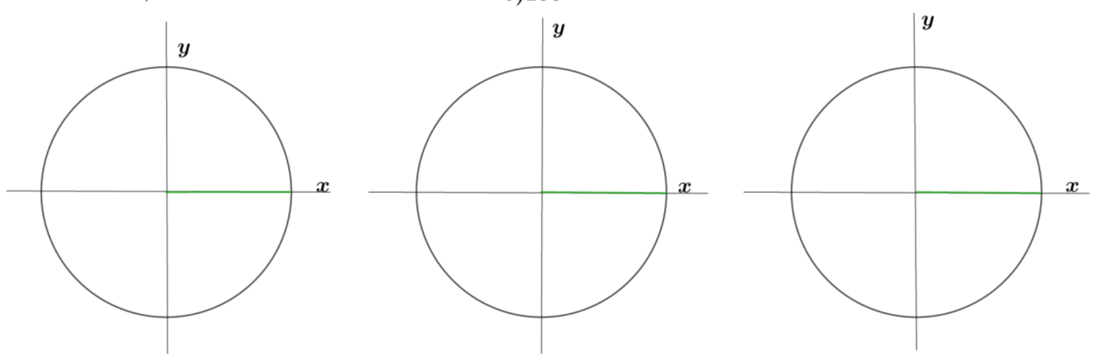
1) Estima el valor de los ángulos que se representan en las siguientes circunferencias. Justifique sus respuestas.



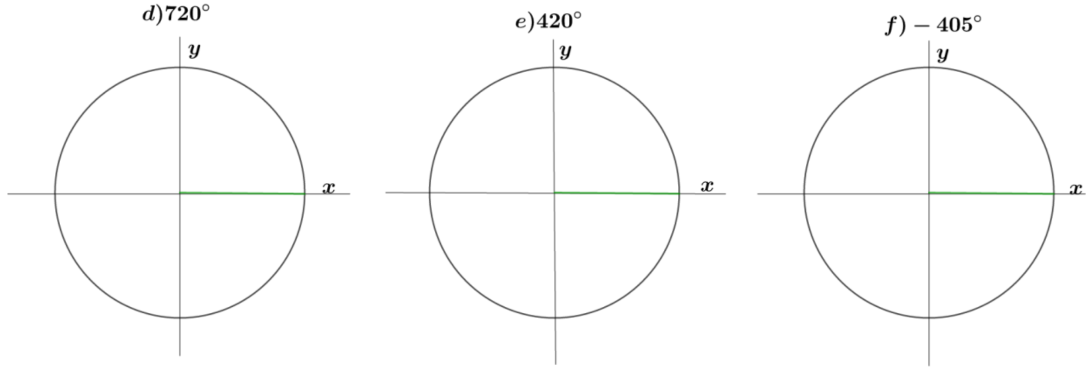


2) En las siguientes circunferencias representa los ángulos que se te piden.

$a)1^\circ$ $b)100^\circ$ $c)36^\circ$

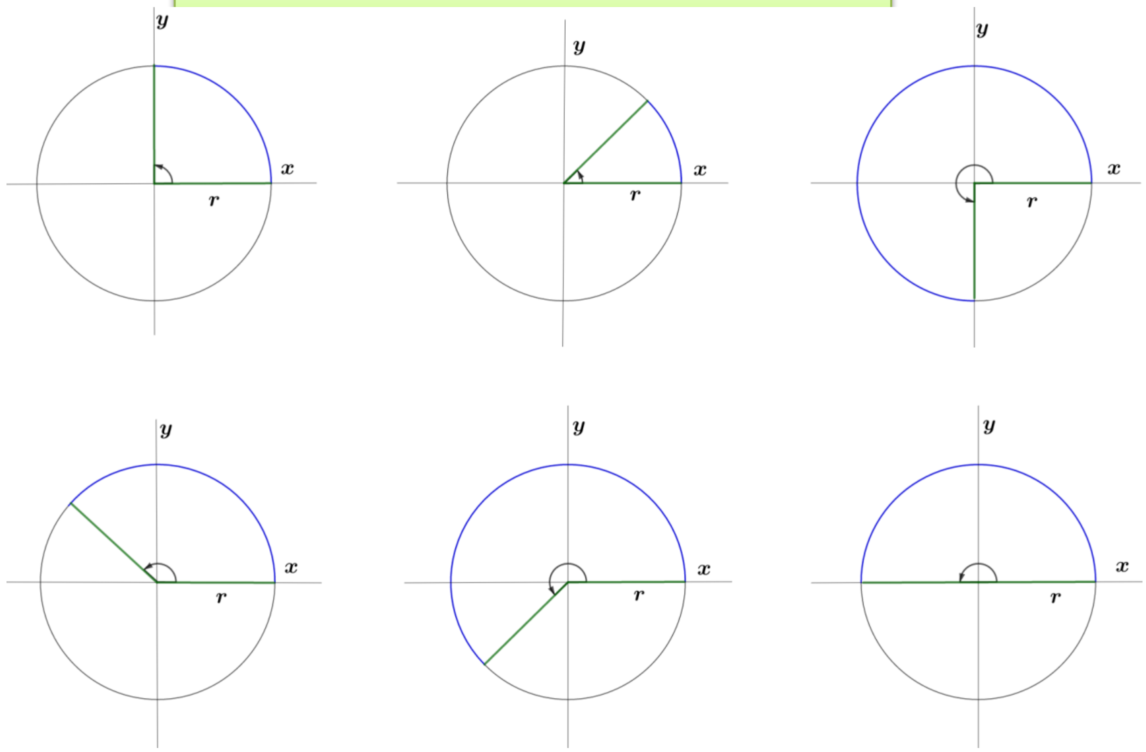


$d)720^\circ$ $e)420^\circ$ $f)-405^\circ$



3) Estima el perímetro coloreado (arco) de las siguientes circunferencias. Justifique sus respuestas.

> 💡 ***Pista:*** *el perímetro de una circunferencia es* $2\pi r$



Ponga atención en el perímetro señalado, el ángulo y los radios de las circunferencias (véase figura B)

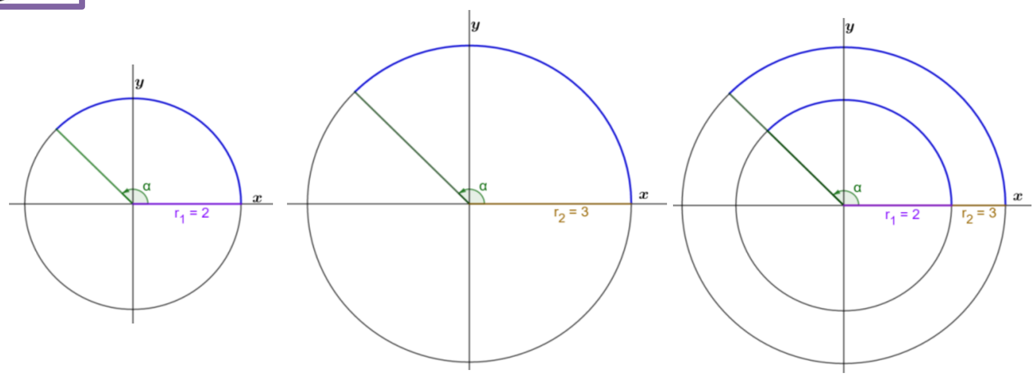
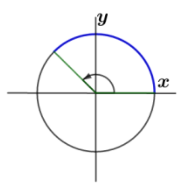


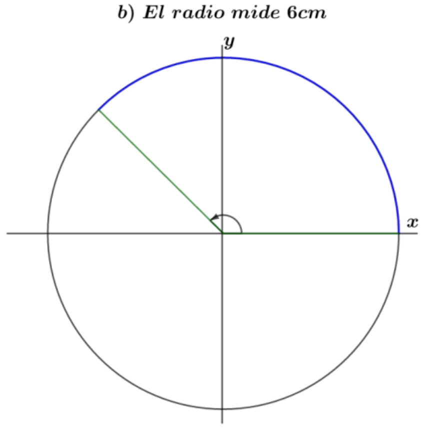
Figura B. Ángulos y arcos

4) Dado el mismo ángulo, calcula **la razón** de la longitud del arco con el radio en las siguientes circunferencias:

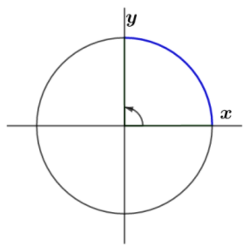
a) El radio mide 2cm



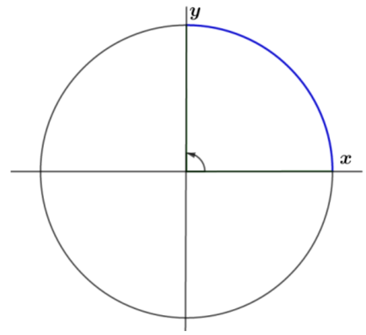
b) El radio mide 6cm



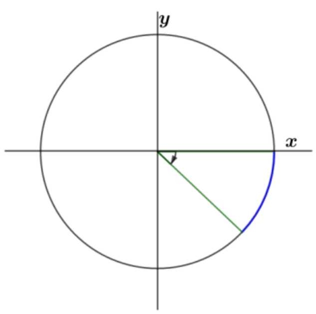
c) El radio mide 3 cm



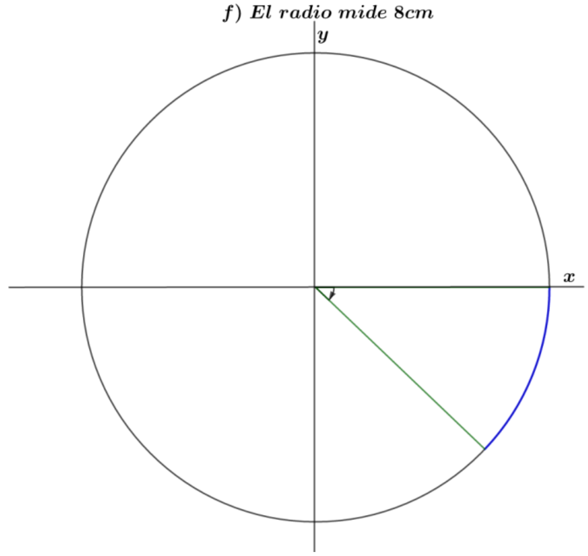
d) El radio mide 5cm



e) El radio mide 4cm



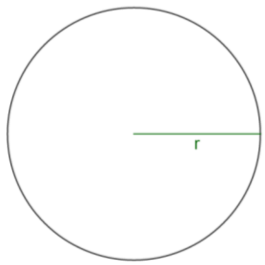
f) El radio mide 8cm



Nombre: ____

B-II

5) Calcula la razón de la longitud de toda la circunferencia y el radio. También estima el ángulo.



Ponga atención lo que sucede con el radio en el arco de la circunferencia (véase figura C).

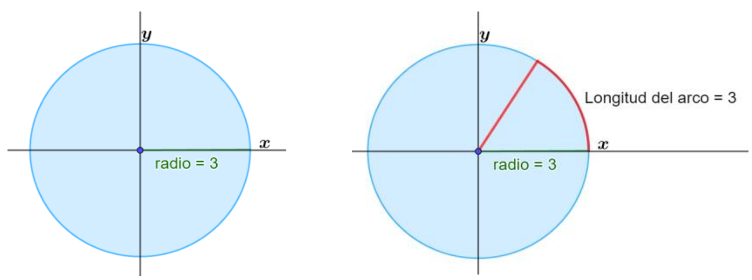
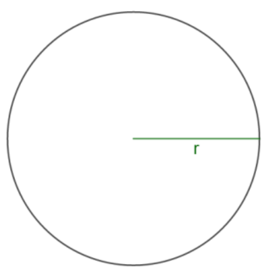


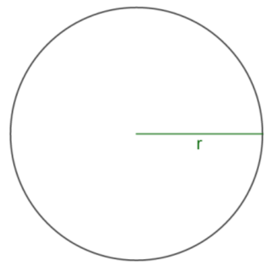
Figura C. Radios en el arco

6) Estima el número de veces que entra el radio en la circunferencia. Expresa tu respuesta en términos de π.

$$\pi = 3.1416$$



7) Representa el ángulo α, para el cual el arco que se forma sea igual al radio dado en la siguiente circunferencia.



Este ángulo limitado por el arco de la circunferencia cuya longitud es igual al radio recibe el nombre de **RADIÁN**, y generalmente se expresa como $\mathbf{1}\ \boldsymbol{rad}$.

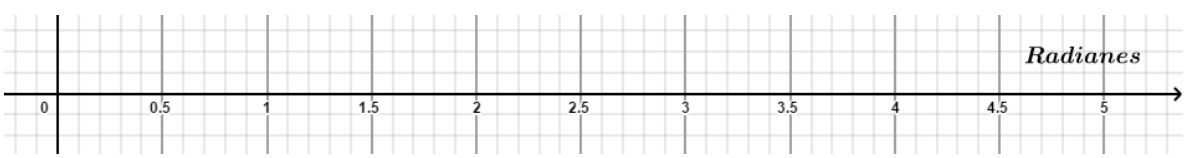
8) ¿Cuántos radianes tiene una circunferencia? Exprésalo en términos de π. Justifica tu respuesta.

9) Expresa en términos de grados el ángulo α del ejercicio 7.

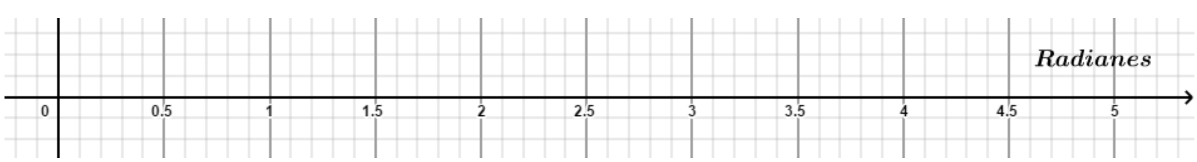
Supongamos que el eje “x” representa a los radianes.

10) Representa las siguientes cantidades sobre el eje “x “.

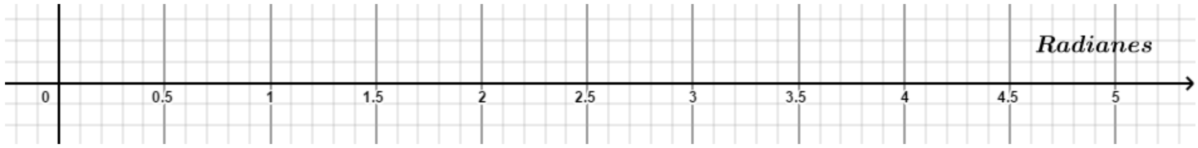
a) π

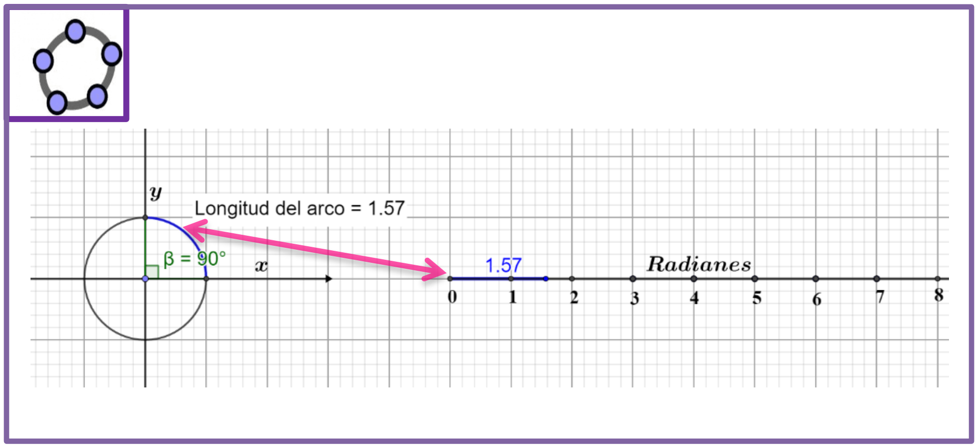


b) $\frac{\pi}{2}$

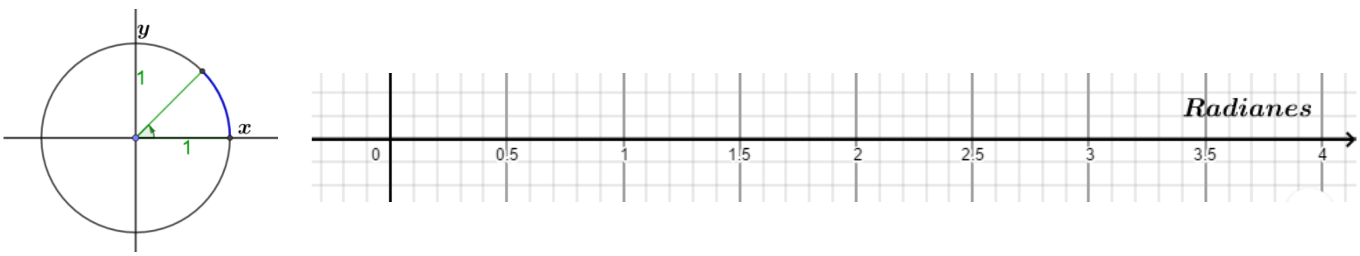


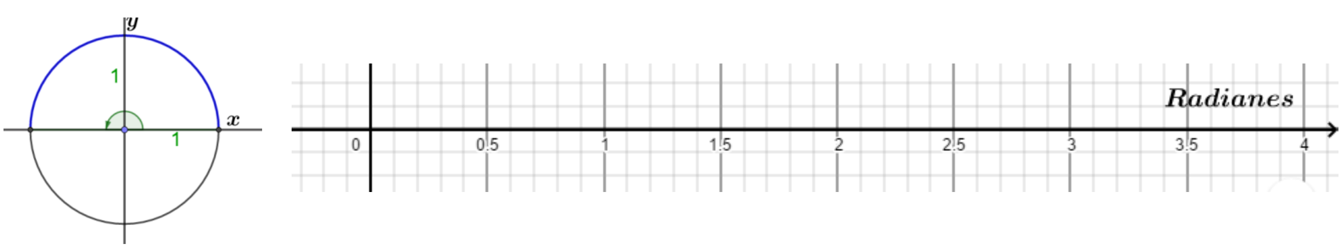
c) $\frac{\pi}{4}$





11) Representa el ángulo que se forma en las siguientes circunferencias unitarias:





Nombre: ____

B-III

Ponga atención en el ángulo formado en el círculo unitario, y en el eje "x" que representa los radianes (véase figura E).

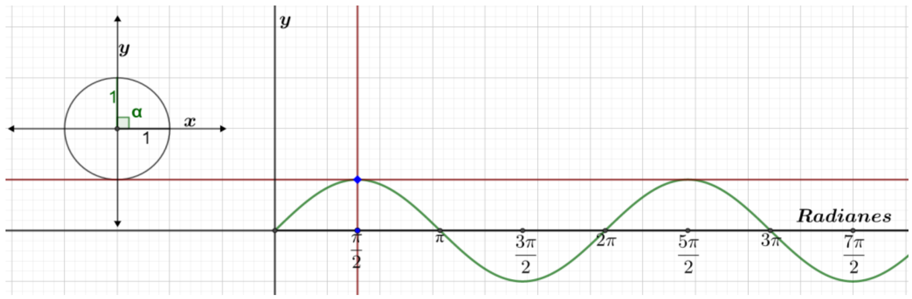
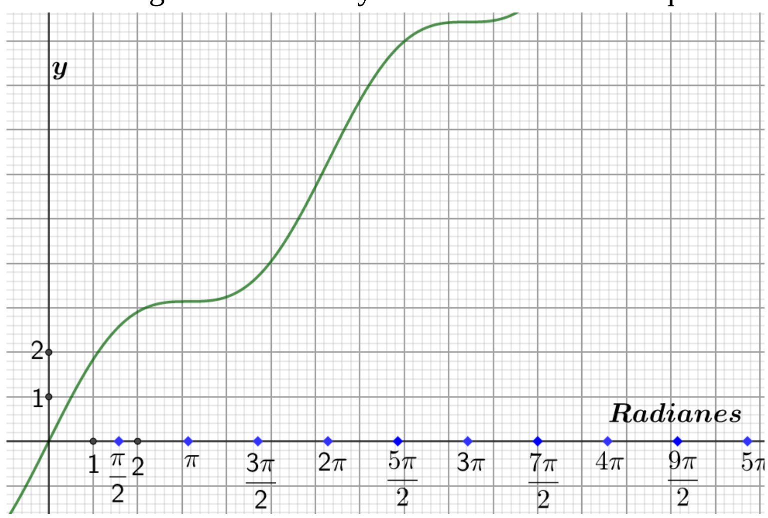


Figura E. Círculo unitario y función trigonométrica.

12) Considera la siguiente función y encuentra los valores que faltan en la tabla siguiente:



Valor de x en grados	**Valor de x en radianes**	**Valor de y**
	$\mathbf{1}\ \boldsymbol{rad}$	
1º		
	$\boldsymbol{\frac{\pi}{180}}$	
	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	
90º		
180º		
	$\boldsymbol{\pi}$	

Ponga atención en el ángulo que forman las manecillas de reloj al marcar la hora (véase figura F)

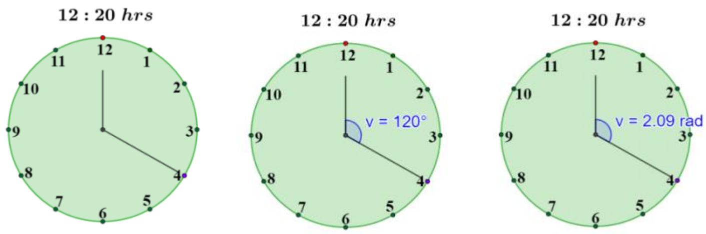


Figura F. Reloj y ángulos que forman las horas.

13) Expresa en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando marcan las: